

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELÉTRICA  
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**GABRIEL ALBERTO BORTOLI BAMPI**

**ANÁLISE DO CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA MÚTUA DA LINHA DE TRANSMISSÃO  
PELO MÉTODO DE LUCCA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**PATO BRANCO**

**2019**

GABRIEL ALBERTO BORTOLI BAMPI

## **ANÁLISE DO CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA MÚTUA DA LINHA DE TRANSMISSÃO PELO MÉTODO DE LUCCA**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Engenharia Elétrica do Departamento Acadêmico de Elétrica – DAELE – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Câmpus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Edwin Choque Pillco.

PATO BRANCO

2019

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

O trabalho de Conclusão de Curso intitulado “**ANÁLISE DO CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA MÚTUA DA LINHA DE TRANSMISSÃO PELO MÉTODO DE LUCCA**”, do aluno **GABRIEL ALBERTO BORTOLI BAMPI** foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata da banca examinadora N° **241** de 2019.

Fizeram parte da banca os professores:

**Edwin Choque Pillco**

**Jorge Luiz Roel Ortiz**

**César Augusto Portolann**

**A Ata de Defesa assinada encontra-se na Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica**

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Reni e Elizandra, e ao meu irmão, Guilherme.

## **AGRADECIMENTOS**

Meus agradecimentos ao professor Dr. Edwin Choque Pillco, por todo tempo, esforço e paciência dedicados a meu auxiliar na execução deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Reni Bampi e Elizandra Bortoli, por toda a confiança depositada, sem nunca desacreditar que conseguiria.

Por fim, agradeço a todos que em qualquer momento desta jornada forneceram apoio e suporte para que pudesse chegar ao tão esperado fim.

“Se o dinheiro for a sua esperança de independência, você jamais a terá. A única segurança verdadeira consiste numa reserva de sabedoria, de experiência e de competência.”

Henry Ford.

## RESUMO

BAMPI, Gabriel; A; B. **Análise do Cálculo da Impedância Mútua da Linha de Transmissão pelo Método de Lucca**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2019.

Esta pesquisa apresenta uma análise qualitativa e quantitativa do problema de linhas de transmissão aéreas e dutos subterrâneos que compartilham o mesmo corredor gerando interferências. Especificamente são feitas análises referentes ao cálculo da impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um duto subterrâneo pelo método de Lucca, utilizando-se da fórmula de Carson para efetuar comparações numéricas.

**Palavras-chave:** Linha de Transmissão Aérea. Duto Subterrâneo. Acoplamento Eletromagnético. Acoplamento Indutivo. Formula de Carson. Formula de Lucca.

## ABSTRACT

BAMPI, Gabriel; A; B. **Analysis of the Transmission Line Mutual Impedance Calculation by the Lucca Method**. 2019. Graduation Conclusion Work (Graduation in Electrical Engineering) – Federal Technological University of Paraná. Pato Branco, 2019.

This research presents a qualitative and quantitative analysis of the problem of aerial transmission lines and underground ducts that share the same corridor generating interference. Specifically, analyzes are performed on the calculation of the mutual impedance between an overhead transmission line and an underground pipeline by the Lucca method, using the Carson formula to make numerical comparisons.

**Keywords:** Air Transmission Line. Underground Duct. Electromagnetic Coupling. Inductive Coupling. Carson's Formula. Lucca's Formula.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1:Duto paralelo a linha de transmissão .....	10
Figura 2: Condutor de Linha de Transmissão e Duto Enterrado.....	13
Figura 3: Geometria de Lucca.....	14
Figura 4: Parte real da impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.01$ ).....	41
Figura 5: Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.01$ )..	42
Figura 6: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.01$ ). .....	43
Figura 7: Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e =$ $0.01$ ).....	44
Figura 8: Parte real da impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.001$ ).....	45
Figura 9: Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.001$ )..	46
Figura 10: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e =$ $0.001$ ).....	47
Figura 11:Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e =$ $0.001$ ).....	47
Figura 12: Parte Real da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.01$ ). .....	49
Figura 13: Parte Imaginária da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.01$ ).....	50
Figura 14: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.01$ ).....	51
Figura 15: Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e =$ $0.01$ ).....	51
Figura 16: Parte Real da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.001$ ).....	52
Figura 17: Parte Imaginária da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.001$ )....	53
Figura 18: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.001$ ). ..	54
Figura 19: Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e =$ $0.001$ ).....	54

