UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CILIO JOSÉ VOLCE

RECURSOS DIDÁTICOS PARA NÚMEROS COMPLEXOS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

LONDRINA
2022

CILIO JOSÉ VOLCE

RECURSOS DIDÁTICOS PARA NÚMEROS COMPLEXOS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

DIDACTIC RESOURCES FOR COMPLEX NUMBERS FROM THE PERSPECTIVE OF THE THEORY OF SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Claudete Cargnin

LONDRINA

2022

TERMO DE APROVAÇÃO

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

CILIO JOSE VOLCE

RECURSOS DIDÁTICOS PARA NÚMEROS COMPLEXOS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 27 de Abril de 2022

Claudete Cargnin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Bruno Rodrigo Teixeira, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Sergio De Mello Arruda, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 27/04/2022.

Dedico este trabalho aos meus pais, Cilio Volce (*em memória*) e Maria Cristina de Jesus Simão, com todo amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida, por ter me guiado até o presente momento e por me dar forças para seguir sempre em frente.

Aos meus pais, Cilio Volce (*em memória*) e Maria Cristina de Jesus Simão, que sempre me incentivaram de forma incondicional para que eu me desenvolvesse como pessoa e academicamente.

A minha avó materna, Maria Iracema Giacomini, que foi professora em escolas rurais com muito amor por seus alunos e pela sua profissão e que sempre se recorda com saudades dos tempos de sala de aula.

A minha irmã Ruthe Volce, mãe de minhas sobrinhas Ana Laura e Lorena, que moram no meu coração.

A minha orientadora Prof.ª Dra. Claudete Cargnin, pela inestimável orientação, auxílio, paciência, amizade, apoio e incentivo durante a elaboração deste trabalho.

Aos membros convidados para a banca, Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira e Prof. Dr. Sérgio de Mello Arruda, pela disponibilidade na leitura do trabalho. Sou muito grato pelas valiosas sugestões, que contribuíram tanto para a melhora da pesquisa quanto para minhas reflexões.

Aos amigos(as): Larissa Camilotti, Samuel Paz, Adriana Araújo, Adriana Carniélli, Fabiane Oliveira, Renata Antunes, Meiri Cardoso, Carlos Lazari e André Baltazar pelos momentos de conversas e motivação.

A minha primeira professora do Ensino Fundamental I, na Escola Municipal Miguel Bespalhok, Lucien Monteiro, que mantemos amizade até nos dias atuais.

Ao meu professor de matemática do Ensino Médio, Eugênio Yamaji, que com muito carinho tanto me ensinou e compartilhou os seus conhecimentos matemáticos no Colégio Estadual Professor Newton Guimarães.

Aos docentes do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – PPGMAT/UTFPR, pelo conhecimento proporcionado durante a realização das disciplinas.

"Seria uma atitude ingênua esperar que as classes dominantes desenvolvessem uma forma de educação que proporcionasse às classes dominadas perceber as injustiças sociais de maneira crítica", (Paulo Freire).

VOLCE, Cilio José. **Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2022. 156 páginas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvido um estudo com o objetivo de criar recursos didáticos para o ensino de números complexos que possibilitem a utilização de diferentes tipos de representação semiótica. A dissertação está composta por uma introdução, três capítulos independentes, considerações finais e dois produtos educacionais. No primeiro capítulo, há um levantamento bibliográfico de dissertações e teses, junto ao Banco de Teses da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), acerca de alternativas para o ensino de números complexos. No segundo, apresenta-se uma sequência didática (SD) composta por quatro tarefas temáticas e interdisciplinares para o ensino de números complexos, para o terceiro ano do Ensino Médio, avaliadas, pelo autor, de acordo com preceitos que podem caracterizá-la como uma Sequência Didática Investigativa (SDI). O terceiro capítulo discute a potencialidade do jogo Trincas Complexas, para a compreensão do significado geométrico das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números complexos na forma algébrica e suas respectivas conversões em representações gráficas com vetores. Tanto a SD quanto os jogos criados fundamentaram-se nos pressupostos teóricos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) — os quais consideram que o ensino e a aprendizagem da matemática requerem um trabalho com diversidade de representações, e, nas etapas da Teoria das Situações Didáticas (TSD) — que busca propiciar a reflexão sobre as relações entre os conteúdos do ensino e os métodos educacionais. Acredita-se que tanto a SD composta pelas tarefas quanto o jogo têm o potencial de diminuir lacunas de aprendizagens na visualização de representações gráficas de operações algébricas com números complexos.

Palavras-chave: Números Complexos; Sequência Didática; Jogos Matemáticos; Representação Semiótica; Participação ativa.

VOLCE, Cilio José. **Didactic Resources for Complex Numbers from the perspective of the Theory of Semiotic Representation Registers.** 2022. 156 pages. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

In this work, a study was developed with the objective of creating didactic resources for the teaching of complex numbers that allow the use of different types of semiotic representation. The dissertation is composed of an introduction, three independents chapters, final remarks and two educational products. In the first chapter, there is a bibliographic survey of dissertations and theses, together with the Theses Bank of the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES), about alternatives for teaching complex numbers. In the second chapter, a didactic sequence (DS) was presented, composed of four thematic and interdisciplinary tasks for the teaching of complex numbers, for the third year of high school, evaluated by the author according to precepts that can characterize it as an Investigative Didactic Sequence (IDS). The third chapter discusses the potential of the Trincas Complexas game to understand the geometric meaning of addition, subtraction, multiplication and division operations with complex numbers in algebraic form and their respective conversions into graphical representations with vectors. Both the DS and the games created were based on the theoretical assumptions of the Theory of Semiotic Representation Registers (TSRR) - which consider that the teaching and learning of mathematics require work with a diversity of representations, and, in the stages of the Theory of Didactic Situations (TDS) – which seeks to promote reflection on the relationship between teaching content and educational methods. It is believed that both the SD composed of the tasks and the game have the potential to reduce learning gaps in the visualization of graphical representations of algebraic operations with complex numbers.

Keywords: Complex numbers; Didactical Sequence; Math Games; Semiotic Representation; Active participation.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGMAT	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
SD	Sequência Didática
SDI	Sequências Didáticas Investigativas
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos inicialmente como surgiu o interesse em pesquisar sobre o ensino de números complexos a fim de familiarizar o leitor com o tema abordado. Em seguida, enfatizamos a relevância da pesquisa, a escolha da metodologia de ensino, a definição dos objetivos, e a estrutura da organização da dissertação.

1.2 O pesquisador

A minha trajetória de vida possibilitou interessar-me pela pesquisa na área de ensino de matemática, pois desde a infância, antes de ser matriculado em uma escola, já aprendia, com o meu pai, os números, contagens e alguns cálculos básicos. Posteriormente, no ingresso à educação formal, no Ensino Fundamental, desenvolvi um grande interesse pela disciplina de Matemática, o que me fez cursar a graduação em Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual de Londrina.

Desde que eu entrei na escola, nunca mais saí dela, seja como aluno, professor ou ambos simultaneamente. Como professor que atua no Ensino Médio, percebo que os números complexos têm como característica a possibilidade de diferentes formas de representação: algébrica, pares ordenados, vetorial, trigonométrica, matricial, entre outras. Particularmente em relação às operações entre números complexos, essas representações têm sido pouco exploradas nos materiais didáticos utilizados nas escolas públicas, sendo o foco dado para as manipulações algébricas. Surge aí, então, o interesse pela pesquisa e a intenção de se elaborar uma proposta de ensino voltada para esse conteúdo matemático.

1.3 A pesquisa

A intenção de pesquisar o conteúdo proposto neste estudo surgiu da necessidade de ampliar a discussão acerca da significação geométrica das operações com Números Complexos no Ensino Médio (ARAÚJO, 2006; ALMEIDA, 2013; CAON 2013; BARROS; AGRICCO JUNIOR, 2019). Embora haja consenso quanto à importância de se trabalhar os diferentes tipos de representações semióticas nas relações de ensino e de aprendizagem da Matemática, estas nem sempre são fáceis de serem incorporadas nas salas de aulas.

A forma como tem sido trabalhado o conteúdo Números Complexos e os seus respectivos processos de ensino e de aprendizagem no contexto atual das escolas públicas de Ensino Médio tem deixado a desejar (AMORIM, 2014). A quantidade de conteúdo a ser ensinada e o pouco tempo disponível para as aulas de matemática têm sido um fator decisivo para que o professor tenha que fazer escolhas sobre quais conteúdos ele irá priorizar.

Em média, a disciplina de matemática no Ensino Médio da rede pública no Estado do Paraná possui semanalmente apenas 2 aulas de 50 minutos cada. Em particular, no ano de 2020, foram destinadas cerca de 10 aulas para o tratamento de todo o tema de Números Complexos em colégios estaduais.

O ensino do conteúdo Números Complexos encontra-se em uma situação documental curricular polêmica, pois há documentos nacionais que, embora o mencionem, permitem que esse conteúdo seja tratado de maneira complementar, sem a obrigatoriedade de ser ensinado, por exemplo os documentos denominados Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)[1] de 2002 e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio[2] de 2006, e ainda, nem mesmo chega a ser previsto e referenciado na atual proposta curricular nacional, conhecida como Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[3] de 2018. Entretanto, há uma organização de conteúdos no Estado do Paraná que prevê esse ensino, como as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE)[4] de 2008 e o Caderno de Expectativas de Aprendizagem[5] de 2012.

---

[1] Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 23/01/2022.

[2] Orientações Curriculares para o Ensino Médio, disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 23/01/2022.

[3] Base Nacional Comum Curricular (BNCC), disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 23/01/2022.

[4] Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE), disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2019-12/dce_mat.pdf. Acesso em: 23/01/2022.

[5] Caderno de Expectativas de Aprendizagem, disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno_expectativas.pdf. Acesso em: 23/01/2022.

Em particular, o Caderno de Expectativas de Aprendizagem é entendido como norteador para expressar o que é "essencial ao aluno conhecer ao final de cada ano do Ensino Fundamental e ao final do Ensino Médio, dentro de cada conteúdo básico definido nas Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica para a Rede Estadual de Ensino" (PARANÁ, 2012, p. 5). Esse documento busca articular os conteúdos estruturantes aos conteúdos básicos e, dentre esses conteúdos, encontramos os números complexos no Conteúdo estruturante: *Números e Álgebra*; Conteúdo Básico: *Números Complexos*; Expectativas de Aprendizagem: itens "*142. Identifique a unidade imaginária (i) como elemento do conjunto dos números complexos e reconheça as formas algébricas, gráficas e trigonométricas destes números*" e; "*143. Identifique e represente as formas algébricas, gráficas e trigonométricas dos números complexos*" (PARANÁ, 2012, p. 92). Dentre os itens mencionados, destacamos que esse documento não mencionou as operações com números complexos como tema essencial para o conhecimento do estudante do Ensino Médio, todavia, ressaltamos a importância desse aprendizado.

Em relação às abordagens feitas em livros didáticos, Caon (2013) afirma que muitas vezes apresentam conteúdos de forma direta, sem indagações ou aplicações e nota-se uma ausência de diferentes tipos de registros de representações semióticas, o que pode gerar dificuldades nos estudantes em aspectos como interpretações de enunciados, cálculos algébricos e análises gráficas. Para essa autora, os livros didáticos mostram que os números complexos podem ser representados por vetores, mas são insuficientes no que se refere à representação geométrica das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Para Duval (2012), os diferentes tipos de registros de representações semióticas matemáticos (por exemplo algébrico, língua natural, numérico e gráfico) são necessários para fins de comunicação e essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.

Conforme Almeida (2013), na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, o capítulo sobre Números Complexos limita-se a mostrar que esse conjunto é fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, não mostrando, no entanto, situações em que eles podem ser aplicados. Estudos como o de Araújo (2006) apontam preocupações com o tema e uma busca por uma mudança metodológica para uma aprendizagem mais significativa no Ensino Médio. Para essa autora, a descontextualização do conteúdo, a ausência de sua utilidade, a falta de relação com situações práticas e as aplicações são obstáculos que recaem durante o exercício da profissão (professor).

Consideramos que essa incorporação se torna mais viável a partir do momento em que o professor dispõe de meios para implementá-la, e é isso que se intenta fazer nessa dissertação. A partir dos estudos teóricos, criou-se uma sequência didática destinada aos professores e estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, que contém, além de orientações para aplicação em sala de aula, tarefas com questões interdisciplinares, entre a Matemática e a Física, que favorecem a conversão de representações semióticas. Uma das tarefas foi elaborada na perspectiva de vetores, uma vez que esse conceito ajuda a explicar as forças que atuam em um avião. Além dessa sequência didática, elaboramos um jogo para representar graficamente, por meio de vetores, operações algébricas entre números complexos. Neste texto, cada um desses dois materiais (sequência didática e jogo) será chamado de produto educacional – (PE). O uso de vetores para associar ao conceito de números complexos vai ao encontro do que afirma Amorim (2014), quando explica que:

> [...] um dos campos de maiores articulações entre as duas disciplinas está no conceito de vetores, capazes de explicar fenômenos físicos em relação aos movimentos dos corpos, onde as operações vetoriais podem ser facilmente compreendidas através do estudo dos números complexos, com suas operações, já que estes representam os vetores (AMORIM, 2014, p. 59-60).

Ao se trabalhar com números complexos, é essencial que o ensino possa transitar entre diferentes representações, especialmente nas conversões entre elas. “A conversão de representações semióticas de um número complexo de um registro do tipo simbólico para um registro do tipo gráfico é fundamental, pois permite visualizar de forma indireta este objeto matemático” (BARROS; AGRICCO JUNIOR, 2019, p. 191).

Com os produtos educacionais desenvolvidos nessa pesquisa, pretende-se auxiliar o professor a desenvolver um trabalho que possa incentivar os alunos a estudarem, revisarem e refletirem sobre as mudanças de representações; auxiliar na compreensão dos conceitos, operações e representações dos números complexos; diminuir lacunas de aprendizagens; melhorar os fundamentos matemáticos dos estudantes; e trazer dinamicidade para a sala de aula.

Nesse sentido, o **objetivo geral** dessa pesquisa é criar recursos didáticos para o ensino de números complexos que possibilitem a utilização de diferentes tipos de representação semiótica.

Objetivamente, essa pesquisa pretende:

- ✓ Apresentar um levantamento bibliográfico sobre alternativas para o ensino de números complexos em dissertações e teses brasileiras, disponíveis no catálogo de teses e dissertações da CAPES (**Capítulo 2**);
- ✓ Avaliar quais preceitos são contemplados em uma sequência didática (SD) criada no que se refere às características de Sequências Didáticas Investigativas (SDI) (**Capítulo 3**);
- ✓ Discutir como um jogo, intitulado Trincas Complexas, pode potencialmente contribuir para o aprendizado das operações com números complexos na forma algébrica e suas respectivas conversões em representações gráficas com vetores (**Capítulo 4**).

1.4 Organização da dissertação

Por ser um estudo teórico, o modelo adotado para a organização dessa dissertação é similar ao da escrita compilada em artigos, defendido por Duke e Beck (1999). Nesse modelo, cada parte ou capítulo tem seu próprio resumo, introdução, revisão da literatura, fundamentação teórico-metodológica, análise e considerações.

De modo geral, a pesquisa contemplou três momentos, cada um representado em um capítulo dessa dissertação: uma revisão bibliográfica sobre o ensino de Números Complexos, visando embasar a criação dos recursos didáticos a partir das indicações da literatura; o estudo da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) e preceitos de uma sequência didática investigativa, que serviram como aporte para a elaboração de tarefas interdisciplinares; e a criação do jogo Trincas Complexas, seguindo os preceitos da TRRS.

Para melhor compreensão do leitor, optamos por indicar os procedimentos metodológicos em cada uma das partes que compõem esta dissertação. Dessa forma, a organização deste texto apresenta-se com a seguinte estrutura: a introdução e a justificativa, um capítulo inicial em que são apresentados a contextualização do problema, os objetivos para a realização desta pesquisa e a organização do texto; três capítulos independentes, porém articulados, referentes ao objeto do saber, referência da pesquisa, descritos a seguir; e as considerações finais.

O segundo capítulo, intitulado "*Um panorama de pesquisas brasileiras sobre materiais didáticos para o ensino de números complexos*", tem como objetivo apresentar um levantamento bibliográfico em dissertações e teses brasileiras disponíveis no portal da CAPES acerca de alternativas para o ensino de números complexos. Com ele, realizamos um aprofundamento na temática escolhida, e, por meio de análises, uma caracterização do que tem sido produzido no âmbito do ensino de números complexos.

O terceiro capítulo, intitulado "*Análise de uma sequência didática interdisciplinar sobre números complexos no contexto do ensino por investigação*", tem como objetivo avaliar uma Sequência Didática (SD) interdisciplinar, elaborada como um recurso didático para o ensino de Números Complexos, no que se refere às características das Sequências Didáticas Investigativas (SDI) propostas por Oliveira *et al*. (2021). A ideia de utilizar uma sequência didática investigativa foi pensada como forma de permitir a participação ativa do aluno. Além disso, como há uma proposta interdisciplinar, optamos por uma estratégia de "ensino por investigação" que pudesse ser aplicada pensando nas disciplinas de Matemática e Física, pois tarefas investigativas específicas de Matemática, assim como de outras disciplinas, acabam apresentando particularidades. Ainda, sugerimos que essas tarefas possam ser utilizadas para introduzir o conteúdo "operações com números complexos", considerando que o professor já tenha trabalhado representações gráficas no plano cartesiano e resolução de equações de 2° e de 3° grau, com possibilidade de apresentar, a partir dessas tarefas, um contexto real de aplicação de números complexos, explorando as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como as representações gráficas de números complexos na forma de vetores.

O quarto capítulo, intitulado "*Tratamento e conversões entre representações de números complexos a partir da ludicidade como recurso didático*", tem como objetivo discutir como um jogo, denominado Trincas Complexas, pode potencialmente contribuir para o aprendizado das operações com números complexos na forma algébrica e suas respectivas conversões em representações gráficas com vetores. Destacamos que esse jogo foi proposto em uma perspectiva de aplicar o conteúdo já trabalhado pelo professor, como uma maneira lúdica e dinâmica na tentativa de permitir a participação ativa do aluno e de ajudar na compreensão de conceitos e operações de um conteúdo que por muitas vezes é considerado difícil de ser compreendido pelos estudantes do Ensino Médio.

Nas considerações finais, é feita uma retomada do objetivo geral dessa pesquisa a partir de uma análise das potencialidades evidenciadas nos capítulos 2, 3 e 4, integrantes desta dissertação, com a intenção de mostrar alguns avanços, possibilidades de melhorias, sugestões de trabalhos futuros, controvérsias etc.

Por fim, no apêndice, são apresentados os produtos educacionais: *i)* "*Decolagem e pouso de um avião: embarque nesse voo com destino a uma aplicação de números complexos*"; e, *ii)* "*Trincas Complexas: um jogo para representar graficamente operações algébricas com números complexos*". Ambos os produtos foram criados pelo autor desta dissertação e estão disponibilizados no site do PPGMAT[6]. Um produto educacional (PE) é "um processo reflexivo e contextualizado, que contém tanto alguns dos saberes da experiência docente dos professores quanto a teoria desenvolvida por pesquisadores e estudadas com profundidade" (LOPES, 2013, p. 632).

Nesse sentido, os produtos aqui apresentados são materiais didáticos para serem utilizados por professores e estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, na disciplina de Matemática. Assim, em busca de elaborar tarefas que permitissem abordar o conteúdo "operações com números complexos" com uma aplicação que pode ser interessante como motivação para professores iniciarem uma aula, elaborou-se uma proposta de sequência didática (SD) temática com inspirações na Teoria das Situações Didáticas – TSD (Guy Brousseau), com foco na aplicação de números complexos, com possibilidades de se utilizar diferentes tipos de registros de representação semiótica, em especial o algébrico e o gráfico. Além de uma SD, há um jogo inspirado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS (Raymond Duval) que pode ser interessante como aplicação de conteúdo em sala de aula. Esse jogo utiliza cartões com foco nas operações algébricas entre números complexos e suas respectivas conversões em representações gráficas, apresentado no capítulo 4 desta dissertação.

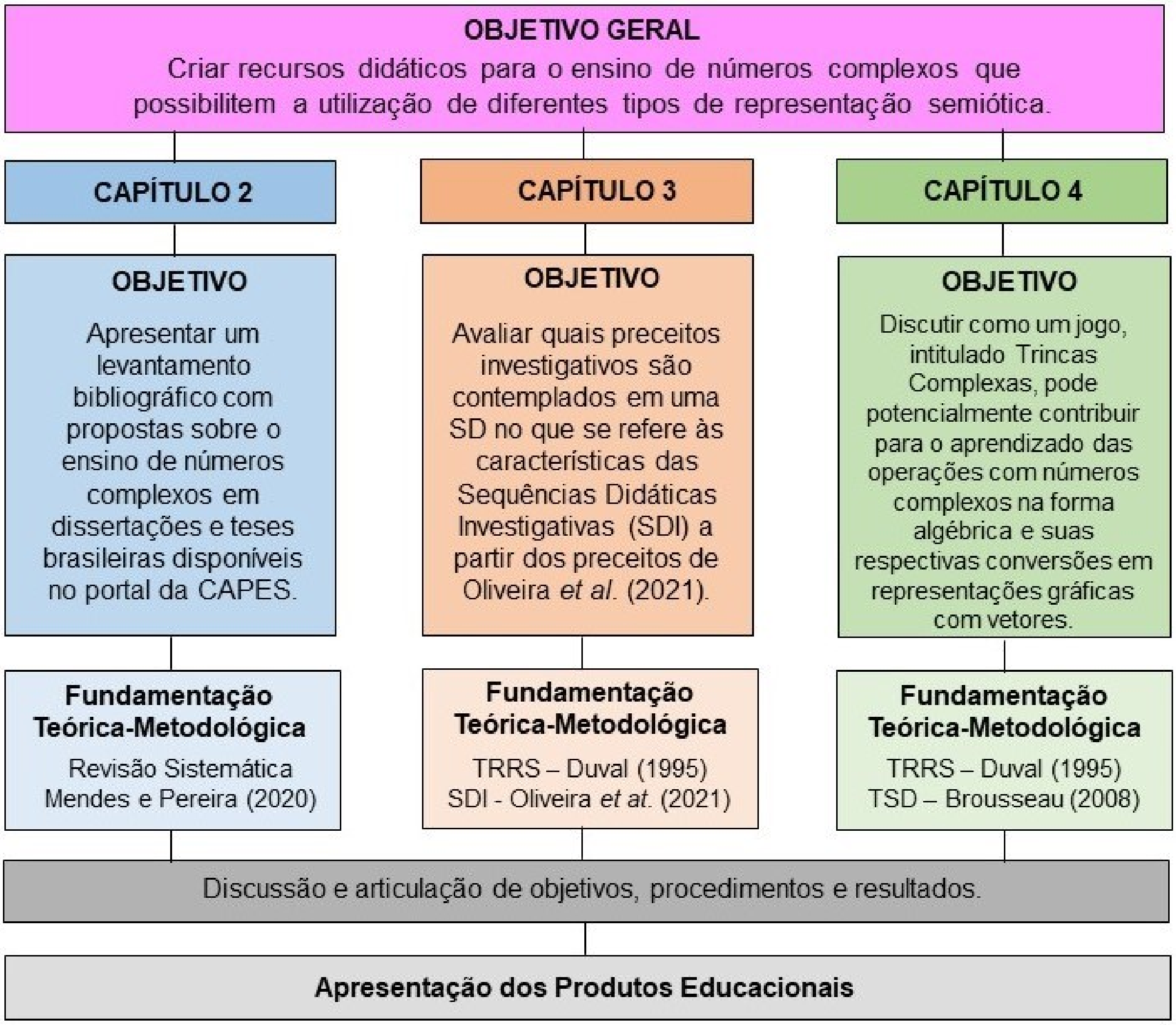
Em síntese, os capítulos 2, 3 e 4, embora pareçam destoantes, aproximam-se pelo fato de apresentarem propostas de materiais para o ensino e/ou aplicação de números complexos e, além disso, os capítulos 3 e 4 têm em comum a tentativa de incentivar a participação ativa dos alunos propiciada pelos preceitos da Teoria das Situações Didáticas e a possibilidade de se trabalhar com diferentes tipos de registros de representação semiótica.

---

[6] Produto Educacional disponível em: http://www.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/producao-academica.

Resumindo, esta dissertação está organizada de acordo com o esquema apresentado na Figura 1.1, a seguir:

Figura 1.1 - Organização da dissertação de mestrado



Fonte: o autor.

2 UM PANORAMA DE PESQUISAS BRASILEIRAS SOBRE ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Este capítulo objetiva apresentar um levantamento bibliográfico sobre estratégias didáticas para o ensino de números complexos em dissertações e teses publicadas no Brasil no período de 2015 a 2020. Trata-se de uma pesquisa documental, cujos trabalhos foram buscados no catálogo de teses e dissertações da CAPES em duas áreas de conhecimento: ensino, e ensino de ciências e matemática. O estudo abrange uma análise interpretativa do(s) objetivo(s) ou questão(ões) de pesquisa e de propostas de recursos didáticos de sete trabalhos, com a intenção de conhecer o que já foi construído e produzido de materiais didáticos sobre números complexos. Os resultados permitiram evidenciar diferentes estratégias para o ensino desse conteúdo: uso de distintas formas de representações semióticas; uso de tecnologias; interdisciplinaridade; jogos matemáticos; e a proposição de tarefas investigativas com potencial para promover uma participação ativa dos estudantes.

2.1 Introdução

O estudo dos números complexos se faz importante dentro da própria matemática, como em “Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo etc.” (LIMA, 1991, p. 01) e seu ensino pode estar motivado nessas ou outras possíveis aplicações.

Entretanto, essa importância dos números complexos não se mostra evidente em materiais didáticos da Educação Básica. Estudos que analisaram livros didáticos utilizados no âmbito do Ensino Médio, principalmente quanto ao ensino público, concluíram que estes se limitam a mostrar exercícios que relacionam apenas conversões em sentido único de transformação, trabalhando somente o cálculo necessário, deixando de interpretar os efeitos que cada operação exerce sobre o número complexo, de modo que, para o aluno, esse processo se torna mecanizado e, até mesmo, vazio de interpretações (BITENCOURT; VARGAS; FELICETTI, 2014, p. 9).

Outro fator que pode ser desfavorável para que estudantes do Ensino Médio tenham um contato inicial satisfatório com esse conteúdo ainda na Educação Básica, é a questão documental curricular, pois existem documentos no Estado do Paraná que preveem esse ensino, por exemplo, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) e o Caderno de Expectativas de Aprendizagem (PARANÁ, 2012); entretanto, há documentos nacionais, a saber os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) que, embora o mencionem, permitem que o conteúdo de números complexos seja tratado como algo complementar. Reafirmando esse aspecto, temos mais recentemente a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), que não menciona tal conteúdo.

Embora os números complexos estejam em uma situação documental curricular polêmica, a falta deste conhecimento pode trazer dificuldades aos estudantes que pretendem seguir carreiras em cursos superiores que envolvem as ciências exatas, como por exemplo, na engenharia elétrica. A relação entre os números complexos, geometria e noções da Física avançada, conhecimentos esses requeridos para a aprendizagem de circuitos elétricos em corrente alternada,

> [...] somente ocorrerá se os estudantes tiverem conhecimentos sobre números complexos na estrutura cognitiva, caso contrário, dificilmente ocorrerá o processo de interação entre conhecimentos prévios (conhecimentos matemáticos) e novos (conhecimentos de Física). A falta de conhecimentos prévios dificulta a compreensão e a aprendizagem dos conceitos relacionados aos circuitos elétricos. Nesse cenário, o estudante terá dificuldade para compreender os conceitos ou os processos de resolução e, possivelmente, memorizará algoritmos para resolver casos específicos envolvendo os números complexos. (PUHL; LIMA; MÜLLER, 2021, p. 54).

Diante das dificuldades para o ensino dos números complexos, buscou-se informações em pesquisas acadêmicas a fim de compreender estratégias didáticas que possam auxiliar professores e estudantes a superarem dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem desse conteúdo. A busca do *corpus* se concentrou no levantamento dos trabalhos que abordam alguma estratégia didática de ensino de números complexos por meio de algum recurso didático, seja ele formado por tarefas, objetos de aprendizagens, sequências didáticas, metodologias, entre outros, no período de 2015 a 2020. Este estudo caracteriza-se como uma revisão sistemática cujo objetivo é apresentar um levantamento bibliográfico com propostas sobre o ensino de números complexos em dissertações e teses brasileiras disponíveis no portal da CAPES no período supramencionado.

2.2 Procedimentos metodológicos

Este capítulo apresenta uma revisão sistemática, conforme Mendes e Pereira (2020, p. 209):

> [...] compreendemos que a revisão sistemática consiste em sistematizar aspectos de interesse contidos na literatura tomada como referência, de modo a seguir uma organização e um processo de seleção que evidencie o que foi feito para, posteriormente, ter possibilidade de apontar rumos de investigações.

Com o propósito de identificar os trabalhos a serem analisados, fizemos uma consulta preliminar ao Catálogo[7] de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) utilizando “Números Complexos” e “Complex Number”, separadamente, como palavras-chave. Essa busca evidenciou um total de 250 trabalhos, entre dissertações de mestrado e teses de doutorado, publicados até 2020. Para compor o *corpus* desta pesquisa, refinamos os resultados por área de conhecimento, especificamente em duas opções disponíveis pela CAPES: *ensino*; e *ensino de ciências e matemática*. Dessa forma, encontramos 26 trabalhos contemplados nessas áreas e, desses, foram descartados quatro anteriores à plataforma Sucupira e seis que não têm relação direta com o objetivo desse trabalho.

Após as leituras dos aspectos mais relevantes encontrados nos resumos, selecionamos 16 trabalhos, sendo 15 dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, que apresentam alguma estratégia didática para o ensino de números complexos. Desses 16, destacamos o trabalho de Carvalho (2020), que aborda estudos no período de 1992 a 2017 em formato de pesquisa documental, cujos dados também foram buscados no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, e já contempla em si, nove dissertações dos dezesseis trabalhos antes selecionados. Com isso, descartamos essas nove dissertações, pois estas já tinham sido analisadas por Carvalho (2020).

Porém, o estudo de Carvalho (2020) não contempla os demais trabalhos, a saber: a tese de Moreira (2015) e cinco dissertações: Silva (2016), Azevêdo (2016), Agricco Júnior (2017), Paulo (2019) e Mendes (2020). Com isso, definimos então, sete trabalhos para integrar o *corpus* dessa pesquisa e que foram organizados em ordem cronológica no Quadro 2.1 a seguir:

---

[7]Disponível em: http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. A busca foi realizada em 30/11/2021.

Quadro 2.1 – Trabalhos selecionados do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES para análise

Ordem / Nível / Ano de defesa			Título do Trabalho e Autor
01	Doutorado Acadêmico	2015	*Os jogos de linguagem entre surdos e ouvintes na produção de significados de conceitos matemáticos*. Ivanete Maria Barroso Moreira
02	Mestrado Profissional	2016	*Uma situação didática para ensino de números complexos com foco em eletricidade pela via da engenharia didática*. Nilson Alves Da Silva
03	Mestrado Profissional	2016	*Ensino Desenvolvimental: Um Experimento Didático Formativo para o estudo dos Números Complexos.* Douglas Pereira Azevêdo
04	Mestrado Acadêmico	2017	*Números Complexos e Grandezas Elétricas: Análise de Livros Didáticos Apoiada na teoria dos Registros de Representações Semióticas*. Renato Cezar Agricco Junior
05	Mestrado Acadêmico	2019	*Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos*. Rafael Dos Reis Paulo
06	Mestrado Acadêmico	2020	*Abordagens e descritores de pesquisas sobre o ensino de números complexos realizadas no período de 1992 a 2017: um percurso para a meta-análise*. Priscila Lopes De Lima Carvalho
07	Mestrado Acadêmico	2020	*O ensino dos números complexos por meio de uma proposta metodológica de sala de aula invertida*. Joao Anderson Mendes

Fonte: dados da pesquisa.

Após a definição do *corpus* dessa pesquisa, identificamos os objetivos, a proposta metodológica, os potenciais participantes e os possíveis resultados a fim de conhecer o que já foi construído e produzido de propostas metodológicas e de materiais didáticos sobre o ensino de números complexos.

2.3 Discussão e Resultados

Em sua tese de doutorado, Moreira (2015) buscou analisar os jogos de linguagem entre sujeitos surdos e ouvintes e sua colaboração para a compreensão e ressignificação de conceitos matemáticos em uma sala de aula inclusiva. Os instrumentos de coleta do material empírico para a investigação foram: observação; gravações (vídeo e áudio); questionários; entrevistas; anotações em diários de bordo; e atividades das aulas de Matemática.

