UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ANDRE CORRÊA

PROBABILIDADE E TRANSFORMADA-$\mathcal{Z}$: APLICAÇÕES EM UM CONTEXTO DE JOGOS DE AZAR

CURITIBA

2021

ANDRE CORRÊA

PROBABILIDADE E TRANSFORMADA-$\mathcal{Z}$: APLICAÇÕES EM UM CONTEXTO DE JOGOS DE AZAR

Probability and Z-Transforms: Applications in the context of a gambling game

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luis Torrejón Matos

CURITIBA

2021

ANDRE CORRÊA

PROBABILIDADE E TRANSFORMADA-$\mathscr{Z}$: APLICAÇÕES EM UM CONTEXTO DE JOGOS DE AZAR

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 02/dezembro/2021

Jorge Luis Torrejón Matos
Titulação: Mestrado, Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

George Arruda Gomm
Titulação: Mestrado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Fábio Antonio Dorini
Titulação: Mestrado, Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2021

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Letícia, por todo o apoio e incentivo nos momentos que precisei.

Ao professor Jorge, por toda a ajuda, ensinamentos, conselhos e companheirismo.

Aos meus amigos, João, Natália, Eduardo, Pedro e Igor que me acompanharam e ajudaram por toda minha trajetória acadêmica.

Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,
não a posse mas o ato de chegar lá, que
concede a maior satisfação.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
Matemático, astrônomo e físico alemão.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo utilizar-se de teoremas, proposições, exemplos e demais resultados dos estudos de probabilidade, equações de diferenças e transformada $\mathcal{Z}$, para resolver um problema envolvendo partidas em um jogo de azar. Através de vários dos conceitos estudados, o problema proposto foi analisado e solucionado. Também foi feito uma simulação do problema em questão, utilizando o software Jupyter Notebook, através de linguagem Python, o que possibilitou analisar a solução obtida de forma mais didática, observando-se o comportamento da função solução no decorrer das partidas.

Palavras-chave: probabilidade; transformada z; equações de diferenças.

ABSTRACT

This work aims to use theorems, propositions, examples and other results from the studies of probability, difference equations and z-transforms, to solve a problem involving gambling games. Through many of the studied concepts, the problem was analyzed and solved. A simulation of the problem at hand was also made, using the Jupyter Notebook software, through the Python coding language, which enabled analysis of the solution in a more didactic way, observing the behaviour of the solution function throughout the matches.

Keywords: probability; z-transforms; difference equations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Todos os dias nos deparamos com questões, por mais simples e imperceptíveis que sejam, de caráter probabilístico. Diversos fenômenos aleatórios, que ocorrem constantemente, nos levam a questionar, de acordo com as possibilidades, se uma ou outra escolha é a mais acertada. Ao sair de casa em uma tarde ensolarada, talvez você não consideraria levar um guarda-chuva consigo. Mas se tivesse visto na previsão do tempo que a probabilidade de chuva seria de 90% naquela tarde, provavelmente isso influenciaria a sua decisão.

A relevância destas questões começou a ser discutida principalmente nos séculos XVI e XVII. Nesta época, os jogos de azar, muito populares no momento, serviram de gatilho para o estudo da probabilidade (SILVA, 2013). E esta ciência, surgida em meio a jogos de azar, com o tempo tornou-se o mais importante objeto de conhecimento humano (ROSS, 2010).

Grandes nomes da matemática contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, dentre eles estão Jerónimo Cardano (1501-1576), Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662), Christiaan Huygens (1629-1695), Thomas Bayes (1701-1776), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987). Essa Teoria servirá de base para as discussões presentes neste trabalho.

Os jogos de azar podem servir de gatilho para o estudo de probabilidades em diversos contextos. No Ensino Médio, usualmente são apresentados problemas envolvendo lançamentos de dados, de moedas, jogos de cartas, entre outros. Da mesma forma, este trabalho pretende utilizar-se de um problema, envolvendo jogos de azar, como ponto de partida para os estudos.

Será considerado o seguinte problema: *Dois jogadores disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se o jogador A iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida?*

Ao determinar a solução do problema, será analisado se os resultados das partidas convergem ou divergem e, caso os valores das probabilidades dados no problema fossem diferentes, que tipo de solução seria obtida. Estas analises serão feitas não apenas algebricamente, como também através de simulações feitas no software Jupyter Notebook.

Apesar de parecer um simples problema de probabilidade condicional, será nescessário recorrer à outras ferramentas para solucioná-lo. Para esse fim será empregado o uso da Transformada $\mathcal{Z}$, uma transformação linear que converte uma sequência numérica em uma função de variável complexa 'z'. Será exposto um método para encontrar a solução geral de uma recorrência (também chamada de equação de diferenças), utilizando-se esta transformada. "As recorrências mostram-se como uma ferramenta para auxiliar as resoluções de problemas nas quais o raciocínio recursivo se faz presente, pois além de tornar mais simples a resolução de alguns problemas matemáticos, também pode-se encontrar soluções gerais para os mesmos"(VENTURI, 2016).

Com o intuito de auxiliar o leitor a se familiarizar com os termos utilizados, as proposições, os teoremas e demais resultados, o primeiro capítulo do trabalho traz as definições e principais propriedades dos conceitos que serão abordados para a solução do problema. Porém, mesmo definindo os principais objetos usados para este estudo, este trabalho exije alguns pré requisitos, como conhecimentos básicos de funções, limites, séries, teoria de conjuntos, entre outros.

O capítulo subsequente foi destinado à construção da solução do problema proposto, descrevendo todas as propriedades e teoremas utilizados. Já o terceiro e último capítulo, traz os resultados obtidos com as simulações bem como a análise desses resultados.

As demonstrações dos principais resultados usados no corpo do trabalho estarão disponíveis no apêndice A, enquanto as demonstrações dos demais resultados serão indicadas em outras leituras, caso haja interesse do leitor.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Solucionar o problema proposto para demonstrar possíveis aplicações da Transformada $\mathcal{Z}$ em resoluções de problemas que envolvem probabilidades condicionais.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Definir e exemplificar os conceitos associados a Probabilidade.
- Definir e exemplificar os conceitos associados a Transformada $\mathcal{Z}$.
- Definir e exemplificar Equações de Diferenças.
- Utilizar os conceitos de probabilidade para deduzir uma equação de diferenças que seja solução do problema proposto.

- Utilizar os conceitos de Transformada $\mathcal{Z}$ para deduzir uma função que seja solução do problema proposto a partir da equação de diferenças.
- Generalizar o problema inicial e determinar a solução para o caso geral.
- Realizar simulações no Jupyter Notebook e comparar os resultados com aqueles obtidos anatiticamente.

2 CONCEITOS

Para se familiarizar com as ferramentas que serão utilizadas na resolução do problema, neste capítulo serão introduzidos os conceitos de probabilidade, transformada $\mathcal{Z}$ e equações de diferenças.

2.1 Probabilidade

Em uma grande quantidade de experimentos, em que se há n resultados possíveis, nosso conhecimento prático nos leva a crer que nenhum resultado é mais provável que outro. Nestes experimentos, dizemos que os n resultados são igualmente prováveis (YATES; GOODMAN, 2017). Nestes casos, a probabilidade de ocorrer um determinado resultado é $\frac{1}{n}$.

Porém, nem sempre um experimento realizado possui tais condições. Portanto, é necessário definir a probabilidade de se obter um resultado em um experimento sob quaisquer condições. Para tal, serão consideradas algumas definições prévias.

2.1.1 Espaço Amostral

Suponha que em um determinado experimento não seja possível determinar o resultado com certeza. Porém, apesar de não conhecer o resultado do experimento, admita que o conjunto de todos os resultados possíveis é conhecido. Este conjunto de todos os resultados possíveis é chamado *espaço amostral* (YATES; GOODMAN, 2016), conjunto este que será denotado pela letra S.

Exemplo (2.1.1): Se um experimento consiste no resultado do lançamento de um dado de 6 faces, o conjunto de todos os resultados possíveis é dado por

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

2.1.2 Evento

Todo subconjunto do espaço amostral é chamado de *evento*. Ou seja, um evento é um conjunto formado por resultados possíveis do experimento (YATES; GOODMAN, 2016).

Exemplo (2.1.2): No lançamento de um dado de 6 faces, o conjunto

$$P = \{2,4,6\},$$

é o evento em que se obtém um número par, enquanto o conjunto

$$M = \{1,2,3\},$$

é o evento em que se obtém um número menor que 4.

O conjunto $A \cup B$, é chamado *união* dos eventos A e B. Este, é definido como o conjunto formado por todos os eventos que pertencem à A ou B.

Exemplo (2.1.3): Conforme o exemplo (2.1.2), se $P = \{2,4,6\}$ e $M = \{1,2,3\}$ então

$$P \cup M = \{1,2,3,4,6\}.$$

Para representar a união de mais de dois eventos, $E_1, E_2, E_3, \ldots$, utiliza-se a notação

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Há ainda o conjunto $A \cap B$, ou apenas AB, chamado *interseção* dos eventos A e B. Este, é definido como o conjunto formado pelos eventos que pertencem à A e B simultaneamente.

Exemplo (2.1.4): Tomando os conjuntos P e M dos exemplos anteriores, tem-se que

$$PM = \{2\}.$$

Para representar a interseção de mais de dois eventos, $E_1, E_2, E_3, \ldots$, utiliza-se a notação

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Seja um evento I, dado por $I = \{1,3,5\}$. Visto que $P = \{2,4,6\}$, então o conjunto PI não possui elementos. Neste caso, P e I são ditos *mutuamente exclusivos*. Além disso, o conjunto PI é denominado conjunto vazio, denotado por $\emptyset$.

Dado um evento A, é definido um novo evento A^c, chamado complemento de A. Este evento é o conjunto formado por todos os resultados do espaço amostral que não pertencem à A. Portanto, o evento A ocorre se, e somente se, A^c não ocorre.

Exemplo (2.1.5): Se o espaço amostral é dado por $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, enquanto $P = \{2,4,6\}$, então o complemento de P é dado por

$$P^c = \{1,3,5\}.$$

As operações de união e interseção respeitam certas propriedades, semelhantes às da álgebra. Essas propriedades são:

Comutatividade:

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$AB = BA.$$

Associatividade:

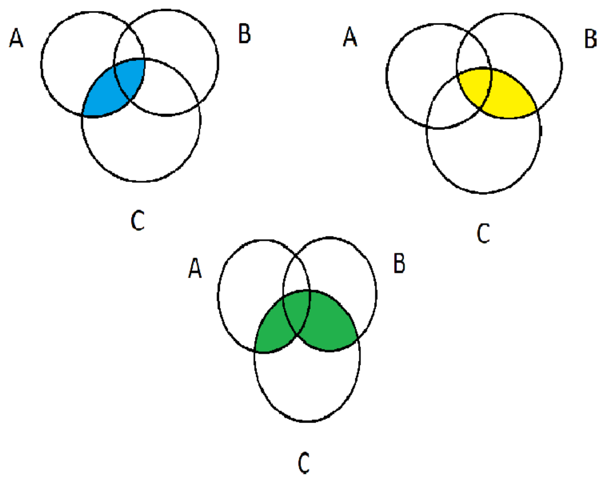
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(AB)C = A(BC).$$

Distributividade:

$$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC);$$
$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$

Essas propriedades podem ser facilmente verificadas, através dos diagramas de Venn. Tomando uma propriedade distributiva como exemplo, tem-se:

Figura 1 – $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$.



Fonte: Autoria Própria.

Nas duas ilustrações superiores, estão representados os conjuntos AC, em azul e BC, em amarelo. A união destes resultará na ilustração inferior, em verde, que está representando o conjunto $(A \cup B)C$.

2.1.3 Definição de Probabilidade

Seja S um espaço amostral e E um evento desse espaço. Uma medida de probabilidade $P(E)$, é uma função que mapeia eventos no espaço amostral à números reais, tais que (YATES; GOODMAN, 2017)

Axioma 1

$$P(E) \geq 0; \tag{1}$$

Axioma 2

$$P(S) = 1; \tag{2}$$

Axioma 3

Para eventos mutuamente exclusivos, E_1, E_2, E_3,... (com $E_iE_j = \emptyset$, quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i). \tag{3}$$

O Axioma 1 afirma que, a probabilidade de ocorrer um evento E é sempre maior ou igual a zero. Pelo Axioma 2, a probabilidade de ocorrer um resultado do espaço amostral, é sempre 1. Por fim, o Axioma 3 afirma que, para eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de ocorrer algum desses eventos, é dada pela soma das suas respectivas probabilidades.