## LISTA DE SIGLAS

FWM	Modelo de Fio Finito.
IWM	Modelo de Fio Infinito.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_e$	Condutividade Específica.
$\mu$	Permeabilidade Magnética.
$\mu_0$	Permeabilidade Magnética no Vácuo.
$\varepsilon$	Permissividade Elétrica.
$\varepsilon_0$	Permissividade Elétrica no Vácuo.
$e$	Constante de Euler.
$\nabla$ .	Operador Divergente.
$\nabla x$	Operador Rotacional.
$\nabla^2$	Operador Laplaciano.
$k$	Número da Onda.
$\Pi_h$	Potencial Magnético de Hertz.
$\Pi_e$	Potencial Elétrico de Hertz.
$\bar{E}$	Campo Elétrico.
$\bar{H}$	Campo Magnético.
$\gamma$	Coefficiente de Propagação da Onda.
$\lambda$	Comprimento de Onda.
$\omega$	Frequência Angular.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	10
1.1. OBJETIVO GERAL .....	15
1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	15
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	16
<b>2. RELAÇÃO ENTRE A FORMULA DE LUCCA E METODOLOGIAS AFINS</b>	<b>17</b>
2.1. FORMULA DE LUCCA EM CONFRONTO COM METODOLOGIAS NÃO APROXIMADAS .....	18
2.2. FORMULA DE LUCCA EM CONFRONTO COM METODOLOGIAS DE FORMA FECHADA .....	19
<b>3. HIPÓTESES DE SIMPLIFICAÇÃO NA FORMULA DE LUCCA</b> .....	<b>24</b>
3.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES .....	24
3.1.1 Potencias Hertzianos.....	24
3.1.2 Série de Taylor .....	26
3.1.3 Teorema de Liebnitz.....	26
3.2 ANALISE DAS HIPÓTESES DE SIMPLIFICAÇÃO NA FORMULA DE LUCCA .	27
<b>4. SIMULAÇÕES</b> .....	<b>38</b>
4.1 ANÁLISE DE ERRO PARA VARIAÇÃO DA DISTÂNCIA LATERAL.....	41
4.2 ANÁLISE DE ERRO PARA VARIAÇÃO DA FREQUÊNCIA .....	49
<b>5. CONCLUSÃO E COMENTARIOS FINAIS</b> .....	<b>56</b>
REFERÊNCIAS.....	58

## 1. INTRODUÇÃO

As interferências eletromagnéticas entre dutos e linhas de transmissão tem sido motivo de estudo desde a década de 1960, principalmente devido ao significativo aumento dos níveis de curto-circuito, aumentos das cargas alimentadas pelas linhas e critérios ambientais, que exigem que os dutos e as linhas de transmissão compartilhem o mesmo corredor. Em regiões onde há interferência, altos níveis de corrente e tensão podem ser induzidos nas tubulações (FURLAN, 2015).

Sendo assim, quando uma tubulação está paralela a uma distribuição elétrica ou linha de transmissão, como apresentado na Figura 1, pode e se torna parte do circuito elétrico por acoplamento eletrostático e eletromagnético (NELSON, 1986).