Em uma das análises, tratou-se do uso de regras de linguagem no ensino de conteúdos matemáticos: Equação da Circunferência e Números Complexos. Para tanto, a autora realizou a sua pesquisa em uma sala de aula inclusiva do 3º ano do Ensino Médio, com cinco alunos surdos, sete alunos ouvintes, uma intérprete de Libras e um professor de Matemática. Segundo a autora, foi possível perceber vantagens em se trabalhar com alunos ouvintes e surdos no processo de ensino de conceitos matemáticos, pois:

> [...] alfabetização dos ouvintes em língua de sinais colabora com o ensino, por não haver nenhuma disputa de interesse. Esta colaboração para o ensino de conceitos matemáticos beneficia não somente o surdo, mas também o ouvinte que passa o ano aprendendo a língua de sinais e repetindo o que lhe foi ensinado, reforçando o aprendizado tanto da língua de sinais como dos conteúdos matemáticos (MOREIRA, 2015, p. 117).

Em sua tese, Moreira (2015) não destaca uma dificuldade específica na aprendizagem de números complexos, no entanto, de modo geral, a autora menciona que “uma questão que parece interferir no ensino de matemática para surdos é a dificuldade da tradução da linguagem matemática na língua de sinais, a escassez de sinais matemáticos específicos em Libras” (MOREIRA, 2015, p. 116). Situações como essa podem estar relacionadas à abstração requerida no estudo dos números complexos. Ainda, nas tarefas matemáticas sobre números complexos analisadas pela autora, percebe-se a ausência de representações gráficas, com prevalência das algébricas. Para discutir a escassez de sinais matemáticos apontados por Moreira (2015), apresentaremos, de maneira sucinta, o trabalho de Sales (2013).

Sales (2013) desenvolveu um estudo em sua tese de doutorado sobre aspectos nos quais os processos de visualização matemática contribuem para a apropriação de conteúdos de matemática pelos alunos surdos. Segundo o autor, há importantes perspectivas que permeiam o processo de ensino e aprendizagem de alunos surdos, sendo as interações visuais um indicador de caminhos para que estes educandos possam aprender e apresentar conhecimentos. Esses aspectos, revelam que

> [...] o ambiente proporcionado pela resolução de problemas aditivos, por meio da Língua Brasileira de Sinais (Libras), associados a alguns **recursos didáticos, principalmente os visuais**, permitiram estabelecer um canal de comunicação favorável para que os alunos interagissem com seus pares e também com o grupo, movimento que lhes proporcionou a apropriação de conceitos matemáticos relativos ao conteúdo trabalhado (SALES, 20013, p. 16-17 – grifo nosso).

Ao analisarmos os estudos de Moreira (2015) e de Sales (2013), ambos com propostas para o ensino de matemática para alunos surdos, percebemos uma diferença entre eles: a diversidade de representações e recursos didáticos visuais para representar um objeto matemático. De acordo com as observações de Moreira (2015), o conteúdo “números complexos” foi introduzido em forma de exposição oral e escrita no quadro, utilizando o contexto histórico como ponto de partida para a discussão desse conjunto numérico e, na sequência, foram utilizados registros algébricos. Já no trabalho de Sales (2013), parece que o autor encontrou uma possibilidade de contornar a escassez de sinais matemáticos específicos em Libras, pois este autor afirma que

> [...] ato de 'ver, obter informações para, então, perceber, visualizar e compreender', não é algo natural. Foi preciso educar o olhar para o ato de ver, pois, da mesma forma que a linguagem verbal, a linguagem visual é constituída por um conjunto de símbolos e informações. Da mesma forma **a visualidade do surdo não é algo natural e também precisa ser desenvolvida. Nesse sentido, verificamos a importância das atividades para desenvolvimento da visualidade, oferecendo subsídios para ampliar os 'olhares' aos sujeitos surdos** (SALES, 2013, p.160 – grifo nosso).

Silva (2016) buscou construir e avaliar, em sua dissertação, um instrumento didático, denominado *Complex*, em uma Situação Didática, que pudesse contribuir para a produção de sentido de Números Complexos e que visasse conceitos básicos de Eletricidade, mais especificamente sobre circuitos elétricos com corrente alternada, por alunos do curso técnico em Eletromecânica.

O instrumento manipulável foi montado a partir de uma folha de madeirite para a formação de um plano cartesiano, devidamente delimitado com uma quantidade específica de furos em cada eixo do plano. Ainda, há *plugs* para limitar o final das coordenadas do gráfico cartesiano e um transferidor centrado no ponto zero do gráfico cartesiano para a visualização dos ângulos de cada número complexo representado no *Complex*. Para o autor, tal instrumento tem a pretensão de:

> [...] elevar o aluno à condição de **sujeito ativo no processo de aprendizagem**, contrapondo-se à aprendizagem mecanizada por memorizações desligadas de sentidos. Dessa forma, ambicionou-se ir além ao indicar um ambiente de ensino que oportunizasse maior interação entre alunos e objeto de estudo, ao promover a reflexão e o desenvolvimento de diferentes conceitos envolvidos com a manipulação do *Complex* (SILVA, 2016, p. 72 – grifo nosso).

Destacamos a preocupação de Silva (2016) em elaborar um instrumento que permite a condição de sujeito ativo no processo de aprendizagem, pois esta condição vai ao encontro de uma das características de uma Sequência Didática Investigativa proposta por Motokane (2015), em que considera que a participação ativa

> [...] permite que as ideias circulem livremente e que sejam passíveis de contestações ou concordâncias. Nessa condição os problemas são discutidos, e formas diferentes de resolvê-los são propostas, assim, novos problemas vão surgindo (MOTOKANE, 2015, p. 127).

Para alcançar seus objetivos, a Engenharia Didática foi utilizada como um método qualitativo de investigação na área de Matemática, mostrando-se uma ferramenta útil na elaboração da Situação Didática envolvendo Números Complexos com foco na área de Eletricidade. Foram aplicados 15 problemas divididos em cinco seções, de três problemas cada uma.

Como resultado, o instrumento elaborado por Silva (2016) mostrou potencial para a aprendizagem de 14 dos 15 problemas aplicados. Além disso, identificou que as principais facilidades epistemológicas apresentadas pelos alunos foram: manipulação dos vetores, visualização dos ângulos, operação de adição e multiplicação dos vetores na forma retangular. Já as maiores dificuldades foram: visualização da forma geométrica formada pelo vetor resultante e multiplicação dos vetores na forma polar.

Em sua dissertação, Azevêdo (2016) buscou analisar e discutir práticas e estratégias de ensino a fim de propiciar aos alunos a construção do conceito de Números Complexos e, para isso, apropriou-se da Teoria de Ensino conhecida como Experimento Didático Formativo de Davydov em uma turma de alunos de terceiro ano do Ensino Médio. Para realizar a avaliação desse Experimento, Azevêdo adotou como critérios práticos o registro em tabelas, listas de controles, caderno de anotações, gravadores e fotografias.

No que se refere às tarefas que requerem dos alunos algum tipo de investigação, Azevêdo (2016) comenta sobre o surgimento de situações em sala de aula que antes não haviam sido percebidas:

> Em muitas releituras em conjunto com os alunos e leituras feitas por eles, **surgiam novas situações que ainda não tinham sido percebidas** e também em muitas tarefas que se pretendia investigar algo, o aluno conseguiu perceber outras. A aprendizagem é um processo social e essa clareza acarreta a compreensão de que a interação entre os sujeitos envolvidos possui um caráter crucial no desenvolvimento (AZEVÊDO, 2016, p. 145 – grifo nosso).

Essa percepção do autor sobre tarefas com propósitos investigativos vai ao encontro do que propõe Motokane (2015), quando este ressalta o ensino por investigação associado à participação ativa dos alunos.

Como resultado, o trabalho de Azevêdo (2016) avaliou que as dificuldades encontradas por parte dos alunos se deram na “deficiência de conhecimentos prévios, pois, nessa organização de ensino, o saber que antecede o outro é essencial para a formação de novos conceitos” (AZEVÊDO, 2016, p. 145). Essa questão apontada pelo autor pode trazer uma importante reflexão para o professor que ensina matemática, levando-o a examinar os conteúdos que podem ser revistos ou aprofundados no momento do ensino dos números complexos. Ainda, o uso da tecnologia como recurso para permitir a visualização do objeto matemático números complexos se mostrou eficiente para relacionar a álgebra com a geometria. De acordo com Azevêdo (2016),

> Sobre o software GeoGebra, este se consolida de fato como um recurso de suma importância para o professor e iniciante na pesquisa, devido a sua estrutura didática e potencialidade pedagógica, por permitir a movimentação e visualização dos objetos matemáticos (construções não estáticas), além de relacionar de fato álgebra e geometria. O que facilita a construção do conhecimento matemático, por meio da experimentação, e do ato de conjecturar, formalizar e generalizar constituindo assim a experiência da construção do conceito pela mediação pedagógica do professor no uso do software GeoGebra, proporcionando uma percepção diferente da Matemática (AZEVÊDO, 2016, p. 146).

Com o objetivo de tentar descobrir como o conceito matemático de número complexo é apresentado em alguns livros didáticos adotados em cursos de Engenharia Elétrica na disciplina Circuitos Elétricos, no que se refere à presença de representações semióticas de números complexos e das representações semióticas das grandezas elétricas relacionadas a esses números, Agricco Júnior (2017) analisou quatro livros didáticos utilizados em universidades que ofertam a graduação em Engenharia Elétrica. Para realizar tais análises, o autor utilizou embasamento teórico dado pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval, e os procedimentos metodológicos procuraram seguir a Metodologia de Análise de Conteúdo de Laurence Bardin, com cunho qualitativo e quantitativo.

O autor concluiu que, em todos os livros didáticos analisados, as abordagens dos números complexos eram feitas predominantemente utilizando representações algébricas cartesianas e representações algébricas polares. Esse predomínio de uso de representações algébricas “acarreta uma visão algébrica para a teorização e para as resoluções dos exercícios”, bem como “permite conjecturar a possibilidade de o docente estabelecer estratégias para um tratamento mais gráfico e vetorial das representações semióticas dos números complexos e das grandezas elétricas associadas a esses números” (AGRICCO JUNIOR, 2017, p. 212). Essas considerações, feitas pelo autor, vão ao encontro do que pensam Assemany e Harab (2013), quando estas autoras ponderam que o ensino de números complexos prevalecente em sua forma algébrica, desperdiça o potencial de visualização proporcionado pela geometria, e que quando “um número complexo é representado no plano, sua leitura vetorial permite que os conceitos de Módulo e Argumento de números complexos sejam associados à Módulo e inclinação de vetores" (ASSEMANY; HARAB, 2013, p. 639).

Outro estudo que priorizou a diversidade de registros e utilizou em suas análises e discussões a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003; 2009) é a dissertação de Paulo (2019). Nesse trabalho, o autor utilizou em sua metodologia os pressupostos da Engenharia Didática para avaliação de uma sequência didática elaborada por ele, com o objetivo de investigar, em duas turmas de Ensino Médio de uma instituição pública, como o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra interfere na abordagem dos números complexos quando se mobilizam distintas representações semióticas em situações de ensino.

Como resposta à sua investigação, Paulo (2019) avaliou que

> [...] o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra interferiu de duas formas nas representações utilizadas, sendo que a primeira foi na possibilidade de tornar os registros de representação dinâmicos. E, a segunda, consequência da anterior, permitiu uma maior congruência entre os registros de representação utilizados nas atividades (PAULO, 2019, p. 137).

Ainda, o autor considerou que, de maneira geral, a sequência didática desenvolvida levou os participantes da pesquisa a se apropriaram das representações e transformações semióticas inerentes ao objeto em estudo.

A partir de informações coletadas na área da educação matemática no banco de teses da Capes e em referências encontradas nos trabalhos selecionados, Carvalho (2020) examinou 37 estudos acadêmicos, entre teses, dissertações e artigos sobre o ensino de números complexos, no período de 1992 a 2017. Para isso, a autora organizou esses trabalhos por meio de um levantamento bibliográfico, identificando fatores comuns, categorizando-os em abordagens e descritores.

Segundo a autora, as abordagens foram categorizadas de acordo com os enfoques dos trabalhos: abordagem geométrica; abordagem algébrica; abordagem histórica; formação de professores; de mudança metodológica; de conversões de representações; análise de livros didáticos; de levantamento de pesquisas; e apelo à tecnologia. De acordo com Carvalho (2020), nessas categorias, foi possível identificar "a preocupação didática sobre o ensino dos números complexos, resultando na quantidade de trabalhos que propõe sequências didáticas voltadas para o ensino desse conteúdo" (CARVALHO, 2020, p. 56). Além disso, destacam-se trabalhos com aplicação dos números complexos em áreas da Engenharia.

Outra consideração feita pela autora, trata-se da necessidade de abandonar o ensino de números complexos como procedimentos mecânicos e repetitivos, e de inserir o uso de tecnologias digitais nas metodologias de ensino. Ainda, Carvalho (2020) defende a utilização de diferentes representações semióticas para o objeto matemático números complexos, quando esta afirma que

> [...] não é recomendável considerar apenas uma representação, pode-se ter um enfoque principal, mas para a compreensão temática é necessário transitar sobre as diferentes representações semióticas para colaborar para a construção desse conteúdo (CARVALHO, 2020, p. 57).

O incentivo ao uso de diferentes tipos de representações semióticas para representar objetos matemáticos está também contemplado na Base Nacional Comum Curricular. De acordo com a BNCC (2018),

> [...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio (BRASIL, 2018, p. 519).

Preocupado com a necessidade de uma pedagogia diferenciada, destacando a importância do incentivo à autonomia do aluno na construção de seus conhecimentos, Mendes (2020) investigou se o uso de uma metodologia ativa, como a Sala de Aula Invertida, traz avanços em aspectos que favorecem a aprendizagem no ensino de números complexos.

Nesse trabalho, o autor utilizou a metodologia denominada Pesquisa-Ação, por se tratar de um estudo em que o pesquisador também participa ativamente da pesquisa. No caso específico dessa investigação, a aplicação das atividades se deu no contexto de uma escola particular de classe média alta, em quatro turmas de terceiro ano do Ensino Médio, totalizando 151 estudantes. A sequência de atividades contou com um vídeo de produção autoral do professor pesquisador e questionários, materiais estes postados em um ambiente virtual de aprendizagem. Como as atividades propostas envolviam diferentes tipos de representação semiótica, o autor optou por utilizar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval como forma de trazer contribuições aos resultados nas análises das produções dos alunos.

Segundo Mendes (2020), o uso da metodologia ativa trouxe vantagens ao colocar os estudantes no centro do processo de aprendizagem, fazendo com que eles pesquisassem e estudassem os conteúdos propostos de maneira antecipada, cada um no seu tempo, incentivando a autonomia de cada estudante. Além disso, a metodologia empregada possibilitou o domínio de diferentes representações dos números complexos. De acordo com o autor, esse domínio "permitiu que esses alunos fizessem um esboço da representação geométrica de cada número complexo e, entendendo que o módulo é a distância do afixo até a origem" (MENDES, 2020, p. 90).

A partir dos resultados, pode-se evidenciar algumas preocupações que alguns autores possuem em comum. Destaca-se:

- os trabalhos de Agricco Júnior (2017), Paulo (2019), Carvalho (2020) e Mendes (2020), que ressaltam a importância do uso de diferentes tipos de representações semióticas para representar o objeto matemático números complexos, e a ausência dessa diversidade de representações no trabalho de Moreira (2015).
- Os resultados das pesquisas de Azevêdo (2016), Paulo (2019) e Carvalho (2020) acenam para o uso efetivo de tecnologias e ambientes de geometria dinâmica, como por exemplo, o Software GeoGebra, para facilitar a construção do conhecimento matemático, bem como relacionar de fato a álgebra com a geometria.
- A aplicação dos números complexos de forma interdisciplinar em outras áreas de conhecimento de formação técnica profissional ou de Ensino Superior, como por exemplo, Silva (2016), Agricco Júnior (2017) e Carvalho (2020), que trazem propostas na área de Engenharia Elétrica.
- A proposição de tarefas investigativas, nos trabalhos de Azevêdo (2016) e de Mendes (2020), como forma de incentivar a autonomia do estudante e possibilidades de novas descobertas em situações que ainda não haviam sido percebidas, na tentativa de se investigar algo e levar o aluno a conseguir identificar uma nova situação.
- Propostas de ensino de forma lúdica, como o uso de jogos, são apontadas por Moreira (2015) e por Silva (2016) como uma maneira plausível para auxiliar na formação dos conceitos e procedimentos matemáticos dos estudantes sobre o objeto Números Complexos.
- Ainda, a importância do trabalho em grupo no contexto de uma sala com alunos de inclusão ficou evidente no trabalho de Moreira (2015) e a participação ativa dos estudantes foi considerada por Silva (2016) como forma

de contrapor a uma possível aprendizagem mecânica, com memorizações e desvinculada de sentidos.

- A possibilidade de retomada de conteúdos que podem ser revistos ou aprofundados no momento do ensino dos números complexos foi colocada por Azevêdo (2016), como forma de diminuir lacunas de aprendizagens nos conhecimentos prévios requeridos para o estudo desses números.

Considerações

Buscou-se, neste capítulo, apresentar um levantamento bibliográfico sobre estratégias didáticas para o ensino de números complexos em dissertações e teses brasileiras disponíveis no portal da CAPES no período de 2015 a 2020. Para tanto, realizou-se a leitura dos sete trabalhos que compuseram o *corpus* dessa pesquisa, evidenciando de maneira sucinta o objetivo, o contexto e os resultados de cada trabalho.

Entre as estratégias observadas, podemos destacar o trabalho com diferentes formas de representações semióticas, uso de tecnologias, interdisciplinaridade, jogos matemáticos e proposição de tarefas investigativas que promovam uma participação ativa dos estudantes.

As pesquisas aqui relatadas serviram de base para a criação de dois produtos educacionais: Sequência Didática Investigativa, apresentada no capítulo 3, e o jogo Trincas Complexas, apresentado no capítulo 4, pois, de acordo com a síntese exposta, o ensino de números complexos pode envolver atividades interdisciplinares, que englobem alguma aplicação em contexto real. O produto educacional I aborda uma sequência didática com tarefas interdisciplinares que trazem características investigativas, tendo como intenção proporcionar uma participação ativa do estudante em seu processo de aprendizagem, bem como manejar diferentes registros de representação semiótica. Já o produto educacional II, sugere um jogo com o potencial de discutir a utilização da representação gráfica no processo de significação das operações com números complexos, tornando, possivelmente, algumas aulas de matemática mais interessantes em relação a um conteúdo que, muitas vezes, é apresentado predominantemente de maneira abstrata.

3 ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTERDISCIPLINAR SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS NO CONTEXTO DO ENSINO POR INVESTIGAÇÃO

Este capítulo visa a apresentação de uma sequência didática (SD) com tarefas para o ensino de números complexos para o terceiro ano do Ensino Médio, avaliando ainda quais preceitos são contemplados nessa SD no que se refere às características das Sequências Didáticas Investigativas (SDI) propostas por Oliveira *et al.* (2021). Em relação à elaboração das tarefas, adotamos os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Para tanto, descrevemos brevemente a estrutura das tarefas, apresentando as teorias que as fundamentaram, bem como os objetivos que nortearam sua elaboração. Acredita-se que a SD possui elementos que vão ao encontro das características da SDI, e tem o potencial de permitir uma participação ativa dos alunos, com tarefas que apresentam conceitos científicos e que podem ser programadas de forma a ter começo, meio e fim em cada aula. Além disso, o professor tem a possibilidade de ser mediador no decorrer da aplicação dessas tarefas, apreciando de forma processual a argumentação e a participação dos estudantes nas atividades por meio das produções escritas, comentários, apresentações, criações, trabalhos em grupos, entre outros.

3.1 Introdução

Apresentamos e discutimos, neste capítulo, aspectos relativos às características das Sequências Didáticas Investigativas (SDI) propostas por Oliveira *et al*. (2021) que podem ser contempladas em uma Sequência Didática (SD) criada[8], que busca aliar a interdisciplinaridade à diversidade de registros de representação semiótica, discutidos no capítulo anterior.

A ideia de utilizar características de uma sequência didática investigativa foi pensada como forma de permitir a participação ativa do aluno e que, além disso, por se tratar de uma proposta interdisciplinar, buscou-se uma estratégia de "ensino por investigação" que pudesse ser aplicada pensando nas disciplinas de Matemática e

[8] Essa SD pode ser encontrada acessando o produto educacional "Decolagem e pouso de um avião: embarque nesse voo com destino a uma aplicação de números complexos", vinculado à essa dissertação.

Física, pois tarefas investigativas específicas de Matemática, assim como de outras disciplinas, acabam apresentando particularidades.

Carvalho (2013) considera que o ensino por investigação se caracteriza pela proposição de um problema cuja resolução exija o diálogo e permita a liberdade intelectual dos estudantes, levando-os ao desenvolvimento de interações e práticas discursivas importantes do fazer científico, como: descrições, explicações, argumentações, generalizações, entre outras.

Na busca do conceito de sequência didática (SD), apoiamo-nos nos estudos de Henriques (2016), que apresenta a seguinte definição:

> Uma sequência didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou **tarefas**, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar [análise institucional] em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada situação, problema ou tarefa [tendo uma praxeologia completa] (HENRIQUES; 2016, p. 4, grifo nosso).

Assim, as tarefas aqui descritas seguem o significado dado por Pires (2011), que define:

> As tarefas matemáticas, conforme o seu tipo, podem permitir diferentes formas de entender ou fazer Matemática. Podem apelar mais a processos rotineiros ou constituir um desafio à exploração ou descoberta, exigir um raciocínio mais reprodutor ou um raciocínio mais criador, permitir uma maior uniformidade de ritmos de aprendizagem ou favorecer uma maior diversificação, ter um carácter mais convergente ou um carácter mais divergente, reforçar uma visão da Matemática mais estática e como ‘produto acabado’ ou apontar para uma visão mais dinâmica e como ‘construção’, estabelecendo conexões matemáticas e proporcionando experiências matemáticas com mais significado (PIRES, 2011, p. 32)

Dessa forma, a concepção do referido autor deixa evidente que as tarefas matemáticas, por exemplo, podem ter caráter exploratório com possibilidades de descoberta de aplicações e conceitos acerca de um objeto matemático. Nesse sentido, como ponto de partida da SD, propomos uma questão em contexto real com o potencial de possibilitar um processo de investigação. No decorrer da SD, há orientações para o professor e curiosidades sobre fatos que podem complementar o conteúdo abordado e servir como discussão para ampliar a exploração ou a descoberta a partir da investigação das tarefas sobre aplicações de números complexos.

O tema escolhido para a concepção da SD foi o voo de um avião. Tal escolha se deu por este apresentar aplicações físicas em situações reais e pouco exploradas em materiais didáticos. Assim, com base nessa possibilidade, foram elaboradas tarefas interdisciplinares que apresentam aplicações de números complexos na aerodinâmica. Para tanto, concordamos com Studart e Dahmen (2006), quando esses afirmam que:

> O voo tem inspirado a imaginação do homem desde tempos remotos. Antes algo restrito a poucos, hoje os aviões se tornaram um meio de transporte acessível, fato este comprovado pelo crescimento espantoso do transporte aéreo nos últimos anos. Mesmo com esta popularização, a fascinação pelo voo continua. Assim é surpreendente como a descrição do voo não tenha sido usada intensamente em livros didáticos e na sala de aula para demonstrar em todos os níveis de escolaridade a aplicação de princípios básicos da Física em exemplos atraentes (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Há ainda outros estudos que mostram aplicações de números complexos na aerodinâmica, como propostos por Smole e Diniz (2010), Pellegrini e Rodrigues (2015) e Novais (2020), os quais também apontam a importância de se trabalhar aplicações em contextos reais de uso e aplicabilidade em sala de aula.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000; 2002) e as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013) ressaltam a importância da interdisciplinaridade e da contextualização no Ensino Médio. A **interdisciplinaridade** é observada pela possibilidade de tratar os temas em diálogos, problematizações e sistematizações em disciplinas diferentes, podendo ser no momento da aula de um professor ou de outro, ou de ambos simultaneamente. Já a **contextualização** caracteriza-se como a forma de explicar os motivos ou as características precedentes de uma situação de maneira a permitir o correto entendimento sobre um assunto, por exemplo, o que faz um avião voar e qual a sua relação com os números complexos.

O atual Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (PARANÁ, 2021) sugere algumas estratégias que podem ser adotadas a fim de que a interdisciplinaridade ocorra:

> [...] por meio do trabalho pedagógico com projetos, oficinas, laboratórios, entre outras possibilidades, diante do rompimento com o trabalho isolado apenas nos componentes curriculares. Também é necessário considerar a intradisciplinaridade, ou seja, é de extrema importância promover o diálogo entre os componentes curriculares e também a contextualização dos conhecimentos no interior da mesma disciplina. **Sequências didáticas que levem em consideração essas lógicas colaboram para uma educação relacional e integrada** (PARANÁ, 2021, p. 78-79 – grifo nosso).

Assim, com base em tais considerações, o principal objetivo deste capítulo é avaliar quais preceitos são contemplados nessa sequência didática, segundo as características de Sequências Didáticas Investigativas (SDI) propostas por Oliveira *et al*. (2021).

3.2 Princípios Norteadores: Sequência Didática, interdisciplinaridade e Números Complexos na Aerodinâmica

Atualmente, há um amplo debate acerca de metodologias de ensino que viabilizem a compreensão de conhecimentos matemáticos. Em particular, destacamos os números complexos, uma vez que estes abrem caminho para o uso de sequências didáticas e ressaltam sua eficácia no processo de ensino e de aprendizagem no âmbito da Matemática.

O ensino de Números Complexos pode estar motivado em suas aplicações; em seu carácter instrumental, necessário à construção do conhecimento em outras áreas; ou ainda na importância de resolução de situações-problema cotidianas que envolvam, por exemplo, conceitos de Trigonometria ou Física. No entanto, para que ocorra uma aprendizagem significativa, existem, no mínimo, duas condições a serem consideradas: *i)* um mecanismo de aprendizagem significativa, ou seja, uma disposição para relacionarem o novo material a ser apreendido, de forma não arbitrária e não literal, à própria estrutura de conhecimentos; e *ii)* o material que apreendem seja potencialmente significativo para os mesmos, nomeadamente relacional com as estruturas de conhecimento particulares, numa base não arbitrária e não literal (AUSUBEL, 2003). Esse último diz muito a respeito de uma potencial interferência na construção de habilidades e competências intelectuais, que podem proporcionar a agilidade do raciocínio dedutivo do estudante (PUHL; LIMA, 2016).

Nesse sentido, as tarefas do material proposto devem estimular a curiosidade e o interesse, bem como estarem diretamente ligadas ao objeto de estudo. Com isso, uma proposta de sequência didática parece ser bem-vinda para que os estudantes possam compreender, refletir, estabelecer conjecturas e testar hipóteses.

Para tanto, esta SD apresenta uma aplicação que pode ser interessante como motivação para professores iniciarem uma aula com números complexos, além de uma proposta a ser realizada em sala de aula no decorrer do ensino desse conteúdo.

Para o caso específico dessa SD, utilizamos, em uma das tarefas, representações de forças e os vetores que podem ajudar a explicar, de maneira interdisciplinar por meio da Matemática e Física, a aerodinâmica para a sustentação gerada por um corpo em movimento.

A aerodinâmica é uma parte da mecânica dos fluidos que estuda os gases em movimento, e em particular o movimento relativo entre o ar e os corpos sólidos. Ao construir um avião, os engenheiros se fundamentaram nos princípios da aerodinâmica, principalmente na elaboração do aerofólio, projetado para causar certa variação da velocidade de um fluido, acarretando uma diferença de pressão. Nas aeronaves, os aerofólios encontram-se nas asas e no leme, proporcionando a sustentação e direção do avião, logo mantendo-o no ar, cuja explicação está na conservação de energia enunciada pelo Princípio de Bernoulli (PORTOLAN, 2017).

Estudos como os de Camata (2015), Pereira (2017) e Novais (2020) dizem que há contribuições dos números complexos na aerodinâmica e destacam o cientista russo Nicolai Egorovich Joukowski (1847-1921).

Camata (2015) aponta que Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, calculou a força de levantamento responsável pela sustentação do corpo. Ainda, ressalta que os números complexos permitiram uma explicação matemática que possibilitou definir as características do perfil aerodinâmico da asa do avião, colaborando com o progresso aeronáutico.

Pereira (2017) comenta que não se pode deixar de destacar a grande contribuição dos números complexos para várias áreas, como para a Dinâmica dos Fluidos e Aerodinâmica, onde Nikolai Joukowski desenvolveu um método que possibilitou que engenheiros aeronáuticos fizessem estudos sobre aerofólios e sua influência na sustentação de aviões (construção das asas).

Novais (2020) ressalta que esse cientista foi responsável por demonstrar que a imagem de uma circunferência de raio unitário no z − plano é mapeada[9] dentro de uma curva de formato de um aerofólio no w − plano, semelhante a uma asa de avião. Ao estudar a função $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, deduziu uma função de variável complexa dada por: $F(z) = z + \frac{1}{z}$.

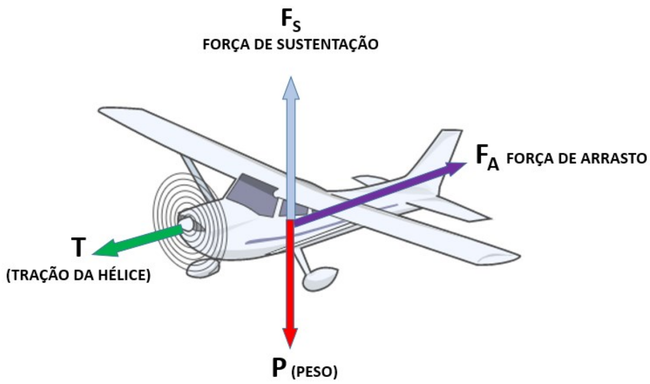
---

[9] Mais informações em: https://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowsky/. **Deduções sobre o aerofólio de Joukowski**. Acesso em 10/01/2022.

Essa transformação ficou conhecida como transformação de Joukowski, que propõe um aproveitamento da conhecida solução analítica para um escoamento potencial[10] ao redor de um cilindro com circulação e conclui que "se os fluxos aerodinâmicos" para um fluxo em torno de um círculo são conhecidos, então suas imagens sob o mapeamento $w = f(z)$ será o fluxo aerodinâmico para um fluxo em torno do aerofólio (NOVAIS, 2020).

Os vetores e forças, estudados no Ensino Médio, trazem uma possibilidade de aplicação de números complexos e uma oportunidade de realização de conversões entre diferentes representações de registros semióticos. A Figura 3.1 ilustra algumas forças e vetores que podem atuar em uma aeronave.

Figura 3.1 - Exemplos de forças e vetores que atuam em uma aeronave



Fonte: a imagem do avião está disponível no site *canva*[11]. Os vetores foram inseridos pelo autor.

Studart e Dahmen (2006) definem as quatro forças envolvidas na física do voo como: Força de Sustentação (F_S) "é a componente da força aerodinâmica perpendicular à direção do movimento do voo"; Força de Arrasto (F_A), "essencialmente uma força de atrito, é a componente da força aerodinâmica paralela à direção de voo"; Peso (P) "é a força da gravidade ($P = m \cdot g$) atuando sobre o avião e dirigida para o centro da Terra"; Tração da Hélice (T) "é a força produzida pelo motor e é dirigida ao longo do eixo longitudinal do avião" (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

---

[10] [...] a teoria do escoamento potencial, a qual podemos chamar também de escoamento complexo, tem influência direta na aerodinâmica, por muitas vezes determinando o comportamento de um fluido em um escoamento ao redor de um cilindro, indicando características importantes a serem observadas, como por exemplo a corrente do fluido e a velocidade de um fluido (Novais 2020, p. 125).
[11]Imagem do avião disponível em: https://www.canva.com/. Acesso em 22/12/2021.

3.3 Percurso Metodológico

Para avaliar quais os preceitos de Sequências Didáticas Investigativas estão presentes na SD, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa de cunho documental de acordo com Kripka *et al*. (2015). Com isso, cada uma das tarefas propostas com base nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foram analisadas de acordo com os preceitos apresentados por Motokane (2015) e adaptadas por Oliveira *et al*. (2021), conforme representado no Quadro 3.1, pois é sobre as tarefas dessa sequência didática que se trata a próxima seção.