A medição da probabilidade corresponde à ideia de frequência relativa (YATES; GOODMAN, 2017). Em um experimento sequencial, que consiste em repetir n vezes o experimento sob as mesmas condições, sendo $s(E)$ o número de vezes em que o evento E ocorre, então, a frequência relativa de E é a fração $s(E)/n$, e a probabilidade de ocorrer E é dada por:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{s(E)}{n}.$$

Por utilizar conceitos que não são abordados neste trabalho, este resultado não será demonstrado. A demonstração pode ser encontrada no capítulo 10 do livro *Probabilidade e Processos Estocásticos*, de Roy Yates e David Goodman.

Dos 3 axiomas enunciados, seguem alguns resultados diretos:

$$P(\emptyset) = 0. \tag{4}$$

A probabilidade de não ocorrer nenhum evento é nula.

$$P(E^c) = 1 - P(E). \tag{5}$$

A probabilidade de um evento não ocorrer, é igual a 1 menos a probabilidade de que ele ocorra.

$$E \subset F \implies P(E) \leq P(F). \tag{6}$$

Se um evento E está contido em outro evento F, então, a probabilidade de ocorrer E é menor, ou igual (caso sejam o mesmo evento), que a probabilidade de ocorrer F.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF). \tag{7}$$

O Axioma 3 afirma que, a probabilidade da união de eventos disjuntos, é dada pela soma das probabilidades desses eventos. Na proposição (2.7), a ideia é ampliada para dois eventos não necessariamente disjuntos.

As demonstrações das proposições (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7) podem ser encontradas no apêndice A.

Um caso particular, frequentemente encontrado em problemas de probabilidade, é o de espaços amostrais com resultados igualmente prováveis. Suponha o espaço amostral $S = \{E_1, E_2, E_3, ..., E_n\}$, em que $P(E_1) = P(E_2) = ... = P(E_n)$. Neste caso, $P(E_i) = 1/n$, i = 1, 2, 3, ..., n. A partir dessa equação e do Axioma 3, resulta que, para cada evento E,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}, \tag{8}$$

em que $n(E)$ é o número de resultados em E e $n(S)$ é o número de resultados em S. A demonstração desse resultado pode ser encontrada no Apêndice A.

Exemplo (2.1.6): Em uma urna com 5 bolas, sendo duas vermelhas, duas azuis e uma preta, qual a probabilidade de retirar ao acaso uma bola vermelha?

Seja V o evento em que se retira uma bola vermelha. A probabilidade de retirar qualquer uma das bolas é a mesma. Portanto, em um espaço amostral com 5 resultados, o evento desejado possui 2 resultados. Logo $P(V) = 2/5$.

2.1.4 Probabilidades Condicionais

Ao calcular uma probabilidade, caso se disponha de informações parciais a respeito do resultado de um experimento, esta denomina-se *probabilidade condicional*. Dados dois eventos E e F, a probabilidade de que E ocorra, dado que F ocorreu, é dada por

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}. \tag{9}$$

A dedução deste resultado vem do fato de que, se o evento F ocorreu e espera-se que E ocorra, então o resultado esperado está em $E \cap F$. Além disso, como F já ocorreu, o espaço amostral, que anteriormente era S, é então reduzido para F. Portanto, a probabilidade condicional é dada pela probabilidade relativa entre $E \cap F$ e F. Equivalentemente, esta equação pode ser expressa como

$$P(EF) = P(E|F)P(F). \tag{10}$$

Exemplo (2.1.7): Uma urna contém 5 bolas, sendo duas brancas, duas azuis e uma vermelha. Qual a probabilidade de uma pessoa retirar, ao acaso e sem reposição, duas bolas brancas?

Seja B_1 o evento em que se obtém uma bola branca na primeira retirada e B_2 o evento em que se obtém uma bola branca na segunda retirada. Logo,

$$P(B_1B_2) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{20}\right).$$

A generalização da equação (2.10), comumente conhecida como *regra da multiplicação*, é dada por:

$$P(E_1E_2E_3...E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)...P(E_n|E_{n-1}...E_2E_1).$$

Para provar este resultado, basta aplicar a definição de probabilidade condicional a cada uma das probabilidades do lado direito da equação.

Probabilidades condicionais satisfazem todos os três axiomas da probabilidade. A demonstração deste resultado pode ser encontrada no capítulo 3 do livro *"Probabilidade: um curso moderno com aplicações"*, de Sheldon Ross.

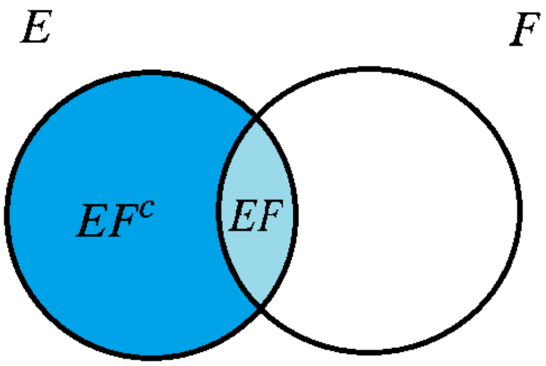
2.1.5 Lei da Probabilidade Total

Dados dois eventos E e F, é possível expressar o evento E da forma

$$E = EF \cup EF^c.$$

Isso se deve pelo fato de que os resultados de E ou estão em E e, ao mesmo tempo em F, ou estão em E, mas não estão em F, ou seja, estão em F^c. Os diagramas de Venn podem ser úteis na compreensão desse resultado:

Figura 2 – $E = EF \cup EF^c$.



Fonte: Autoria Própria.

Os eventos EF e EF^c são mutuamente exclusivos, portanto, pelo Axioma 3

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) \cup P(EF^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c), \end{aligned}$$

logo

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)(1 - P(F)). \tag{11}$$

Essa fórmula é útil para quando há dificuldade em se calcular uma probabilidade diretamente, mas o cálculo se torna simples ao conhecer a probabilidade de ocorrência de outro evento.

Esse raciocínio pode ser estendido para um número maior de eventos. Considere uma série de eventos $F = \{F_1,F_2,F_3,...F_n\}$, com $F_1, F_2,...,F_n$ mutuamente exclusivos entre si, de tal forma que $S = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Neste caso, F é denominado uma partição. Tomando um outro evento E, deste mesmo espaço amostral, E pode ser escrito como: $E = EF_1 \cup EF_2 \cup ... \cup EF_n$, logo

$$P(E) = P(EF_1 \cup EF_2 \cup ... \cup EF_n).$$

Como os eventos de F são mutuamente exclusivos, pode-se aplicar o Axioma 3 e, por fim, a definição de probabilidade condicional, obtendo

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i).$$

Este resultado é conhecido como *lei da probabilidade total*.

Exemplo (2.1.8): Certo estudante fará um exame com questões objetivas. Esse estudante sabe responder corretamente 60% das questões, porém, nas outras 40%, ele chutará uma alternativa aleatória, com 0,2 de probabilidade de acertar. Qual a probabilidade desse estudante responder corretamente a primeira questão?

Seja T o evento em que o estudante acerta a questão, F o evento em que o estudante sabe a resposta e G o evento em que ele não sabe a resposta e, portanto, chuta uma alternativa. Pela lei da probabilidade total, sabe-se que

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|F)P(F) + P(T|G)P(G) \\ &= (1)(0{,}6) + (0{,}2)(0{,}4) \\ &= 0{,}6 + 0{,}08 = 0{,}68. \end{aligned}$$

2.1.6 Teorema de Bayes

Outro resultado usado para calcular probabilidades condicionais, é o *teorema de Bayes*. Através dele é possível calcular $P(E|F)$, a partir de uma informação a priori sobre $P(F|E)$. O teorema de Bayes é uma consequência simples da definição da probabilidade condicional. Ele é nomeado por ser extremamente útil nas inferências sobre fenômenos que não podem ser observados diretamente (YATES; GOODMAN, 2017).

Teorema (Bayes):

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}.$$

A demonstração do teorema pode ser encontrada no apêndice A.

Exemplo (2.1.9): Um exame de sangue feito por um laboratório, tem eficiência de 95% na detecção de certa doença, quando ela está de fato presente. Entretanto, o teste também leva a um resultado "falso positivo"em 1 % das pessoas saudáveis testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,01, o teste indicará que ele ou ela tem a doença). Se 0,5% da população realmente têm a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença, dado que o resultado do teste deu positivo?

Seja D o evento em que a pessoa possui a doença e T o evento em que o resultado do teste da positivo. Pela lei da probabilidade total sabe-se que

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c) \\ &= (0{,}95)(0{,}005) + (0{,}01)(0{,}995) = 0{,}0147. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(D|T) &= \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)} \\ &= \frac{(0{,}95)(0{,}005)}{0{,}0147} \approx 0{,}323. \end{aligned}$$

Nos tópicos 2.1.7 a 2.1.10 a seguir, serão abordados alguns conceitos específicos que não se aplicarão à resolução do problema, mas que serão úteis na elaboração do algoritmo para as simulações.

2.1.7 Variáveis Aleatórias

Supondo que para cada ponto de um espaço amostral seja atribuído um número. Dessa forma, é definida uma função neste espaço amostral. "Esta função é chamada de *variável aleatória* (ou variável estocástica) ou mais precisamente uma *função aleatória* (função estocástica)"(SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2015). "Em geral, a variável aleatória tem um significado específico que pode ser físico, geométrico ou outro"(SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2015).

Exemplo (2.1.10): Suponha que uma moeda seja lançada duas vezes. Logo, o espaço amostral é $S = \{CC, CK, KC, KK\}$, em que C representa cara e K representa coroa. Seja X o número de caras obtidas nesses lançamentos. Para cada ponto de S, podemos associar um valor para X.

Quadro 1 – Variáveis Aleatórias

Ponto Amostral	CC	CK	KC	KK
X	2	1	1	0

Fonte: Autoria Própria.

Uma variável aleatória pode ser tanto discreta, quando assume um número finito ou um número infinito contável de valores, quanto contínua, quando assume um número infinito não contável de valores.

2.1.8 Distribuição de Probabilidades

Considere X uma variável aleatória discreta. Suponha também que os valores possíveis que ela pode assumir são dados por x_1, x_2,x_3,..., dispostos em alguma ordem. Estes valores são assumidos com probabilidades dadas por:

$$P(X = x_k) = f(x_k), k = 1,2,3,...$$

A *função de probabilidade* ou ainda *distribuição de probabilidade* é dada por:

$$P(X = x) = f(x).$$

Uma função é dita função de probabilidade, se cumprir com os seguintes requisitos:

$$f(x) \geq 0;$$
$$\sum_{x} f(x) = 1,$$

para todos os possíveis valores de x.

Exemplo (2.1.11): Suponha que em uma urna há uma bola branca, uma bola preta e uma bola azul. Ao retirar 2 bolas simultaneamente e ao acaso da urna, o espaço amostral é dado por $S = \{PB, PA, AB\}$. Determine a função de probabilidade do evento em que se retira uma bola azul da urna.

$$P(PB) = P(PA) = P(AB) = \frac{1}{3};$$
$$P(X = 0) = P(PB) = \frac{1}{3};$$
$$P(X = 1) = P(PA) + P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Quadro 2 – Função de Probabilidade

x	0	1
$f(x)$	1/3	2/3

Fonte: Autoria Própria.

2.1.9 Distribuição de Bernoulli

Na prática, muitos experimentos admitem apenas 2 resultados. Estes resultados podem ser classificados genericamente como sucesso e fracasso. Estes tipos de experimento rercebem o nome de *ensaios de Bernoulli*. Uma variável aleatória de Bernoulli pode assumir dois valores, 1 para sucesso, e 0 para fracasso. Se *p* é a probabilidade de sucesso e *1-p* é a probabilidade de fracasso, então a função de probabilidade de Benoulli é dada por:

Quadro 3 – Função de Probabilidade Bernoulli

x	0	1
$f(x)$	1-p	p

Fonte: Autoria Própria.

Sucessivos ensaios de Bernoulli, independentes e com mesma probabilidade de sucesso, são são ditos uma *distribuição binomial*.

2.1.10 Distribuiução Uniforme

Uma variável aleatória X é dita ser *uniformemente distribuída* em $a \leq x \leq b$, se sua função de densidade for

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 0 \end{cases}$$

e sua distribuição é dita uniforme (SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2015).