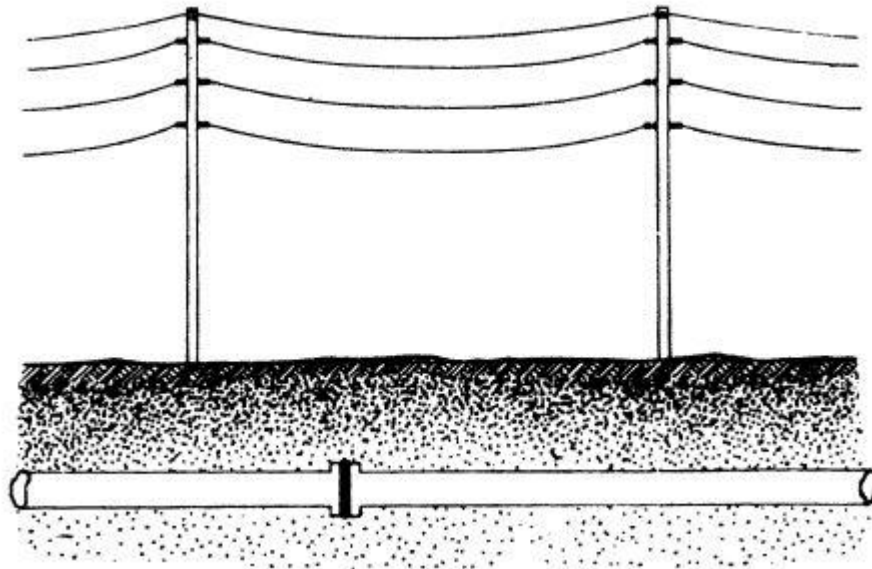


Figura 1: Duto paralelo a linha de transmissão.

Fonte: (NELSON, 1986).

A magnitude destes acoplamentos é dependente de uma série de fatores como magnitude e ângulo das tensões e correntes nos vários condutores envolvidos no circuito, espaçamento entre cada condutor e o duto, espaçamento entre os condutores e ainda possíveis desequilíbrios relativos das tensões e correntes.

Além disso, as interferências devido a uma linha de transmissão em uma tubulação metálica nas proximidades podem ser devidas a qualquer um dos três tipos de acoplamentos elencados por (CIGRE, 1995).

- I. Acoplamento Capacitivo: afeta apenas tubulações aéreas situadas nas proximidades da linha de transmissão. Isso ocorre devido à capacitância entre a linha e o duto. Para tubulações subterrâneas, o efeito do acoplamento capacitivo pode ser desconsiderado, devido ao efeito de peneiramento da terra contra os campos elétricos;
- II. Acoplamento Indutivo: dutos aéreos e subterrâneos que correm paralelamente ou próximos a linhas de transmissão ou cabos estão sujeitos a tensões induzidas causadas pelos campos magnéticos variáveis no tempo produzidos pelas correntes das linhas de transmissão. As forças eletromotrizes induzidas causam correntes nas tubulações e tensões entre o duto e a Terra envolvente;
- III. Acoplamento Condutivo: Quando ocorre uma falta à terra na linha de transmissão, a corrente que flui através da rede de aterramento produz um aumento de potencial tanto na malha de aterramento como no solo vizinho em relação à terra. Se a tubulação passar pela “zona de influência” desse aumento de potencial, então uma grande diferença no potencial elétrico pode aparecer através do revestimento do metal da tubulação.

Esses acoplamentos causam problemas como de segurança pessoal. Qualquer ser humano em contato com duto metálico sujeito à interferência de uma linha de alta tensão pode estar exposto ao risco de choque elétrico (FURLAN, 2015). Danos no revestimento, em que tensões produzidas por acoplamento indutivo ou condutivo podem danificar o revestimento dos dutos. Corrosão metálica, que geralmente está relacionada ao acoplamento condutivo, em situações de falta que ocorrem próximas a região de interferência. Ainda podem ser citados danos às juntas de isolamento dos dutos e a equipamentos conectados ao duto.

Um parâmetro de grande importância para os acoplamentos indutivo e capacitivo entre uma linha de transmissão e um duto próximo é a separação entre ambos. O nível da tensão induzida é reduzido com o incremento da separação entre a linha de transmissão e o duto (CIGRE, 1995).

Corredores de energia foram e continuarão a ser construídos para transportar grandes quantidades de energia sob a forma de gás natural, produtos petrolíferos e eletricidade. No futuro, produtos adicionais, como carvão, enxofre e nitrogênio irão compartilhar esses mesmos corredores. Os altos custos da terra e as preocupações ambientais continuarão a forçar a indústria de energia a utilizar esses corredores comuns. Como tal, a tendência de paralelismo entre linhas elétricas e dutos continuará (NELSON, 1986).

Os dutos enterrados próximos a linhas de transmissão aéreas estão sujeitos à interferência por acoplamento indutivo devido aos campos magnéticos gerados pelas linhas de transmissão. Esse acoplamento está presente tanto em regime permanente quanto em condições de falta (FURLAN, 2015).