Quadro 3.1 - Aspectos Avaliativos para uma SDI e as características para avaliação

Aspectos Avaliativos da SDI (a SDI apresenta)	Características a serem avaliadas
1. Participação ativa da/o aluna/o	- Os alunos podem discutir suas ideias e as dos colegas; - Propõe problemas e resoluções; - Permite compartilhamento das impressões de forma livre.
2. Atividades programadas	- As atividades são programadas para que possam ter começo, meio e fim em cada aula; - Possibilitam fechamentos e sistematizações aula a aula.
3. Conceitos científicos	- Os conceitos científicos são foco da aprendizagem; - Estão declarados de modo explícito para alunos e professores; - Esses conceitos são parte do conteúdo programático da escola, a fim de criar uma identidade da SDI com o trabalho que o professor regente já realiza.
4. Produção de atividades	- Há produção de atividades que devem ser corrigidas e partilhadas em sala de aula; - As devolutivas das produções são mediadas pelos professores e fundamentais para a aquisição de elementos da linguagem científica; - Atividades que podem complementar as informações das aulas, sistematizar conhecimentos, promover novas perguntas ou trazer os conteúdos para uma realidade mais próxima da vida do aluno; - Algumas atividades práticas de leitura, produção, experimentação, etc. podem fundamentar debates e estimular o posicionamento perante uma questão científica ou sociocientífica.
5. Proposição de situações problema	- Há um problema claro e explícito baseado em problemas da ciência; - O ponto de partida das atividades é uma situação problematizadora ou um problema autêntico.
6. Materiais de apoio utilizados	- As/os alunas/os recorrem a materiais de apoio de diferentes tipos para construir as justificativas no campo do conhecimento científico; - As informações das atividades são apresentadas pelo uso de diferentes suportes, tais como: vídeos, páginas da rede mundial, buscadores de informação, textos impressos, imagens impressas produzidas por diferentes equipamentos, entre outros.
7. Mediação da/o professora/a	- As atividades permitem que a linguagem seja modulada pela/o professora/a, para que as/os alunas/os utilizem terminologias e conceitos científicos; - Ela/e é o mediador de todas essas produções.
8. Avaliação	- É processual, avalia a argumentação dos/as estudantes, participação nas atividades e o desenvolvimento de condutas investigativas; - Os processos avaliativos constituem um todo coerente no processo investigativo de ensino/aprendizagem.

Fonte: Oliveira *et al*. (2021).

3.4 Características da TSD de Brousseau (2008) presentes nas tarefas

A elaboração dessas tarefas está baseada nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (2008), que tipifica quatro situações adidáticas como sendo aquelas representadas pelo esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem, onde o professor não tem o controle direto das variáveis que incidirão na situação (TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

Essas quatro situações adidáticas são descritas como: *i)* **situações de ação** – aquelas nas quais os estudantes agem diretamente sobre o que lhe é proposto. Esta etapa está presente em todas as tarefas e permite uma participação ativa dos alunos, conforme apresentado mais adiante, na seção 3.6.1; *ii)* **situações de formulação** – aquelas nas quais, a partir das investigações, o aluno "cria uma teoria" própria, e conjectura "verdades" sobre o assunto em estudo, onde é imprescindível a interlocução com outras pessoas, ou, ao menos, a redação de um texto explicativo conforme previsto na tarefas I e IV, e discutido na seção 3.6.4 em *produção de atividades*; *iii)* **situações de validação** – nesta etapa, as conjecturas e percepções acarretadas pela fase anterior são provadas. Destacamos esta etapa em todas as tarefas, nos momentos de conversões entre os registros gráficos e algébricos (e vice-versa); e, *iv)* **situações de institucionalização** – momento no qual é apresentada a sistematização do conteúdo em estudo e feito o confronto com o que foi percebido pelos alunos durante a investigação. Nesta etapa, o professor tem a oportunidade de fazer de forma explícita um resumo dos possíveis acertos e erros vivenciados pelos estudantes durante a aplicação da sequência didática, mostrando a importância da utilização de diferentes representações semióticas para a apreensão de um objeto matemático. Além disso, a institucionalização vai ao encontro de uma característica da sequência didática investigativa, apresentada mais adiante, na seção 3.6.7 sobre *mediação do professor*.

3.5 Descrição das tarefas apoiadas na perspectiva da TRRS de Duval (1995)

A sequência didática que será apresentada a seguir refere-se a um conjunto de quatro tarefas temáticas elaboradas com o intuito de trazer ao estudante a oportunidade de observar, pesquisar, analisar, argumentar e concluir de forma individual ou coletiva uma aplicação de números complexos em um contexto real de ensino e uso na ciência.

Procuramos seguir a concepção de Jiménez-Aleixandre e Puig (2010), que consideram que um problema autêntico é aquele que não tem uma resposta óbvia, implicando uma situação contextualizada em que o aluno reconhece como interessante. Buscamos ainda subsidiar cada questão pela teoria de Raymound Duval (1995), na qual consideramos que o aluno tem a possibilidade de apreender um conteúdo matemático por meio de suas múltiplas representações em registros de representações diferentes.

Com base nos referenciais teóricos que foram fontes de inspiração para presente trabalho, o Quadro 3.2 apresenta os títulos, as descrições e os objetivos da tarefa I.

Quadro 3.2 – Título, descrição e objetivos da tarefa I

Título	Descrição	Objetivos
Tarefa 1 O que faz um avião voar?	Nessa tarefa é feita uma breve introdução aos estudos que nortearão nosso voo rumo à compreensão de conceitos matemáticos que nos ajudarão a compreender como atuam as forças que permitem que um avião voe.	✓ Conhecer alguns cálculos e princípios teóricos que explicam o que leva um avião a voar; ✓ Apresentar o conjunto de Números Complexos, pois tal conhecimento pode ajudar a explicar conceitos da aerodinâmica e estes são fundamentais para compreendermos o que garante a sutentação de um avião no ar; ✓ Apresentar algumas formas de representação dos Números Complexos, sendo as formas: algébrica e gráfica.

Fonte: o autor.

Considerando que o ponto de partida das sequências é uma situação problematizadora ou um problema autêntico, a tarefa I apresentada no Quadro 3.3, serve para despertar uma curiosidade, a fim de que se possa iniciar uma discussão sobre um tema interdisciplinar e que pode ser atraente para os alunos.

Quadro 3.3 – Enunciado da tarefa I

Tarefa I: *Investigue quais disciplinas que você já estudou ou estuda na escola e que podem trazer conhecimentos para ajudar a explicar o que faz um avião voar. Pesquise, discuta e compartilhe com os seus colegas e com o seu professor(a) algumas possíveis fórmulas, cálculos e princípios de teorias que podem ajudar a explicar os mistérios que fazem com que uma máquina tão pesada voe.*

Fonte: o autor.

Na tarefa I, ao pesquisarem possíveis fórmulas, cálculos e princípios de teorias há possibilidades de, no mínimo, os estudantes utilizarem registros em língua natural, registro algébrico ou algébrico-trigonométrico. O uso de diferentes registros vai ao encontro do que Henriques e Almouloud (2016) apontam como importante que o professor faça para que os alunos aprendam um determinado conteúdo:

> [...] o professor que pretende fazer com que os seus alunos aprendam Matemática, sob diferentes pontos de vista, não deve, simplesmente, tratá-la sem evocar o importante papel exercido pelos diferentes registros que ele mobiliza em função dos objetos matemáticos a representar/ensinar (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 467).

O título, a descrição e os objetivos da próxima tarefa podem ser conferidos no Quadro 3.4, a seguir:

Quadro 3.4 – Título, descrição e objetivos da tarefa II

Título	Descrição	Objetivos
Tarefa 2 Números Complexos na Aerodinâmica	Nessa tarefa, apresentaremos a expressão $z + \frac{1}{z}$.	✓ Demonstrar a importância do estudo dos Números Complexos para a compreensão de conceitos da aerodinâmica; ✓ Operar com números complexos na expressão $z + \frac{1}{z}$; ✓ Representar graficamente números complexos a partir de sua forma algébrica.

Fonte: o autor.

Na tentativa de envolver diferentes representações semióticas, incluindo a representação gráfica, a tarefa II, ilustrada no Quadro 3.5, parte da expressão apresentada em uma função de variável complexa (descrita na seção 3.2) para operar com números complexos na forma algébrica e, ao final, representá-los graficamente com possibilidade de utilizar o *Software Geogebra*.

Quadro 3.5 – Enunciado da tarefa II

Tarefa II: *Após conhecermos a importante expressão $z + \frac{1}{z}$ estudada por Joukowski que ajuda a explicar matematicamente a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião, determine o seu valor para $\boldsymbol{z_1, z_2, z_3, e\ z_4}$ apresentados a seguir e represente-os graficamente. Se considerar necessário, utilize o Software Geogebra.*

a) $z_1 = 5 + 2i$
b) $z_2 = 5 - 2i$
c) $z_3 = -5 + 2i$
d) $z_4 = -5 - 2i$

Fonte: o autor.

Para o caso específico dessa tarefa, na resolução, temos duas atividades cognitivas: o tratamento e a conversão. Barros e Agricco Júnior (2019), com base nos pressupostos de Duval (1995), explicam que:

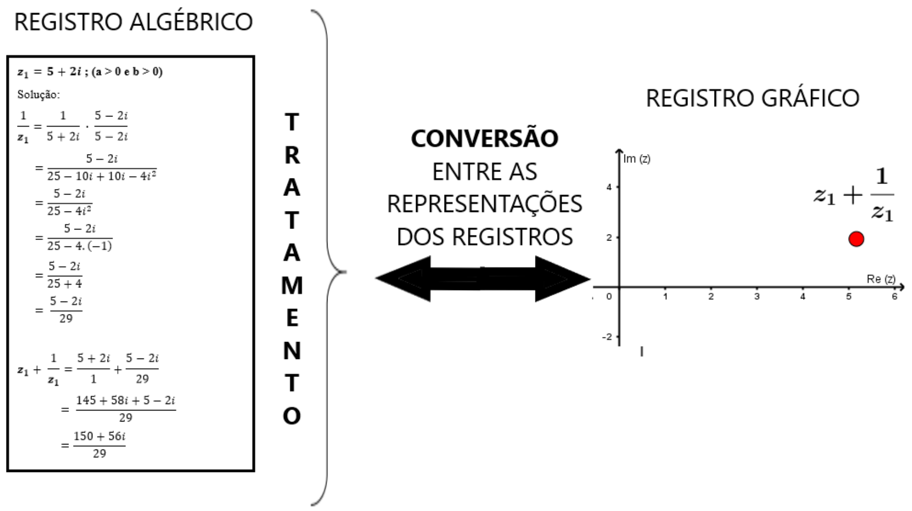
> O tratamento de uma representação semiótica transforma essa representação em outra representação semiótica que está vinculada ao mesmo sistema semiótico da representação original. A representação de um objeto é transformada em outra representação do mesmo objeto, sem mudar a forma da representação ou as operações pertinentes ao objeto matemático considerado. Ou seja, uma representação semiótica é transformada em outra, mas o sistema semiótico ao qual elas se vinculam se mantém (BARROS; AGRICCO JUNIOR, 2019, p. 186).

E que,

> A conversão de uma representação semiótica se dá entre sistemas semióticos distintos. A representação de um objeto é transformada em outra representação do mesmo objeto mudando a sua forma, portanto, mudando o sistema semiótico (BARROS; AGRICCO JUNIOR, 2019, p. 186).

Para exemplificar, a Figura 3.2 mostra uma possibilidade de resolução indicando as transformações de tratamento e de conversão que ocorrem no item *a)* da tarefa II.

Figura 3.2: Exemplo de tratamento e conversão da representação algébrica para a gráfica (e vice-versa)



Fonte: o autor.

No exemplo da Figura 3.2, o tratamento ocorre com base nas propriedades e escritas algébricas e a conversão se dá entre as representações dos registros algébrico para o gráfico (e vice-versa).

No Quadro 3.6, apresentamos o título, a descrição e os objetivos da tarefa III.

Quadro 3.6 – Título, descrição e objetivos da tarefa III

Título	Descrição	OBJETIVOS
Tarefa 3 Vetores e Forças	Nessa tarefa, estudaremos alguns vetores e forças que atuam em um avião.	✓ Conceituar vetores e força; ✓ Apresentar as principais forças presentes em um voo, sendo: Sustentação; Arrasto; Tração da Hélice e Peso. ✓ Resolver questões em algumas posições em que um avião pode se encontrar: voo ascendente; voo horizontal; voo descendente e voo em curva.

Fonte: o autor.

Os números complexos admitem diferentes representações. Além das formas algébricas e gráficas destacadas nas tarefas anteriores, existe, entre outras, a forma vetorial, a qual é evidenciada na Tarefa III do Quadro 3.7, para realçar a interdisciplinaridade entre a matemática e os diversos fenômenos físicos, mediante a utilização de vetores para representar as principais forças que atuam em um avião.

Quadro 3.7 – Enunciado da tarefa III

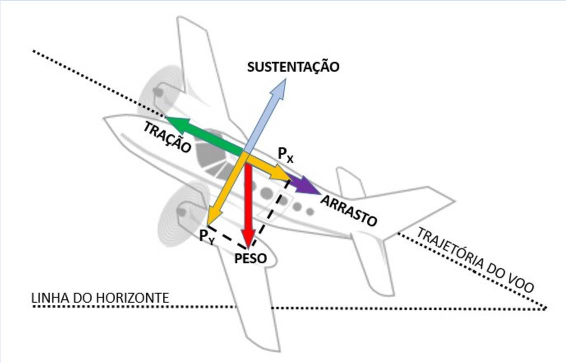
Tarefa III

Situação 1: Voo ascendente

Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo ascendente que apresenta uma Força de Tração de 1500 N representando 25% maior do que as forças opostas a ela (Força Peso decomposta no eixo x e a Força de Arrasto). Sabendo que a Força Peso é igual a 980 N e que o ângulo formado entre a Força Peso e sua respectiva componente no eixo y é de 30°, determine:

a) Componente da Força Peso no eixo x.
b) Força de Arrasto.
c) Força Resultante da Sustentação com o Arrasto.

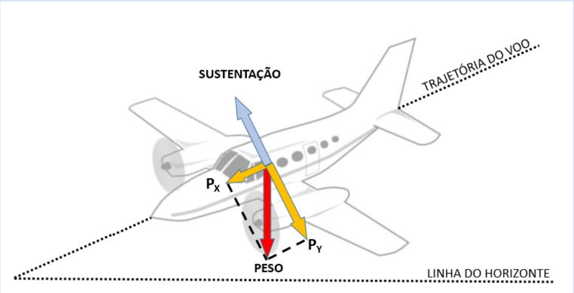
Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.



Situação 2: Voo descendente

Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo descendente que apresenta Força de Sustentação de 1082,53 N; Força Peso (P_x) decomposta de 625 N. Determine a Força Peso desse avião.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

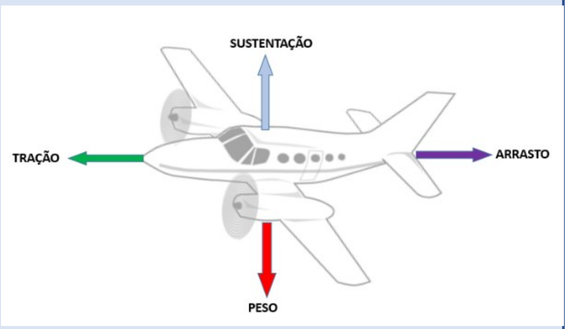


Situação 3: Voo horizontal

Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo horizontal que apresenta uma Força Resultante de 1200 N entre a Sustentação e o Arrasto. Sabendo que a Força Peso desse avião é de 980 N e que a Força de Tração da Hélice possui 20% a mais do que o valor da Força de arrasto, determine:

a) Força de Sustentação.
b) Força de Arrasto.
c) Força de Tração da Hélice.

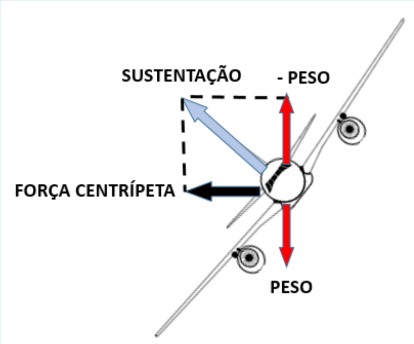
Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.



Situação 4: Voo em curva

Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo em curva que apresenta Força de Sustentação igual a 2500 N. Determine a Força Peso desse avião, sabendo que o ângulo formado entre a força de sustentação e a força centrípeta (Fc) é de 30°.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

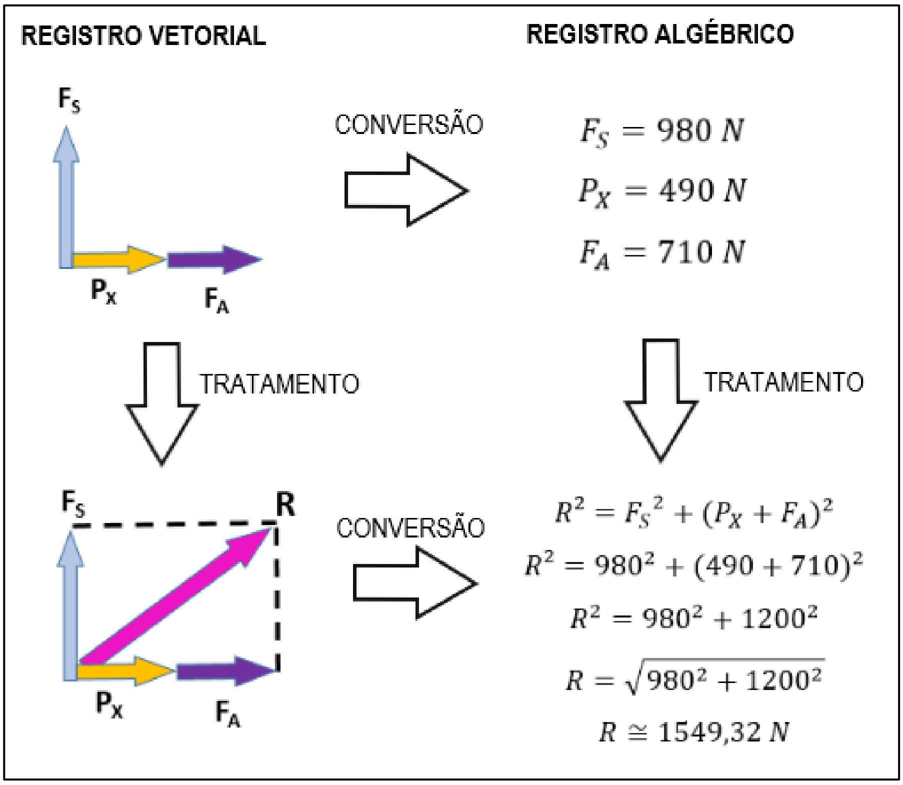


Fonte: os enunciados e os vetores foram elaborados pelo autor. As imagens dos aviões estão disponíveis no *site canva*.

Na tarefa III, a representação semiótica em destaque é a vetorial. O uso desse tipo de representação corrobora com o que pensam Assemany e Harab (2013), quando estas mencionam que um número complexo, quando representado em sua forma vetorial, potencializa a visualização proporcionada pela geometria, além de permitir que os conceitos de módulo e argumento de números complexos sejam associados à Módulo e inclinação de vetores.

A partir dessa representação vetorial e com os dados de cada questão, destacamos a possibilidade de uma possível resolução a partir da conversão da representação gráfica vetorial para a representação algébrica, e consequente tratamento dentro da própria representação algébrica. Para exemplificar, mostraremos na Figura 3.3, uma possibilidade de resolução indicando o tratamento e a conversão que ocorrem no item *c)* do voo ascendente.

Figura 3.3: Exemplo de tratamentos e conversões da representação vetorial para a algébrica



Fonte: o autor.

O título, a descrição e os objetivos da tarefa IV podem ser conferidos no Quadro 3.8 a seguir:

Quadro 3.8 - Descrição e objetivos da tarefa IV

Título	Descrição	Objetivos
Tarefa 4 Caixas-Pretas	Nesta tarefa, exploraremos equações do 2° e do 3° grau com raízes complexas.	✓ Representar graficamente números complexos dados em forma algébrica.

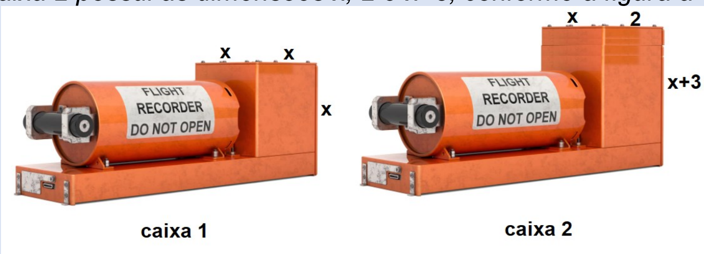
Fonte: o autor.

Na tentativa de resolver equações do segundo e do terceiro grau, cujas soluções apresentam números complexos, a tarefa IV apresentada no Quadro 3.9, utiliza conceitos de área e volume de sólidos geométricos, bem como solicita a representação gráfica dessas raízes.

Quadro 3.9 – Enunciado da tarefa IV

Tarefa IV *Um avião possui duas caixas-pretas, uma delas, caixa 1, com uma parte em forma de cubo e outra, caixa 2, com uma parte em forma de um paralelepípedo reto retangular.*

A parte em forma de cubo na caixa 1 possui aresta x e a parte em forma de paralelepípedo reto retangular na caixa 2 possui as dimensões x, 2 e x+3, conforme a figura a seguir:



***Fonte**: Adaptado de Super Interessante (2020). Disponível em: https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/. Acesso em: 29 dez. 2021*

As unidades de medidas de ambas as caixas estão em decímetros (dm).
Leia atentamente cada um dos itens a seguir e faça o que se pede:

a) *A área da base (Ac) da parte em forma de cubo da caixa preta 1 é 11 dm² menor do que a área da base (Ap) da parte em forma de paralelepípedo da caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.*
b) *Calcule os valores de x que satisfaçam a situação descrita no item anterior e represente-os graficamente. Se considerar necessário, utilize o Software GeoGebra.*
c) *O volume (Vc) da parte cúbica da caixa preta 1 é 8 dm³ maior do que o volume (Vp) da parte em forma de paralelepípedo caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.*
d) *Verifique diretamente na equação do item anterior que x = 4 é uma raiz real.*
e) *Determine as outras raízes da equação e represente-as graficamente. Se considerar necessário, utilize o Software GeoGebra.*
f) *As conclusões que você chegou nos itens b) e e) são válidas para o problema das caixas pretas do avião? Justifique sua resposta apresentando seus argumentos a respeito da relação entre números complexos e medidas.*

Fonte: o autor.

Na tarefa IV, o registro algébrico é predominante nos itens *a)*, *b)*, *c)*, *d)* e e*)* e o registro gráfico é contemplado nos itens *b)* e *e)*. No item *f)*, destacamos o registro em língua natural. Segundo Duval (2011), o registro em língua natural é um registro multifuncional discursivo, utiliza associações verbais, argumentação a partir de observações e dedução válida a partir de definições ou teoremas. Por meio do registro em língua natural, tem-se a intenção de discutir a validade (ou não) de raízes complexas serem usadas como medidas de comprimento.

3.6 Análise das tarefas, sob a ótica da SDI, a partir dos preceitos de Oliveira *et al*. (2021)

Para análise da SD com os pressupostos indicados para uma SDI, organizamos as características das tarefas elaboradas nas categorias e critérios sugeridos por Oliveira et al (2021).

3.6.1 Participação ativa dos alunos

A tarefa I (Quadro 3.3) contém no enunciado um comando direto sobre investigação, com uma proposta de uma discussão livre de ideias de forma coletiva com os colegas e com o professor(a). Nessa tarefa, o aluno é o ator principal do processo, ou seja, é ele quem age diretamente sobre a proposta, sendo protagonista em uma situação de investigação. Os estudantes podem buscar em seus conhecimentos prévios ou livros ou até em recursos tecnológicos de pesquisas, como computadores e *smartphones*, alguns argumentos e explicações para a respectiva questão. Essa participação ativa dos alunos,

> [...] permite que as ideias circulem livremente e que sejam passíveis de contestações ou concordâncias. Nessa condição os problemas são discutidos, e formas diferentes de resolvê-los são propostas, assim, novos problemas vão surgindo (MOTOKANE, 2015, p. 127).

Nesse sentido, acreditamos no fato de que, se o professor dispuser de um meio para que os alunos conversem sobre os resultados das pesquisas, discussões interessantes poderão surgir de forma a enriquecer as questões abordadas.

Na tarefa II (Quadro 3.5), a proposta possui foco nas operações algébricas com números complexos e suas respectivas representações gráficas, já a tarefa III (Quadro 3.7) preocupa-se em conceituar vetores e forças que atuam em uma aeronave. Ambas as tarefas, II e III, têm a possibilidade de os alunos explorarem a conversão entre diferentes representações de registros semióticos a partir do próprio contexto matemático e físico apresentado.

Na tarefa IV (Quadro 3.9), em especial no item *f),* há uma situação que insere os alunos em um contexto ativo de argumentação, considerando que estes precisam confrontar conclusões anteriores e validar conceitos relacionados a números complexos e medidas, trazendo à sala de aula um debate de ideias.

3.6.2 Atividades programadas

Todas as quatro tarefas da SD apresentam começo, meio e fim, de forma programada e articulada, bem como há um fechamento de cada discussão, sistematizando conteúdos, propondo novas questões e convidando para a realização de uma próxima tarefa. Ao final de cada tarefa, com a mediação do professor, os alunos poderão produzir um texto em língua natural, ou ainda um mapa conceitual sistematizando os conceitos estudados, pois

> [...] há uma atenção especial às produções de textos escritos que estimulem os alunos a emitirem opiniões e expressarem conceitos científicos. Procura-se, nas aulas, promover momentos que sistematizem informações e encaminhamentos de atividades para as aulas seguintes, bem como retomadas importantes para o desenvolvimento de atividades futuras (MOTOKANE, 2015, p. 119).

3.6.3 Conceitos científicos

Na tarefa I (Quadro 3.3), os resultados das pesquisas poderão abranger diretamente um conjunto de fórmulas matemáticas e físicas em que envolvem, por exemplo, as forças de sustentação e de atrito que ocorrem em uma aeronave. Com uma gama de possibilidades de termos científicos que podem surgir a partir da pesquisa, todas as outras tarefas têm o potencial de apresentar momentos para que alunos e professores reconheçam a importância de terminologias e conceitos fundamentais para a organização da aula, o que é uma característica de uma SDI (MOTOKANE, 2015). Além disso, a argumentação baseada em termos científicos poderá ser utilizada como um indicador de aprendizagem do conceito, pois

> [...] as garantias apresentadas pelos alunos são provenientes de procedimentos e conceitos científicos que validam a conclusão. O refutador é outro elemento que indica a aprendizagem, uma vez que ele é construído somente no momento em que temos ciência das limitações do argumento que produzimos. (MOTOKANE, 2015, p. 129).

Outra característica importante é verificar se os conceitos a serem discutidos fazem parte do conteúdo programático da escola. O conteúdo Números Complexos está presente em alguns documentos oficiais brasileiros oficiais para a Educação Básica. Dentre eles, destacamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) e o Caderno de Expectativas de Aprendizagem do Paraná.

3.6.4 Produção de atividades

Em especial, na tarefa I (Quadro 3.3), há uma produção de atividades, por se tratar de uma pesquisa e exposição de ideias, que devem ser debatidas, com a possibilidade de correção de conceitos mediado pelo professor(a). As devolutivas das produções dos alunos e mediadas pelos professores são fundamentais para a aquisição de elementos da linguagem científica (MOTOKANE, 2015, p. 133). Ainda, no decorrer da SD, há caixas de textos com curiosidades que trazem informações relevantes e complementares de acordo com cada tarefa, por exemplo, na tarefa IV (Quadro 3.9), uma curiosidade em que se apresenta números complexos como medidas de comprimento, possibilitando a discussão de que não existe o conceito de ordem para esses números em específico. Essas caixas de textos servem como práticas de leituras e podem contribuir para fundamentar os debates, bem como defender ideias e complementar informações nas aulas.

3.6.5 Proposição de situações problemas

As questões geradas a partir do questionamento: *o que faz um avião voar?* (Quadro 3.3), e ainda, a aplicação dos números complexos na aerodinâmica (Quadro 3.5), seguido do estudo de vetores e forças que atuam em um avião por meio de questões elaboradas pelos autores (Quadro 3.7), faz com que as questões sejam autênticas, baseadas na ciência e instigadoras, pois

> Há um problema claro e explícito baseado em problemas da ciência. O ponto de partida das atividades é uma situação problematizadora ou um problema autêntico. Além disso, todos os problemas são passíveis de resolução pelos alunos (MOTOKANE, 2015, p. 133).

As resoluções das tarefas contemplam conhecimentos matemáticos e físicos já estudados na educação básica, com possibilidades de um trabalho interdisciplinar e retomadas de conteúdo pelo professor mediador. Além disso, os gráficos podem ser feitos por meio do *Software* Geogebra. De acordo com Amorim (2014), a tecnologia atrelada à sala de aula como ferramenta de ensino dos números complexos pode mudar a atitude dos alunos e, sobretudo, a construção dos saberes. Para essa autora, o uso do *Software* Geogebra possibilita a apropriação de conceitos dentro de uma perspectiva geométrica, articulando representações nas formas algébricas ou de pares ordenados com as geométricas, contribuindo com o aprendizado dos alunos pela fácil visualização do conteúdo, mostrando-se ainda como uma ferramenta motivacional em relação aos interesses dos alunos nas aulas.

3.6.6 Materiais de apoio utilizado

Em todas as tarefas da SD ocorre o incentivo ao uso de diferentes fontes de pesquisa, tecnológicas ou não, para subsidiar argumentos, cálculos e justificativas baseadas na ciência. No produto educacional, como apoio à tarefa IV (Quadro 3.9), por exemplo, há uma curiosidade com a apresentação de um vídeo para ajudar a construir justificativas e argumentos sobre o porquê de não se utilizar números complexos como medidas de comprimento. Esse tipo de material é importante, pois

> Os alunos recorrem a materiais de apoio de diferentes tipos para construir as justificativas no campo do conhecimento científico. Como as atividades de leitura e escrita são de grande importância para o desenvolvimento das SDIs, é necessário que as informações sejam apresentadas em diferentes suportes, tais como: vídeos, páginas da rede mundial, buscadores de informação, textos impressos, imagens impressas produzidas por diferentes equipamentos, entre outros (MOTOKANE, 2015, p. 133).

Assim,

> Para que os alunos possam ter momentos nos quais sejam realizados fechamentos de discussões ou mesmo sistematizações de conteúdos trabalhados, as sequências didáticas oferecem materiais de apoio que possibilitam a construção de justificativas (MOTOKANE, 2015, p. 125).

3.6.7 Mediação do professor(a)

Considerando o fato de que todas as tarefas admitem uma linguagem que pode ser modulada pelo professor com possibilidades de os alunos utilizarem terminologias e conceitos científicos, a SD apresentada pode permitir que o professor "contemple aspectos da ciência e da linguagem e esteja atento para a fala, a leitura e a escrita dos alunos; ele é um mediador de todas essas produções presentes na sequência" (MOTOKANE, 2015, p. 126).

3.6.8 Avaliação

Em todas as etapas da aplicação da SD, o professor poderá realizar uma avaliação de forma processual, de forma a examinar a aprendizagem ao longo das tarefas realizadas em sala, que se dará por meio das produções escritas, comentários, apresentações, criações, trabalhos em grupos, entre outros. Ponte (2005) considera que o professor pode estabelecer, de modo explícito ou implícito, um plano de trabalho organizado essencialmente em torno do que ele prevê fazer, do que prevê que os alunos façam, e qual a sequência das atividades, realizando uma avaliação em tempo real e atualizada a cada momento no decorrer da aula, em um processo de monitorização do trabalho, como um processo regulador do ensino e da aprendizagem. Para Ponte,

> É através da avaliação que o professor recolhe a informação que lhe permite detectar problemas e insuficiências nas aprendizagens dos alunos e também no seu trabalho, verificando assim a necessidade (ou não) de introduzir mudanças na sua planificação e no seu modo de trabalho. Os próprios alunos podem participar neste processo de avaliação, fazendo eles próprios a sua auto-avaliação e reflectindo sobre a avaliação realizada pelo professor. A avaliação evidencia, em última análise, o que os diversos actores que intervêm no processo educativo mais valorizam e, por isso, os seus resultados repercutem-se sobre todo o trabalho realizado, contribuindo, assim, a seu modo, para a construção do currículo (PONTE, 2005, p. 20-21).

A concepção desse autor deixa evidente que a participação dos alunos durante o processo de autoavaliação é importante para a construção de uma prática investigativa, como forma de buscar nas respostas dos alunos o que eles mais apreenderam sobre o conteúdo ensinado.

Considerações

A produção do material aqui apresentado surgiu a partir de reflexões sobre o ensino de números complexos. Para tanto, levou-se em consideração a necessidade de participação ativa do estudante em seu processo de aprendizagem, o uso de diferentes registros de representação semiótica e a aplicabilidade dos números complexos em um contexto que pudesse chamar a atenção dos alunos de Ensino Médio.