Sua função de distribuição é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{x-b}, a \leq x < b \\ 1, x \geq b \end{cases}$$

2.2 Transformada $\mathcal{Z}$

Uma das principais ferramentas que será usada na resolução do problema, no próximo capítulo, é a *Transformada* $\mathcal{Z}$. "A Transformada $\mathcal{Z}$ é um poderoso método para resolver equações de diferenças e, em geral, para representar sistemas discretos (POULARIKAS, 2010). "A transformada $\mathcal{Z}$ define como construir uma função a partir de uma sequência"(VENTURI, 2016). Esta transformada, converte uma sequência numérica x_n em uma função de variável complexa $X(z)$. Será utilizado também uma uma segunda notação $\mathcal{Z}(x_n)$, para se referir à esta função.

A transformada $\mathcal{Z}$ de uma sequência $x_n = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_n\} &= X(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + ... \end{aligned} \tag{12}$$

O somatório (2.12) é dito uma série de números complexos.

É importante destacar que, para que a sequência x_n admita transformada $\mathcal{Z}$, é necessário que a série (2.12) seja convergente para pelo menos um complexo z, o que define um domínio não vazio (PROBST; SáNCHEZ; VENTURI, 2017).

Uma série é dita *absolutamente convergente* se a série dos módulos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| + ...$$

é convergente (GUIDORIZZI, 2002).

Lema (2.1): Toda a série absolutamente convergente, é convergente.

Para verificar em quais condições a transformada $\mathcal{Z}$ converge, será considerado o exemplo de uma série de soma geométrica. Tomando z complexo e a sequência de potências de z $(x_n = z^n)$, a série geométrica f_n é definida por:

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + ... + z^n.$$

Tomando $r = |z|$, a série de módulos s_n é dada por

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + ... + r^n.$$

Ao multiplicar esta série por r, obtêm-se

$$r \cdot s_n = r\sum_{k=0}^{n} r^k = r + r^2 + ... + r^n + r^{n+1},$$

subtraindo este resultado de s_n

$$s_n - r \cdot s_n = 1 - r^{n+1},$$

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1},$$

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \tag{13}$$

Ao tomar r = |z| < 1, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

Portanto, a série converge para 1/(1-r).

Como a série f_n é absolutamente convergente, pelo Lema (2.1), ela é convergente.

Ao tomar r = |z| > 1, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \infty.$$

Logo, a série diverge.

Obtemos analogamente que $f_n = (1-z^{n+1})/(1-r)$. Para verificar o valor para o qual esta função converge, será considerado a forma polar do complexo z, de argumento θ.

$$\begin{aligned} z &= |z|(cos(\theta) + isen(\theta)) \\ &= r(cos(\theta) + isen(\theta)). \end{aligned}$$

Da fórmula de Euler, sabe-se que

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta).$$

Logo,

$$z = re^{i\theta}.$$

Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

com $e^{in\theta} = cos(n\theta) + isen(n\theta)$.
Portanto, sabe-se que $|e^{in\theta}| = \sqrt{cos^2(n\theta) + sen^2(n\theta)} = 1$. Ou seja, $e^{in\theta}$ é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema (2.2): Sejam f e g duas funções, tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,$$

e g é limitada. Então, existe

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x),$$

e este limite é zero.

Pelo Lema (2.2), conclui-se que, para todo $r < 1$

$$\lim_{n \to \infty} z^n = \lim_{n \to \infty} r^n \cdot e^{in\theta} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

E para todo $r > 1$, este limite não existe.

Serão considerados alguns exemplos de sequências cujas transformadas $\mathcal{Z}$ são dadas por séries geométricas.

Exemplo (2.2.1): Seja a sequência $x_n = \{1, 1, 1, 1,...\}$. Sua transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1(z^{-n}) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ...$$

Essa é uma série geométrica cuja razão é $1/z$. Para que a série seja convergente, é necessário que o módulo da razão seja menor que 1, como visto anteriormente. Portanto, se $|1/z| < 1$, ou equivalentemente $|z| > 1$, a série converge para

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Nesta forma, fica mais evidente que se trata de uma função de variável complexa z. Por isso, a notação $X(z) = z/(z - 1)$ passa a ser utilizada.

Exemplo (2.2.2): Seja a sequência $x_n = a^n$, ou seja, a sequência $x_n = \{1, a, a^2, a^3, ...\}$, sua transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + ...$$

Essa é uma série geométrica de razão a/z. Logo, sua transformada $\mathcal{Z}$ existe para $|a/z| < 1$, ou ainda $|z| > |a|$. Neste caso, a série converge para

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}.$$

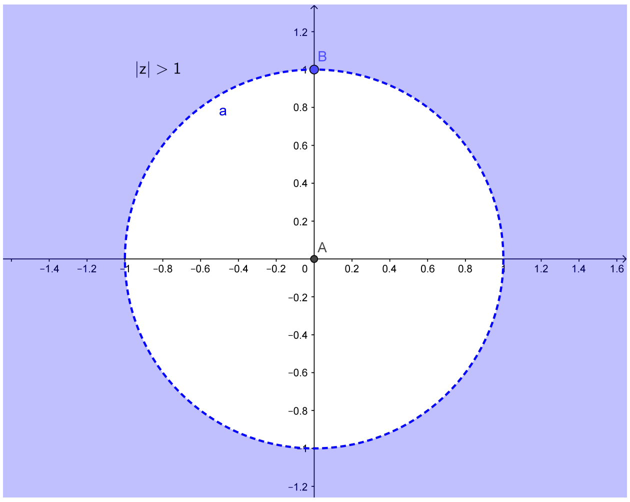
Então, $X(z) = z/(z - a)$.

2.2.1 Região de Convergência

Nos exemplos anteriores, foi observado que a transformada $\mathcal{Z}$ não está definida para qualquer complexo z, apenas para um z tal que $|z| > R$. Esta expressão representa uma região do plano complexo e é denominada *região de convergência*.

A região de convergência do exemplo (2.2.1) está ilustrada na figura 3.

Figura 3 – Região de Convergência.



Fonte: Autoria Própria.

2.2.2 Propriedades

Dentre as propriedades da transformada $\mathcal{Z}$, serão destacadas as que serão usadas na resolução do problema no próximo capítulo. São elas:

1. Linearidade: Sejam a e b números complexos dados, x_n e y_n sequências, e $X(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n, para $|z| > R_1$ e $Y(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de y_n, para $|z| > R_2$. Então
$$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} = aX(z) + bY(z).$$
para $|z| >$ máx$\{R_1,R_2\}$.

2. Diferenciação: Se a transformada $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ existe para $|z| > R$, então a transformada $\mathcal{Z}\{nx_n\}$ também existe para $|z| > R$ e tem-se
$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z).$$

3. Similaridade: Seja $a \in C, a \neq 0$ e $X(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n, para $|z| > R$. Tem-se que
$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\} = X\left(\frac{z}{a}\right),$$
para $|z| \ > |a|R$.

4. Translação: Seja $X(z)$ a trasformada $\mathcal{Z}$ de x_n, para $|z| > R$. Então:

   - Translação para direita
   $$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k}X(z),$$
   para $|z| > R$ e $k \in \mathbb{N}$
   - Translação para esquerda
   $$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n},$$
   para $|z| > R$ e $k \in \mathbb{N}$

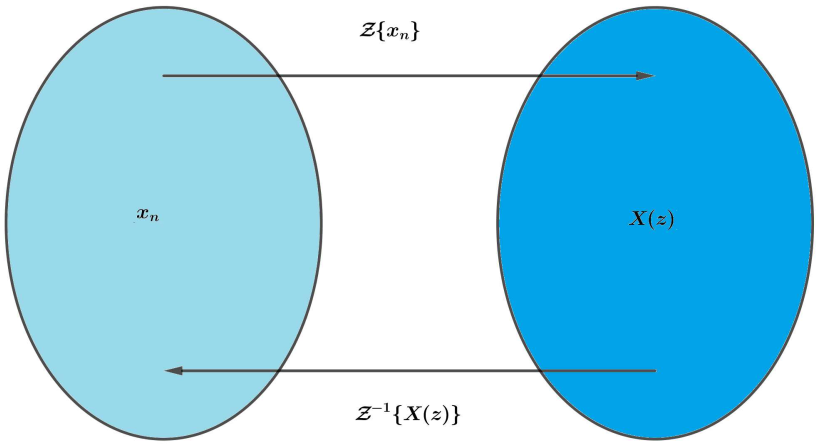
As demonstrações destas propriedades, podem ser encontradas no apêndice A.

2.2.3 Transformada $\mathcal{Z}$ Inversa

Dada uma função de variável complexa $X(z)$, caso seja possível determinar uma sequência x_n tal que $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$, então esta sequência é chamada *transformada $\mathcal{Z}$ inversa de X(z)* e é denotada por $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

A figura 4 ilustra a definição da transformada $\mathcal{Z}$ e sua inversa.

Figura 4 – Transformada $\mathcal{Z}$ e sua inversa



Fonte: Autoria Própria.

Para determinar a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de uma função, serão apresentados 4 diferentes métodos:

1. Série de Potências

   Este método tem por objetivo expandir $X(z)$ em uma série de potências de z^{-1}, para obter uma expressão da forma

$$X(z) = \sum_{0}^{\infty} x_n z^{-n}, \tag{14}$$

   com $|z| > R$. Dessa forma, a sequência de coeficientes x_n determina a transformada $\mathcal{Z}$ inversa.

   Exemplo (2.2.3): Seja $X(z) = z(z+1)/(z-1)^2$, determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z)$.

   Ao dividir o polinômio $z(z+1) = z^2 + z$ por $(z-1)^2 = z^2 - 2z + 1$, obtém-se quociente 1 e resto $3z-1$. Normalmente o processo encerra-se aqui, porém, é possível continuar o processo gerando potências de z^{-1} no quociente para eliminar termos do resto. Neste exemplo, ao somar o termo $3z^{-1}$ no quociente, obtém-se um quociente $1 + 3z^{-1}$ e resto $5 - 3z^{-1}$. Por sua vez, é possível eliminar o termo 5 do resto ao somar no quociente o termo $5z^{-2}$. Repetindo esse processo algumas vezes, obtém-se o quociente $1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + ...$

Figura 5 – Série de potências.

$$\begin{array}{l|l}
z^2+z & z^2-2z+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-z^2+2z-1} & 1+3z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+\dots \\
\quad 3z-1 & \\
\quad \underline{-3z+6-3z^{-1}} & \\
\qquad 5-3z^{-1} & \\
\qquad \underline{-5+10z^{-1}-5z^{-2}} & \\
\qquad\quad 7z^{-1}-5z^{-2} & \\
\qquad\quad \underline{-7z^{-1}+14z^{-2}-7z^{-3}} & \\
\qquad\qquad 9z^{-2}-7z^{-3} &
\end{array}$$

Fonte: PROBST et al., 2017.

   A expressão do quociente está da forma (2.13). Portanto, os coeficientes deste polinômio determinam a sequência $x_n = \{1, 2, 5, 7, 9, ...\}$,ou seja, é uma sequência de números ímpares iniciada em 1. Então, x_n pode ser escrita da forma $x_n = 2n + 1$.

   Para verificar se o resultado obtido está correto, basta aplicar a transformada $\mathcal{Z}$ na sequência obtida e comparar com a função $X(z)$.

2. Frações Parciais

   Este método tem por objetivo decompor a função $X(z)$ em uma soma de frações, chamadas *frações parciais*, cuja transformada $\mathcal{Z}$ seja mais facil de se calcular. Geralmente, este método é aplicado em expressões da forma

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

   em que $A(z)$ e $B(z)$ são polinômios em z.

   Exemplo (2.2.4): Seja $X(z) = z^2/(z-a)(z-b)$, onde a e $b \in C$ e $a \neq b$, determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z)$.

   Será considerado inicialmente $X(z)/z$, para facilitar a determinação da decomposição.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-b)}.$$

   Tomando α e $\beta \in R$, então $X(z)$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{\alpha}{(z-a)} + \frac{\beta}{(z-b)} \\ &= \frac{\alpha(z-b) + \beta(z-a)}{(z-a)(z-b)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)z - (b\alpha + a\beta)}{(z-a)(z-b)}. \end{aligned}$$

   Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, conclui-se que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ b\alpha + a\beta = 0 \end{cases}$$

   Ao resolver o sistema, obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-a}{b-a}; \\ \beta &= \frac{b}{b-a}. \end{aligned}$$

   Portanto,

$$X(z) = \left(\frac{-a}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-a}\right) + \left(\frac{b}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-b}\right).$$

Ao aplicar a tranformada $\mathcal{Z}$ inversa e a propriedade de linearidade, tem-se que

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \left(\frac{-a}{b-a}\right)\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right) + \left(\frac{b}{b-a}\right)\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-b}\right).$$

Como $\left(\frac{z}{z-a}\right)$ e $\left(\frac{z}{z-b}\right)$ são transformadas de sequências conhecidas (exemplo 2.2.2), tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} &= \left(\frac{-a}{b-a}\right)a^n + \left(\frac{b}{b-a}\right)b^n \\ &= \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}.\end{aligned}$$

Portanto, a sequência procurada é $x_n = \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$.