Usualmente o acoplamento indutivo entre dutos enterrados e linhas de transmissão aéreas é modelado por circuitos equivalentes que necessitam das impedâncias próprias e mútuas calculadas para o problema específico (NELSON, 1986). Para os cálculos das impedâncias o mais clássico é a utilização de fórmulas que se baseiem nas equações de Carson, as quais levam em consideração o efeito do retorno pelo solo (FURLAN, 2015).

Todavia o problema da propagação de ondas ao longo de um sistema de transmissão composto por um paralelo de fios aéreos e a superfície da terra, apesar de sua grande importância técnica, não parece ter sido resolvido satisfatoriamente. Enquanto uma solução completa do problema real é impossível, devido as desigualdades na superfície da terra e sua falta de homogeneidade condutiva, a solução do problema, onde a terra real é substituída por um plano sólido homogêneo semi-infinito, é de considerável interesse teórico e prático (CARSON, 1926).

O equacionamento de Carson é derivado do método das imagens como é apresentado na Figura 2.

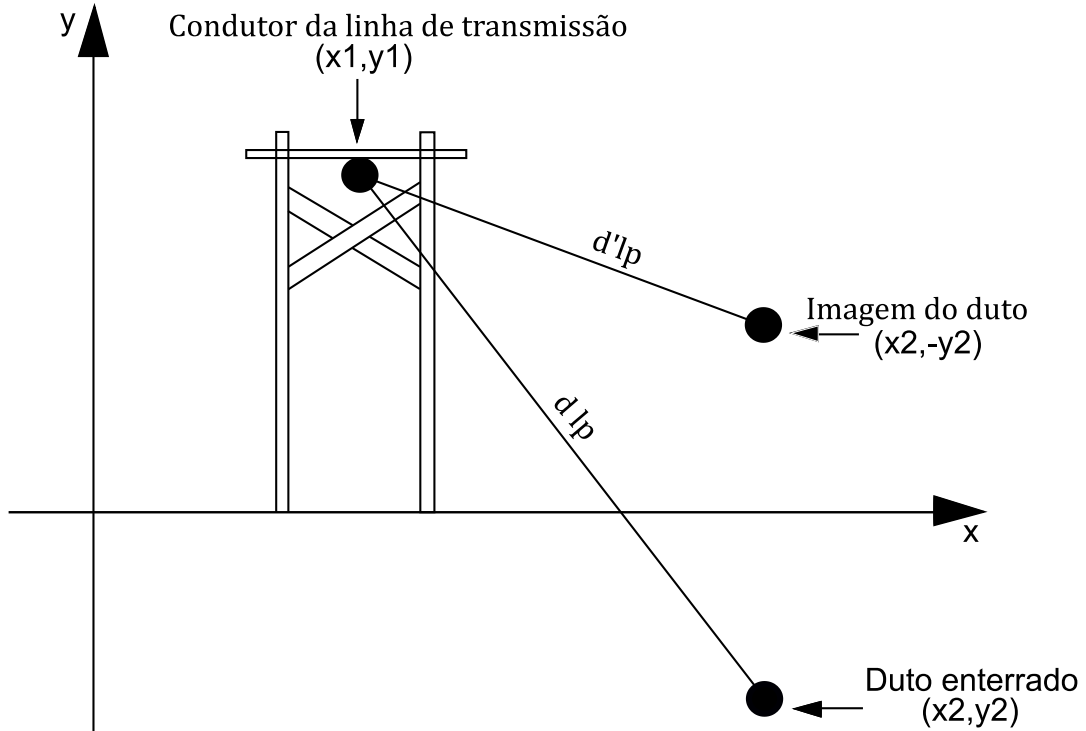


Figura 2: Condutor de Linha de Transmissão e Duto Enterrado.

Fonte: (FURLAN, 2015).

A equação de Carson para impedância mútua entre uma Linha de Transmissão aérea e um condutor enterrado tem a seguinte forma (CARSON, 1926).

$$Z_{CARSON} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d'_{lp}}{d_{lp}}\right) + (P + jQ) \quad (1)$$

Em que os termos P e Q da equação (1), séries infinitas que variam conforme a distância, são correções necessárias devido ao solo.