Nesse sentido, nosso propósito foi oferecer um material subsidiado teoricamente na Teoria das Situações Didáticas e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, apresentando características de uma Sequência Didática Investigativa, com viabilidade de execução no âmbito de sala de aula.

No que se refere à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a SD apresenta possibilidades de conversões entre as representações algébricas e gráficas e representações gráficas vetoriais e algébricas. Ainda, permite que ocorra o tratamento dentro de cada tipo de representação, possibilitando que o estudante tenha acesso a várias formas de representação do objeto matemático número complexo.

Após as análises de cada tarefa da SD com os preceitos da SDI, inferimos que ela atende a vários pressupostos indicados para a aprendizagem matemática: participação ativa do estudante, diferentes registros de representação semiótica, uso de tecnologias (*Geogebra*), investigação e problema autêntico, o que nos leva a reconhecer o seu potencial atrativo para o estudante.

No que se refere aos aspectos da SDI, nem toda tarefa analisada isoladamente contém todas os itens propostos por Oliveira *et al*. (2021). Com isso, ressalta-se a importância de se trabalhar a SD em sua totalidade. Ainda, destacamos que a interdisciplinaridade e a contextualização são tratadas no atual Referencial Curricular do Paraná como princípios pedagógicos que permitem ao estudante compreender características que estabelecem elos entre os saberes.

4 TRATAMENTO E CONVERSÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS A PARTIR DA LUDICIDADE COMO RECURSO DIDÁTICO: O Jogo Trincas Complexas

O ensino tradicional de operações com números complexos possui um forte componente abstrato, desperdiçando o potencial de visualização gráfica dessas operações. Uma forma de minimizar tal abstração é apropriar-se da ludicidade e da dinamicidade possibilitadas pelos jogos, que oferecem uma dinâmica colaborativa e lúdica capaz de estimular habilidades de coordenação, concentração e raciocínio lógico, promovendo o aprendizado autônomo e divertido. Este estudo objetiva discutir como um jogo, intitulado Trincas Complexas, pode potencialmente contribuir para o aprendizado das operações com números complexos na forma algébrica e suas respectivas conversões em representações gráficas com vetores. Fundamentaram a proposta do jogo, princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os quais consideram que o ensino e a aprendizagem da matemática requerem um trabalho com diversidade de representações. Acredita-se que esse jogo poderá contribuir para a apreensão de conceitos e significados matemáticos de operações com números complexos na forma algébrica, bem como diminuir lacunas de aprendizagens na visualização de representações gráficas dessas operações por meio da ludicidade.

4.1 Introdução

Dentre os conteúdos que fazem parte do programa de matemática escolar, estão aqueles que possuem um forte componente abstrato, que muitas vezes são apresentados em sala de aula como um conhecimento estático e desvinculado do contexto social e histórico, gerando dificuldades no processo de aprendizagem. Entre esses conteúdos, destacamos os Números Complexos.

Os Números Complexos têm como característica a possibilidade de admitirem diferentes formas de representação: algébrica, pares ordenados, vetorial, trigonométrica, matricial, entre outras. No entanto, essas representações têm sido pouco exploradas nos materiais didáticos utilizados nas escolas públicas brasileiras, sendo o foco dado para as manipulações algébricas das operações entre Números Complexos (OLIVEIRA, 2010).

O fato de um estudante saber resolver uma situação matemática em uma determinada representação não garante que ele tenha compreendido um conceito matemático do objeto de estudo. De acordo com a BNCC (2018),

> [...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio (BRASIL, 2018, p. 519).

Diante dessa necessidade de explorar as diferentes formas de representação e as conversões entre si, propusemos um jogo que tem por base os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica — TRRS de Duval (1995), o qual possui potencial para contribuir com a superação de dificuldades em relação à representação gráfica de operações algébricas com números complexos.

O presente capítulo apresenta um jogo como recurso didático de apoio para professores de Matemática e estratégia lúdica de aprendizagem para estudantes do Ensino Médio, com o objetivo de discutir como esse jogo, intitulado Trincas Complexas[12], tem a capacidade de contribuir para o aprendizado das operações com números complexos na forma algébrica e suas respectivas conversões em representações gráficas com vetores.

4.2 O Ensino dos Números Complexos

Como já dissemos em capítulos anteriores, o conteúdo Números Complexos faz parte de alguns documentos brasileiros oficiais para a Educação Básica. Dentre eles, destacamos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), documentos esses que buscam propor mudanças curriculares e metodológicas nas práticas educacionais presentes nas escolas. Embora o conteúdo Números Complexos esteja presente nas DCE e nos PCN+, as escolas de Ensino Médio, com base nesses documentos oficiais, adaptam os conteúdos para a realidade dos seus alunos, levando em consideração a Proposta Político-Pedagógica da instituição. Com isso, alguns conteúdos do Ensino Médio podem ou não constar em seu currículo escolar.

---

[12] O jogo Trincas Complexas, objeto de discussão neste capítulo, compõe um produto educacional denominado “Trincas Complexas: um jogo para representar graficamente operações algébricas com números complexos”, vinculado à essa dissertação.

De acordo com as DCE (PARANÁ, 2008), o conteúdo Números Complexos está presente no Conteúdo Estruturante Números e Álgebra, sendo introduzido no Ensino Médio para que o aluno compreenda os números complexos e suas operações, levando-o, assim, a aprofundar o estudo dos números e a ampliar o conhecimento e domínio deste objeto.

Analisando os PCN+, percebemos que há uma flexibilidade para um potencial ensino dos Números Complexos. Nesse documento, há duas menções sobre esse conteúdo no eixo estruturador Álgebra: números e funções, onde considera-se que:

> Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria (BRASIL, 2002, p.120).

E que,

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (BRASIL, 2002, p.122).

Essa flexibilidade deixa o professor de matemática com a liberdade de trabalhar ou não tal conteúdo com os seus alunos. Essa linha facultativa também é defendida nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006):

> Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. **Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano** (BRASIL, 2006, p. 93-94 – grifo nosso).

De certa forma, alguns educandos podem ter algo a perder com essa linha facultativa que permite que o ensino de números complexos seja feito de forma complementar, pois acabam tendo enfraquecida sua carga de conhecimentos, tanto científicos quanto culturais. Além disso, muitos cursos Técnicos e de Ensino Superior, em especial os da área de exatas, utilizam os conhecimentos matemáticos que deveriam ser adquiridos na Educação Básica.

A proposta presente nesse trabalho vai ao encontro com Brasil (2006), quando ele sugere a possibilidade de explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. Alguns estudos como os de Puhl, Muller e Lara (2020), Randolph e Parraguez (2019) e Pinto e Laudares (2017) apontam a importância da aplicação dos números complexos em um conhecimento profissional especializado, por exemplo, em cursos de Engenharia, em que se aplicam os números complexos para cálculos da força de sustentação da asa de uma aeronave, mecânica dos fluídos, eletricidade, entre outros. Além disso, ressaltam que é preciso explorar os números complexos nas mais diversas formas de registros.

Enquanto alguns estudos mostram que o conteúdo de Números Complexos é importante para ser ensinado ainda no Ensino Médio, a proposta presente na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) não prevê esse ensino, o que nos permite concluir que não o considerou como essencial ao estudante da Educação Básica. Tal documento não cita de forma explícita o assunto Números Complexos, o que pode fazer com que o estudante termine o Ensino Básico considerando que o conjunto dos Números Reais é o "mais amplo" de todos, podendo gerar falsas compreensões nos fundamentos matemáticos dos estudantes e consequente obstáculo didático.

A introdução dos Números Complexos no final do terceiro ano do Ensino Médio costuma ser acompanhada de uma reviravolta conceitual ligada à existência de um número cujo quadrado é negativo (GHEDAMSI; TANAZEFTI, 2015). Além disso, as dificuldades de aprendizagem de muitos estudantes com os diversos tipos de registros de representação semiótica podem gerar barreiras de aprendizagens em relação a um conteúdo considerado novo e provavelmente pouco discutido anteriormente na Educação Básica.

Uma pesquisa realizada com acadêmicos de Engenharia de universidades brasileiras, promovida com o intuito de identificar e analisar os erros cometidos em operações de matemática básica, como adição, subtração, multiplicação e divisão com números complexos, mostrou que a maioria desses estudantes possuem dificuldades com as duas últimas operações, constatando certo domínio apenas nas duas primeiras. Além disso, uma das principais dificuldades evidenciadas foi a conversão entre as formas algébricas e trigonométricas (polares) e a operação de divisão. Para que os estudantes superem essas dificuldades, os autores apontam como alternativa que os professores propiciem estratégias e recursos de apoio para a recuperação de lacunas de conhecimentos básicos para a construção de novos saberes, por exemplo, a criação de objetos de aprendizagens com ambientes que atendam a objetivos didáticos variados e que favoreçam a construção de significados de conceitos e operações com números complexos (PUHL; MULLER; LIMA, 2020).

Ghedamsi e Tanazefti (2015) identificaram demandas cognitivas que revelam as dificuldades dos alunos franceses em lidar com os Números Complexos. Entre essas dificuldades, destacam-se: *i)* abusos de generalizações das propriedades dos números reais para os complexos, como por exemplo, o conceito de ordem dos reais, transportado erroneamente para os complexos; *ii)* confusão entre módulos e valor absoluto, sem sucesso em diferenciar cada um desses dois conceitos; *iii)* dificuldades em realizar tratamentos dentro da mesma representação, bem como conversões entre as representações com registros diferentes; *iv)* a incapacidade de realizar mudanças imediatas entre os registros gráficos e registros algébricos e vice-versa, entre outras.

Na tentativa de buscar uma forma lúdica e dinâmica do professor abordar conceitos e operações de um conteúdo de caráter predominantemente abstrato, optamos pela elaboração de um jogo que utiliza diferentes registros de representação semiótica como forma de ajudar na compreensão por parte dos alunos e evocar o objeto matemático números complexos. É sobre esses diferentes tipos de registros e sobre esse jogo que trata as próximas duas seções.

4.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

O referencial teórico utilizado para discussão da proposta do jogo é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Tal teoria é uma abordagem que

> [...] busca compreender e investigar as dificuldades dos alunos no processo de aquisição do conhecimento matemático e contribuir para o desenvolvimento de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização por meio de distintos registros de representação. Um dos seus principais argumentos é que o conhecimento matemático só é transformado em saber quando ocorre a mobilização espontânea pelos alunos, de distintos registros semióticos de um mesmo objeto matemático (DENARDI, 2019, p. 81).

Lima (2019) pontua que “Duval utiliza o termo registros de representação semiótica, que representa os sistemas semióticos, como a escrita algébrica, a representação gráfica, a língua natural, a ilustração, entre outros” e que esses sistemas cumprem três atividades cognitivas necessárias para classificar uma representação semiótica, explicadas por Duval (2009), como as ações de:

> 1ª Constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado; 2ª Transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma representação de conhecimento em comparação às representações iniciais; 3ª Converter as representações produzidas, em um sistema, em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (DUVAL, 2009, p. 36-37).

Essas três atividades cognitivas são denominadas por Duval como: *i) formação de uma representação semiótica*: “enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula etc.” (DUVAL, 2012, p. 271); *ii) tratamento de uma representação*: “é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro” (DUVAL, 2012, p. 272); e *iii) conversão de uma representação*: “é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial” (DUVAL, 2012, p. 272). Mais adiante, na seção 4.5, diferenciaremos os conceitos de tratamento e de conversão.

4.4 Jogo Trincas Complexas

O jogo Trincas Complexas é uma proposta lúdica, aplicável em contexto real de ensino e elaborado para auxiliar na formação dos conceitos e procedimentos matemáticos dos estudantes sobre o objeto Números Complexos. Além disso, o uso de jogos matemáticos e de gamificação é amparado pelo Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (2021), como possíveis metodologias ativas para que o professor possa interagir com o estudante de forma mais prática, pois “ao adotar a gamificação e os jogos on-line como recursos para a aprendizagem, o professor lança mão de uma didática contemporânea” (PARANÁ, 2021, p. 275). Esse jogo utiliza cartões com dois diferentes tipos de registros de representação semiótica (algébrico e gráfico), o que é amparado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Para tanto, esta Base assume que para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos deve-se incluir, quando possível, pelo menos dois registros de representação. Assim, os estudantes precisam estar preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação (BRASIL, 2018, p. 530).

Com esse jogo, os alunos poderão captar sinais que, quando mobilizados nas estruturas cognitivas do pensamento, permitirão representar o objeto matemático, talvez não em todos os aspectos, mas com referências, ideias e características que o fazem ser identificado (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016). Esses sinais são chamados de signos, definidos por Henriques e Almouloud como:

> [...] um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico (cf. Definição3), como as

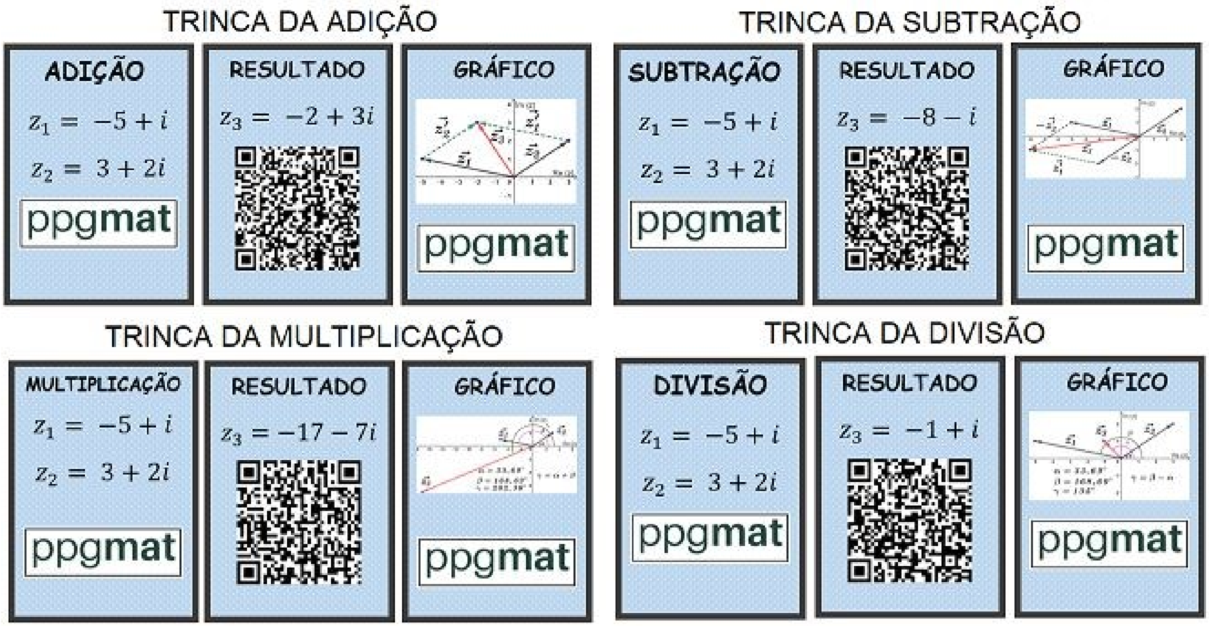
> regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/retas/curvas, planos e superfícies) para o registro gráfico, os números, as operações aritméticas, para o registro numérico e, de um modo geral as regras de conformidade (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 468).

Os signos presentes nos cartões do jogo são algumas propriedades e escritas algébricas para o registro algébrico e planos e vetores para o registro gráfico.

Com o intuito de tornar esse objeto matemático acessível, propomos cartões que evocam conceitos e noções dos números complexos durante os tratamentos e conversões dessas representações para permitir a consolidação da aprendizagem.

O jogo possui 13 cartões, que podem ser confeccionados pelo professor, sendo quatro trincas[13] (4 x 3 = 12) e um curinga. Cada face desses cartões que formam trincas possui alguma informação sobre números complexos: dois números complexos na forma algébrica com a indicação de uma operação (adição, subtração, multiplicação ou divisão); o resultado algébrico dessa operação; e a representação do registro gráfico dessa operação, conforme protótipo apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1: Cartões do jogo Trincas Complexas



Fonte: o autor.

[13] Trincas: em um jogo de cartas, se refere a um conjunto de três cartas com mesmo valor. Reunião de três coisas análogas. Três cartas semelhantes. Disponível em: https://www.dicio.com.br/trinca-2/. Acesso em 01/05/2022.

Além dos cartões que formam trincas complexas, esse jogo contém um cartão curinga, cuja função será apresentada mais adiante. Esse curinga é representado pela letra (ℂ) — Conjunto dos Números Complexos, conforme apresentado na Figura 4.2.

Figura 4.2: Cartão Curinga

Fonte: o autor.

Nos cartões que apresentam os resultados das operações, há dicas criptografadas em forma de QR CODE para auxiliar os jogadores a compreenderem o que a operação (adição ou subtração ou multiplicação ou divisão) entre dois números complexos na forma algébrica gera na representação do registro gráfico no plano de Argand-Gauss. É sobre essas dicas que se refere o Quadro 4.1.

Quadro 4.1 - Dicas criptografadas no jogo Trincas Complexas

OPERAÇÃO	QR CODE	**Dica**: O que a operação faz graficamente?
ADIÇÃO		*Este resultado é representado graficamente por meio da regra do paralelogramo com os vetores usados na operação.*
SUBTRAÇÃO		*Este resultado é representado graficamente por meio da regra do paralelogramo com o oposto de um dos vetores.*
MULTIPLICAÇÃO		*O argumento deste número é a soma dos argumentos dos números usados na operação.*
DIVISÃO		*O argumento desse número é a diferença dos argumentos dos números usados na operação.*

Fonte: o autor.

A leitura dessas dicas criptografadas não é condição necessária para que o jogo aconteça, no entanto, entendemos que essa forma de associar o jogo ao uso de uma tecnologia possa ser uma estratégia interessante a fim de atrair a atenção dos alunos. Além disso, acreditamos que as reflexões geradas a partir das relações entre as operações algébricas e, consequentemente, representações gráficas, trará uma rica discussão entre professores e alunos que, por muitas vezes, pouco exploram os conceitos de módulos e argumentos de vetores a partir das operações algébricas. Conforme Assemany e Harab (2013), o ensino tradicional de números complexos conduz a uma visão algébrica, desperdiçando o potencial de visualização proporcionado pela geometria. Ainda segundo essas autoras, quando "um número complexo é representado no plano, sua leitura vetorial permite que os conceitos de Módulo e Argumento de números complexos sejam associados à Módulo e inclinação de vetores" (ASSEMANY; HARAB, 2013, p. 639). Para fazerem uso desse recurso, é necessário que os jogadores baixem previamente um aplicativo para leitura QR CODE em seus aparelhos de *smartphone*.

O objetivo do jogo é formar corretamente uma trinca complexa, ou seja, um cartão com a indicação de uma operação, cartão com o resultado em registro algébrico dessa operação (após tratamento); e cartão com o registro gráfico (após conversão). No Quadro 4.2, apresentaremos as regras do jogo.

Quadro 4.2 – Regras do jogo Trincas Complexas

Os treze cartões devem ser embaralhados e distribuídos entre quatro jogadores de forma que um não conheça os cartões do outro. Após a distribuição da direita para a esquerda de quem embaralhou, deve-se ter três jogadores com três cartões cada e o jogador que distribuiu com quatro, totalizando 13 cartões. Nenhum dos jogadores poderá sair "batido", ou seja, receber, por muita "sorte", uma trinca complexa na distribuição dos cartões. Dessa forma, nenhum jogador poderá vencer o jogo de imediato. Caso isso aconteça, os cartões devem ser embaralhados e distribuídos novamente. O jogador que receber quatro cartões deverá escolher um deles e passá-lo para o jogador à sua direita. Dessa maneira, o jogador imediatamente à direta irá receber esse cartão e poderá tentar combiná-lo de forma a completar uma trinca complexa. Sempre com um jogador passando o quarto cartão para o jogador à direita, o jogo prossegue. Quem receber o curinga, deverá ficar com ele por uma rodada, devendo passar outro cartão. Ainda, o jogador que receber o curinga poderá contar aos demais colegas que está recebendo essa carta, com o objetivo de mostrar que permanecerá com ela por uma rodada. Esse curinga tem a função de impedir que algum jogador ganhe rapidamente uma rodada do jogo, com isso não se pode vencer estando com o curinga em mãos, assim como o curinga não serve para substituir uma das cartas de forma a completar corretamente uma trinca. Vence o jogo quem formar primeiro uma trinca complexa correta.

Fonte: o autor.

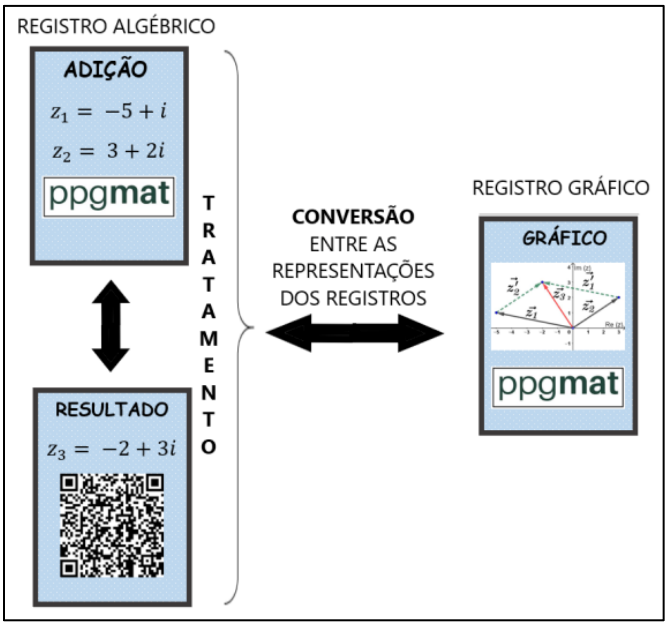
Ao jogar, os alunos poderão desenvolver a habilidade de associar os cartões e identificar as representações corretas de cada operação, bem como realizar as conversões das representações de um registro para o outro, ação essa muitas vezes necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, uma vez que uma representação pode facilitar o entendimento de um aspecto que a outra não favorece.

4.5 Tratamento e Conversão das representações

Os conceitos de tratamento e conversão se referem às atividades cognitivas ligadas aos registros de representações semióticas. De acordo com Henriques e Almouloud (2016, p. 469), tratamento de uma representação "é a transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro", enquanto a conversão de uma representação "é a transformação dessa representação em uma representação de outro registro".

Para o caso específico desse jogo, ocorre uma transformação da representação algébrica em uma outra representação algébrica, ou seja, um tratamento com base nas propriedades e escritas algébricas, por exemplo, a adição de dois números complexos em sua forma algébrica, resultando em um número complexo também na forma algébrica. Ressaltamos que cada tipo de registro de representação enfatiza uma informação a respeito do objeto do saber, mudá-lo pode favorecer a tomada de consciência desse conteúdo, isto é, pode permitir que o aluno acesse mais facilmente diferentes aspectos do objeto. Além disso, também ocorre uma conversão entre as representações dos registros algébricos para os gráficos (e vice-versa). Os conceitos de tratamento e conversão que ocorrem no jogo estão exemplificados na Figura 4.3.

Figura 4.3: Exemplo de tratamento e conversão



Fonte: o autor.

De acordo com Henriques e Almouloud,

> A representação de um objeto e a conversão de representações entre registros, por exemplo, são comuns nas práticas do professor de Matemática em sala de aula, quando este pretende fazer com que os seus alunos compreendam uma determinada noção de difícil entendimento no registro no qual o objeto foi inicialmente apresentado. No momento em que o professor realiza essa conversão, não implica, necessariamente que ele queira reforçar a estreita relação existente entre os registros que mobilizou (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p.467).

Professores que ensinam matemática poderão utilizar esses cartões para fazer com que os seus alunos reflitam sobre questionamentos da seguinte ordem: *em que resulta a soma de dois números complexos? E a subtração, multiplicação ou divisão?* Com o jogo Trincas Complexas, os estudantes poderão perceber, por exemplo, que dados dois números complexos, a adição entre eles gera, graficamente, um vetor $\overrightarrow{z_3}$ que é justamente a diagonal de um paralelogramo formado pelos vetores $\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_1'}, \overrightarrow{z_2}\ e\ \overrightarrow{z_2'}$, conforme indicado na Figura 3, enquanto a subtração entre eles gera um outro paralelogramo com o oposto de um dos vetores.

Ainda, os professores poderão esclarecer aos estudantes o que acontece geometricamente com a multiplicação ou divisão entre números complexos na forma algébrica, determinando os argumentos, escrevendo-os na forma trigonométrica e dessa para a gráfica. Para essas operações, as trincas permitem o uso simultâneo de três registros e, nesse caso, o registro algébrico-trigonométrico será utilizado como registro intermediário na conversão, conforme exemplo a seguir:

Multiplicação

Dados $z_1 = -5 + i$ e $z_2 = 3 + 2i$, ambos na forma algébrica $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{b}i$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = z_3 = (-5 + i) \cdot (3 + 2i)$$

$$z_3 = -15 - 10i + 3i + 2i^2$$

$$z_3 = -15 - 7i + 2 \cdot (-1)$$

$$z_3 = -17 - 7i$$

$$z_3 \in \text{III quadrante}$$

No Quadro 4.3, apresentaremos os cálculos do módulo (ρ) e do argumento (θ) de z_3.

Quadro 4.3 – Módulo e argumento de z_3

Número Complexo	Módulo (ρ)	Argumento (θ)	
Multiplicação $\boldsymbol{z_3 = -17 - 7i}$	$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_3 = \sqrt{(-17)^2 + (-7)^2}$ $\rho_3 = \sqrt{289 + 49}$ $\rho_3 = \sqrt{338}$	$\text{sen}\,(\theta) = \frac{b}{\rho_3}$ $\text{sen}\,(\theta) = \frac{-7}{\sqrt{338}}$ $\theta = \text{arcsen}\left(\frac{-7}{\sqrt{338}}\right)$ $\theta \cong -22{,}38° \text{ ou}$ $\theta = 202{,}38°$	$\cos\,(\theta) = \frac{a}{\rho_3}$ $\cos\,(\theta) = \frac{-17}{\sqrt{338}}$ $\theta = \arccos\left(\frac{-17}{\sqrt{338}}\right)$ $\theta \cong 157{,}62°\ ou$ $\theta = 202{,}38°$
		Como $\text{sen}\,(\theta)$ é negativo e $\cos\,(\theta)$ é negativo, o argumento θ ∈ III quadrante. Portanto, **θ = 202,38°**.	

Fonte: o autor.

Utilizando os valores do módulo e do argumento, podemos representar o número complexo z_3 na forma de registro algébrico-trigonométrico:

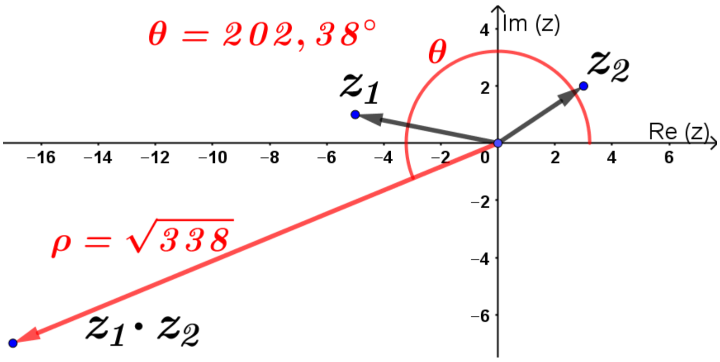
$$z_3 = \rho(cos\theta + i.sen\theta)$$

$$z_3 = \sqrt{338}(\cos 202{,}38° + i.\text{sen}\, 202{,}38°)$$

$$z_3 = \sqrt{338}\left(\frac{-17}{\sqrt{338}} + i.\frac{-7}{\sqrt{338}}\right)$$

A partir do módulo $\sqrt{338}$ e do argumento 202,38°, podemos representar graficamente $z_3 = z_1 \cdot z_2$, conforme Figura 4.4:

Figura 4.4: Representação gráfica da multiplicação $z_1 \cdot z_2$



Fonte: o autor.

A forma algébrica pertence ao registro simbólico algébrico e a forma trigonométrica pertence ao registro simbólico algébrico-trigonométrico, devido ao fato de ambos os registros obedecerem a regras operatórias diferentes. Destacamos, com esse exemplo, a possibilidade de o professor reforçar a aprendizagem de trigonometria.

Os cartões do jogo Trincas Complexas possibilitam que a conversão seja trabalhada em dois sentidos (algébrica para gráfica e gráfica para algébrica). Esse fato pode contribuir para a apreensão global das propriedades inerentes às representações gráficas e algébricas de um número complexo, pois, de acordo com Duval (1995), fazer as conversões em dois sentidos permite ao aluno a possibilidade de analisar propriedades onde a conversão em apenas um sentido não é valorizada ou perceptível.

Corroborando a ideia de conversões em dois sentidos de representações com diferentes registros, Brasil (2018) afirma que:

> [...] cabe observar que a conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece. Portanto, percebe-se que, do ponto de vista cognitivo, as aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio requerem a diversificação dos registros (BRASIL, 2018, p. 530).

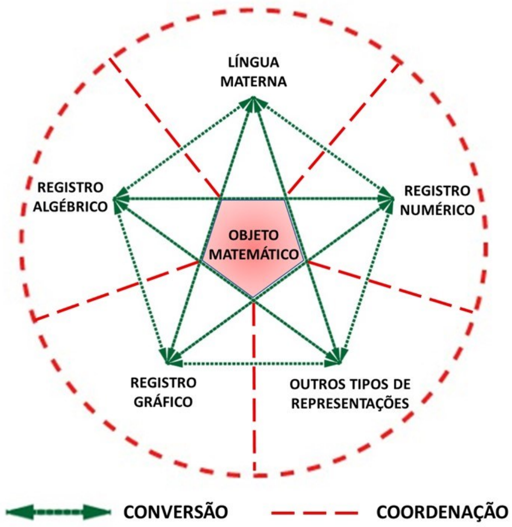
E ainda, além da conversão em dois sentidos, Andrade, Padilla e Dos Santos (2020) destacam a ação de coordenação como forma de ter uma visão global do objeto matemático:

> Entende-se que uma aula na perspectiva da TRRS seja baseada na coordenação entre os registros de representação semiótica nos dois sentidos de conversão. E utilizando-se das transformações de tratamento para fixar os conteúdos e demonstrações matemáticas. Uma aula tradicional em contraste a Teoria de Duval, privilegia somente um sentido de conversão, por exemplo, partindo-se do registro algébrico para o gráfico. Essa

> apresentação de conteúdos obedecendo somente um sentido de conversão prejudica a compreensão dos estudantes em ter uma visão mais abrangente do objeto matemático (ANDRADE; PADILLA; DOS SANTOS, 2020, p. 126-127).

Para favorecer o acesso ao objeto matemático números complexos, além de se utilizar vários tipos de registros de representação, Duval (1995) afirma que é preciso que ocorra uma ação chamada de coordenação. De acordo com Henriques e Almouloud (2016, p. 470), a coordenação "é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos". Com base nos pressupostos de Duval (1995), elaboramos a Figura 4.5 em forma de um pentágono que leva em conta as possibilidades de conversões entre diferentes representações e enfatiza a coordenação.

Figura 4.5: Pentágono Semiótico: conversão e coordenação de representações de um objeto



Fonte: o autor.

Para o caso específico dessa proposta, os jogadores podem manifestar a capacidade de coordenação ao reconhecerem os números complexos por meio dos signos nas formas de vetores e escritas algébricas, de acordo com cada representação.

Durante e após a aplicação do Trincas Complexas, o professor poderá fazer uma avaliação com o intuito de analisar as possíveis contribuições do jogo para a aprendizagem dos estudantes no ensino dos números complexos. Sugerimos que essa avaliação seja feita à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Brousseau (2008), baseada no princípio de que cada conhecimento ou saber está ligado a um tipo de situação, por meio da interação entre duas ou mais pessoas. Um jogo, por exemplo, pode levar o estudante a usar o que já sabe para criar uma estratégia adequada. Para esse autor, cabe ao professor propor uma situação didática que provoque no aluno uma interação autônoma, fazendo com que ele saia da zona de conforto e seja atuante no processo de aprendizagem.

Gomes e Silva (2018) afirmam que a TSD pode ser utilizada para uma melhor compreensão da gamificação de conteúdo como uma estratégia de ensino.

Para esses autores,

> [...] a gamificação de conteúdo é a aplicação dos elementos de jogos para alterar um conteúdo e transformá-lo em um jogo, ou seja, cria-se um jogo para ensinar um determinado conteúdo, modificando sua estrutura, de modo que ele possa ser apresentado e desenvolvido enquanto o aluno joga (GOMES; SILVA, 2018. p.22).

Além disso, é sugerida a utilização de características encontradas em jogos para promover o envolvimento dos estudantes em situações de aprendizagem, onde os alunos possam agir, formular e validar. Nesse sentido, entendemos que uma situação gamificada pode ser entendida como uma situação didática na perspectiva de Brousseau.