Exemplo (2.2.5): Seja $X(z) = z/(z-a)(z-b)$, onde a e $b \in C$ e $a \neq b$, determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z)$.

Fazendo um processo análogo ao do exemplo anterior, obtém-se $\alpha = -1/(b-a)$ e $\beta = 1/(b-a)$. Portanto,

$$X(z) = \left(\frac{-1}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-a}\right) + \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-b}\right),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} &= \left(\frac{-1}{b-a}\right)\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right) + \left(\frac{1}{b-a}\right)\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-b}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{b-a}\right)a^n + \left(\frac{1}{b-a}\right)b^n = \frac{b^n-a^n}{b-a}.\end{aligned}$$

Portanto, a sequência procurada é $x_n = \dfrac{b^n-a^n}{b-a}$.

3. Convolução

A *convolução* de duas sequências, x_n e y_n, é uma nova sequência w_n, denotada por $w_n = x_n * y_n$ e é dada por

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k.$$

A propriedade da convolução pode ser útil no cálculo da transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ de uma função $X(z)$:

Se $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$, para $|z| > R_1$ e $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, para $|z| > R_2$, então $\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} = X(z)Y(z)$, para $|z| >$ máx$\{R_1,R_2\}$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no capítulo 1 do livro *Uma Introdução à Transformada* $\mathcal{Z}$, de Probst, Sánchez e Venturi.

A forma de utilizar este teorema para determinar a transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ de uma função $X(z)$, está exemplificada a seguir:

Exemplo (2.2.6): Seja $X(z) = z^2/(z-1)^3$. Sabendo-se que $\mathcal{Z}\{1\} = z/(z-1)$ e $\mathcal{Z}\{n\} = z/(z-1)^2$, determine a sequência x_n.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^2}{(z-1)^3} \\ &= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \mathcal{Z}\{1\} \cdot \mathcal{Z}\{n\}. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade da convolução:

$$\mathcal{Z}\{1 * n\} = \mathcal{Z}\{1\} \cdot \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Aplicando a definição de convolução:

$$\begin{aligned} 1 * n &= \sum_{k=0}^{n} 1.k \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo (2.2.7): Determine a sequência x_n de $X(z) = z^2/(z-a)(z-b)$.

$$\begin{aligned} X(z) &= \left[\frac{z}{(z-a)}\right]\left[\frac{z}{(z-b)}\right] \\ &= \mathcal{Z}\{a^n\} \cdot \mathcal{Z}\{b^n\} \\ &= \mathcal{Z}\{a^n * b^n\}. \end{aligned}$$

Aplicando a definição:

$$\begin{aligned} a^n * b^n &= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \\ &= a^n \sum_{k=0}^{n} a^{-k} b^k \\ &= a^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k. \end{aligned}$$

Da equação (2.13), segue que

$$\begin{aligned} a^n * b^n &= a^n \left[\frac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)}\right] \\ &= \frac{a^{n+1}}{a}\left[\frac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)}\right] \\ &= \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}. \end{aligned}$$

Exemplo (2.2.8): Determine a sequência x_n de $X(z) = z/(z-a)(z-b)$.

$$X(z) = z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}\right].$$

Do exemplo 2.2.7, tem-se que

$$X(z) = z^{-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\right\}.$$

Aplicando a propriedade da translação, tem-se que

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{a^{n}-b^{n}}{a-b}\right\},$$

pois, dada a sequência

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \\ &= (y_0, y_1, y_2, ...) \\ &= \left(\frac{a^1-b^1}{a-b}, \frac{a^2-b^2}{a-b}, \frac{a^3-b^3}{a-b}, ...\right), \end{aligned}$$

sabe-se que

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= (y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) \\ &= (0, y_0, y_1, y_2, ...) \\ &= \left(0, \frac{a^1-b^1}{a-b}, \frac{a^2-b^2}{a-b}, ...\right) \\ &= \left(\frac{a^0-b^0}{a-b}, \frac{a^1-b^1}{a-b}, \frac{a^2-b^2}{a-b}, ...\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$y_{n-1} = \frac{a^n-b^n}{a-b} = \frac{b^n-a^n}{b-a}.$$

Portanto, a sequência procurada, é dada por

$$x_n = y_{n-1} = \frac{b^n-a^n}{b-a}.$$

4. Resíduos

A fundamentação do *método dos resíduos*, vem de resultados importantes da análise complexa (YATES; GOODMAN, 2017). Alguns destes resultados serão considerados sem demonstração.

Definição (Pólo). Considere uma função $F(z)$, da forma

$$F(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, a_{-m} \neq 0, \tag{15}$$

z_0 é chamado pólo de ordem m da função F.

Em geral, para determinar os pólos de uma função (caso existam), é necessário escrever a função na forma da série de Taylor. Porém, o resultado a seguir pode ser muito útil para determinar os pólos, de uma forma mais simples.

Seja

$$F(z) = \frac{H(z)}{G(z)},$$

onde $H(z)$ e $G(z)$ são funções polinomiais e $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $H(z_0) \neq 0$. Então, z_0 é um pólo de ordem m de $F(z)$ se, e somente se, z_0 é uma raíz de multiplicidade m de $G(z)$.

Portanto, para determinar os pólos da função, basta determinar as raízes de $G(z)$ que não sejam raízes do numerador $H(z)$.

Exemplo (2.2.9): Determine os pólos da função $F(z) = z/z^2 + 1$.

As raízes de $z^2 + 1$ são $z = i$ e $z = -i$, ambas com multiplicidade 1. Como estas não são raízes do numerador, então $z = i$ e $z = -i$ são pólos simples de $F(z)$.

Definição (Resíduo)

Seja

$$F(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, a_{-m} \neq 0.$$

O coeficiente a_{-1} é dito resíduo de $F(z)$ e é denotado por $\underset{z=z_0}{Res}\ F(z)$.

Quando a função possui um pólo simple z_0, o resíduo pode ser obtido com

$$\underset{z=z_0}{Res}\ F(z) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)F(z)]. \tag{16}$$

E quando a função possui pólo duplo z_0, o resíduo pode ser obtido com

$$\underset{z=z_0}{Res}\ F(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2F(z)]. \tag{17}$$

Não será considerado o caso geral para o cálculo de resíduos nos pólos de ordem m. As demonstrações dos resultados (2.15) e (2.16), podem ser encontrados no capítulo 2 do livro *Uma Introdução à Transformada $\mathcal{Z}$*.

Exemplo (2.2.10): Determine os resíduos da função $F(z) = z^2/(z+3)(z-1)^2$.

A função do exemplo possui pólos, -3 e 1, de ordens 1 e 2 respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned}
\underset{z=-3}{Res}\ F(z) &= \lim_{z\to -3}[(z+3)F(z)] \\
&= \lim_{z\to -3}\left[(z+3)\frac{z^2}{(z+3)(z-1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to -3}\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{9}{16}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{z=1}{Res}\ F(z) &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2F(z)] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z^2}{(z+3)(z-1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+3)}\right] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{(z+3)2z - z^2}{(z+3)^2} = \frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

A expressão (2.14), é considerada um caso particular da chamada *série de Laurent* de uma função.

Se X(z) é analítica em $r < |z - z_0| < R$, então X(z) pode ser escrito como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{X(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

e C é qualquer curva simples fechada que separe $|z - z_0| = r$ de $|z - z_0| = R$. A série definida por $X(z)$ e a_n, é chamada série de Laurent de $X(z)$ ao redor de z_0.

Dada uma sequência x_n, pela definição da transformada $\mathcal{Z}$, tem-se que

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}.$$

Ao multiplicar a função $X(z)$ por z^{n-1}, obtém-se um desenvolvimento da série de Laurent de $z^{n-1}X(z) = F(z)$ em torno de $z_0 = 0$. Através do teorema da série de Laurent, é possível calcular o termo x_n como

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz.$$

Para não precisar calcular cada termo da sequência através de uma integral de linha, será necessário aplicar o Teorema do Resíduo, enunciado a seguir.

Se C é uma curva fechada simples orientada positivamente, tal que $X(z)$ é analítica sobre C e no seu interior exceto nos pontos $z_1,...,z_k$, então

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{Res}\, X(z).$$

Portanto, para calcular a transformada $\mathcal{Z}$ inversa basta tomar

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{Res}\, z^{n-1}X(z) = \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{Res}\, F(z).$$

As demonstrações destes resultados podem ser encontradas no livro *"Uma introdução a Transformada $\mathcal{Z}$*, nas páginas 54 à 56.

Exemplo (2.2.11): Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z) = z^2/(z+3)^2$.

Para utilizar o método dos resíduos, calcula-se $z^{n-1}X(z) = F(z)$:

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2}.$$

Esta função possui um pólo de segunda ordem em $z = -3$ para $n \geq 0$, portanto

$$\begin{aligned} x_n &= \underset{z=-3}{Res}\frac{z^{n+1}}{(z+3)^2} \\ &= \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}(z+3)^2\frac{z^{n+1}}{(z+3)^2} \\ &= \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}z^{n+1} \\ &= \lim_{z\to -3}(n+1)z^n \\ &= (n+1)(-3)^n. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{Z}^{-1}X(z) = (n+1)(-3)^n$.

Exemplo (2.2.12): Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z) = z/(z-a)(z-b)$. Tomando $F(z) = z^{n-1}X(z)$, tem-se que

$$F(z) = \frac{z^n}{(z-a)(z-b)}.$$

Esta função possui pólos simples em $z = a$ e em $z = b$, logo

$$\begin{aligned}
x_n &= \underset{z=a}{Res}\frac{z^n}{(z-a)(z-b)} + \underset{z=b}{Res}\frac{z^n}{(z-a)(z-b)} \\
&= \lim_{z\to a}(z-a)\frac{z^n}{(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to b}(z-b)\frac{z^n}{(z-a)(z-b)} \\
&= \lim_{z\to a}\frac{z^n}{z-b} + \lim_{z\to b}\frac{z^n}{z-a} \\
&= \frac{a^n}{a-b} + \frac{b^n}{b-a} = \frac{b^n - a^n}{b-a}.
\end{aligned}$$

2.3 Equações de Diferenças

Uma equação é de natureza recursiva quando é definida em função dela mesma, aplicada a valores anteriores (PINHEIRO; LAZZARIN, 2015). Pode-se dizer tambem que uma *equação de diferenças* é uma equação que descreve uma relação entre os termos de uma sequência de números. Uma sequência é chamada de solução da equação de diferenças, quando os termos da sequência satisfazem a equação (PROBST; SáNCHEZ; VENTURI, 2017).

Exemplo (2.3.1): Mostre que a sequência $x_n = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}$, é solução da equação de diferenças $x_{n+1} = 2x_n$.

A sequência x_n, é dada por

$$x_n = 2^n = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\}.$$

Esta sequência satisfaz a equação de diferenças, pois

$$x_{n+1} = 2^{n+1} = 2.2^n = 2.x_n.$$

Porém, é importante considerar que a solução desta equação não é única. Por exemplo, a sequência $x_n = \{5, 10, 20, 40, 80, ...\}$, também é solução da equação de diferenças. Em geral, quando pretende-se determinar uma solução única, é necessário estabeelecer uma condição incial.

No exemplo anterior, se for determinada a condição inicial $x_0 = 1$, então a sequência $x_n = 2^n = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$, torna-se a única solução possível.

Uma ferramenta útil para determinar a sequência x_n que satisfaz uma equação de diferenças, é a transformada $\mathcal{Z}$."Aplica-se a transformada $\mathcal{Z}$ de ambos os lados da equação, obtendo uma equação algébrica em $X(z)$, com variável z complexa. A partir desta equação em $X(z)$, toma-se a transformada $\mathcal{Z}$ inversa para encontrar x_n em termos de n, variável que pertence ao conjunto dos números naturais" (SERTOZ, 2004).

Esta será a estratégia empregada no próximo capítulo, no qual será considerada a resolução de um problema envolvendo jogos de azar.

3 UM PROBLEMA DE PROBABILIDADE

Com todas as ferramentas necessárias já bem definidas, neste capítulo será construída a solução para o problema a seguir.