As quatro etapas norteadoras da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização) se fazem presente nessa proposta de jogo, visto que os estudantes precisam mobilizar conhecimentos correspondentes aos momentos de estabelecer relações corretas entre os cartões.

Durante o jogo podem ocorrer as etapas: *i) ação*, em que os participantes precisam tomar decisões, colocando os seus saberes em prática para descartar ou não um dos cartões. É nessa etapa que os alunos podem explorar o jogo, conhecendo as regras, buscando solucionar um problema ao interagir com o ambiente do jogo; *ii) formulação*, momento em que o conhecimento implícito é transformado em explícito, onde os alunos trocam informações com um ou mais colegas, podendo explicitar as suas soluções utilizando a língua materna ou alguma linguagem própria da matemática; *iii) validação*, onde a estratégia utilizada para formar as trincas complexas precisam ser provadas dentro do contexto do jogo, realizando corretamente os tratamentos e as conversões entre as representações dos registros. Os alunos validam as conjecturas formuladas nas etapas de ação e formulação.

Após o jogo, pode ocorrer a etapa *iv) institucionalização*, momento no qual o professor tem a oportunidade de fazer de forma explícita um resumo de todo o processo que foi vivenciado durante o jogo, discutindo os acertos e os erros, captando as percepções e *feedbacks* dos estudantes, ressaltando a importância das representações para a compreensão de fatos, das ideias e dos conceitos a fim de perceber se as conversões entre as representações dos registros permitiram evocar o objeto matemático. Nesse momento, o professor valida o conhecimento matemático envolvido na proposta do jogo, de modo que esse novo saber se incorpore aos esquemas mentais dos alunos.

Considerações

Distintas formas de ensino e de aprendizagem tornam-se indispensáveis em um contexto real de ensino, em que dificuldades com alguns conteúdos matemáticos predominantemente abstratos muitas vezes se tornam verdadeiras barreiras nos processos de ensino e de aprendizagem. Para isso, formas lúdicas e dinâmicas de aprender conceitos e operações de um conteúdo, que por muitas vezes é considerado difícil de ser compreendido pelos estudantes do Ensino Médio, podem ser uma maneira plausível de contribuir com o ensinamento desses conteúdos.

O jogo Trincas Complexas foi desenvolvido para ajudar na compreensão e no aprendizado dos números complexos, com possibilidades de promover as conversões entre as representações algébricas e gráficas dos números complexos, com o potencial de tornar as aulas mais interessantes. Seu uso efetivo, juntamente com a intervenção didático-pedagógica do professor, em especial na etapa de institucionalização, poderá auxiliar na construção de novos conhecimentos, bem como contribuir para a concepção da aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio.

O jogo Trincas Complexas poderá contribuir para atenuar algumas dificuldades de aprendizagem, apontadas por alguns pesquisadores como erros nas operações de multiplicação e divisão, dificuldades nas conversões entre diferentes formas de representações e a necessidade de professores propiciarem estratégias e recursos de apoio para a recuperação de lacunas de conhecimentos básicos.

Apesar da pouca utilização dos Números Complexos no Ensino Médio, aplicações desse conteúdo estão presentes em cursos superiores que envolvem as ciências exatas, como por exemplo, nas engenharias. Assim, estudantes que pretendem seguir carreiras nessas áreas poderão apresentar dificuldades de aprendizagem por não terem um contato inicial com esse conteúdo na Educação Básica. Nesse sentido, o jogo Trincas Complexas poderá atuar de forma lúdica para que tais conceitos sejam vivenciados ainda no Ensino Médio.

Consideramos que é possível que os alunos participem da confecção dos jogos, bem como atribuam valores para as partes reais e imaginárias dos números complexos, com possibilidades de se trabalhar, inclusive, com números decimais. No entanto, ressaltamos que a prioridade dessa proposta é realizar corretamente os tratamentos e as conversões entre as diferentes representações de um número complexo.

RETOMANDO A PESQUISA: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, retornaremos ao objetivo geral da presente pesquisa: *criar recursos didáticos para o ensino de números complexos que possibilitem a utilização de diferentes tipos de representação semiótica*, buscando alcançá-lo a partir de uma análise dos resultados evidenciados nos capítulos 2, 3 e 4.

Com o propósito de refletir sobre os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e também discutir sobre uma proposta para o ensino de números complexos que possibilite a utilização de diferentes tipos de representação, a pesquisa desenvolveu-se a partir de três estudos independentes, porém complementares.

No Capítulo 2, após os resultados e discussões sobre o levantamento bibliográfico realizado em trabalhos que apresentam propostas para o ensino de números complexos em dissertações e teses brasileiras, disponíveis no catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, observou-se que os estudos mostraram possibilidades do ensino desse conteúdo a partir do uso efetivo de algum recurso, seja *i)* diferentes formas de representações semióticas; *ii)* uso de tecnologias; *iii)* interdisciplinaridade; *iv)* jogos matemáticos; ou *v)* proposição de tarefas investigativas que promovam uma participação ativa dos estudantes. Essas possibilidades vão ao encontro das propostas elaboradas nos produtos educacionais I e II presentes no apêndice dessa dissertação, e foram discutidas nos Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 3, a partir das reflexões sobre as estratégias e propostas para o ensino de números complexos mencionadas no Capítulo 2, elaboramos uma sequência didática com tarefas interdisciplinares (entre a matemática e a física), subsidiadas na TSD e na TRRS, com a intenção de proporcionar uma participação ativa do estudante em seu processo de aprendizagem, utilizar diferentes registros de representação semiótica (língua natural, algébrica, gráfica ou vetorial), oferecer possibilidades de conversões entre essas representações, além de permitir uma aplicabilidade dos números complexos em um contexto que pudesse chamar a atenção dos alunos de Ensino Médio. Ainda, buscamos atender as características de uma Sequência Didática Investigativa, com tarefas que apresentam conceitos científicos e que podem ser programadas de forma a ter começo, meio e fim em cada aula. Além disso, consideramos a possibilidade do professor ser mediador no decorrer da aplicação dessa sequência didática, bem como avaliar de forma processual a argumentação e a participação dos estudantes nas tarefas por meio das produções escritas, comentários, apresentações, criações, trabalhos em grupos, entre outros. A análise desse conjunto de tarefas mostrou que a SD possui características de uma Sequência Didática Investigativa.

No Capítulo 4, discutimos um jogo elaborado com base nos pressupostos da TRRS, denominado Trincas Complexas, com o objetivo de discutir a utilização da representação gráfica no processo de significação das operações com Números Complexos. Acreditamos que esse jogo poderá auxiliar professores que ensinam matemática a fazer com que os seus alunos compreendam questionamentos da seguinte ordem: em que resulta a soma de dois números complexos? E a subtração, multiplicação ou divisão? Os cartões desse jogo oferecem possibilidades de conversões entre as representações algébricas e gráficas, e, em particular, nas operações de multiplicação e divisão pode-se utilizar o registro algébrico-trigonométrico como intermediário na conversão entre o algébrico e o gráfico.

Destaca-se que esse jogo poderá contribuir para atenuar algumas dificuldades de aprendizagem, apontadas por alguns pesquisadores como erros nas operações de multiplicação e divisão, dificuldades nas conversões entre diferentes formas de representações e a necessidade de professores propiciarem estratégias e recursos de apoio para a recuperação de lacunas de conhecimentos básicos. Além disso, possui o potencial de tornar aulas de matemática mais interessantes em relação a um conteúdo que, muitas vezes, é apresentado predominantemente de maneira abstrata.

Como um possível avanço, esse trabalho propôs recursos didáticos para o ensino de Números Complexos. Um deles na forma de sequência didática, na qual: na tarefa I há uma proposição de uma pesquisa; na tarefa II, há operações que exigem tratamentos dentro de um mesmo sistema de registro e posterior conversão para a representação gráfica, com possibilidades de uso da tecnologia (*Software* GeoGebra); na tarefa III há um contexto interdisciplinar com a proposição de questões que proporcionam o uso das representações algébricas e vetoriais em um contexto real de possível aplicação; e, na tarefa IV, além do uso de diferentes formas de representações semióticas, há uma situação que insere os alunos em um contexto ativo de argumentação, pois precisam confrontar conclusões anteriores e validar conceitos relacionados a números complexos e medidas, com o potencial de trazer à sala de aula um debate de ideias. E outro, que tenta trazer o aspecto lúdico para o ambiente de ensino, sem deixar de lado o objeto do saber de referência: o jogo Trincas Complexas.

Sugerimos, para trabalhos futuros, aprofundar e ampliar a discussão sobre a força aerodinâmica conhecida como sustentação, pois percebemos que há controvérsias a respeito desse tema, bem como não há uma explicação simples e nem consenso entre cientistas e algumas teorias, de forma a explicar completamente essa força do ponto de vista da Física. Ademais, sugerimos a aplicação desses produtos em contexto real de ensino, uma vez que, devido à suspensão das aulas presenciais em decorrência da pandemia COVID-19, não foi possível validar, em sala de aula, os produtos educacionais elaborados.

Os estudos empreendidos para essa pesquisa de Mestrado Profissional permitiram a elaboração de dois produtos educacionais, que se encontram no apêndice dessa dissertação, discutidos nos Capítulos 3 e 4. Esperamos que esses materiais possam contribuir com o ensino de matemática, em específico dos números complexos, e que professores ou futuros professores considerem as possibilidades de se trabalhar com diferentes formas de representações semióticas, uso de tecnologias, interdisciplinaridade, jogos matemáticos e proposição de tarefas investigativas que promovam uma participação ativa dos estudantes.

REFERÊNCIAS

AGRICCO JUNIOR; C. R. **Números complexos e grandezas elétricas: análise de livros didáticos apoiada na Teoria dos Registros de Representações Semióticas**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

AMORIM, T. M. **O estudo dos números complexos no ensino médio: uma abordagem com a utilização do Geogebra**. 2014. 238p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

ANDRADE, A. A.; PADILLA, A.; DOS SANTOS, C. A. B. Representações Sociais dos Licenciandos em Matemática sobre o Ensino de Limites por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **HIPÁTIA-Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 120-131, 2020.

ALMEIDA, S. P. **Números complexos para o ensino médio**: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações. 2013. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.

ARAÚJO, N. B. F. **Números complexos**: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

ASSEMANY, D.; HARAB, L. Potencializando o ensino de números complexos a partir da abordagem vetorial. **VII CIBEM**. Montevideo, 2013. p. 636-645, 2013.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimento**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Paralelo, 2003.

AZEVEDO, D. P. **Ensino desenvolvimental**: um experimento didático para o estudo dos números complexos. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Jataí, 2016.

BARROS, L. G. X.; AGRICCO JR, R C. Números complexos e grandezas elétricas vetoriais sob a ótica da Teoria dos Registros das Representações Semióticas. **Revemop**, v. 1, n. 2, p. 183-206, 2019.

BITENCOURT, A. L.; VARGAS, P. R.; FELICETTI, V. L. Una propuesta pedagógica: utilizando el software Geogebra en la rotación de vectores complejos. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém/PA, v. 11, n. 21, jul./dez. 2014.

BRASIL - MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, partes I a III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **Brasília: MEC**, SEB, 2000.
BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília**, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. **Brasília: MEC**, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio.** Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Ática, 2008.

CAMATA, J. G. **Análise das Raízes Complexas de uma Equação Quadrática e Estudo de Números Complexos no Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.

CAON, F. **Números Complexos**: inter-relação entre conteúdos e aplicações. 2013.72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013.

CARVALHO, A. M. P. O ensino de ciências e a proposição de sequências de ensino investigativas. **Ensino de ciências por investigação: condições para implementação em sala de aula.** São Paulo: Cengage Learning, v. 1, p. 1-19, 2013.

CARVALHO, P. L. L. **Abordagens e descritores de pesquisas sobre o ensino de números complexos realizadas no período de 1992 a 2017**: um percurso para uma meta-análise. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020.

DENARDI, V. B. **Contribuições das representações semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de licenciatura em Matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2019.

DUVAL, R. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. Org. Silvia Dias Alcântara Machado. – 8ª Ed. – Campinas, SP: Papirus, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S.D.A.(org.). **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.p.11-33.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento (Tradução de Méricles Thadeu Moretti). **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, R. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.(Trad.). L. F. Levy e M. R. A. Silveira. São Paulo: **Livraria da Física**, v. 2, 2009.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. **Education should consider alternative formats for the dissertation. Educational Researcher**, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

GHEDAMSI, I.; TANAZEFTI, R. Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de Secondaire. **Petit x**, v. 98, p. 29-52, 2015.

GOMES, M. S.; DA SILVA, M. J. F. Gamificação: uma estratégia didática fundamentada pela perspectiva da teoria das situações didáticas. **Horizontes-Revista de Educação**, v. 6, n. 11, p. 18-30, 2018.

HENRIQUES, A. **Análise Institucional & Sequência Didática como metodologia de pesquisa**. In: Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, I, 2016, Bonito. Anais... Mato Grosso do Sul, 2016.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P.; PUIG, B. Research on argumentation about genetics and determinism. **Genomics Education for Decision-making**, v. 2, p. 63, 2010.

KRIPKA, R.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa. **CIAIQ 2015**, v. 2, p. 155-137, 2015.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática.1991.

LIMA, L. G. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para o ensino e aprendizagem da Física. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 24, n. 3, 2019.

LOPES, M. M. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 631-644, 2013.

MENDES, J. A. **O ensino dos números complexos por meio de uma proposta metodológica de sala de aula invertida**. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020.

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, A. L. Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, 2020.

MOREIRA, I. M. B. **Os jogos de linguagem entre surdos e ouvintes na produção de significados de conceitos matemáticos**. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Ciências) – Universidade Federal de Mato Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, 2015.

MOTOKANE, M. T. Sequências didáticas investigativas e argumentação no ensino de ecologia. **Ensaio: pesquisa em educação em ciências**. Belo Horizonte, v. 17, n. especial, p. 155-137, 2015.

NOVAIS, R. P. B. **O decolar de um avião**: uma proposta didática sobre números e funções complexas. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.

OLIVEIRA, A. L.; DOS SANTOS, A. P. A.; CHEFER, C. Análise de uma sequência didática elaborada por pibidianos no contexto do ensino de ciências por investigação. **Revista Valore**, v. 6, p. 391-401, 2021.

OLIVEIRA, C. N. C. Números Complexos: **um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. 2010. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. SEED, Curitiba, 2008.

PARANÁ. **Referencial curricular para o ensino médio do Paraná**. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. – Curitiba: SEED/PR., Vol. 3. 2021. Disponível emhttps://professor.escoladigital.pr.gov.br/sites/professores/arquivos_restritos/files/documento/2022-02/ensino_medio_referencial_curricular_vol3_vf.PDF. Acesso em 25 mar. 2022.

PARANÁ. **Referencial curricular para o ensino médio do Paraná**. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. – Curitiba: SEED/PR., Vol. 1. 2021. Disponível emhttps://professor.escoladigital.pr.gov.br/sites/professores/arquivos_restritos/files/documento/2022-02/ensino_medio_referencial_curricular_vol1_vf.pdf. Acesso em 25 mar. 2022.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação. **Caderno de Expectativas de Aprendizagem** (Departamento de Educação Básica). Curitiba: SEED-PR, 2012. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno_expectativas.pdf. Acesso em 20 dez. 2021.

PAULO, R. R. **Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico**: uma abordagem no ensino de números complexos. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

PELLEGRINI, C. C.; RODRIGUES, M. S. Um estudo analítico da dinâmica da decolagem e do pouso de aeronaves com forças dependentes da velocidade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, p. 2307-1-2307-11, 2015.

PEREIRA, G. G. **Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, 2017.

PINTO, J. E.; LAUDARES, J. B. Objeto de Aprendizagem de Números Complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 3, 2017.

PIRES, M. V. Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática. **Quadrante**, v. 20, p. 55-81, 2011.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: grupo de trabalho de matemática (GTI). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11 - 34.

PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

PUHL, C. S.; LIMA, I. G. Uma sequência didática para compreender a potenciação e a radiciação de números complexos. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 2, n. 1, p. 72-86, 2016.

PUHL, C. S.; LIMA, I. G.; MÜLLER, T. J. Ensino de números complexos na Engenharia Elétrica: um mapeamento de produções brasileiras. **Abakós**, 2021.

PUHL, C. S.; MÜLLER, T. J.; DE LARA, I. C. M. Mapeamento de objetos de aprendizagem para o ensino de números complexos na engenharia elétrica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 4, p. 191-211, 2020.

PUHL, C. S.; MÜLLER, T. J.; DE LIMA, I. G. Operações com números complexos: análise de erros cometidos por acadêmicos de Engenharia. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 16, n. 36, p. 181-196, 2020.

RANDOLPH, V. N.; PARRAGUEZ, M. C. Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. **Formación universitaria**, v. 12, n. 6, p. 57-82, 2019.

SALES, E. R. **A visualização no ensino de matemática: uma experiência com alunos surdos**. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

SILVA, N. A. **Uma situação didática para ensino de números complexos com foco em eletricidade pela via da engenharia didática**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática**. Ensino Médio, v. 3, pp. 236-275. São Paulo, Saraiva, 2010.

STUDART, N.; DAHMEN, S. R. A física do vôo na sala de aula. **Física na escola.** Vol. 7, n. 2 (out. 2006), p. 36-42, 2006.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

APÊNDICE – PRODUTOS EDUCACIONAIS

PRODUTO EDUCACIONAL I

DECOLAGEM E POUSO DE UM AVIÃO: EMBARQUE NESSE VOO COM DESTINO A UMA APLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

PPGMAT- 2022

DECOLAGEM E POUSO

DE UM AVIÃO

EMBARQUE NESSE VOO COM DESTINO A UMA APLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

CILIO JOSÉ VOLCE
CLAUDETE CARGNIN

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CILIO JOSÉ VOLCE
CLAUDETE CARGNIN

DECOLAGEM E POUSO DE UM AVIÃO:
EMBARQUE NESSE VOO COM DESTINO A UMA APLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

AIRPLANE TAKEOFF AND LANDING:
BOARD ON THIS FLIGHT TO A COMPLEX NUMBERS APPLICATION

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA
2022

AUTORES

CILIO JOSÉ VOLCE

Mestre em Ensino de Matemática (2022) pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - PPGMAT/UTFPR. Especialista em Estatística (2008) e Licenciado em Matemática (2006) pela Universidade Estadual de Londrina — UEL. Bacharel em Engenharia Civil (2016) pela Faculdade Pitágoras de Londrina. Possui experiência em Tutorias para graduação em Educação a Distância — EaD, docência no Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Cursinho Preparatório para Concursos Públicos, Ensino Técnico/Profissionalizante e Ensino Superior.

Contato: cjvolceuel@yahoo.com.br

CLAUDETE CARGNIN

Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática (2013) pela Universidade Estadual de Maringá. Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001). Especialista em Estatística e em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. É licenciada em matemática pela Universidade Estadual de Maringá (1994). Atualmente é professora titular da carreira do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, com projetos de pesquisa voltados para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de matemática na educação básica (ênfase em recursos tecnológicos e interdisciplinaridade) e para estudantes com Transtorno do Espectro Autista. É professora do Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática da UTFPR- Câmpus Londrina/Cornélio Procópio.

Contato: cargnin@utfpr.edu.br

ILUSTRAÇÕES

As imagens utilizadas na capa e nas tarefas deste Produto Educacional são de uso livre e foram obtidas no *site Canva.* Disponível em: https://www.canva.com/. Acesso em 20 dez. 2021.

VERSÃO DO ALUNO

No final desse Produto Educacional, está disponibilizada uma versão que pode ser impressa e entregue ao estudante.

TERMO DE APROVAÇÃO

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

CILIO JOSE VOLCE

RECURSOS DIDÁTICOS PARA NÚMEROS COMPLEXOS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 27 de Abril de 2022

Claudete Cargnin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Bruno Rodrigo Teixeira, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Sergio De Mello Arruda, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 27/04/2022.

APRESENTAÇÃO

Caros passageiros,

Sejam bem-vindos a bordo dessa aula.

Aqui vocês serão transportados por meio de uma sequência didática composta por quatro tarefas com foco nas representações algébricas e gráficas de Números Complexos.

O voo possui um destino interdisciplinar, com escalas nas disciplinas de Matemática e Física e conexões em outras áreas do conhecimento.

Acomodem os seus materiais nos compartimentos em cima ou embaixo de suas carteiras. Não é permitido ficar com dúvidas. Lembramos que o conhecimento é a capacidade humana de entender e compreender. Aprender é sensacional.

Em caso de emergência, chame pelo seu professor(a), que possui uma das mais nobres profissões com grande responsabilidade em contribuir com a sua formação e desenvolvimento enquanto indivíduo em uma sociedade.

A DECOLAGEM está autorizada. Desejamos a todos uma ótima aula!

Apertem os cintos e boa aprendizagem!

Cilio José Volce

Claudete Cargnin

SUMÁRIO

Introdução

As tarefas temáticas que compõem este produto educacional foram concebidas no decorrer dos estudos e desenvolvimento da pesquisa de mestrado profissional intitulada "***Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica***" disponível no endereço: <<http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/producao-academica>>. A sua estrutura foi pensada de modo a relacionar o conteúdo Números Complexos a um contexto real de aplicação, explorando as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, com foco nas representações algébricas e gráficas dessas operações. Ainda, buscamos sintetizar atividades com possibilidades de utilizá-las de forma interdisciplinar com a Física no quesito de vetores e forças. No decorrer das apresentações das tarefas, há soluções e curiosidades sobre o tema avião e orientações para o professor da disciplina de matemática.

Dessa forma, organizamos este material que contém quatro tarefas com abordagens que envolvem as etapas de ação, formulação, validação e institucionalização com inspirações na Teoria das Situações Didáticas – TSD (Guy Brousseau).

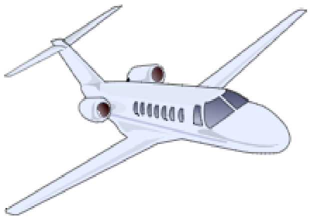
Com esse produto, pretende-se incentivar os alunos a estudarem, revisarem conteúdos e refletirem sobre as mudanças de registros. Acredita-se que os recursos interativos podem: auxiliar na compreensão dos conceitos, operações e representações dos Números Complexos; diminuir lacunas de aprendizagens; melhorar os fundamentos matemáticos dos estudantes; permitir uma participação ativa dos estudantes; e trazer dinamicidade para a sala de aula. O objetivo deste instrumento é contribuir com o ensino e a aprendizagem de números complexos. Os objetivos específicos de cada tarefa da sequência didática estão detalhados no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 - Organização da Sequência Didática

	Proposta	Descrição	Objetivos
SEQUÊNCIA DIDÁTICA	Tarefa 1 **O que faz um avião voar?**	Nessa tarefa, faremos uma breve introdução aos estudos que nortearão nosso voo rumo à compreensão de conceitos matemáticos que nos ajudarão a compreender como atuam as forças que permitem que um avião voe.	✓ Conhecer alguns cálculos e princípios teóricos que explicam o que leva um avião a voar; ✓ Apresentar o conjunto de Números Complexos, pois tal conhecimento ajuda a explicar conceitos da aerodinâmica e estes são fundamentais para compreendermos o que garante a sutentação de um avião no ar; ✓ Apresentar algumas formas de representação dos Números Complexos, sendo as formas: algébrica, algébrica-trigonométrica e gráfica.
	Tarefa 2 **Números Complexos na Aerodinâmica**	Nessa tarefa, apresentaremos a expressão $z + \frac{1}{z}$	✓ Demonstrar a importância do estudo dos Números Complexos para a compreensão de conceitos da aerodinâmica; ✓ Operar com números complexos na expressão $z + \frac{1}{z}$; ✓ Representar graficamente números complexos a partir de sua forma algébrica.
	Tarefa 3 **Vetores e Forças**	Nessa tarefa, estudaremos alguns vetores e forças que atuam em um avião.	✓ Conceituar vetores e força; ✓ Apresentar as principais forças presentes em um voo, sendo: Sustentação; Arrasto; Resultante; Tração da Hélice e Peso. ✓ Resolver atividades algumas posições em que um avião pode se encontrar: voo ascendente; voo horizontal; voo descendente e voo em curva.
	Tarefa 4 **Caixas-Pretas**	Nessa tarefa, exploraremos equações do 2° e do 3° grau com raízes complexas.	✓ Representar graficamente números complexos dados em forma algébrica.

Fonte: o autor.

Tarefa 1



Investigue quais disciplinas que você já estudou ou estuda na escola e que podem trazer conhecimentos para ajudar a explicar o que faz um avião voar.

Pesquise, discuta e compartilhe com os seus colegas e com o seu professor(a) algumas possíveis fórmulas, cálculos e princípios de teorias que podem ajudar a explicar os mistérios que fazem com que uma máquina tão pesada voe.

***Professor(a)**, nesse momento converse com os seus alunos e solicite que discutam com os colegas de sala sobre o que eles pensam a respeito das possíveis respostas para os questionamentos feitos e, em seguida, peça para que eles registrem as suas ideias para posterior discussão.*

Na sequência, após as reflexões realizadas, apresente aos alunos a seguinte curiosidade que os ajudará a compreender e a responder parcialmente alguns dos questionamentos já feitos.

Curiosidade

Disciplinas que ajudam a explicar o voo de um avião

A aviação está baseada nos princípios da matemática e da física. Alguns desses princípios são estudados na escola e podem auxiliar nas explicações do voo de um avião. Para que um avião voe, é necessário que algum tipo de força consiga vencer ou anular o seu peso. Ocorrem conceitos Físicos quando ele está em movimento, em particular, nas asas do avião, também chamadas de aerofólios. Os cálculos ficam por conta da matemática, com conceitos aritméticos, algébricos e geométricos.

Esse breve texto está baseado em: O que faz um avião voar? **UFRGS**. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20031/Andre/>. Acesso em: 15 dez. 2021.

Possivelmente, ao responder os questionamentos anteriores sobre alguns cálculos que ajudam a explicar o que faz um avião voar, você possa ter observado algumas equações, muito utilizadas para ajudar a resolver exercícios e situações-problema encontrando soluções nos quais números não são conhecidos. Vamos relembrar uma possibilidade de resolução de equação do 2° grau, pois utilizaremos essa resolução para discutir raízes quadradas de números negativos.

Uma equação do 2° grau pode ser representada em sua forma completa por:

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Para determinar suas raízes podemos utilizar, por exemplo, a fórmula resolutiva de equação do 2° grau, conhecida como método de Bhaskara.

Vamos considerar a seguinte equação: $x^2 + 4x + 5 = 0$. **Vamos resolvê-la?**

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$
$$\Delta = 16 - 20$$
$$\Delta = -4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}$$

No conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), sabemos que a $\sqrt{4} = 2$, mas qual é a $\sqrt{-4}$?

E agora, como podemos continuar essa resolução? Existe raiz quadrada de números negativos?

Professor(a)*, nesse momento proponha uma pesquisa aos seus alunos. Essa pesquisa pode ser por meio de livros ou da internet. Instigue os estudantes a procurarem possíveis respostas para o cálculo de raízes quadradas de números negativos. A partir daí, provavelmente, será possível associar $\sqrt{-1}$ a um número imaginário representado pela letra* ***i****. Após determinar a solução, solicite que os estudantes façam a substituição de x_1 e x_2 na equação para verificar a validade dessas respostas. Aproveite essa oportunidade para apresentar e discutir com os seus alunos o conjunto dos* ***Números Complexos****.*

A solução para o cálculo de raízes quadradas de números negativos surgiu com a criação dos números imaginários, cuja unidade imaginária representada pela letra i, é igual a $\sqrt{-1}$, ou seja, $i^2 = -1$.

Voltando para a equação anteriormente mencionada, temos:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4.i^2} = 2.i$$

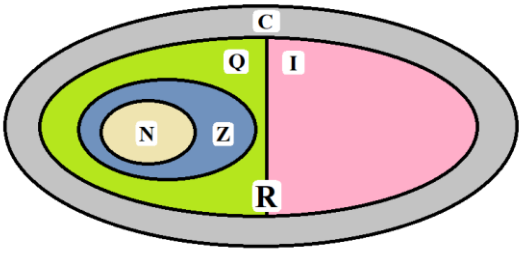
$$x = \frac{-4 \pm 2.i}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2.i}{2} = -2 + i$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2.i}{2} = -2 - i$$

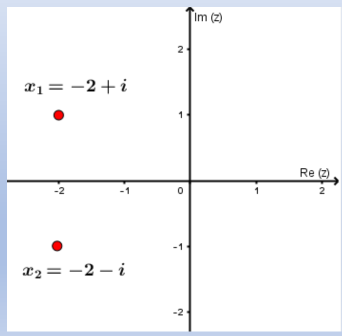
Portanto, obtemos: S = $\{x_1 = -2 + i \; ; x_2 = -2 - i\}$.

Os números complexos surgem a partir de equações em que as resoluções possuem raízes de números negativos, o que, até então, não era possível de resolver trabalhando com os números reais. Na imagem a seguir, observamos que o conjunto dos números reais (ℝ) é um subconjunto do conjunto dos números complexos (ℂ).



Fonte: o autor.

Os números complexos podem ser representados por meio de alguns registros, entre eles: registro algébrico; registro algébrico-trigonométrico; e registro gráfico. Veja a seguir essas possíveis maneiras de representações para as raízes da equação x² + 4x + 5 = 0 que calculamos anteriormente.

Registro Algébrico	**Registro Algébrico - Trigonométrico**	**Registro Gráfico**
Representado na forma $z = a + bi$, composta por uma parte real <u>a</u> e uma parte imaginária <u>b</u>. $x_1 = -2 + i$, $x_2 = -2 - i$	Representado na forma $z = \rho(cos\theta + i.sen\theta)$ $x_1 \cong \sqrt{5}(cos153° + i.sen153°)$ $x_2 \cong \sqrt{5}(cos207° + i.sen207°)$	Representado no plano de Argand-Gauss 

***Professor(a)**, o tema apresentado nas tarefas pode ser interessante tanto para os meninos, quanto para as meninas. Utilize a curiosidade a seguir para conversar com os alunos sobre a participação das mulheres em profissões que historicamente possuem a predominância masculina no exercício da profissão. Mostre para eles que tanto homens quanto mulheres podem fazer parte das mais diversas profissões.*

Ainda, aproveite também essa oportunidade para relembrar os alunos e explorar o conteúdo de porcentagem presente no texto.

Curiosidade

Participação das mulheres na força aérea

De acordo com a Força Aérea Brasileira – FAB, há mais de 10 mil mulheres em funções como pilotos de combate e comandantes de organização militar. Historicamente, as mulheres eram exceções na aviação civil. No entanto, a presença de mulheres na FAB já é uma realidade em praticamente todos os setores. Dados da FAB mostram que "desde 2003, houve um aumento de 277% da participação feminina. Hoje são 10.160 mulheres na FAB, o equivalente a 14,55% do efetivo de militares".
Em relação aos Terceiros-Sargentos formados na Escola de Especialistas de Aeronáutica (EEAR) nos últimos sete anos, 5.739 são homens e 3.057, mulheres.

Esse breve texto está baseado em: Força aérea também é lugar de mulher. **FAB**. Disponível em: <https://www.fab.mil.br/noticias/mostra/21673>. Acesso em: 15.02.2021.

Fechamento da tarefa 1: o que faz um avião voar? Até aqui vimos algumas possibilidades de disciplinas que podem ajudar a explicar o que faz um avião voar, por exemplo: **Matemática** e **Física**. No entanto, essa questão ainda não foi respondida completamente e você pode estar se perguntando: o que isso tem a ver com o que faz um avião voar? Nada a ver? É o que você está achando? Então vamos fazer as **tarefas 2 e 3**, pois com elas teremos mais embasamentos para compreender o voo de um avião.

Tarefa 2

A **aerodinâmica** é uma parte da mecânica dos fluidos que estuda os gases em movimento, e em particular o movimento relativo entre o ar e os corpos sólidos. Ao construir um avião, os engenheiros se fundamentaram nos princípios da aerodinâmica, principalmente na elaboração do aerofólio. Um aerofólio é projetado para causar certa variação da velocidade de um fluido, acarretando uma diferença de pressão. Nas aeronaves, os aerofólios se encontram nas asas e no leme, proporcionando a sustentação e direção do avião, logo o mantendo no ar, cuja explicação está na conservação de energia enunciada pelo Princípio de Bernoulli (PORTOLAN, 2017).

E quanto aos números complexos? Há alguma contribuição desses números na aerodinâmica? Estudos como os de Camata (2015), Pereira (2017) e Novais (2020) dizem que há contribuições dos números complexos na aerodinâmica e destacam ainda o cientista russo Nicolai Egorovich Joukowski (1847-1921).

Camata (2015) descreve que Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, calculou a força de levantamento responsável pela sustentação do corpo. Ainda, ressalta que os números complexos permitiram uma explicação matemática capaz de definir as características do perfil aerodinâmico da asa do avião, colaborando com o progresso aeronáutico.

Pereira (2017) comenta que não se pode deixar de destacar a grande contribuição dos números complexos para várias áreas, como para a Dinâmica dos Fluidos e Aerodinâmica, onde Nikolai Joukowski desenvolveu um método que possibilitou que engenheiros aeronáuticos fizessem estudos sobre aerofólios e sua influência na sustentação de aviões (construção das asas).

Novais (2020) ressalta que esse cientista foi responsável por demonstrar que a imagem de uma circunferência de raio unitário no z − plano é mapeada[14] dentro de uma curva de formato de um aerofólio no w − plano, semelhante a uma asa de avião. Ao estudar a função $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, deduziu uma função de variável complexa dada por: $F(z) = z + \frac{1}{z}$.

Essa transformação ficou conhecida como transformação de Joukowski, que propõe um aproveitamento da conhecida solução analítica para um escoamento potencial ao redor de um cilindro com circulação e conclui que "se os fluxos aerodinâmicos" para um fluxo em torno de um círculo são conhecidos, então suas imagens sob o mapeamento $w = f(z)$ será o fluxo aerodinâmico para um fluxo em torno do aerofólio (NOVAIS, 2020).

Professor(a)*, é evidente que o estudo de variáveis complexas exige conceitos matemáticos que estão além da matemática básica estudada até o Ensino Médio. Como sugestão de tarefa 2 para os alunos, seguiremos Novais (2020): Proponha a seus alunos um estudo da expressão $z + \frac{1}{z}$. Atribua arbitrariamente alguns valores para z em sua forma algébrica ($z = a + bi$) e solicite o resultado dessa expressão.*

Explore os conceitos de conjugado, de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de Números Complexos. A representação gráfica poderá ser visualizada utilizando o Software GeoGebra.

Questão da tarefa 2:

Após conhecermos a importante expressão $z + \frac{1}{z}$ estudada por Joukowski que, segundo alguns estudos, explica matematicamente a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião, determine o seu valor para $\boldsymbol{z_1, z_2, z_3, e\ z_4}$ apresentados a seguir e represente-os graficamente. Se considerar necessário, utilize o *Software Geogebra*.

[14] Mais informações em: https://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowsky/. **Deduções sobre o aerofólio de Joukowski.** Acesso em 10/01/2022.

$\boldsymbol{z_1 = 5 + 2i}$

Solução:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5+2i} \cdot \frac{5-2i}{5-2i}$$
$$= \frac{5-2i}{25-10i+10i-4i^2}$$
$$= \frac{5-2i}{25-4i^2}$$
$$= \frac{5-2i}{25-4.(-1)}$$
$$= \frac{5-2i}{25+4}$$
$$= \frac{5-2i}{29}$$

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = \frac{5+2i}{1} + \frac{5-2i}{29}$$
$$= \frac{145+58i+5-2i}{29}$$
$$= \frac{150+56i}{29}$$

$\boldsymbol{z_2 = 5 - 2i}$

Solução:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i}$$
$$= \frac{5+2i}{25+10i-10i-4i^2}$$
$$= \frac{5+2i}{25-4i^2}$$
$$= \frac{5+2i}{25-4.(-1)}$$
$$= \frac{5+2i}{25+4}$$
$$= \frac{5+2i}{29}$$

$$z_2 + \frac{1}{z_2} = \frac{5-2i}{1} + \frac{5+2i}{29}$$
$$= \frac{145-58i+5+2i}{29}$$
$$= \frac{150-56i}{29}$$

$\boldsymbol{z_3 = -5 + 2i}$

Solução:

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{-5+2i} \cdot \frac{-5-2i}{-5-2i}$$
$$= \frac{-5-2i}{25+10i-10i-4i^2}$$
$$= \frac{-5-2i}{25-4i^2}$$
$$= \frac{-5-2i}{25-4.(-1)}$$
$$= \frac{-5-2i}{25+4}$$
$$= \frac{-5-2i}{29}$$

$$z_3 + \frac{1}{z_3} = \frac{-5+2i}{1} + \frac{-5-2i}{29}$$
$$= \frac{-145+58i-5-2i}{29}$$
$$= \frac{-150+56i}{29}$$

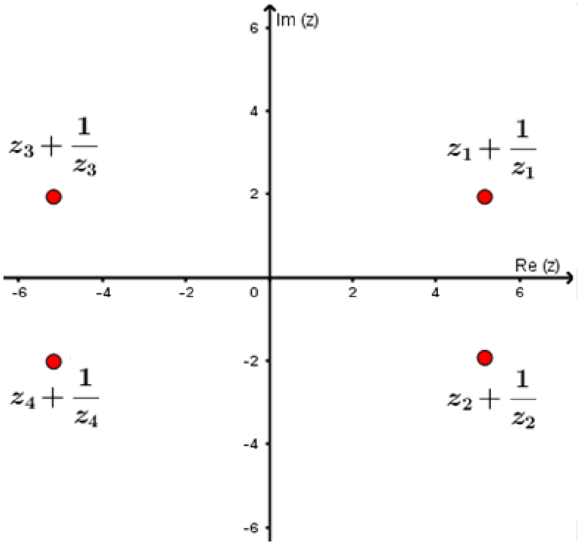
$\boldsymbol{z_4 = -5 - 2i}$

Solução:

$$\frac{1}{z_4} = \frac{1}{-5-2i} \cdot \frac{-5+2i}{-5+2i}$$
$$= \frac{-5+2i}{25+10i-10i-4i^2}$$
$$= \frac{-5+2i}{25-4i^2}$$
$$= \frac{-5+2i}{25-4.(-1)}$$
$$= \frac{-5+2i}{25+4}$$
$$= \frac{-5+2i}{29}$$

$$z_4 + \frac{1}{z_4} = \frac{-5-2i}{1} + \frac{-5+2i}{29}$$
$$= \frac{-145-58i-5+2i}{29}$$
$$= \frac{-150-56i}{29}$$

Representação gráfica de $z_{1,}, z_2, z_3, e\ z_4$.



Fechamento da tarefa 2: observe que os resultados das operações propostas estão um em cada quadrante na representação gráfica. Isso se deve ao fato de que ora usamos a > 0, ora a < 0, assim como ora b > 0, ora b < 0.

Curiosidade

Santos Dumont: Já que estamos no assunto aviação, um personagem não pode ficar de fora: Santos Dumont! Você sabia que ele, antes mesmo de ser conhecido por seus feitos na aviação, já era um dos pioneiros das corridas de automóvel na França? Pois é! Mesmo antes de inventar o avião, ele já era recebido como herói no Brasil, graças a seus feitos como piloto. Em Petrópolis - RJ, tem um museu só para ele, que se chama: Museu Casa de Santos Dumont. Nele, há muita coisa bacana sobre o talento, a criatividade e os feitos deste grande brasileiro. Para conhecer um pouco mais sobre a vida e a obra de Santos Dumont, faça um tour virtual em seu museu.

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=y39qLjd03EA. Duração: 26 minutos. Acesso em: 01.07.2021.

Fonte da imagem: https://adslatin.com/conheca-a-historia-do-14-bis/. Acesso em: 03.07.2021.

Tarefa 3

Alguns dos conteúdos básicos da Física são os estudos de vetores e forças. Os **vetores** representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido. O módulo é o valor numérico do vetor seguido da unidade de medida que define a grandeza vetorial. A direção é a reta onde o vetor está localizado, e as direções possíveis são: diagonal, horizontal e vertical. **Força** é o agente da dinâmica responsável por alterar o estado de repouso ou movimento de um corpo. Quando se aplica uma força sobre um corpo, esse pode desenvolver uma aceleração, como estabelecem as leis de Newton, ou se deformar.

INDICAÇÃO DE LEITURAS E VÍDEOS

Para a realização da tarefa 3, se necessário, sugerimos as seguintes leituras:

Números Complexos

Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc01.htm. Acesso em: 27.12.2021.

Números Complexos e polinômios

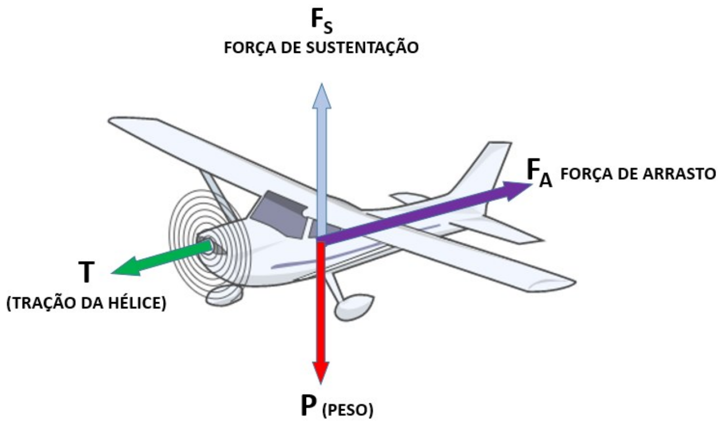
Disponível em: https://www.ime.usp.br/~oliveira/ComplexosCap1.pdf. Acesso em: 27.12.2021.

O que são números imaginários?; O que são números complexos?; O plano complexo; Soma e subtração de números complexos; Multiplicação de números complexos; Conjugados complexos e divisão de números complexos; Valor absoluto e ângulo de números complexos; Distância e ponto médio de números complexos; Forma polar de números complexos; Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar; Problemas envolvendo números complexos

Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers. Acesso em: 27.12.2021.

Uma das possibilidades para visualizar os números complexos é por meio de vetores. Vamos ver como os vetores agem aqui. A seguir apresentaremos algumas forças vetoriais que atuam no avião:

ALGUMAS FORÇAS QUE ATUAM EM UM AVIÃO



Fonte: o autor.

Força de Sustentação (F_S)

Força de Sustentação (F_S) é a componente da força aerodinâmica perpendicular à direção do movimento do voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Força de Arrasto (F_A)

Força de Arrasto (**F_A**), essencialmente uma força de atrito, é a componente da força aerodinâmica paralela à direção de voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Tração da Hélice (T)

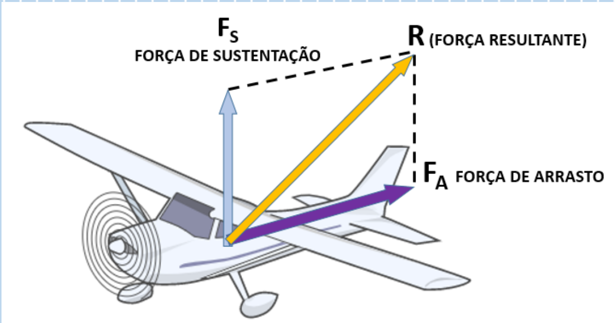
Tração da Hélice (T) é a força produzida pelo motor e é dirigida ao longo do eixo longitudinal do avião (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Peso (P)

Peso (P) é a força da gravidade ($P = m \cdot g$) atuando sobre o avião e dirigida para o centro da Terra (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Força Resultante (R)

Surge em virtude do diferencial de pressão entre o intradorso e o extradorso do aerofólio e tende a empurrá-lo para cima, auxiliada ainda pela reação do ar (Terceira Lei de Newton). Ela é representada, de maneira didática e para melhor compreensão do estudante, como um vetor que, quando decomposto, dá origem a duas forças componentes. A componente da força resultante perpendicular (ou normal) à direção do fluxo é chamada de sustentação; a componente da força resultante ao longo da direção do fluxo é chamada de arrasto. Disponível em: https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/presar.html. Acesso em: 10.01.2022.



Fonte: o autor.

CONTROVÉRSIAS SOBRE A FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Quando o assunto é a força aerodinâmica conhecida como **sustentação**, não há uma explicação simples para esse tema, assim como não há consenso entre cientistas e algumas teorias, de forma a explicar completamente a força de sustentação, o que deixa uma situação intrigante no ponto de vista físico.

Segundo Regis (2020), há duas teorias concorrentes que comumente são propostas para explicar a sustentação aerodinâmica: Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton. É sobre essas duas teorias que se trata o Quadro 2 a seguir:

Quadro 2 – Breve descrição sobre o Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton

Teorema de Bernoulli	**Terceira Lei de Newton**
- Considerado o mais popular para explicar a sustentação aerodinâmica, diz que a pressão de um fluido diminui à medida que sua velocidade aumenta, e vice-versa; - O Teorema de Bernoulli considera a sustentação como uma consequência da superfície superior curva de um aerofólio (nome técnico de uma asa de avião). Por causa dessa curvatura, o ar viajando através do topo da asa se move mais rápido do que o ar se movendo na superfície inferior da asa, que é plana; - O aumento da velocidade no topo da asa está associado a uma região de menor pressão, o que faz gerar a sustentação.	- Princípio newtoniano de ação e reação; - Explica a sustentação como um impulso para cima na asa com o ar em movimento abaixo dela; - O ar tem massa. Portanto, a terceira lei de Newton estabelece que o impulso para baixo da asa resulta em uma igualdade e o oposto dessa situação empurra de volta para cima; - Este relato newtoniano de sustentação aplica-se a asas de qualquer formato, curvas ou planas, simétricas ou não, e vale para aeronaves voando invertidas ou de lado (o recurso crítico é um ângulo de ataque adequado).
Críticas à Teoria	**Críticas à Teoria**
O teorema por si só não explica por que a velocidade superior no topo da asa traz pressão mais baixa junto com ela ou, o por que, na prática, um avião com asas que possuem superfície superior curva - ou mesmo superfícies planas na parte superior e inferior é capaz de voar invertido, desde que o aerofólio encontre o vento que se aproxima em um ângulo apropriado.	O princípio de ação e a reação ainda não consegue explicar a mais baixa pressão no topo da asa, independentemente de o aerofólio ser curvado ou não.

Fonte: Adaptado de Regis (2020) – tradução nossa.

Cada uma dessas teorias está correta dentro de seus próprios contextos, e nenhuma delas contradiz a outra. O problema é que nenhuma delas produz uma explicação completa que leva em consideração todas as forças básicas e demais fatores físicos que regem o levantamento aerodinâmico, sem deixar problemas inexplicados. Ainda, nem as duas teorias juntas fornecem uma explicação completa de sustentação. Uma explicação completa deve explicar todas as forças e fatores que agem na asa, sem nenhum problema, maior ou menor (REGIS, 2020).

POSIÇÕES DO AVIÃO

Nessa seção, vamos considerar algumas posições em que um avião pode se encontrar: repouso; voo ascendente; voo horizontal; voo descendente e voo em curva.

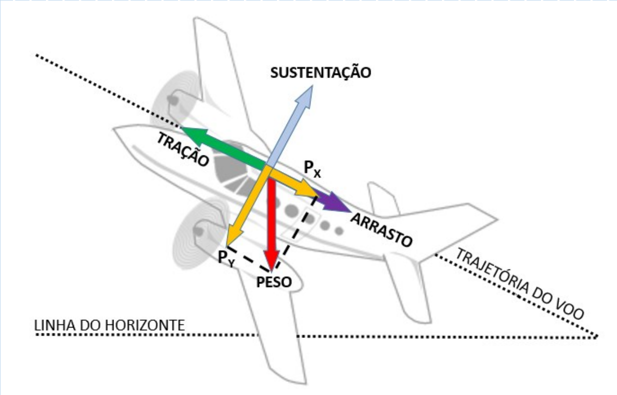
AERONAVE EM REPOUSO

Das forças que atuam sobre a aeronave em repouso (parada), a única força a se destacar é o peso (**P**). Quando o motor passa a funcionar, gera a tração (**T**) e o avião começa a mover-se para frente, com isso surge o Arrasto. A tração deve ser maior do que o Arrasto para que o avião ganhe velocidade. Com o aumento de velocidade, surge nas asas a Força de Sustentação. Quando essa força for plena, o avião estará em condições de decolar. Agindo nos controles de voo o piloto faz com que o avião suba.

VOO ASCENDENTE

Forças envolvidas:

- Força de tração da Hélice: inclinada para cima suportando parcialmente o peso.
- Força de Sustentação: perpendicular ao vento relativo.
- Peso da aeronave: decomposto em duas forças, uma oposta a sustentação a outra oposta a tração.
- Força de Arrasto: oposta a Tração.



Fonte: o autor.

Questão: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo ascendente que apresenta uma Força de Tração de 1500 N representando 25% maior do que as forças opostas a ela (Força Peso decomposta no eixo x e a Força de Arrasto). Sabendo que a Força Peso é igual a 980 N e que o ângulo formado entre a Força Peso e sua respectiva componente no eixo y é de 30°, determine:

a) Componente da Força Peso no eixo x.
b) Força de Arrasto.
c) Força Resultante da Sustentação com o Arrasto.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

Solução:

a) Para calcular a componente da Força Peso no eixo x, podemos utilizar a seguinte relação:

$$sen\ 30° = \frac{P_x}{980}$$

$$P_x = 980\ .\ sen\ 30°$$

$$P_x = 490\ N$$

b) Para calcular a Força de Arrasto, podemos utilizar a seguinte relação:

$$Força\ de\ Tração = (P_x + Força\ de\ Arrasto)\ .\ 1{,}25$$

1500 = (490 + Força de Arrasto) . 1,25

$$1200 = 490 + Força\ de\ Arrasto$$

$$Força\ de\ Arrasto = 1200 - 490$$

$$Força\ de\ Arrasto = 710\ N$$

c) A Força de Sustentação é igual ao módulo de P_y, ou seja, vale 980 N.

Para calcular a Força Resultante, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = 980^2 + (490 + 710)^2$$

$$R^2 = 980^2 + 1200^2$$

$$R = \sqrt{980^2 + 1200^2}$$

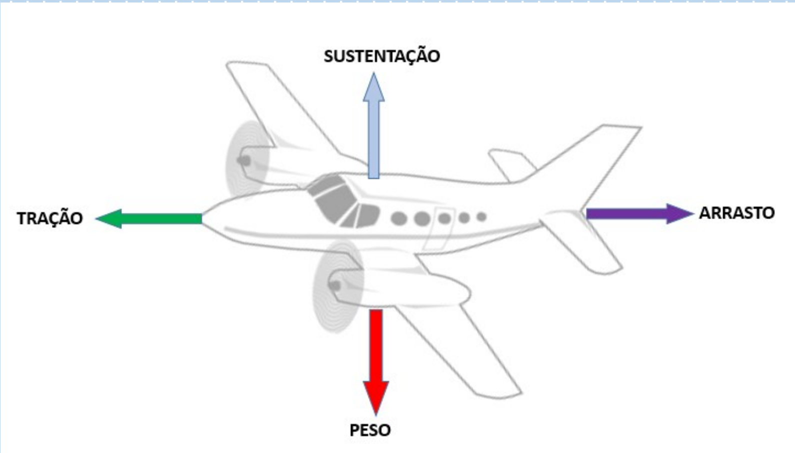
$$R \cong 1549{,}32\ N$$

VOO HORIZONTAL

No voo Horizontal o avião se desloca horizontalmente

Forças envolvidas:

- A Força de Sustentação deve ser igual ao peso.
- A tração deve ser maior que o Arrasto, pois o avião precisa de uma alta velocidade aerodinâmica para continuar voando.



Fonte: o autor.

Questão: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo horizontal que apresenta uma Força Resultante de 1200 N entre a Sustentação e o Arrasto. Sabendo que a Força Peso desse avião é de 980N e que a Força de Tração da Hélice possui 20% a mais do que o valor da Força de arrasto, determine:

a) Força de Sustentação.
b) Força de Arrasto.
c) Força de Tração da Hélice.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

Solução:

a) A Força de Sustentação é de 980 N, pois em um voo horizontal a Força de Sustentação deve ser igual a Força Peso (em módulo).
b) Para calcular a Força de Arrasto, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$1200^2 = 980^2 + {F_A}^2$$

$${F_A}^2 = 1200^2 - 980^2$$

$$F_A = \sqrt{1200^2 - 980^2}$$

$$F_A \cong 692{,}53\ N$$

c) Para calcular Força de Tração da Hélice, basta aumentar 20% na Força de Arrasto.

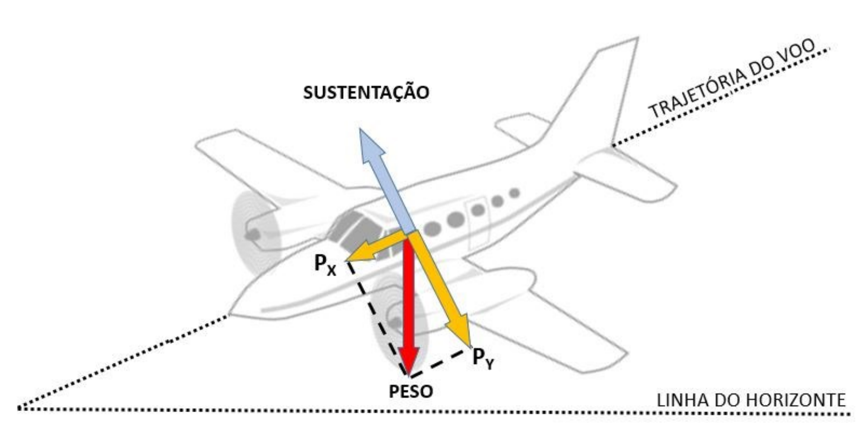
$$T\ = 692{,}53\ .\ 1{,}20 = 831{,}036\ N$$

VOO DESCENDENTE

Na descida, o avião usa a própria ação da gravidade para planar por um determinado tempo.

Forças envolvidas:

- A sustentação é menor que o peso.
- Decompondo a força Peso temos uma componente com o mesmo sentido da Tração auxiliando o avião a planar.



Fonte: o autor.

Questão: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo descendente que apresenta Força de Sustentação de 1082,53 N; Força Peso (P_x) decomposta de 625 N. Determine a Força Peso desse avião.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

Solução:

A força de Sustentação é igual a Força Peso decomposta (P_y). Dessa forma, podemos determinar a Força Peso por meio do Teorema de Pitágoras:

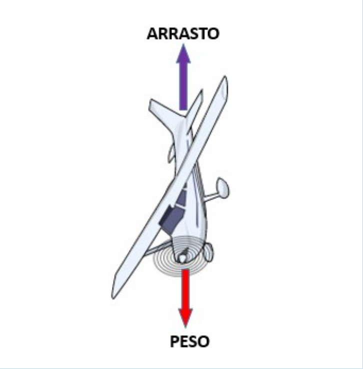
$$P^2 = 625^2 + 1082{,}53^2$$

$$P = \sqrt{(625^2 + 1082{,}53^2)}$$

$$\mathrm{P} \cong 1250\ N$$

Curiosidade

AVIÃO DE ACROBACIA - Quando o avião forma um ângulo de 90° com a linha do horizonte, a Força de Sustentação é nula e a aceleração é dada pelo peso do avião. Com o aumento da velocidade, o arrasto aumenta até se igualar ao peso – teremos aí a velocidade final.



Fonte: o autor.

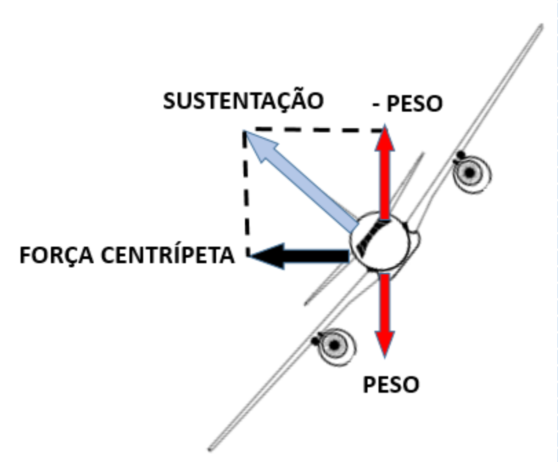
VOO EM CURVA

Forças envolvidas:

Para o estudo da curva, podemos decompor a sustentação em duas forças: a força centrípeta e a força chamada de **-P,** que deve se opor ao peso.

Como se pode deduzir desse gráfico, a força de sustentação deve ser maior que o Peso já que uma de suas componentes, a força **-P,** tem a mesma intensidade que o Peso.

A sustentação deve ter um valor tal que a sua componente vertical chamada de – P seja igual o Peso. Para que isso aconteça devemos ter um ângulo de inclinação correto de acordo com a situação.



Fonte: o autor.

Questão: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo em curva que apresenta Força de Sustentação igual a 2500 N. Determine a Força Peso desse avião, sabendo que o ângulo formado entre a força de sustentação e a força centrípeta (F_c) é de 30°.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

Solução:

O ângulo formado entre a força de sustentação e a força -P é de 60°.

$$cos\ 60° = \frac{P_y}{2500}$$

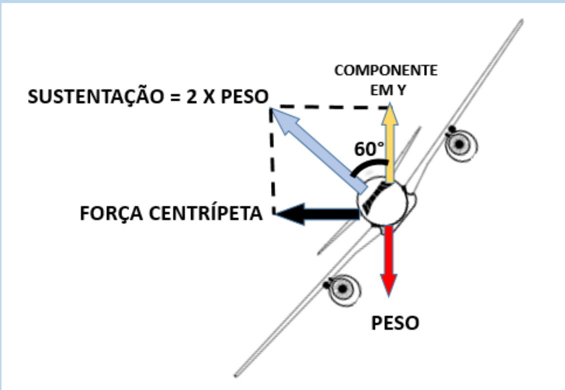
$$P_y = 2500\ .\ cos\ 60°$$

$$P_y = 1250\ N$$

Curiosidade

VOO EM CURVA DE 60°

Em uma curva de 60°, a sustentação deve ser igual ao dobro do peso para que sua resultante vertical seja igual e oposta ao peso.



Fonte: o autor.

Fechamento da tarefa 3: **Professor(a)**, aproveite a Tarefa 3 para explorar a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física em um contexto real de aplicação dos Números Complexos em sua forma vetorial. Ainda, reflita, relembre e discuta com os estudantes o conceito de módulo e argumento de vetores complexos presente nas questões. Solicite que seus alunos elaborem uma produção de texto dissertativo-argumentativo ou um mapa conceitual abordando os temas já estudados. A argumentação e exposição dos conceitos poderá ser utilizada como um indicador de aprendizagem.

Tarefa 4

Antes de apresentar a questão proposta nessa Tarefa 4, recomendamos a leitura da curiosidade a seguir:

Curiosidade

Caixas-Pretas

As caixas-pretas não são pretas, mas laranjas, com a finalidade de, em casos de acidentes, facilitar a sua localização entre os destroços.

História
A primeira caixa-preta, criada em 1939, era um tipo de câmera e gravava apenas imagens. Como toda câmera, tinha o interior totalmente escuro – uma explicação possível para seu nome.

Quantidade
São duas. Uma unidade grava os sons na cabine de comando. A outra registra os dados de voo, como a rota, as sucessivas mudanças de altitude e até quais botões foram apertados no painel da aeronave.

Duração
As caixas gravam as duas horas mais recentes de voo. Os registros mais antigos são apagados automaticamente.

Materiais
Envoltas em camadas de sílica, alumínio e titânio, as placas de memória podem resistir a choques, temperaturas de até 1.000 ºC e submersão a até 6 mil metros de profundidade.

Localização
As duas caixas-pretas ficam na cauda, a parte menos atingida em impactos. As informações são enviadas para lá a partir de microfones e outros dispositivos instalados no cockpit (espaço onde se aloja o piloto nos aviões).

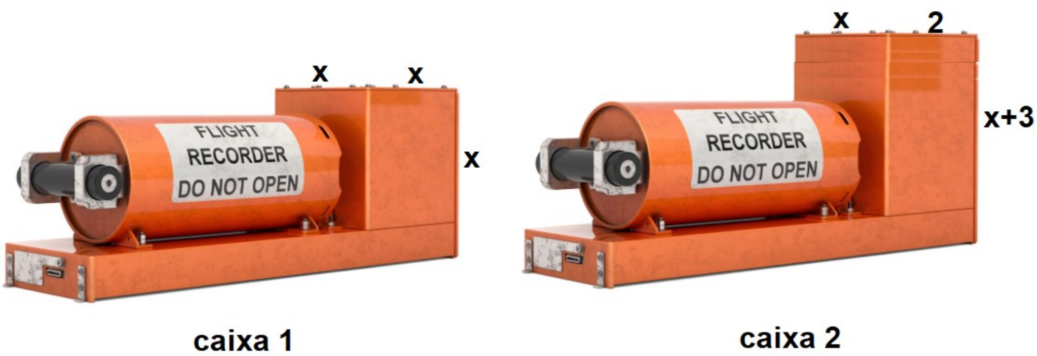
Alerta
Um cilindro localizado junto às caixas-pretas é responsável por emitir um alarme, que dura 30 dias. Depois disso, a caixa tem de ser encontrada à moda antiga: a olho nu.

Essas informações pertencem ao site da revista **Super interessante**.
Fonte: https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/. Acesso em: 29.12.2021.

***Professor(a)**, na questão que será apresentada a seguir, temos uma situação de conflito entre a impossibilidade de calcular a raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais e a demanda de se conciliar os conhecimentos instituídos no mundo da Matemática com a solução concreta e real de um problema.*

Questão: Um avião possui duas caixas-pretas, uma delas, caixa 1, com uma parte em forma de cubo e outra, caixa 2, com uma parte em forma de um paralelepípedo reto retangular.

A parte em forma de cubo na caixa 1 possui aresta x e a parte em forma de paralelepípedo reto retangular na caixa 2 possui as dimensões x, 2 e x+3, conforme a figura a seguir:



Fonte: Adaptado de Super Interessante (2020). Disponível em: https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/. Acesso em: 29 dez. 2021

As unidades de medidas de ambas as caixas estão em decímetros (*dm*).

Leia atentamente cada um dos itens a seguir e faça o que se pede:

a) A área da base (A_c) da parte em forma de cubo da caixa preta 1 é 11 *dm²* menor do que a área da base (A_p) da parte em forma de paralelepípedo da caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.

$$A_c = A_p - 11$$

$$x^2 = 2.(x+3) - 11$$

$$x^2 = 2.x + 6 - 11$$

$$x^2 = 2.x - 5$$

$$x^2 - 2.x + 5 = 0$$

b) Calcule os valores de x que satisfaçam a situação descrita no item anterior e **represente-os graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.

$$x^2 - 2.x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{16.(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{16.i^2}}{2}$$

$$x = \frac{+2 \pm 4.i}{2}$$

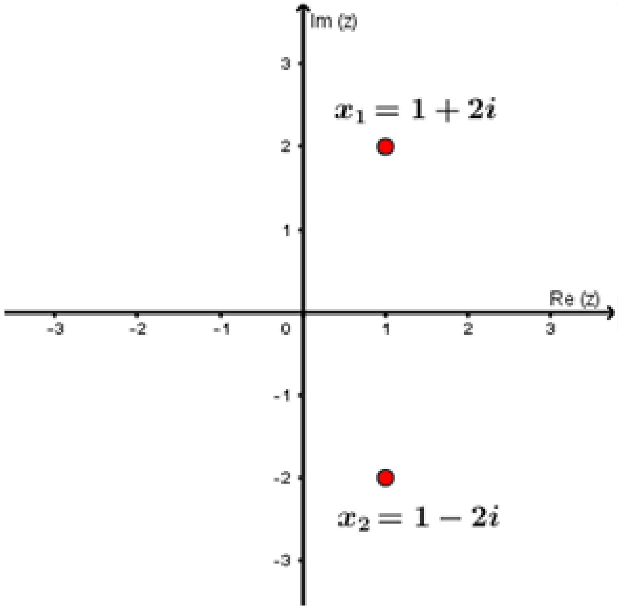
$$x_1 = \frac{+2 + 4.i}{2} = 1 + 2.i$$

$$x_2 = \frac{+2 - 4.i}{2} = 1 - 2.i$$

Portanto, temos:

S = $\{x_1 = 1 + 2.i\ ;\ x_2 = 1 - 2.i\}$.

Representação gráfica



Fonte: o autor.

c) O volume (V_c) da parte cúbica da caixa preta 1 é 8 *dm*³ maior do que o volume (V_p) da parte em forma de paralelepípedo caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.

$$V_c = V_P + 8$$

$$x^3 = 2.x.(x + 3) + 8$$

$$x^3 = 2x^2 + 6x + 8$$

$$x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$$

d) Verifique diretamente na equação do item anterior que x = 4 é uma raiz real.

$$4^3 - 2.4^2 - 6.4 - 8 = 0$$

e) Determine as outras raízes da equação e **represente-as graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.

Conhecendo umas das raízes, uma possibilidade de resolução para determinar as outras raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$ é por meio do **Teorema do fator**, que afirma que "*Se c é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $(x - c)$ é um fator de $p(x)$*" (DANTE, 2016, p. 213).