Dois jogadores disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se o jogador A iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida?

A princípio, pode parecer uma boa estratégia aplicar o teorema de Bayes para solucionar o problema, visto que deseja-se determinar uma probabilidade, dado uma informação a priori. Porém, a aplicação do teorema de Bayes exije que, caso pretenda-se calcular $P(E|F)$, tenha-se informações sobre $P(F|E)$. O objetivo do problema em questão é calcular P(B vencer n-ésima partida | A iniciou a primeira partida), porém, não são fornecidas informações sobre P(A iniciar a primeira partida | B venceu a n-ésima partida).

Ao fornecer informações sobre a probabilidade de vitória, conhecendo o resultado da partida anterior, o problema cria as ferramentas necessárias para a aplicação da lei da probabilidade total.

Inicialmente, serão escolhidas notações para os elementos que serão considerados na solução:

O espaço amostral, denotado por S, é o conjunto de todos os possíveis resultados.

B_n é o evento formado por todos os possíveis resultados, em que o jogador B vence a n-ésima partida.

A_n é o evento formado por todos os possíveis resultados, em que o jogador A vence a n-ésima partida.

Visto que neste jogo é impossível que ambos os jogadores vençam a mesma partida, é possível concluir que A_n e B_n são eventos mutuamente exclusivos.

Além disso, o conjunto $A_n \cup B_n = S$. Talvez estas afirmações não sejam tão intuitivas, então será considerado um exemplo. Tomando $n = 3$, os conjuntos A_3, B_3 e S_3 estão descritos nas tabelas a seguir. Considere que "A"representa uma vitória do jogador A, que "B"representa uma vitória do jogador B e a ordem com que as letras estão dispostas, representa a ordem dos resultados das partidas ("A, A, B"por exemplo, representa duas vitórias consecutivas do jogador A seguidas de uma vitória do jogador B).

Quadro 4 – A_3 e B_3.

A_3	B_3
B, B, A	B, B, B
B, A, A	B, A, B
A, B, A	A, B, B
A, A, A	A, A, B

Fonte: Autoria Própria.

Quadro 5 – S_3.

S_3
B, B, A
B, B, B
B, A, A
B, A, B
A, B, A
A, B, B
A, A, A
A, A, B

Fonte: Autoria Própria.

Ao observar um exemplo nos quadros 4 e 5, fica mais evidente que o conjunto $A_n \cup B_n$ é igual a S e que $A_n B_n = \varnothing$. Portanto, como A_n e B_n são mutuamente exclusivos e $A_n \cup B_n = S$, tem-se que

$$A_n = {B_n}^c.$$

Portanto, por (2.5), é possível afirmar que

$$P(A_n) = P({B_n}^c) = 1 - P(B_n). \tag{18}$$

Agora, aplicando a lei da probabilidade total

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i).$$

Tomando B_{n-1} e A_{n-1} como sendo os eventos em que, o jogador B vence a (n-1)-ésima partida e o jogador A vence a (n-1)-ésima partida, respectivamente, tem-se que

$$P(B_n) = P(B_n|B_{n-1})P(B_{n-1}) + P(B_n|A_{n-1})P(A_{n-1}). \tag{19}$$

Aplicando na expressão o resultado de (3.1), tem-se

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) + P(B_n|A_{n-1}) \cdot [1 - P(B_{n-1})] \\ &= P(B_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) + P(B_n|A_{n-1}) - P(B_n|A_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) \\ &= [P(B_n|B_{n-1}) - P(B_n|A_{n-1})] \cdot P(B_{n-1}) + P(B_n|A_{n-1}). \end{aligned} \tag{20}$$

Como $P(B_n|B_{n-1})$ e $P(B_n|A_{n-1})$ são dados no enunciado do problema, com os valores de 0,6 e 0,4 respectivamente, então

$$P(B_n) = 0{,}2 \cdot P(B_{n-1}) + 0{,}4.$$

De forma equivalente, pode-se afirmar que

$$P(B_{n+1}) = 0{,}2 \cdot P(B_n) + 0{,}4. \tag{21}$$

A expressão (3.4) pode ser vista como uma equação de diferenças, na qual as probabilidades de vitória, em cada uma das partidas, representam os termos da sequência que satisfaz a equação. Para simplificar esta expressão, será utilizada outra notação equivalente.

Tomando $P(B_{n+1}) = X_{n+1}$ e $P(B_n) = X_n$, a expressão (3.4) pode ser reescrita como

$$X_{n+1} = 0{,}2 \cdot X_n + 0{,}4. \tag{22}$$

Para determinar a solução desta equação de diferenças, serão aplicados os conceitos de transformada $\mathcal{Z}$ abordados no capítulo anterior.

Ao aplicar a transformada $\mathcal{Z}$ nos dois lados da equação, tem-se

$$\mathcal{Z}\{X_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{0{,}2 \cdot X_n + 0{,}4\}.$$

Aplicando a linearidade

$$\mathcal{Z}\{X_{n+1}\} = 0{,}2 \cdot \mathcal{Z}\{X_n\} + 0{,}4 \cdot \mathcal{Z}\{1\}.$$

Do exemplo (2.7.1), sabe-se que $\mathcal{Z}\{1\} = \dfrac{z}{z-1}$. Logo,

$$\mathcal{Z}\{X_{n+1}\} = 0{,}2 \cdot \mathcal{Z}\{X_n\} + 0{,}4 \cdot \frac{z}{z-1}.$$

Fazendo a substituição da notação $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ e aplicando a propriedade da translação para esquerda em x_{n+1}

$$zX(z) - zx_0 = 0{,}2 \cdot X(z) + 0{,}4 \cdot \frac{z}{z-1}. \tag{23}$$

Note que na expressão (3.6), a aparição do termo x_0 pode parecer confusa, pois é um valor que ainda não foi definido. O termo x_0 representa a probabilidade de que o jogador B vença a partida de número 0. Porém, as partidas estão sendo considerados a partir da de número 1.

Neste caso, a partida de número 0 pode ser considerada como um sorteio, feito para definir o jogador que iniciaria a primeira partida. Como o problema afirma que a partida foi iniciada pelo jogador A, então a probabilidade de o jogador B ter vencido o sorteio, é zero. Se a situação fosse diferente, com o jogador B iniciando a primeira partida, então a probabilidade x_0 seria igual à 1.

Portanto, substituindo em (3.6) $x_0 = 0$ e isolando $X(z)$

$$\begin{aligned}
zX(z) &= 0{,}2 \cdot X(z) + 0{,}4 \cdot \frac{z}{z-1} \\
(z - 0{,}2)X(z) &= \frac{0{,}4z}{z-1} \\
X(z) &= \frac{0{,}4z}{(z-1)(z-0{,}2)}.
\end{aligned}$$

Agora que a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência que satisfaz a equação (3.4) foi determinada, basta calcular a transformada $\mathcal{Z}$ inversa, para determinar qual é esta sequência.

Pelo exemplo (2.2.5), tem-se que a sequência x_n é dada por

$$\begin{aligned}
x_n &= 0{,}4 \cdot \frac{1^n - (0{,}2)^n}{1 - 0{,}2} \\
&= 0{,}4 \cdot \frac{1 - (0{,}2)^n}{0{,}8} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (1 - (0{,}2)^n) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0{,}2)^n,
\end{aligned}$$

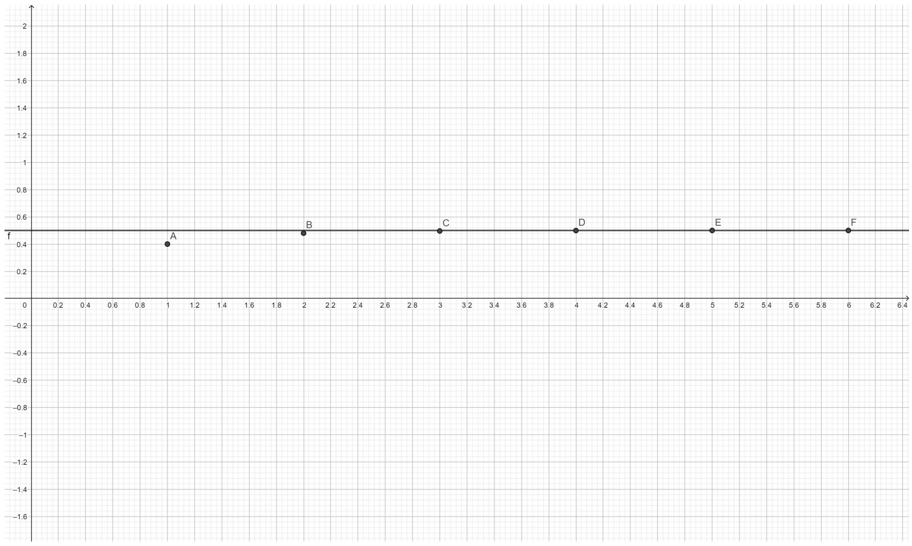
com $n \in \mathbb{N}$.

Esta sequência representa as probabilidades de vitória do jogador B em cada partida. É interessante notar que, no caso em que n tende ao infinito, a probabilidade tende à 50%.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0{,}2)^n = \frac{1}{2}$$

Observando no gráfico a seguir os pontos desta sequência, é fácil notar a convergência.

Figura 6 – Gráfico da sequência x_n



Fonte: Autoria própria..

Será que o mesmo ocorreria caso as probabilidades fornecidas no problema fossem outras? Para responder este questionamento, basta efetuar o mesmo cálculo para o caso geral. A partir da equação (3.2), definimos $P(B_n|B_{n-1}) = \alpha$ e $P(A_n|A_{n-1}) = \beta$, consequentemente $P(B_n|A_{n-1}) = 1 - \beta$. Logo,

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|B_{n-1})P(B_{n-1}) + P(B_n|A_{n-1})P(A_{n-1}) \\ &= \alpha P(B_{n-1}) + (1-\beta)P(A_{n-1}). \end{aligned}$$

Aplicando na expressão o resultado de (3.1), tem-se

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \alpha P(B_{n-1}) + (1-\beta)P(A_{n-1}) \\ &= \alpha P(B_{n-1}) + (1-\beta)[1 - P(B_{n-1})] \\ &= [\alpha - (1-\beta)]P(B_{n-1}) + (1-\beta). \end{aligned}$$

Equivalentemente, $P(B_{n+1}) = [\alpha - (1-\beta)]P(B_n) + (1-\beta)$.
Fazendo a substituição $P(B_{n+1}) = X_{n+1}$ e $P(B_n) = X_n$, tem-se

$$X_{n+1} = [\alpha - (1-\beta)]X_n + (1-\beta).$$

Ao aplicar a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação, tem-se

$$\mathcal{Z}\{X_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{[\alpha - (1-\beta)]X_n + (1-\beta)\}.$$

Aplicando a linearidade,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{X_{n+1}\} &= [\alpha-(1-\beta)]\mathcal{Z}\{X_n\}+(1-\beta)\mathcal{Z}\{1\}\\ &= [\alpha-(1-\beta)]\mathcal{Z}\{X_n\}+(1-\beta)\frac{z}{z-1}.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição na notação $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ e aplicando a propriedade da translação para esquerda em x_{n+1},

$$zX(z)-zx_0 = [\alpha-(1-\beta)]X(z)+(1-\beta)\frac{z}{z-1}.$$

Substituindo $x_0 = 0$ e isolando $X(z)$,

$$\begin{aligned}X(z)[z-(\alpha-(1-\beta))] &= \frac{(1-\beta)z}{z-1}\\ X(z) &= \frac{(1-\beta)z}{(z-1)[z-(\alpha+\beta-1)]}.\end{aligned}$$

Agora, basta calcular a transformada $\mathcal{Z}$ inversa. Do exemplo 2.2.5, tem-se que

$$\begin{aligned}x_n &= (1-\beta)\left[\frac{1^n-(\alpha+\beta-1)^n}{1-(\alpha+\beta-1)}\right]\\ &= (1-\beta)\left[\frac{1-(\alpha+\beta-1)^n}{2-(\alpha+\beta)}\right]\\ &= \left[\frac{(1-\beta)}{2-(\alpha+\beta)}\right]\left[1-(\alpha+\beta-1)^n\right].\end{aligned}$$

Neste jogo, a probabilidade de vitória de um jogador não pode ser 0 ou 1, para que haja sentido jogar, portanto, pode-se afirmar que

$$0<\alpha<1; \tag{24}$$

$$0<\beta<1. \tag{25}$$

Logo,

$$0<\alpha+\beta<2. \tag{26}$$

De (3.8), segue que

$$-1 < \alpha + \beta - 1 < 1.$$

Como $\alpha + \beta - 1$ está no intervalo (-1, 1), tem-se que $\lim_{n\to\infty} (\alpha + \beta - 1)^n = 0$.
Consequentemente

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(1-\beta)}{2-(\alpha+\beta)}\right] [1 - (\alpha + \beta - 1)^n] = \frac{(1-\beta)}{2-(\alpha+\beta)},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1-\beta}{2-(\alpha+\beta)} = \frac{1-\beta}{(1-\alpha)+(1-\beta)}.$$

Portanto, supondo que outros fatores influenciem o resultado da partida, como por exemplo a experiência ouu habilidade do jogador, pode-se afirmar que, para quaisquer valores de α e β e um número suficientemente grande de partidas, o percentual do número de vitórias do jogador irá convergir.

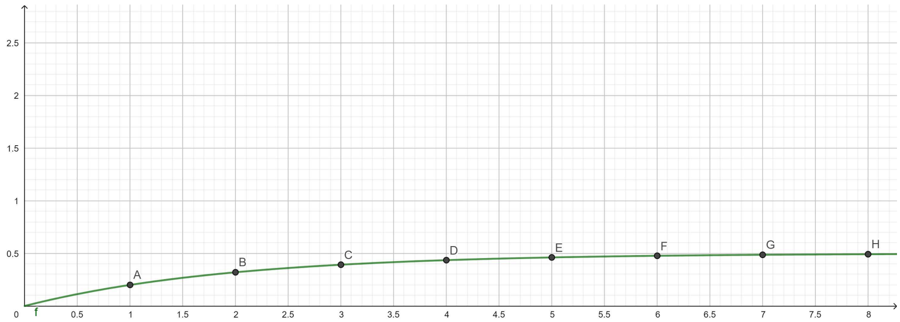
Analisando diferentes casos para α e β, tem-se:

Se $\alpha = \beta$, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1-\beta}{2-2\beta} = \frac{1}{2}.$$

De fato, caso as probabilidades de vitória dos jogadores sejam as mesmas, sob a mesma condição, o número de vitórias de cada jogador irá convergir para 50%. O gráfico a seguir representa a convergência da sequência para um $\alpha = \beta = 0{,}8$.

Figura 7 – Sequência x_n, com $\alpha = \beta = 0{,}8$



Fonte: Autoria própria..

Apesar do domínio discreto da função, a curva está sendo analisada de maneira contínua, apenas para facilitar a visualização do comportamento da função em cada um dos casos.

Se $\alpha < \beta$, então

$$1 - \beta < 1 - \alpha,$$

$$2(1-\beta) < (1-\alpha) + (1-\beta),$$

$$\frac{1}{(1-\alpha)+(1-\beta)} < \frac{1}{2(1-\beta)},$$

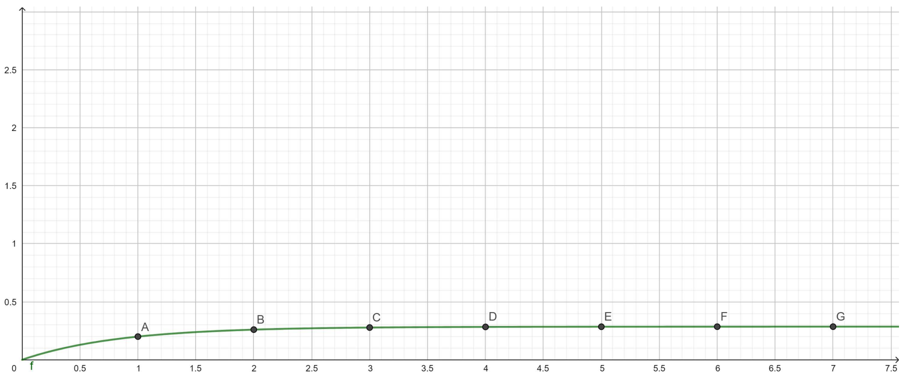
$$\frac{1-\beta}{(1-\alpha)+(1-\beta)} < \frac{1-\beta}{2(1-\beta)} = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n < \frac{1}{2}.$$

O gráfico a seguir representa a convergência da sequência x_n, para o caso em que $\alpha = 0{,}5$ e $\beta = 0{,}8$.

Figura 8 – Sequência x_n com $\alpha = 0{,}5 \beta = 0{,}8$



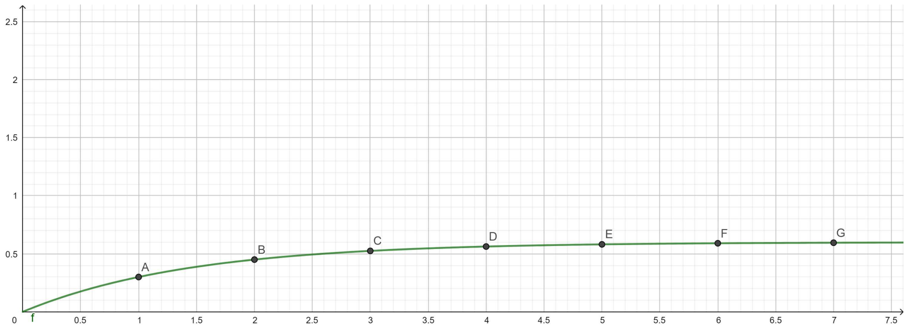
Fonte: Autoria própria..

Analogamente, se $\alpha > \beta$, então

$$\lim_{n \to \infty} x_n > \frac{1}{2}.$$

O gráfico a seguir representa a convergência da sequência x_n, para o caso em que $\alpha = 0{,}8$ e $\beta = 0{,}7$.

Figura 9 – Sequência x_n com $\alpha = 0{,}8 \beta = 0{,}7$

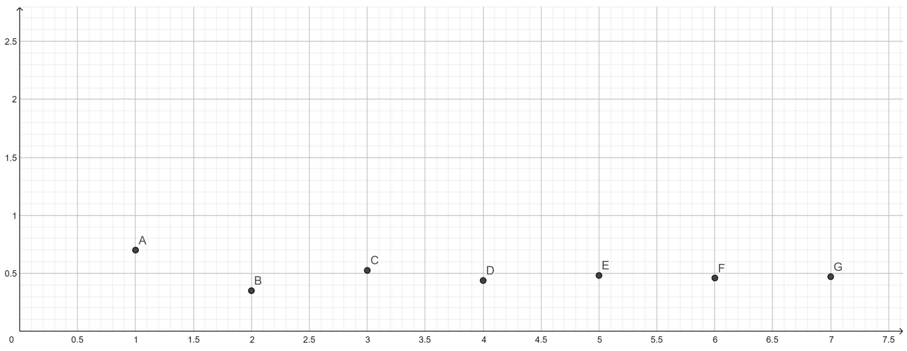


Fonte: Autoria própria..

Outro caso possível, é quando $\alpha + \beta < 1$. Neste caso, $\alpha + \beta - 1 < 0$, logo, a expressão $(\alpha + \beta - 1)^n$ fará com que haja uma alternância entre valores positivos e negativos, fazendo com que os pontos convirjam de maneira alternada, entre valores menores e maiores que o limite.

O gráfico a seguir representa esta situação, com $\alpha = 0{,}2$ e $\beta = 0{,}3$.

Figura 10 – Sequência x_n com $\alpha = 0{,}2 \beta = 0{,}3$



Fonte: Autoria própria..

Logo, como esperado, se um jogador tem uma probabilidade maior que o outro de vencer uma partida, sob as mesmas condições, seu percentual de número de vitórias vai convergir para um valor superior à 0,5.

Agora podemos visualizar estas situações na prática, através de simulações.

4 SIMULAÇÕES

Com o intuito de analisar graficamente os resultados explorados até então, foram utilizados os programas Jupyter Notebook, para simular grandes quantidades de partidas usando a linguagem de programação Python, e Geogebra, para construir os gráficos dos respectivos resultados.

O algoritmo foi programado da seguinte forma:

Entradas:

m (número de simualções que serão realizadas)

n (número de partidas em cada simulação)

α (probabilidade de vitória de B)

β (probabilidade de vitória de A)

Inicialização:

Definir Variáveis:

$A = B = 0$

x = $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ **para** $i = 0$ **até** n

$x(i) = (\alpha + \beta - 1) * p + (1 - \beta)$

$p = x(i)$

gerar variável aleatória uniforme $u \in (0{,}1)$

se $u \leq (1 - p)$ **então:** $wB = 1$

do contrário: $wB = 0$

Fim se:

$B = B + wB$

Fim para:

$A = n - B$

Saídas:

A, B, x

Inicialmente foram analisados os resultados de dez partidas, simuladas cinco vezes. Obteve-se os resultados conforme a seguir.

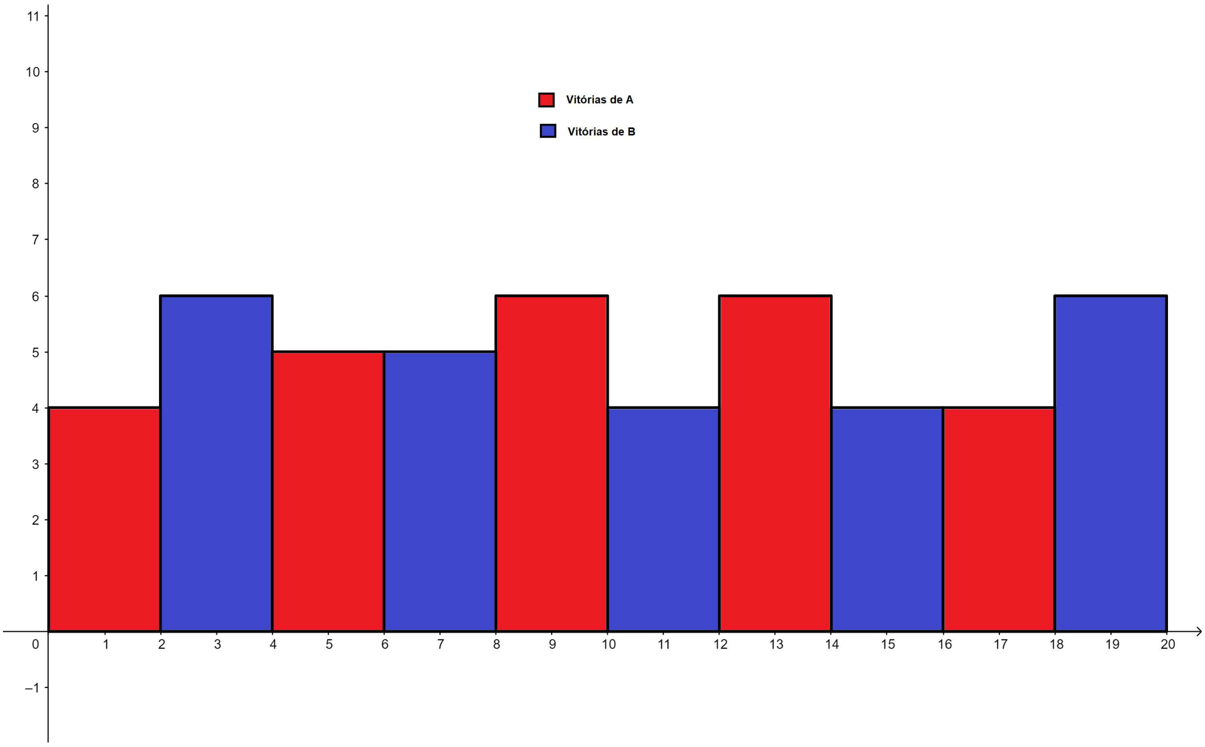
Quadro 6 – Simulação 1: 10 partidas.

Simulação	Vitórias de A	Vitórias de B
1	4	6
2	5	5
3	6	4
4	6	4
5	4	6

Fonte: Autoria Própria.

A imagem a seguir representa esses dados graficamente, em que cada par de barras,vermelha e azul, representa um experimento completo.

Figura 11 – Gráfico de 10 Simulações



Fonte: Autoria própria..