Ainda, pelo **teorema de D' Alembert**[15], da divisão de $p(x)$ por $(x - c)$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto $p(c)$ tal que:

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

Se c é uma raiz de $p(x)$, então $p(c) = 0$ e temos:

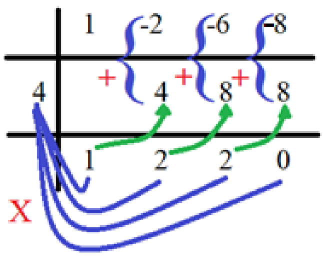
$$p(x) = (x - c)q(x)$$

Portanto, $(x - c)$ é um fator de $p(x)$.

Para efetuar a divisão de $x^3 - 2x^2 - 6x - 8$ por $x - 4$, podemos utilizar o Método da chave, conforme mostraremos a seguir:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 6x - 8 & x - 4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 + 4x^2} \qquad\qquad & x^2 + 2x + 2 \\ 2x^2 - 6x - 8 & \\ \underline{-2x^2 + 8x} \quad\;\; & \\ 2x - 8 & \\ \underline{-2x + 8} & \\ 0 & \end{array}$$

Outra possibilidade de efetuar a divisão de $x^3 - 2x^2 - 6x - 8$ por $x - 4$ é utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, que permite efetuar as divisões por polinômios do tipo $(x - a)$.



[15]Teorema de D'Alembert: "*O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x - a)$ é $p(a)$*" (DANTE, 2016, p. 212).

Após aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos reescrever a equação $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$ da seguinte maneira: $(x-4)(x^2+2x+2) = 0$. Para encontrar as demais raízes, podemos determinar as soluções do polinômio $x^2 + 2x + 2$.

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4.(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4.i^2}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2.i}{2}$$

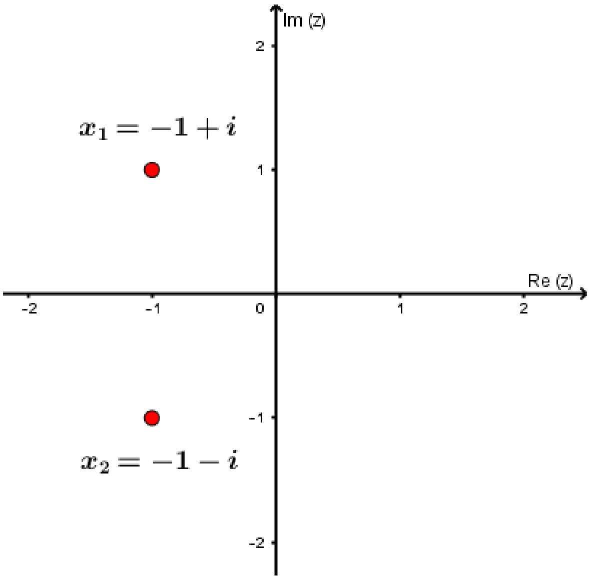
$$x_1 = \frac{-2 + 2.i}{2} = -1 + i$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2.i}{2} = -1 - i$$

Portanto, temos:

S = $\{x_1 = -1 + i \ ; \ x_2 = -1 - i\}$.

Representação gráfica



Fonte: o autor.

Professor(a)**, talvez os estudantes encontrem dificuldades para determinar as raízes de uma equação de terceiro grau. Como sugestão, indicamos o estudo do **Teorema de D' Alembert** e do **Teorema do fator**. Ainda, recomendamos o **Teorema das Raízes Racionais** para o caso de não se conhecer previamente uma das raízes, ou ainda, o estudo das **Relações de Girard**. Além disso, para efetuar as divisões, pode-se explorar o **Método da chave** ou o **dispositivo de Briot-Ruffini.

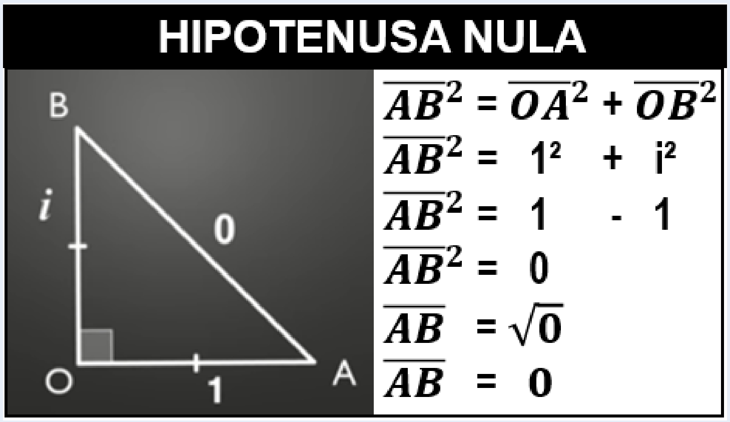
f) As conclusões que você chegou nos itens *b)* e *e)* são válidas para o problema das caixas pretas do avião? **Justifique sua resposta apresentando seus argumentos a respeito da relação entre números complexos e medidas.**

Espera-se que os estudantes argumentem que não há ordem nos números complexos, portando as soluções encontradas nos itens *b)* e *e)* não são válidas para o problema das caixas-pretas do avião.

Curiosidade

Vídeo com aplicação do **Teorema de Pitágoras** em um triângulo retângulo. Por meio desse vídeo, pode-se enriquecer a discussão de que os números complexos não possuem ordem e, portanto, não devem ser utilizados como medidas de comprimento. Cabe ainda discutir a medida da hipotenusa ser ZERO, ou seja, uma medida nula, que não existe enquanto comprimento.

O vídeo encontra-se disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JsCvu4DIHi8&ab_channel=YvanMonka e tem a duração 02min.10seg. Acesso em: 14.05.2021.



Fonte: o autor.

Fechamento da tarefa 4: **Professor(a)**, aproveite essa oportunidade para explorar a interpretação do enunciado do problema e discutir com os seus alunos que no conjunto dos números complexos não existe ordem e que esse é um dos motivos para não se estabelecer um número complexo como medida. Medir é comparar, e para o caso específico dessa tarefa não é possível fazer uma comparação e analisar qual dimensão da caixa é maior do que a outra quando se utiliza um número complexo.

Utilize essa situação de conflito para discutir que existem possibilidades de resolver equações propostas no mundo da matemática e no campo das ideias, no entanto, resolver um problema real exige uma solução que se adeque a realidade.

É importante que os alunos possam pensar e refletir no que eles estão fazendo. **Nem tudo é fazer contas!** Além dos cálculos, é preciso dar uma resposta adequada em relação ao problema. O aluno precisa estar ciente de qual é a pergunta central que ele precisa responder. Retorne ao enunciado e desenvolva essa rica discussão com os seus alunos.

Professor(a), se você considerar que não vale a pena aplicar essa questão, pode deixá-la de fora do conjunto de tarefas, no entanto, entendemos que é importante o aluno analisar as respostas dos cálculos que ele faz em relação ao problema.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e Aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. Disponível em: https://saber.com.br/obras/Aplicacoes/Edocente/plugins/pdfjs-sem-download-e-print/web/viewer.html?file=https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2018/MatematicaContAplic/3o%20Ano/MatematicaContAplic_3_MP_0008P18023_PNLD2018.pdf. Acesso em: 28 dez. 2021.

CAMATA, J. G. **Análise das Raízes Complexas de uma Equação Quadrática e Estudo de Números Complexos no Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.

NOVAIS, R. P. B. **O decolar de um avião**: uma proposta didática sobre números e funções complexas. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.

PEREIRA, G. G. **Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, 2017.

PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

REGIS, E. The enigma of aerodynamic lift. **Scientific American**, v. 322, n. 2, p. 44-51, 2020.

STUDART, N.; DAHMEN, S. R. A física do vôo na sala de aula. **Física na escola**. Vol. 7, n. 2 (out. 2006), p. 36-42, 2006.

VOLCE, C. J. **Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Recursos didáticos para números complexos na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica
Título do Produto/Processo Educacional	Decolagem e pouso de um avião: embarque nesse voo com destino a uma aplicação de números complexos
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Cílio José Volce
	Orientador/Orientadora: Claudete Cargnin
	Outros (se houver):
Data da Defesa	27/04/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	(x) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *<u>Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória</u>.	( ) Local ( ) Regional ( ) Nacional (x) Internacional Justificativa: Todo o material elaborado estará disponível no portal EDUCAPES, que possui acesso internacional.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	(x) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). ( ) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	( ) Econômica;

*Apenas um item pode ser marcado.	( ) Saúde; (x) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; (x) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (x) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ( ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	(x) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). ( ) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Dra. Claudete Cargnin	UTFPR-CM
Dr. Sergio de Mello Arruda	UTFPR/UEL
Dr. Bruno Rodrigo Teixeira	UEL

VERSÃO DO ESTUDANTE

PRODUTO EDUCACIONAL I

PPGMAT- 2022

DECOLAGEM E POUSO

DE UM AVIÃO

EMBARQUE NESSE VOO COM DESTINO A UMA APLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

CILIO JOSÉ VOLCE
CLAUDETE CARGNIN

APRESENTAÇÃO

Caros passageiros,

Sejam bem-vindos a bordo dessa aula.

Aqui vocês serão transportados por meio de uma sequência didática composta por quatro tarefas com foco nas representações algébricas e gráficas de Números Complexos.

O voo possui um destino interdisciplinar, com escalas nas disciplinas de Matemática e Física e conexões em outras áreas do conhecimento.

Acomodem os seus materiais nos compartimentos em cima ou embaixo de suas carteiras. Não é permitido ficar com dúvidas. Lembramos que o conhecimento é a capacidade humana de entender e compreender. Aprender é sensacional.

Em caso de emergência, chame pelo seu professor(a), que possui uma das mais nobres profissões com grande responsabilidade em contribuir com a sua formação e desenvolvimento enquanto indivíduo em uma sociedade.

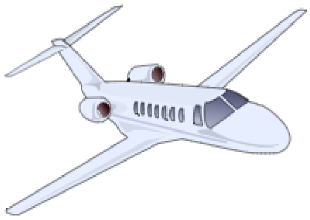
A DECOLAGEM está autorizada. Desejamos a todos uma ótima aula!

Apertem os cintos e boa aprendizagem!

Cilio José Volce

Claudete Cargnin

Tarefa 1



Investigue quais disciplinas que você já estudou ou estuda na escola e que podem trazer conhecimentos para ajudar a explicar o que faz um avião voar.

Pesquise, discuta e compartilhe com os seus colegas e com o seu professor(a) algumas possíveis fórmulas, cálculos e princípios de teorias que podem ajudar a explicar os mistérios que fazem com que uma máquina tão pesada voe.

Tarefa 2

A **aerodinâmica** é uma parte da mecânica dos fluidos que estuda os gases em movimento, e em particular o movimento relativo entre o ar e os corpos sólidos. Ao construir um avião, os engenheiros se fundamentaram nos princípios da aerodinâmica, principalmente na elaboração do aerofólio. Um aerofólio é projetado para causar certa variação da velocidade de um fluido, acarretando uma diferença de pressão. Nas aeronaves, os aerofólios se encontram nas asas e no leme, proporcionando a sustentação e direção do avião, logo o mantendo no ar, cuja explicação está na conservação de energia enunciada pelo Princípio de Bernoulli (PORTOLAN, 2017).

E quanto aos números complexos? Há alguma contribuição desses números na aerodinâmica? Estudos como os de Camata (2015), Pereira (2017) e Novais (2020) dizem que há contribuições dos números complexos na aerodinâmica e destacam o cientista russo Nicolai Egorovich Joukowski (1847-1921).

Camata (2015) descreve que Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, calculou a força de levantamento responsável pela sustentação do corpo. Ainda, ressalta que os números complexos permitiram uma explicação matemática que possibilitou definir as características do perfil aerodinâmico da asa do avião, colaborando com o progresso aeronáutico.

Pereira (2017) comenta que não se pode deixar de destacar a grande contribuição dos números complexos para várias áreas, como para a Dinâmica dos Fluidos e Aerodinâmica, onde Nikolai Joukowski desenvolveu um método que possibilitou que engenheiros aeronáuticos fizessem estudos sobre aerofólios e sua influência na sustentação de aviões (construção das asas).

Novais (2020) ressalta que esse cientista foi responsável por demonstrar que a imagem de uma circunferência de raio unitário no z − plano é mapeada[16] dentro de uma curva de formato de um aerofólio no w − plano, semelhante a uma asa de avião. Ao estudar a função $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, deduziu uma função de variável complexa dada por: $F(z) = z + \frac{1}{z}$.

Essa transformação ficou conhecida como transformação de Joukowski, que propõe um aproveitamento da conhecida solução analítica para um escoamento potencial ao redor de um cilindro com circulação e conclui que "se os fluxos aerodinâmicos" para um fluxo em torno de um círculo são conhecidos, então suas imagens sob o mapeamento $w = f(z)$ será o fluxo aerodinâmico para um fluxo em torno do aerofólio (NOVAIS, 2020).

Questão da tarefa 2:

Após conhecermos a importante expressão $z + \frac{1}{z}$ estudada por Joukowski que, segundo alguns estudos, explica matematicamente a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião, determine o seu valor para $\boldsymbol{z_1, z_2, z_3, e\ z_4}$ apresentados a seguir e represente-os graficamente. Se considerar necessário, utilize o *Software Geogebra*.

a) $z_1 = 5 + 2i$
b) $z_2 = 5 - 2i$
c) $z_3 = -5 + 2i$
d) $z_4 = -5 - 2i$

[16] Mais informações em: https://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowsky/. **Deduções sobre o aerofólio de Joukowski**. Acesso em 10/01/2022.

Tarefa 3

Alguns dos conteúdos básicos da Física são os estudos de vetores e forças. Os **vetores** representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido. O módulo é o valor numérico do vetor seguido da unidade de medida que define a grandeza vetorial. A direção é a reta onde o vetor está localizado, e as direções possíveis são: diagonal, horizontal e vertical. **Força** é o agente da dinâmica responsável por alterar o estado de repouso ou movimento de um corpo. Quando se aplica uma força sobre um corpo, esse pode desenvolver uma aceleração, como estabelecem as leis de Newton, ou se deformar.

INDICAÇÃO DE LEITURAS E VÍDEOS

Para a realização da tarefa 3, se necessário, sugerimos as seguintes leituras:

Números Complexos

Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc01.htm. Acesso em: 27.12.2021.

Números Complexos e polinômios

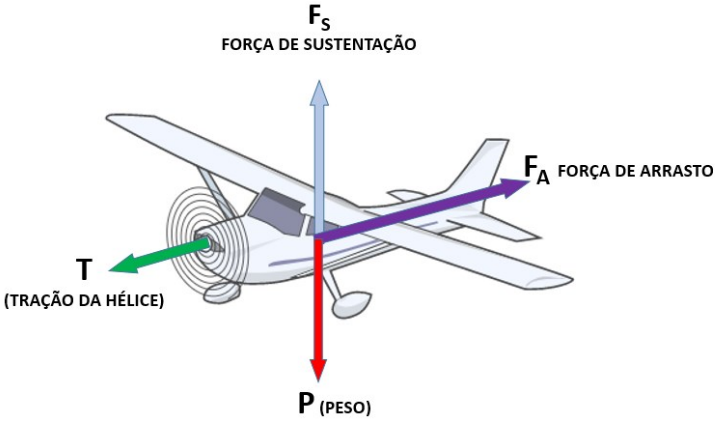
Disponível em: https://www.ime.usp.br/~oliveira/ComplexosCap1.pdf. Acesso em: 27.12.2021.

O que são números imaginários?; O que são números complexos?; O plano complexo; Soma e subtração de números complexos; Multiplicação de números complexos; Conjugados complexos e divisão de números complexos; Valor absoluto e ângulo de números complexos; Distância e ponto médio de números complexos; Forma polar de números complexos; Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar; Problemas envolvendo números complexos

Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers. Acesso em: 27.12.2021.

Uma das possibilidades para visualizar os números complexos é por meio de vetores. Vamos ver como os vetores agem aqui. A seguir apresentaremos algumas forças vetoriais que atuam no avião:

ALGUMAS FORÇAS QUE ATUAM EM UM AVIÃO



Fonte: o autor.

Força de Sustentação (F_S)

Força de Sustentação (F_S) é a componente da força aerodinâmica perpendicular à direção do movimento do voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Força de Arrasto (F_A)

Força de Arrasto (**F_A**), essencialmente uma força de atrito, é a componente da força aerodinâmica paralela à direção de voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Tração da Hélice (T)

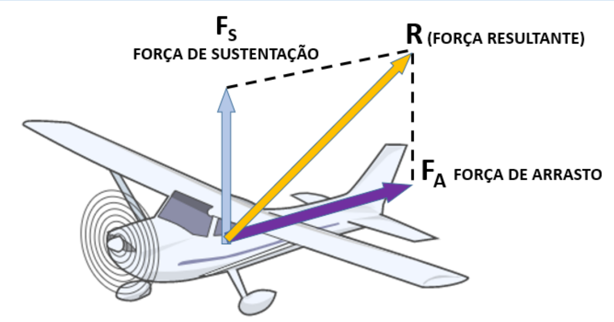
Tração da Hélice (T) é a força produzida pelo motor e é dirigida ao longo do eixo longitudinal do avião (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Peso (P)

Peso (P) é a força da gravidade ($P = m \cdot g$) atuando sobre o avião e dirigida para o centro da Terra (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

Força Resultante (R)

Surge em virtude do diferencial de pressão entre o intradorso e o extradorso do aerofólio e tende a empurrá-lo para cima, auxiliada ainda pela reação do ar (Terceira Lei de Newton). Ela é representada, de maneira didática e para melhor compreensão do estudante, como um vetor que, quando decomposto, dá origem a duas forças componentes. A componente da força resultante perpendicular (ou normal) à direção do fluxo é chamada de sustentação; a componente da força resultante ao longo da direção do fluxo é chamada de arrasto. Disponível em: https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/presar.html. Acesso em: 10.01.2022.



Fonte: o autor.

CONTROVÉRSIAS SOBRE A FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Quando o assunto é a força aerodinâmica conhecida como **sustentação**, não há uma explicação simples para esse tema, assim como não há consenso entre cientistas e algumas teorias, de forma a explicar completamente a força de sustentação, o que deixa uma situação intrigante no ponto de vista físico.

Segundo Regis (2020), há duas teorias concorrentes que comumente são propostas para explicar a sustentação aerodinâmica: Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton. É sobre essas duas teorias que se trata o Quadro 2 a seguir:

Quadro 2 – Breve descrição sobre o Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton

Teorema de Bernoulli	Terceira Lei de Newton
- Considerado o mais popular para explicar a sustentação aerodinâmica, diz que a pressão de um fluido diminui à medida que sua velocidade aumenta, e vice-versa; - O Teorema de Bernoulli considera a sustentação como uma consequência da superfície superior curva de um aerofólio (nome técnico de uma asa de avião). Por causa dessa curvatura, o ar viajando através do topo da asa se move mais rápido do que o ar se movendo na superfície inferior da asa, que é plana; - O aumento da velocidade no topo da asa está associado a uma região de menor pressão, o que faz gerar a sustentação.	- Princípio newtoniano de ação e reação; - Explica a sustentação como um impulso para cima na asa com o ar em movimento abaixo dela; - O ar tem massa. Portanto, a terceira lei de Newton diz que o impulso para baixo da asa resulta em uma igualdade e o oposto dessa situação empurra de volta para cima; - Este relato newtoniano de sustentação aplica-se a asas de qualquer formato, curvas ou planas, simétricas ou não, e vale para aeronaves voando invertidas ou de lado (o recurso crítico é um ângulo de ataque adequado).
Críticas à Teoria	**Críticas à Teoria**
O teorema por si só não explica por que a velocidade superior no topo da asa traz pressão mais baixa junto com ela ou, o por que, na prática, um avião com asas que possuem superfície superior curva - ou mesmo superfícies planas na parte superior e inferior é capaz de voar invertido, desde que o aerofólio encontre o vento que se aproxima em um ângulo apropriado.	O princípio de ação e a reação ainda não consegue explicar a mais baixa pressão no topo da asa, independentemente de o aerofólio ser curvado ou não.

Fonte: Adaptado de Regis (2020) – tradução nossa.

Cada uma dessas teorias está correta dentro de seus próprios contextos, e nenhuma delas contradiz a outra. O problema é que nenhuma delas produz uma explicação completa que leva em consideração todas as forças básicas e demais fatores físicos que regem o levantamento aerodinâmico, sem deixar problemas inexplicados. Ainda, nem as duas teorias juntas fornecem uma explicação completa de sustentação. Uma explicação completa deve explicar todas as forças e fatores que agem na asa, sem nenhum problema, maior ou menor (REGIS, 2020).

POSIÇÕES DO AVIÃO

Nessa seção, vamos considerar algumas posições em que um avião pode se encontrar: repouso; voo ascendente; voo horizontal; voo descendente e voo em curva.

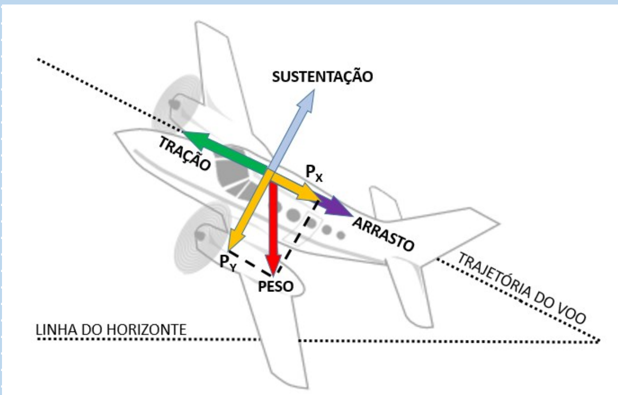
AERONAVE EM REPOUSO

Das forças que atuam sobre a aeronave em repouso (parada), a única força a se destacar é o peso (**P**). Quando o motor passa a funcionar gera a tração (**T**) e o avião começa a mover-se para frente, com isso surge o Arrasto. A tração deve ser maior do que o Arrasto para que o avião ganhe velocidade. Com o aumento de velocidade surge nas asas a Força de Sustentação. Quando essa força for plena o avião estará em condições de decolar. Agindo nos controles de voo o piloto faz com que o avião suba.

VOO ASCENDENTE

Forças envolvidas:

- Força de tração da Hélice: inclinada para cima suportando parcialmente o peso.
- Força de Sustentação: perpendicular ao vento relativo.
- Peso da aeronave: decomposto em duas forças, uma oposta a sustentação a outra oposta a tração.
- Força de Arrasto: oposta a Tração.



Fonte: o autor.

Questão 1: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo ascendente que apresenta uma Força de Tração de 1500 N representando 25% maior do que as forças opostas a ela (Força Peso decomposta no eixo x e a Força de Arrasto). Sabendo que a Força Peso é igual a 980 N e que o ângulo formado entre a Força Peso e sua respectiva componente no eixo y é de 30°, determine:

d) Componente da Força Peso no eixo x.
e) Força de Arrasto.
f) Força Resultante da Sustentação com o Arrasto.

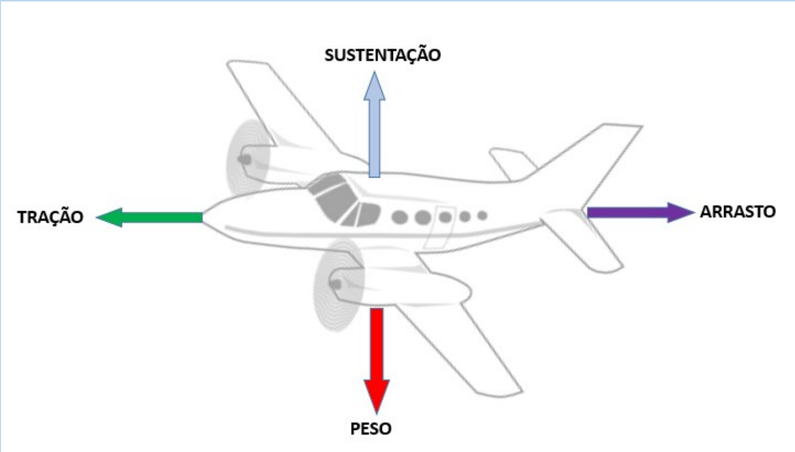
Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

VOO HORIZONTAL

No voo Horizontal o avião se desloca horizontalmente

Forças envolvidas:

- A Força de Sustentação deve ser igual ao peso.
- A tração deve ser maior que o Arrasto, pois o avião precisa de uma alta velocidade aerodinâmica para continuar voando.



Fonte: o autor.

Questão 2: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo horizontal que apresenta uma Força Resultante de 1200 N entre a Sustentação e o Arrasto. Sabendo que a Força Peso desse avião é de 980N e que a Força de Tração da Hélice possui 20% a mais do que o valor da Força de arrasto, determine:

a) Força de Sustentação.
b) Força de Arrasto.
c) Força de Tração da Hélice.

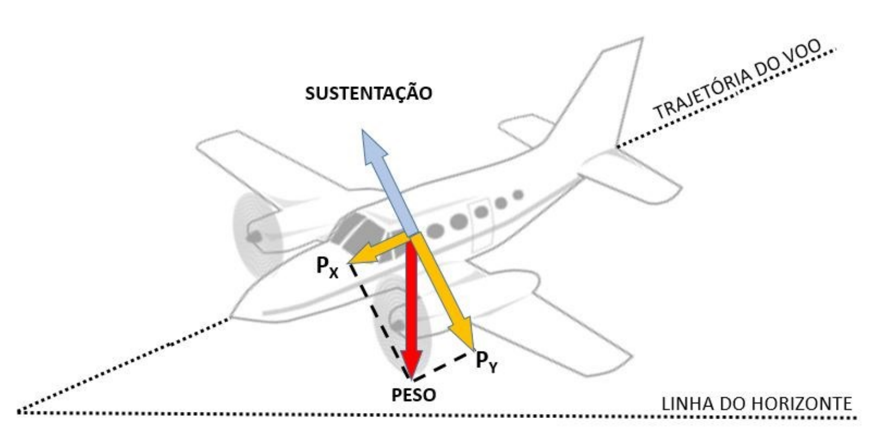
Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

VOO DESCENDENTE

Na descida, o avião usa a própria ação da gravidade para planar por um determinado tempo.

Forças envolvidas:

- A sustentação é menor que o peso.
- Decompondo a força Peso temos uma componente com o mesmo sentido da Tração auxiliando o avião a planar.



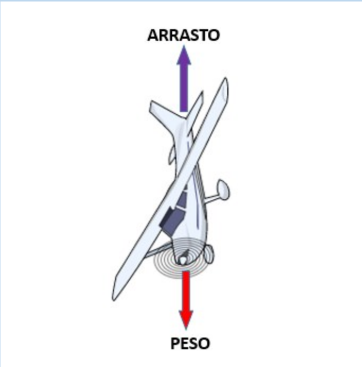
Fonte: o autor.

Questão 3: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo descendente que apresenta Força de Sustentação de 1082,53 N; Força Peso (P_x) decomposta de 625 N. Determine a Força Peso desse avião.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

Curiosidade

AVIÃO DE ACROBACIA - Quando o avião forma um ângulo de 90° com a linha do horizonte, a Força de Sustentação é nula e a aceleração é dada pelo peso do avião. Com o aumento da velocidade, o arrasto aumenta até se igualar ao peso – teremos aí a velocidade final.



Fonte: o autor.

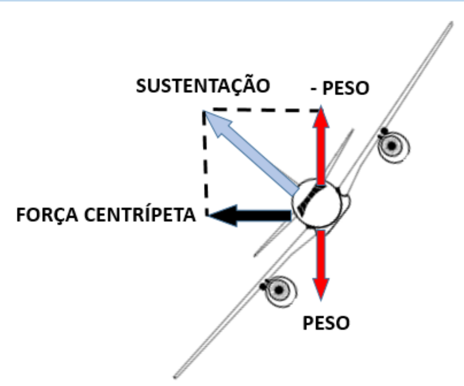
VOO EM CURVA

Forças envolvidas:

Para o estudo da curva podemos decompor a sustentação em duas forças: a força centrípeta e a força chamada de **-P,** que deve se opor ao peso.

Como se pode deduzir desse gráfico, a força de sustentação deve ser maior que o Peso já que uma de suas componentes, a força **-P** tem a mesma intensidade que o Peso.

A sustentação deve ter um valor tal que a sua componente vertical chamada de – P seja igual o Peso. Para que isso aconteça devemos ter um ângulo de inclinação correto de acordo com a situação.



Fonte: o autor.

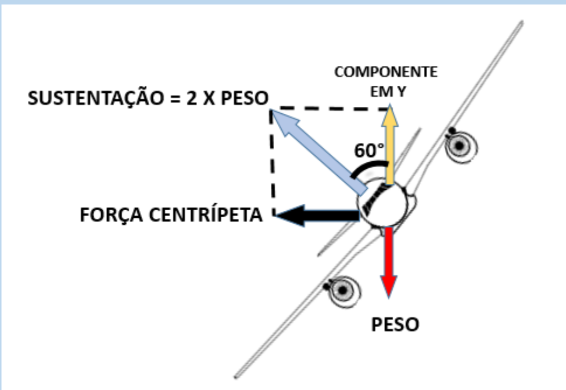
Questão 4: Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo em curva que apresenta Força de Sustentação igual a 2500 N. Determine a Força Peso desse avião, sabendo que o ângulo formado entre a força de sustentação e a força centrípeta (F_c) é de 30°.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

Curiosidade

VOO EM CURVA DE 60°

Em uma curva de 60°, a sustentação deve ser igual ao dobro do peso para que sua resultante vertical seja igual e oposta ao peso.



Fonte: o autor.

Tarefa 4

Antes de apresentar a questão proposta nessa Tarefa 4, recomendamos a leitura da curiosidade a seguir:

Curiosidade

Caixas-Pretas

As caixas-pretas não são pretas, mas laranjas, com a finalidade de, em casos de acidentes, facilitar a sua localização entre os destroços.

História
A primeira caixa-preta, criada em 1939, era um tipo de câmera e gravava apenas imagens. Como toda câmera, tinha o interior totalmente escuro – uma explicação possível para seu nome.

Quantidade
São duas. Uma unidade grava os sons na cabine de comando. A outra registra os dados de voo, como a rota, as sucessivas mudanças de altitude e até quais botões foram apertados no painel da aeronave.

Duração
As caixas gravam as duas horas mais recentes de voo. Os registros mais antigos são apagados automaticamente.

Materiais
Envoltas em camadas de sílica, alumínio e titânio, as placas de memória podem resistir a choques, temperaturas de até 1.000 ºC e submersão a até 6 mil metros de profundidade.

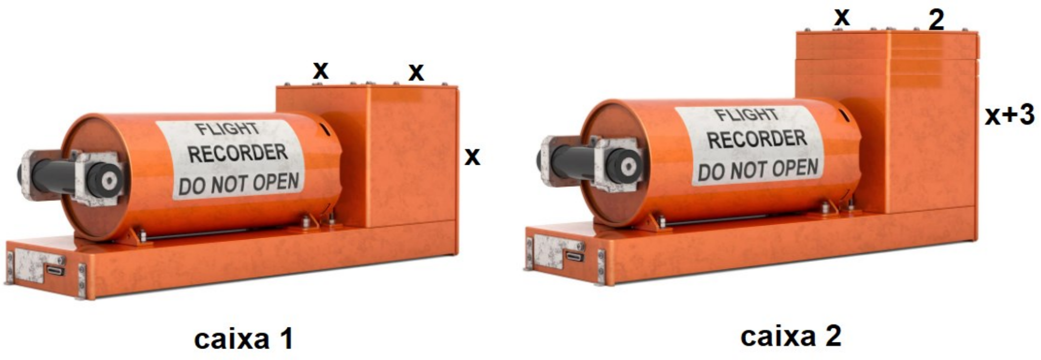
Localização
As duas caixas-pretas ficam na cauda, a parte menos atingida em impactos. As informações são enviadas para lá a partir de microfones e outros dispositivos instalados no cockpit (espaço onde se aloja o piloto nos aviões).

Alerta
Um cilindro localizado junto às caixas-pretas é responsável por emitir um alarme, que dura 30 dias. Depois disso, a caixa tem de ser encontrada à moda antiga: a olho nu.

Essas informações pertencem ao site da revista **Super interessante**.
Fonte: https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/. Acesso em: 29.12.2021.

Questão: Um avião possui duas caixas-pretas, uma delas, caixa 1, com uma parte em forma de cubo e outra, caixa 2, com uma parte em forma de um paralelepípedo reto retangular.

A parte em forma de cubo na caixa 1 possui aresta x e a parte em forma de paralelepípedo reto retangular na caixa 2 possui as dimensões x, 2 e x+3, conforme a figura a seguir:



Fonte: Adaptado de Super Interessante (2020). Disponível em: https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/. Acesso em: 29 dez. 2021

As unidades de medidas de ambas as caixas estão em decímetros (*dm*).

Leia atentamente cada um dos itens a seguir e faça o que se pede:

a) A área da base (A_c) da parte em forma de cubo da caixa preta 1 é 11 dm^2 menor do que a área da base (A_p) da parte em forma de paralelepípedo da caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.

b) Calcule os valores de x que satisfaçam a situação descrita no item anterior e **represente-os graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.

c) O volume (V_c) da parte cúbica da caixa preta 1 é 8 dm^3 maior do que o volume (V_p) da parte em forma de paralelepípedo caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.

d) Verifique diretamente na equação do item anterior que x = 4 é uma raiz real.

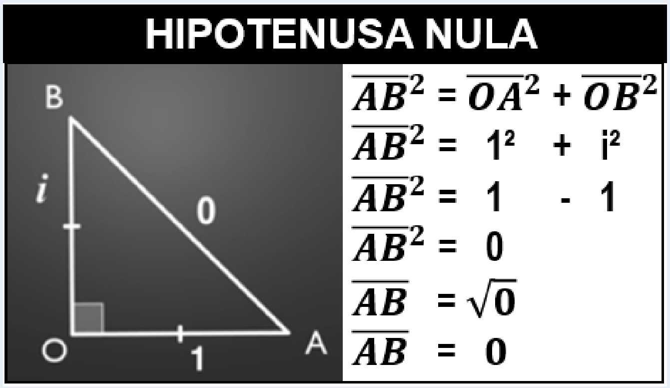
e) Determine as outras raízes da equação e **represente-as graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.

f) As conclusões que você chegou nos itens *b)* e *e)* são válidas para o problema das caixas pretas do avião? **Justifique sua resposta apresentando seus argumentos a respeito da relação entre números complexos e medidas.**

Curiosidade

Vídeo com aplicação do **Teorema de Pitágoras** em um triângulo retângulo. Por meio desse vídeo, pode-se enriquecer a discussão de que os números complexos não possuem ordem e, portanto, não devem ser utilizados como medidas de comprimento. Cabe ainda, discutir a medida da hipotenusa ser ZERO, ou seja, uma medida nula, que não existe enquanto comprimento.

O vídeo encontra-se disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JsCvu4DIHi8&ab_channel=YvanMonka e tem a duração 02min.10seg. Acesso em: 14.05.2021.



Fonte: o autor.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e Aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. Disponível em: https://saber.com.br/obras/Aplicacoes/Edocente/plugins/pdfjs-sem-download-e-print/web/viewer.html?file=https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2018/MatematicaContAplic/3o%20Ano/MatematicaContAplic_3_MP_0008P18023_PNLD2018.pdf. Acesso em: 28 dez. 2021.

CAMATA, J. G. **Análise das Raízes Complexas de uma Equação Quadrática e Estudo de Números Complexos no Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.

NOVAIS, R. P. B. **O decolar de um avião**: uma proposta didática sobre números e funções complexas. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.

PEREIRA, G. G. **Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, 2017.

PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

REGIS, E. The enigma of aerodynamic lift. **Scientific American**, v. 322, n. 2, p. 44-51, 2020.

STUDART, N.; DAHMEN, S. R. A física do vôo na sala de aula. **Física na escola**. Vol. 7, n. 2 (out. 2006), p. 36-42, 2006.

VOLCE, C. J. **Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

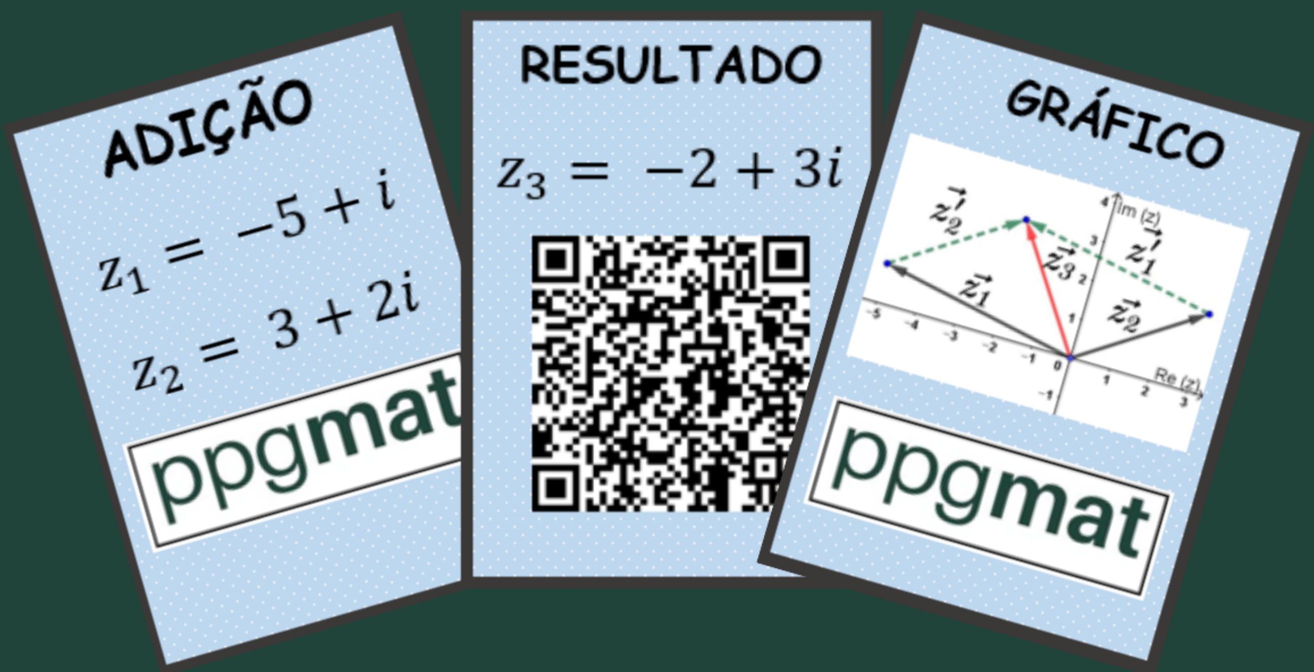
TRINCAS COMPLEXAS: UM JOGO PARA REPRESENTAR GRAFICAMENTE OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS

PRODUTO EDUCACIONAL II

TRINCAS COMPLEXAS

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

UM JOGO PARA REPRESENTAR GRAFICAMENTE OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS



CILIO JOSÉ VOLCE
CLAUDETE CARGNIN

ppgmat
2022

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CILIO JOSÉ VOLCE
CLAUDETE CARGNIN

TRINCAS COMPLEXAS
UM JOGO PARA REPRESENTAR GRAFICAMENTE OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS

COMPLEX CRACKS
A GAME TO GRAPHICALLY REPRESENT ALGEBRAIC OPERATIONS WITH COMPLEX NUMBERS

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA
2022

AUTORES

CILIO JOSÉ VOLCE

Mestre em Ensino de Matemática (2022) pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná -PPGMAT/UTFPR. Especialista em Estatística (2008) e Licenciado em Matemática (2006) pela Universidade Estadual de Londrina — UEL. Bacharel em Engenharia Civil (2016) pela Faculdade Pitágoras de Londrina. Possui experiência em Tutorias para graduação em Educação a Distância — EaD, docência no Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Cursinho Preparatório para Concursos Públicos, Ensino Técnico/Profissionalizante e Ensino Superior.

Contato: cjvolceuel@yahoo.com.br

CLAUDETE CARGNIN

Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática (2013) pela Universidade Estadual de Maringá. Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001). Especialista em Estatística e em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. É licenciada em matemática pela Universidade Estadual de Maringá (1994). Atualmente é professora titular da carreira do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, com projetos de pesquisa voltados para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de matemática na educação básica (ênfase em recursos tecnológicos e interdisciplinaridade) e para estudantes com Transtorno do Espectro Autista. É professora do Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática da UTFPR- Câmpus Londrina/Cornélio Procópio.

Contato: cargnin@utfpr.edu.br

TERMO DE APROVAÇÃO

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

CILIO JOSE VOLCE

RECURSOS DIDÁTICOS PARA NÚMEROS COMPLEXOS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 27 de Abril de 2022

Claudete Cargnin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Bruno Rodrigo Teixeira, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Sergio De Mello Arruda, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 27/04/2022.

APRESENTAÇÃO

Caros professores e estudantes,

Compartilhamos com vocês o sentimento de não encontrarmos com frequência recursos didáticos para o ensino e aprendizagem de números complexos que sejam práticos, de fácil confecção e uso em sala de aula.

Com isso, elaboramos um jogo, intitulado Trincas Complexas, com uma proposta lúdica, aplicável em contexto real de ensino e elaborado para auxiliar na formação dos conceitos e procedimentos matemáticos dos estudantes sobre o objeto matemático Números Complexos.

Acreditamos que este jogo tem o potencial de diminuir lacunas de aprendizagens na visualização de representações gráficas de operações algébricas com números complexos.

Divirtam-se e boa aprendizagem!

Cilio José Volce

Claudete Cargnin

SUMÁRIO

Introdução

O jogo que compõem este produto educacional foi concebido no decorrer dos estudos e desenvolvimento da pesquisa de mestrado profissional intitulada “***Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica***” disponível no endereço: <<http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/producao-academica>>. A sua estrutura foi pensada de modo a relacionar o conteúdo Números Complexos com uma proposta lúdica, explorando as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, com foco nas representações algébricas e gráficas dessas operações.

Elaboramos um jogo inspirado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS (Raymond Duval) com o intuito de ampliar e despertar o interesse do aluno no aprendizado dos Números Complexos, com possibilidades de promover as conversões entre as representações algébricas e gráficas dos Números Complexos, proporcionando aulas mais interessantes e dinâmicas.

Com esse produto, pretende-se incentivar os alunos a estudarem, revisarem conteúdos e refletirem sobre as mudanças de registros. Acredita-se que os recursos interativos podem: auxiliar na compreensão dos conceitos, operações e representações dos Números Complexos; diminuir lacunas de aprendizagens; melhorar os fundamentos matemáticos dos estudantes; permitir uma participação ativa dos estudantes; e trazer dinamicidade para a sala de aula. O objetivo deste instrumento é contribuir com o ensino e a aprendizagem de números complexos, além de enfatizar o desenvolvimento afetivo e emocional, devido ao seu aspecto lúdico, o que pode auxiliar no gosto pelo aprender e pela busca do conhecimento. O objetivo do jogo está detalhado no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Descrição e objetivo do Jogo

	Proposta	Descrição	Objetivo
JOGO	**Trincas Complexas**	Este jogo possui 13 cartões, sendo 4 trincas e 1 curinga. Cada um desses cartões que formam trincas possui algum tipo de informação: dois números complexos na forma algébrica com a indicação de uma operação (**+** ou **-** ou **x** ou ÷); o resultado algébrico dessa operação; e, a representação do registro gráfico dessa operação.	✓ Realizar corretamente os tratamentos dentro da representação algébrica dos números complexos, bem como as conversões entre as representações dos registros gráficos para os algébricos (e vice-versa).

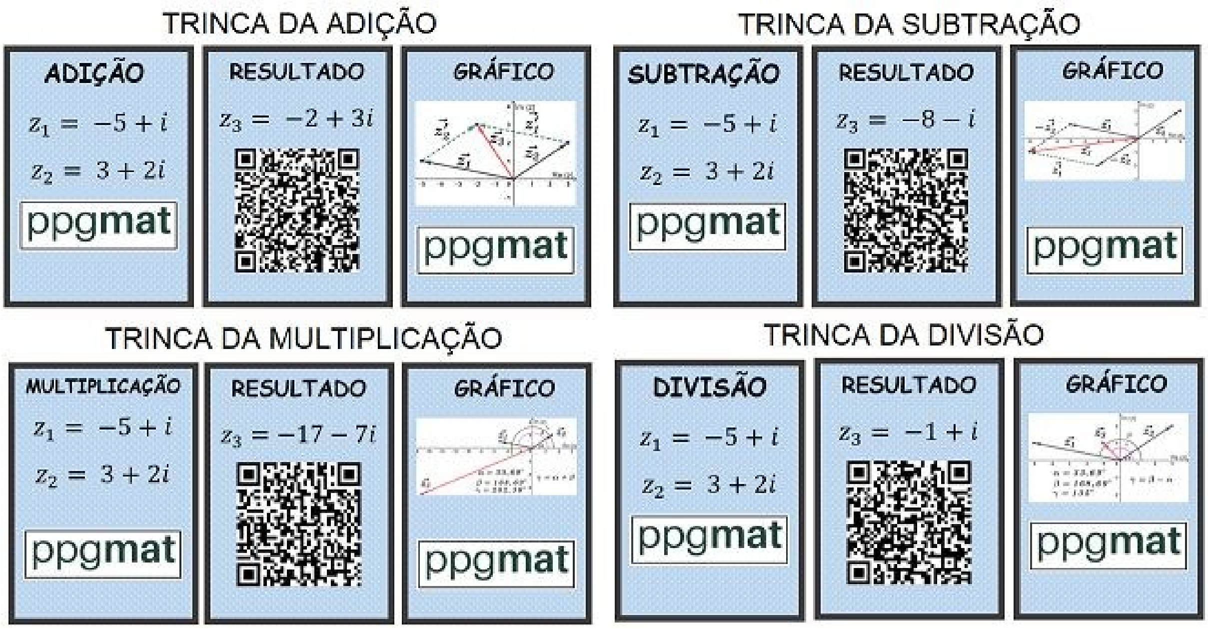
Fonte: o autor.

Jogo Trincas Complexas

Trincas Complexas é um jogo com uma proposta lúdica, aplicável em contexto real de ensino e elaborado para auxiliar na formação dos conceitos e procedimentos matemáticos dos estudantes sobre o objeto matemático Números Complexos.

Material: 13 cartões de papel, sendo quatro trincas (4 x 3 = 12) e um curinga. Cada face desses cartões que formam trincas possui algum tipo de informação: dois números complexos na forma algébrica com a indicação de uma operação (adição, subtração, multiplicação ou divisão); o resultado algébrico dessa operação; e, a representação do registro gráfico dessa operação, conforme protótipo apresentado na Figura 1 a seguir:

Figura 1 - Cartões do jogo com as trincas complexas



Fonte: o autor.

Além dos cartões que formam trincas complexas, esse jogo contém um cartão curinga, cuja função será apresentada mais adiante. Esse curinga é representado pela letra $\mathbb{C}$ (Conjunto dos Números Complexos), conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Cartão Curinga

Fonte: o autor.

Objetivo do jogo: formar corretamente uma trinca complexa, ou seja, um cartão com a indicação de uma operação, cartão com o registro algébrico dessa operação; e cartão com registro gráfico.

Número de participantes: o jogo deve ser realizado entre 4 pessoas.

Vamos jogar? Os 13 (treze) cartões são embaralhados e distribuídos entre os 4 jogadores de forma que um não conheça os cartões do outro. Após a distribuição, deve-se ter três jogadores com três cartões cada um e um jogador com quatro, totalizando 13 cartões.

Nenhum dos jogadores poderá sair "batido", ou seja, receber por muita "sorte" uma trinca completa na distribuição dos cartões. Dessa forma, jogador algum poderá vencer o jogo de imediato. Caso isso aconteça, os cartões devem ser embaralhados e distribuídos novamente.

O jogador que receber 4 cartões deverá escolher um deles e passá-lo para o jogador à sua direita. Dessa maneira, o jogador imediatamente à direta irá receber esse cartão e poderá tentar combiná-lo de forma a completar uma trinca complexa (exemplo: cartão com a operação $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}$ ou $\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}$ ou $\mathbf{z_1} \times \mathbf{z_2}$ ou $\mathbf{z_1} \div \mathbf{z_2}$; resultado da operação representado pela letra $\mathbf{z_3}$; e representação gráfica dessa operação).

Sempre com um jogador passando o quarto cartão para o jogador à direita, o jogo prossegue. Quem receber o curinga ($\mathbb{C}$), deverá ficar com ele por uma rodada, devendo passar outro cartão. Esse curinga tem a função de impedir que algum jogador ganhe rapidamente uma rodada do jogo, com isso não se pode vencer estando com o curinga em mãos, assim como o curinga não serve para substituir umas das cartas de forma a completar corretamente uma trinca. **Vence o jogo** quem formar primeiro uma trinca complexa correta.

Dicas criptografas

Nos cartões que apresentam os resultados das operações, criptografamos dicas em forma de QR CODE para auxiliar os jogadores a compreenderem o que a operação (adição ou subtração ou multiplicação ou divisão) entre dois números complexos na forma algébrica gera na representação do registro gráfico no plano de Argand-Gauss. A leitura dessas dicas criptografadas não é condição necessária para que o jogo aconteça, no entanto, entendemos que essa forma de associar o jogo ao uso de uma tecnologia possa ser uma estratégia interessante para atrair a atenção dos alunos. Além disso, acreditamos que as reflexões geradas a partir das relações entre as operações algébricas e, consequentemente, representações gráficas, trará uma rica discussão entre professores e alunos que, por muitas vezes, pouco exploram os conceitos de módulos e argumentos de vetores complexos a partir das operações algébricas. Para fazerem uso desse recurso, é necessário que os jogadores, caso não tenham, baixem previamente um aplicativo para leitura QR CODE em seus aparelhos de *smartphone*. É sobre essas dicas que se refere o Quadro 2 a seguir.

Quadro 2 - Dicas criptografadas do jogo Trincas Complexas

OPERAÇÃO	QR CODE	**Dica**: O que a operação faz graficamente?
ADIÇÃO		*Este resultado é representado graficamente por meio da regra do paralelogramo com os vetores usados na operação.*
SUBTRAÇÃO		*Este resultado é representado graficamente por meio da regra do paralelogramo com o oposto de um dos vetores.*
MULTIPLICAÇÃO		*O argumento deste número é a soma dos argumentos dos números usados na operação.*
DIVISÃO		*O argumento desse número é a diferença dos argumentos dos números usados na operação.*

Fonte: o autor.

Professor(a), resgate com os seus alunos alguns conceitos matemáticos que não estão explícitos nos cartões, por exemplo, módulos e argumentos dos números complexos e a verificação dos cálculos apresentados no Quadro 3 a seguir:

Quadro 3 – Cálculos dos módulos e argumentos dos números complexos $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}$ e $\boldsymbol{z_3}$

Número Complexo	**Módulo (ρ)**	**Argumento (θ)**	
$\boldsymbol{z_1 = -5 + i}$	$\rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_1 = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2}$ $\rho_1 = \sqrt{25 + 1}$ $\rho_1 = \sqrt{26}$	$\text{sen}\ (\theta_1) = \frac{b}{\rho_1}$ $\text{sen}\ (\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{26}}$ $\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) \cong 11{,}31°$	$\cos\ (\theta_1) = \frac{a}{\rho_1}$ $\cos\ (\theta_1) = \frac{-5}{\sqrt{26}}$ $\text{arccos}\left(\frac{-5}{\sqrt{26}}\right) \cong 168{,}69°$
		Como $\text{sen}\ (\theta_1)$ é positivo e $\cos\ (\theta_1)$ é negativo, o argumento $\theta_1 \in$ II quadrante. Portanto, $\boldsymbol{\theta_1}$ **= 168,69°**.	
$\boldsymbol{z_2 = 3 + 2i}$	$\rho_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_2 = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}$ $\rho_2 = \sqrt{9 + 4}$ $\rho_2 = \sqrt{13}$	$\text{sen}\ (\theta_2) = \frac{b}{\rho_2}$ $\text{sen}\ (\theta_2) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\text{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cong 33{,}69°$	$\cos\ (\theta_2) = \frac{a}{\rho_2}$ $\cos\ (\theta_2) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\text{arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \cong 33{,}69°$
		Como $\text{sen}\ (\theta_2)$ é positivo e $\cos\ (\theta_2)$ é positivo, o argumento $\theta_2 \in$ I quadrante. Portanto, $\boldsymbol{\theta_2}$ **= 33,69°**.	
Multiplicação $\boldsymbol{z_3 = -17 - 7i}$	$\rho_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_3 = \sqrt{(-17)^2 + (-7)^2}$ $\rho_3 = \sqrt{289 + 49}$ $\rho_3 = \sqrt{338}$	$\text{sen}\ (\theta_3) = \frac{b}{\rho_3}$ $\text{sen}\ (\theta_3) = \frac{-7}{\sqrt{338}}$ $\text{arcsen}\left(\frac{-7}{\sqrt{338}}\right) \cong -22{,}38°$	$\cos\ (\theta_3) = \frac{a}{\rho_3}$ $\cos\ (\theta_3) = \frac{-17}{\sqrt{338}}$ $\text{arccos}\left(\frac{-17}{\sqrt{338}}\right) \cong 157{,}62°$
		Como $\text{sen}\ (\theta_3)$ é negativo e $\cos\ (\theta_3)$ é negativo, o argumento $\theta_3 \in$ III quadrante. O ângulo -22,38° (sentido horário) $\in$ IV quadrante e é simétrico ao ângulo de 22,38° (sentido anti-horário). O ângulo simétrico de 22,38° no III quadrante é dado por: 180° + 22,38° = 202,38°. Portanto, $\boldsymbol{\theta_3}$ **= 202,38°**.	
Divisão $\boldsymbol{z_3 = -1 + i}$	$\rho_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_3 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$ $\rho_3 = \sqrt{1 + 1}$ $\rho_3 = \sqrt{2}$	$\text{sen}\ (\theta_3) = \frac{b}{\rho_3}$ $\text{sen}\ (\theta_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong 45°$	$\cos\ (\theta_3) = \frac{a}{\rho_3}$ $\cos\ (\theta_3) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\text{arccos}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cong 135°$
		Como $\text{sen}\ (\theta_3)$ é positivo e $\cos\ (\theta_3)$ é negativo, temos que: $\theta_3 \in$ II quadrante. Portanto, $\boldsymbol{\theta_3}$ **= 135°**.	

Fonte: o autor.

Professor(a), recomendamos retomar com os estudantes as ideias de redução ao primeiro quadrante, para que os estudantes tenham uma melhor compreensão dos cálculos dos argumentos. Após a retomada dos conceitos de módulos e argumentos de números complexos e realizado corretamente os cálculos (Quadro 3), solicite que os alunos verifiquem as dicas criptografas (Quadro 2) nos cartões de multiplicação e divisão e façam uma validação com os valores encontrados. Ainda, com o uso de um *Software* (GeoGebra) é possível explorar as representações gráficas dessas operações.

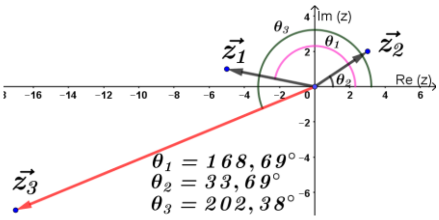
Multiplicação

Dica: "O argumento deste número é a soma dos argumentos dos números usados na operação".

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$$
$$202{,}38 = 168{,}69 + 33{,}69$$

Na Figura 3, temos a representação gráfica de $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}$ e $\boldsymbol{z_3}$ e seus respectivos argumentos.

Figura 3 - Representação gráfica da multiplicação



Fonte: o autor.

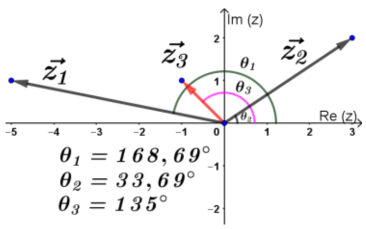
Divisão

Dica: O argumento desse número é a diferença dos argumentos dos números usados na operação.

$$\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$$
$$135° = 168{,}69 - 33{,}69$$

Na Figura 4, temos a representação gráfica de $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}$ e $\boldsymbol{z_3}$ e seus respectivos argumentos.

Figura 4 - Representação gráfica da divisão



Fonte: o autor.

***Professor(a)**, elaboramos quatro jogos como esse em outras cores e diferentes valores de números complexos para que os estudantes não memorizem as cartas. No **apêndice** desse Produto Educacional você encontrará esse material disponível para impressão.*

*Com o jogo **Trincas Complexas,** você poderá auxiliar os alunos a superarem dificuldades em relação à representação gráfica de operações algébricas com números complexos, bem como rever assuntos estudados anteriormente. Esse jogo possui um embasamento em Registro de Representação Semiótica, relacionando duas formas de representação: gráfica e algébrica.*

Fechamento do jogo: os jogos podem ser empregados como uma forma dinâmica de aprender conteúdos de caráter predominantemente abstratos na disciplina de matemática, sendo capazes de ampliar e despertar o interesse do aluno no aprendizado dos números complexos. Além disso, podem contribuir com respostas a questionamentos da seguinte ordem: *em que resulta a soma de dois números complexos? E a subtração, multiplicação ou divisão?* Com o jogo **Trinca Complexa**, o estudante pode transitar entre as representações algébricas e gráficas estabelecendo conexões entre elas.

REFERÊNCIAS

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Ática, 2008.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012. p. 266-297.

VOLCE, C. J. **Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

Cartões do Jogo Trincas Complexas

ADIÇÃO

$z_1 = -5 + i$

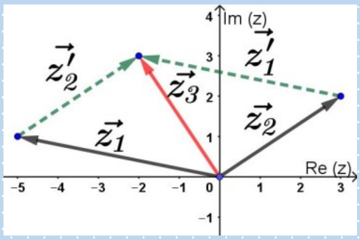
$z_2 = 3 + 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = -2 + 3i$

GRÁFICO



ppgmat

SUBTRAÇÃO

$z_1 = -5 + i$

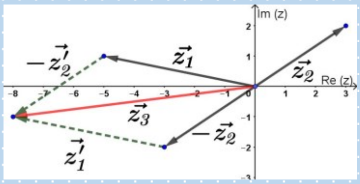
$z_2 = 3 + 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = -8 - i$

GRÁFICO



ppgmat

DIVISÃO

$z_1 = -5 + i$

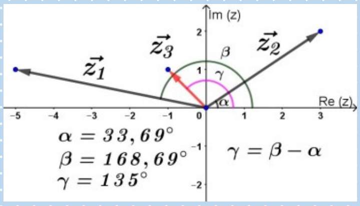
$z_2 = 3 + 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = -1 + i$

GRÁFICO



ppgmat

MULTIPLICAÇÃO

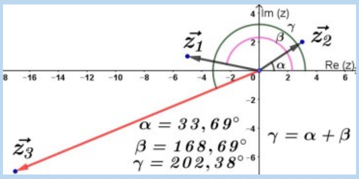
$z_1 = -5 + i$

$z_2 = 3 + 2i$

RESULTADO

$z_3 = -17 - 7i$

GRÁFICO



ℂURINGA

ADIÇÃO

$z_1 = 5 - 3i$

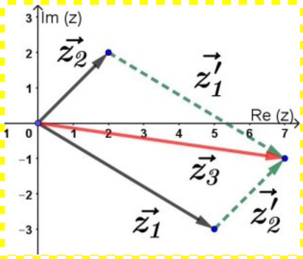
$z_2 = 2 + 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = 7 - i$

GRÁFICO



ppgmat

SUBTRAÇÃO

$z_1 = 5 - 3i$

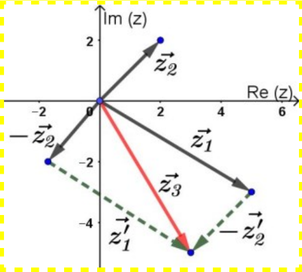
$z_2 = 2 + 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = 3 - 5i$

GRÁFICO



ppgmat

DIVISÃO

$z_1 = 5 - 3i$

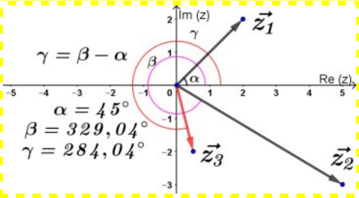
$z_2 = 2 + 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = 0{,}5 - 2i$

GRÁFICO



ppgmat

MULTIPLICAÇÃO

$$z_1 = 5 - 3i$$

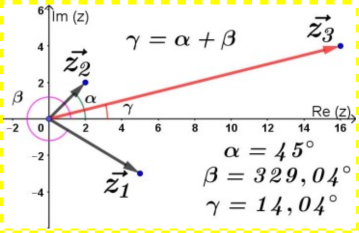
$$z_2 = 2 + 2i$$

ppgmat

RESULTADO

$$z_3 = 16 + 4i$$

GRÁFICO



ppgmat

$\mathbb{C}$URINGA

$\mathbb{C}$

ppgmat

ADIÇÃO

$z_1 = 0 + 5i$

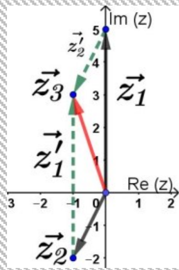
$z_2 = -1 - 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = -1 + 3i$

GRÁFICO



ppgmat

SUBTRAÇÃO

$z_1 = 0 + 5i$

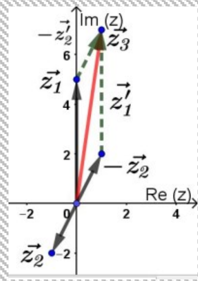
$z_2 = -1 - 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = 1 + 7i$

GRÁFICO



ppgmat

DIVISÃO

$z_1 = 0 + 5i$

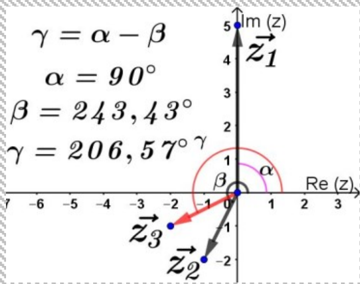
$z_2 = -1 - 2i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = -2 - i$

GRÁFICO



ppgmat

MULTIPLICAÇÃO

$$z_1 = 0 + 5i$$

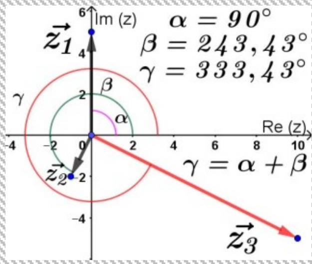
$$z_2 = -1 - 2i$$

ppgmat

RESULTADO

$$z_3 = 10 - 5i$$

GRÁFICO



ppgmat

ℂURINGA

$$\mathbb{C}$$

ppgmat

ADIÇÃO

$z_1 = 2 + 4i$

$z_2 = 2 - i$

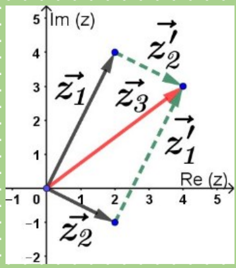
ppgmat

RESULTADO

$z_3 = 4 + 3i$

ppgmat

GRÁFICO



ppgmat

SUBTRAÇÃO

$z_1 = 2 + 4i$

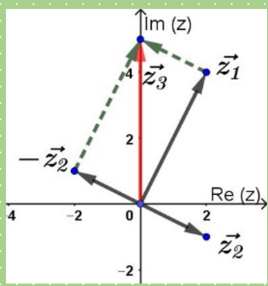
$z_2 = 2 - i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = 5i$

GRÁFICO



ppgmat

DIVISÃO

$z_1 = 2 + 4i$

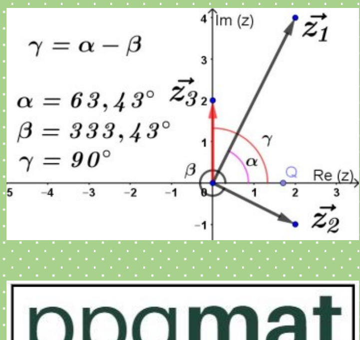
$z_2 = 2 - i$

ppgmat

RESULTADO

$z_3 = 2i$

GRÁFICO



ppgmat

MULTIPLICAÇÃO

$$z_1 = 2 + 4i$$

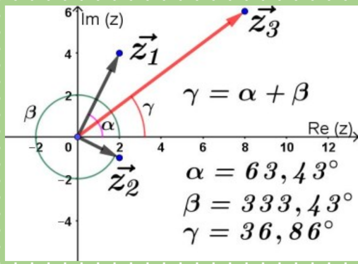
$$z_2 = 2 - i$$

ppgmat

RESULTADO

$$z_3 = 8 + 6i$$

GRÁFICO



ppgmat

ℂURINGA

$$\mathbb{C}$$

ppgmat

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Recursos didáticos para números complexos na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica
Título do Produto/Processo Educacional	Trincas Complexas: um jogo para representar graficamente operações algébricas com Números Complexos
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Cílio José Volce
	Orientador/Orientadora: Claudete Cargnin
	Outros (se houver):
Data da Defesa	27/04/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	(x) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *<u>Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória</u>.	( ) Local ( ) Regional ( ) Nacional (x) Internacional Justificativa: Todo o material elaborado estará disponível no portal EDUCAPES, que possui acesso internacional.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	(x) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). ( ) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	( ) Econômica;

*<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) Saúde; (x) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; (x) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *<u>Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (x) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ( ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Dra. Claudete Cargnin	UTFPR-CM
Dr. Sergio de Mello Arruda	UTFPR/UEL
Dr. Bruno Rodrigo Teixeira	UEL