Novas simulações foram, dessa vez com 100 jogos. Os resultados obtidos foram os seguintes:

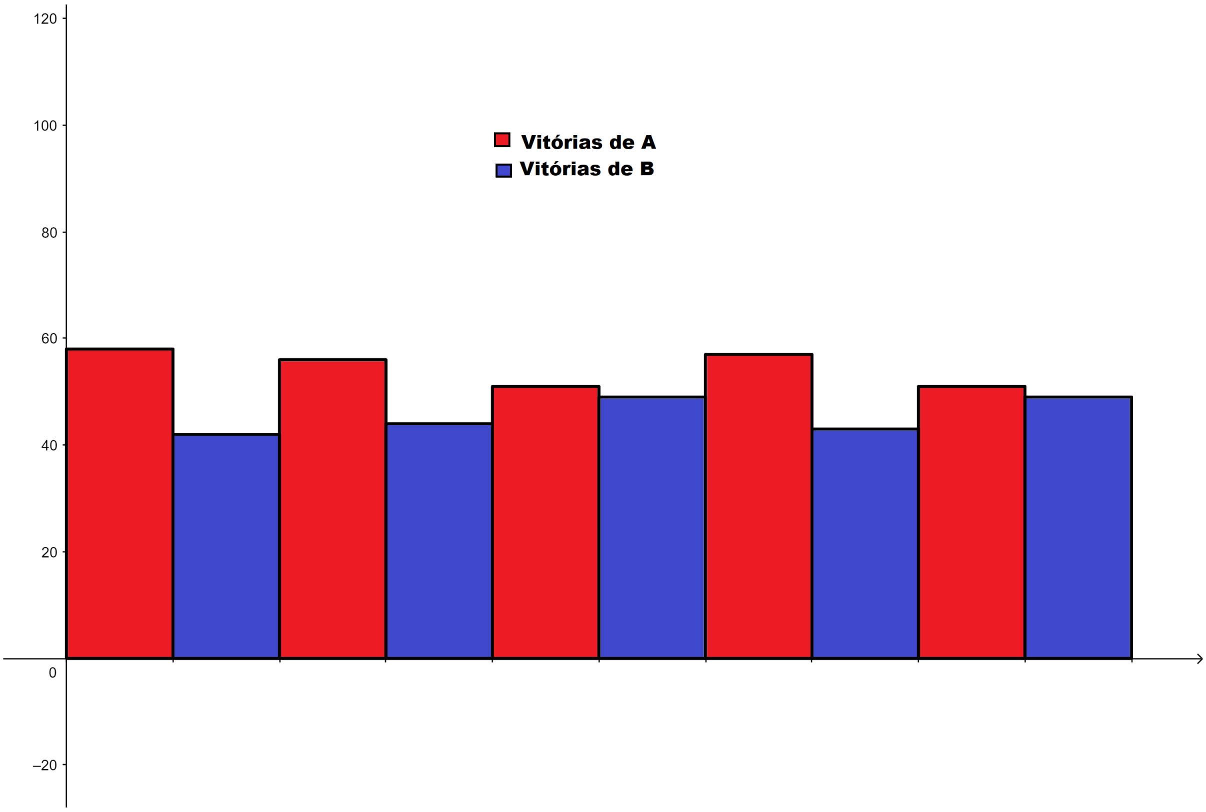
Quadro 7 – Simulação 2: 100 partidas.

Simulação	Vitórias de A	Vitórias de B
1	58	42
2	56	44
3	51	49
4	57	43
5	51	49

Fonte: Autoria Própria.

Plotando estes valores no geogebra, obtém-se o gráfico da Figura 12.

Figura 12 – Gráfico de 100 Simulações



Fonte: Autoria própria..

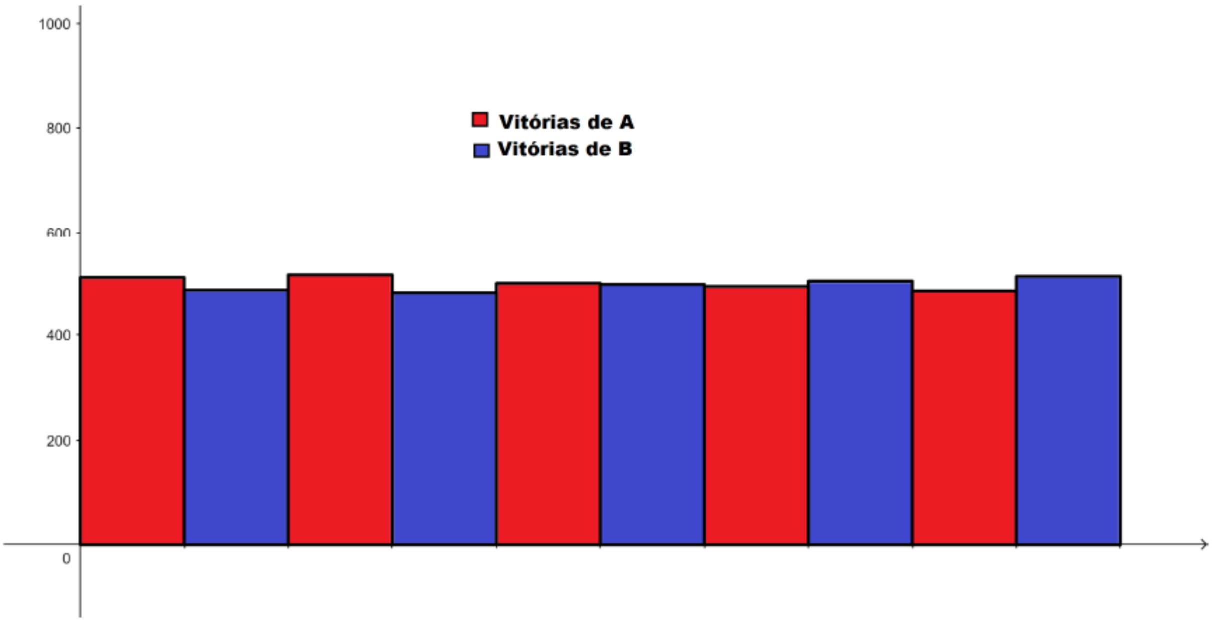
Talvez a convergência ainda não fique tão evidente com cem partidas. Porém ao testar para mil partidas, a diferença no percentual de vitórias diminui consideravelmente, conforme podemos verificar com a próxima simulação.

Quadro 8 – Simulação 3: 1000 partidas.

Simulação	Vitórias de A	Vitórias de B
1	512	488
2	517	483
3	501	499
4	495	505
5	486	514

Fonte: Autoria Própria.

Figura 13 – Gráfico de 1000 Simulações



Fonte: Autoria própria..

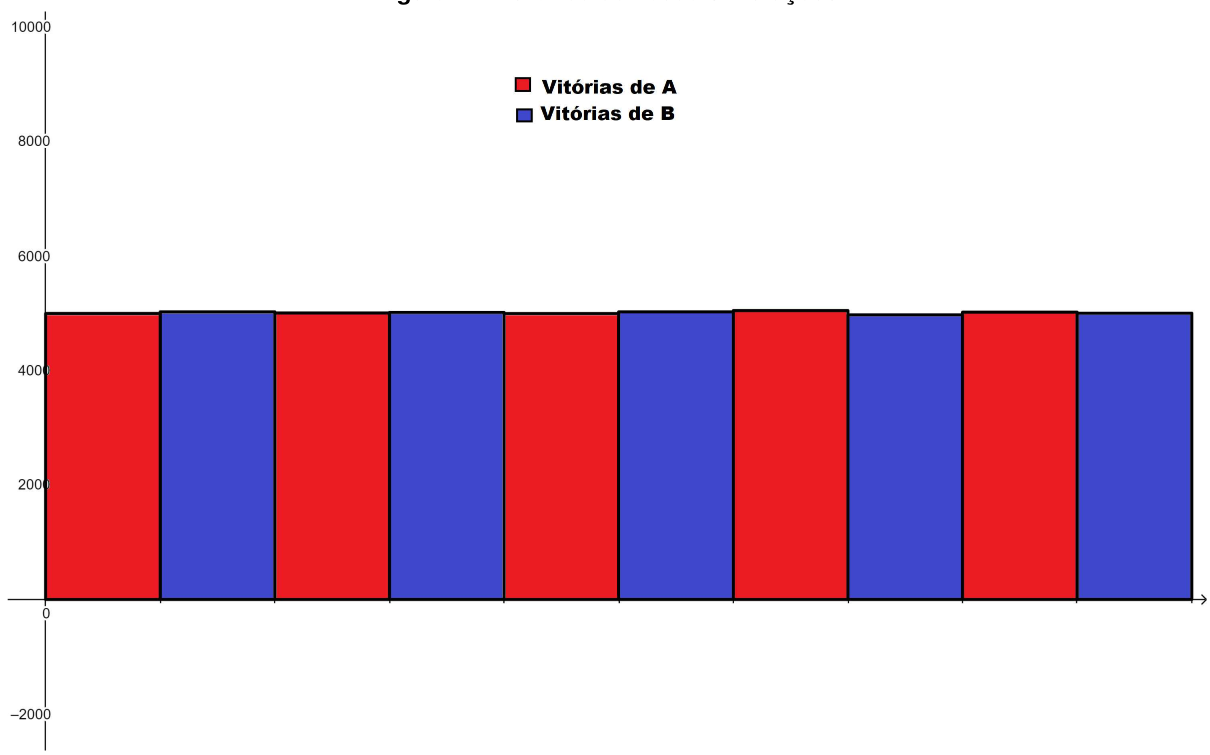
Já é possível visualizar com mais facilidade a convergência para 50%. Porém, serão consideradas mais cinco simulações feitas, com um total de dez mil partidas cada.

Quadro 9 – Simulação 4: 10000 partidas.

Simulação	Vitórias de A	Vitórias de B
1	4986	5014
2	4995	5005
3	4985	5015
4	5037	4963
5	5009	4991

Fonte: Autoria Própria.

Figura 14 – Gráfico de 10000 Simulações



Fonte: Autoria própria..

Conforme visto no capítulo 3, a probabilidade de vitória do jogador convergiria para 0.5, independente das probabilidades de vitória iniciais. O mesmo não acontece quando α e β possuem valores distintos, conforme observado a seguir:

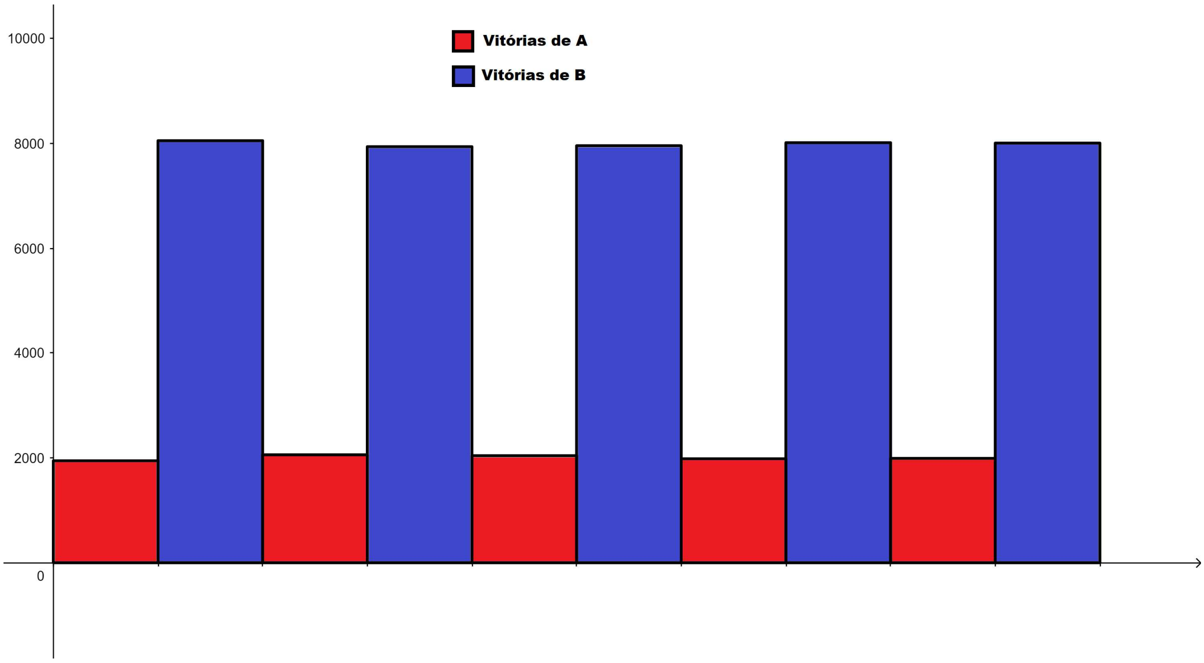
Tomando $\alpha = 0{,}8$ e $\beta = 0{,}2$, foram simuladas 5 vezes um total de 10 mil partidas, e obteve-se os seguintes valores:

Quadro 10 – Simulação 5: $\alpha = 0{,}8$ **e** $\beta = 0{,}2$**.**

Simulação	Vitórias de A	Vitórias de B
1	1946	8054
2	2060	7940
3	2042	7958
4	1984	8016
5	1992	8008

Fonte: Autoria Própria.

Figura 15 – Gráfico com $\alpha = 0{,}8 \beta = 0{,}2$



Fonte: Autoria própria..

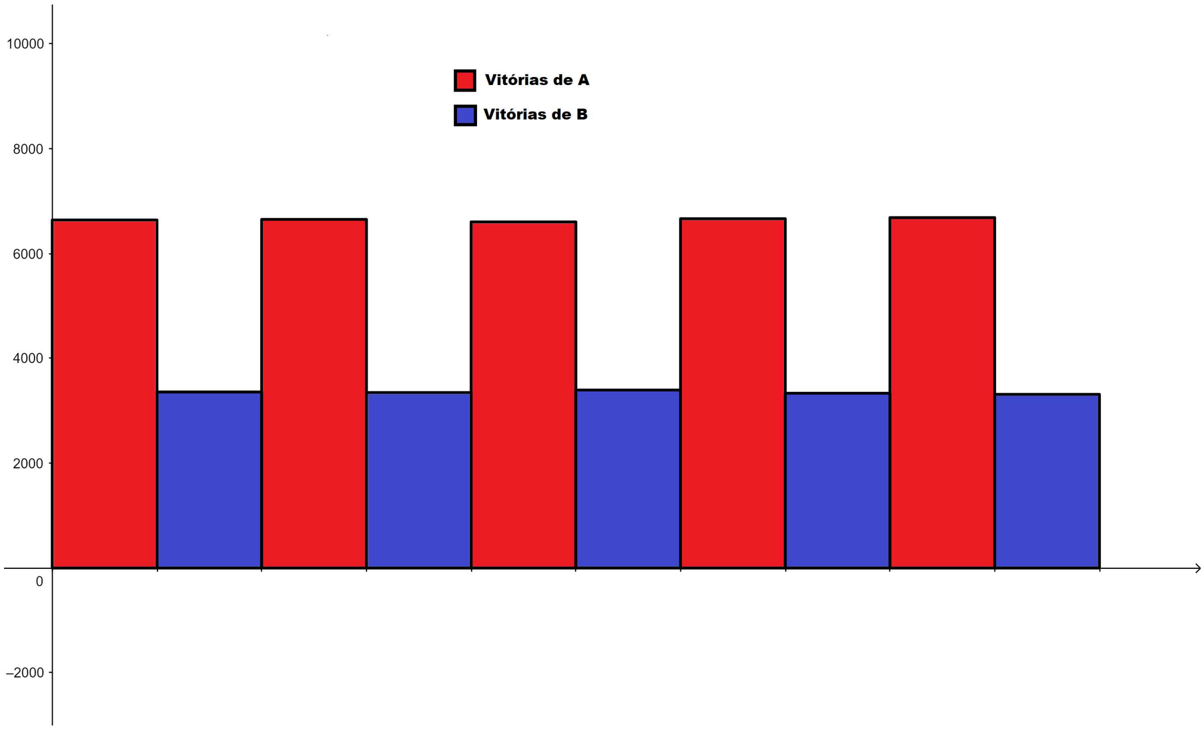
Tomando $\alpha = 0{,}4$ e $\beta = 0{,}7$, foram simuladas 5 vezes um total de 10 mil partidas, e obteve-se os seguintes valores:

Quadro 11 – Simulação 5: $\alpha = 0{,}4$ **e** $\beta = 0{,}7$.

Simulação	Vitórias de A	Vitórias de B
1	6641	3359
2	6652	3348
3	6604	3396
4	6665	3335
5	6686	3314

Fonte: Autoria Própria.

Figura 16 – Gráfico com $\alpha = 0{,}4\beta = 0{,}7$



Fonte: Autoria própria..

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentado a solução para um problema que envolve partidas em um jogo de azar. A partir de conceitos estudados sobre probabilidade, optou-se por aplicar ao problema a *Lei da Probabilidade Total* que, associada à conclusões extraídas do enunciado do problema, possibilitou a obtensão da solução, através de uma recorrência (ou equação de diferenças). A fim de obter uma solução mais específica para o problema, que não dependesse de termos anteriores da sequência solução da equação, viu-se necessário o uso de outra ferramenta matemática. Para tal, foram utilizados os conceitos estudados sobre Transformada $\mathcal{Z}$. Aplicando-se a Transformada à equação, determinou-se uma expressão para esta Transformada, que possibilitou, através da aplicação da Transformada $\mathcal{Z}$ inversa, a obtensão da expressão geral da sequência solução.

A partir da solução obtida, analisou-se o comportamento da função encontrada quando o número de partidas tende ao infinito, concluindo-se que o número de vitórias de cada jogador se aproximaria de 50%. A partir deste resultado, surgiu o questionamento de se o mesmo ocorreria caso os valores das probabilidades fornecidas no problema fossem diferentes, ou caso os jogadores tivessem probabilidades de vitória individuais em cada situação. Utilizando-se do mesmo método empregado anteriomente, foi obtida uma expressão geral como solução do problema e, através desta, constatou-se um comportamento de convergência, similar ao do problema inicial, em cada caso.

Através de simulações realizadas no *Jupyter Notebook*, observou-se diferentes resultados para o problema proposto. O número crescente de partidas simuladas, bem como os dados dispostos graficamente, auxiliaram na compreensão do comportamento convergente da função.

Além da aplicação da Transformada $\mathcal{Z}$ no contexto dos jogos de azar, objetivo geral do trabalho, esta Transformada possui aplicações em outras áreas, como na engenharia, computação e economia. Conhecer suas definições, propriedades e os mais diversos exemplos, é fundamental para a compreensão dos conceitos.

Uma possível expansão deste trabalho seria uma análise das aplicações da Transformada $\mathcal{Z}$ em outras áreas, como na Engenharia por exemplo. Aplicações da Transformada $\mathcal{Z}$ em outras áreas da Matemática também podem ser exploradas, como na Geometria ou na Matemática Financeira. A relação entre a Transformada $\mathcal{Z}$ e outras transformadas, como a Transformada de Laplace e a Transformada de Fourier, também são questões muito pertinentes.

Como principais dificuldades no decorrer do desenvolvimento do trabalho, pode-se citar a elaboração do código em Python para as simulações, a escassez de materiais em português sobre Transformada $\mathcal{Z}$, em particular materiais que abordem seu uso em resoluções de recorrências, bem como o longo aprendizado para o domínio do LaTeX.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo 4**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

PINHEIRO, T. A.; LAZZARIN, J. R. **Recorrência matematica na OBMEP**. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2015.

POULARIKAS, A. D. **The Transforms and Applications**. Boca Raton: CRC Press LLC„ 2010.

PROBST, R. W.; SáNCHEZ, A. D. B.; VENTURI, S. **Uma introdução à transformada Z**. Curitiba: Universidade Tecnologica Federal do Parana, 2017.

ROSS, S. **Probabilidade : um curso moderno com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SERTOZ, A. S. **Lecture Notes on Laplace and Z-transforms**. Ankara: [s.n], 2004.

SILVA, M. N. P. da. História da probabilidade. 2013. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/historia/probabilidade.htm. Acesso em: 12 nov. 2019.

SPIEGEL, M. R.; SCHILLER, J.; SRINIVASAN, A. **Probabilidade e Estatística**. [*S.l.*]: Problema Resolvido, 2015.

VENTURI, S. **Transformada** $\mathscr{Z}$. Curitiba: Universidade Federal do Parana, 2016.

YATES, R. D.; GOODMAN, D. J. **Probabilidade e Processos Estocasticos: uma introdução amigavel para engenheiros eletricistas e da computação**. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

YATES, R. D.; GOODMAN, D. J. **Probabilidade e Processos Estocasticos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2017.

APÊNDICE A – Demonstrações

Demonstração.

$$P(\emptyset) = 0.$$

Prova: Considere a sequência de eventos E_1,E_2,E_3,..., onde $E_1 = S$ e $E_i = \emptyset$ para $i > 1$. Como são eventos mutuamente exclusivos e $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, temos pelo Axioma 3 que

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset),$$

o que implica que

$$P(\emptyset) = 0.$$

□

Demonstração.

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Prova: Como E e E^c são sempre mutuamente exclusivos e, além disso, $E \cup E^c = S$, pelos Axiomas 2 e 3, tem-se que

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c).$$

Então, equivalentemente

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

□

Demonstração.

$$E \subset F \implies P(E) \leq P(F).$$

Prova: Como $E \subset F$, pode-se expressar F como

$$F = E \cup E^c F.$$

Como E e $E^c F$ são mutuamente exclusivos, pelo axioma 3, tem-se que

$$P(F) = P(E) + P(E^c F).$$

O que prova que $P(E) \leq P(F)$, pois $P(E^c F) \geq 0$. □

Demonstração.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF).$$

Prova: $P(E \cup F)$ pode ser escrito como uma união de eventos disjuntos, da seguinte forma

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E \cup E^c F) \\ &= P(E) + P(E^c F). \end{aligned}$$

Visto que F pode ser escrito como $F = EF \cup E^c F$, então

$$P(F) = P(EF) + P(E^c F).$$

Equivalentemente

$$P(E^c F) = P(F) - P(EF).$$

Logo,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF).$$

□

Demonstração.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)},$$

quando o espaço amostral possui resultados igualmente prováveis.

Prova: Como $S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$, segue que $P(S) = P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)$. Pelo Axioma 3, tem-se que

$$P(S) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n).$$

Além disso, pelo Axioma 2, tem-se

$$P(S) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) = 1.$$

Como $P(E_1) = P(E_2) = ... = P(E_n)$, tem-se que $n \cdot P(E_i) = 1 \Rightarrow P(E_i) = \dfrac{1}{n}$.

Se existem $n(S)$ resultados em S e um evento E possui $n(E)$ resultados distintos, então, pelo Axioma 3

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{1}{n(S)} + \frac{1}{n(S)} + ... + \frac{1}{n(S)} \\ &= \frac{n(E)}{n(S)}. \end{aligned}$$

□

Demonstração.

$$P(E/F) = \frac{P(F/E)P(E)}{P(F)}.$$

Prova: Como sabe-se das probabilidades condicionais, $P(E/F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$ ou, equivalentemente, $P(EF) = P(E/F)P(F) = P(F/E)P(E)$.
Portanto,

$$P(E/F) = \frac{P(F/E)P(E)}{P(F)}.$$

□

Demonstração.

$$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} = aX(z) + bY(z),$$

para $|z| >$ máx$\{R_1,R_2\}$.
Prova:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty}(ax_n + by_n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ax_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} by_n z^{-n} \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} + b\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \\
&= aX(z) + bY(z),
\end{aligned}$$

para todo n $\in \mathbb{N}$. □

Demonstração.

$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z \cdot \frac{d}{dz}X(z).$$

Prova: Se a transformada $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ existe para $|z| > R$, tem-se que, pela convergência uniforme da série dentro de sua RDC:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}X(z) &= \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -n x_n z^{-n-1} \\
&= \frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n x_n z^{-n} \\
&= \frac{-1}{z}\mathcal{Z}\{nx_n\}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z \cdot \dfrac{d}{dz}X(z)$. □

Demonstração.

$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\} = X\left(\frac{z}{a}\right),$$

para $|z| \ > |a|R$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{a^n x_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{z^{-n}}{a^{-n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \\
&= X\left(\frac{z}{a}\right).
\end{aligned}$$

□

Demonstração.

$$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k}X(z),$$

para $|z| > R$ e $k \in \mathbb{N}$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} &= \frac{0}{z^0} + \frac{0}{z} + ... + \frac{0}{z^{k-1}} + \frac{x_0}{z^k} + \frac{x_1}{z^{k+1}} + ... \\
&= \frac{1}{z^k}\left(\frac{x_0}{z^0} + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + ...\right) \\
&= z^{-k}X(z).
\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração.

$$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n},$$

para $|z| > R$ e $k \in \mathbb{N}$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} x_n z^{-n}.
\end{aligned}$$

Tomando $n = m + k$ e fazendo a substituição no segundo somatório, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_n\} &= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + \sum_{m+k=k}^{\infty} x_{m+k} z^{-(m+k)} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x_{m+k} z^{-m} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k}\mathcal{Z}\{x_{m+k}\}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k}\mathcal{Z}\{x_{n+k}\}$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} &= z^k \left[Z\{x_n\} - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} \right] \\ &= z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}.\end{aligned}$$

$\square$