Enquanto isso, de maneira simplificada, a geometria do problema desenvolvido por Lucca é apresentada na Figura 3, onde o sistema é representado por dois fios metálicos com comprimento infinito e paralelos ao eixo z. O fio aéreo possui coordenadas  $(x_1, y_1)$  enquanto o fio enterrado possui coordenadas  $(x_2, y_2)$ . O ar é caracterizado por condutividade nula e permeabilidade magnética  $\mu_0$ , enquanto o solo supostamente homogêneo e isotrópico é caracterizado por uma condutividade  $\sigma_e$  e permeabilidade magnética  $\mu_0$ .



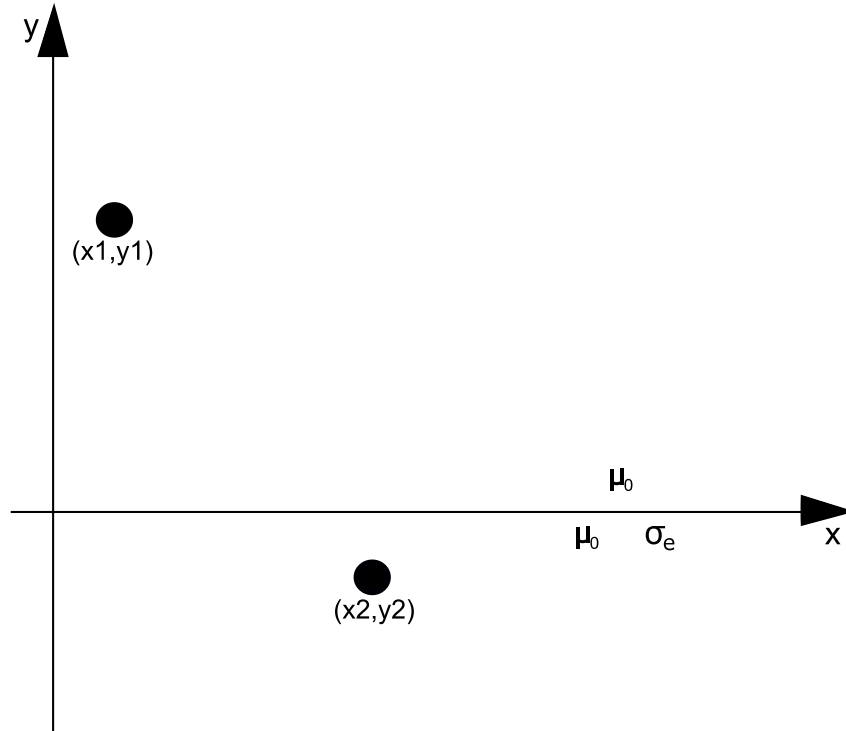


Figura 3: Geometria de Lucca.

Fonte: (LUCCA, 1994).

Após uma série de cálculos e aproximações analíticas, Lucca obteve a fórmula aproximada para a impedância mútua conforme apresentado na equação (2) (LUCCA, 1994).

$$Z_{LUCCA} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{\bar{R}_{12}}{R_{12}} - \frac{2\bar{y}}{3\gamma^3} \left[ \frac{\bar{y}^2 - 3a^2}{\bar{R}_{12}^6} \right] \right) \quad (2)$$

$$K_e^2 = -j\omega\mu_0\sigma_e \quad (2.1)$$

$$\gamma = jK_e \quad (2.2)$$

$$a = x_2 - x_1 \quad (2.3)$$

$$R_{12} = \sqrt{a^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.4)$$

$$\bar{R}_{12} = \sqrt{\bar{y}^2 + a^2} \quad (2.5)$$

$$\bar{y} = y_1 - y_2 + \frac{2}{\gamma} \quad (2.6)$$

No equacionamento acima nota-se a ausência de séries de termos infinitos, o que leva a uma maior simplicidade em sua aplicação. Desta forma, mostra-se que além do fato da fórmula de Lucca, quando comparada a fórmula de Carson, ser válida para diferentes distâncias consideravelmente maiores, ainda segundo Furlan, 2015; a proposta de Lucca é uma aproximação mais precisa para o equacionamento de Carson.

Nesse contexto, o presente trabalho de conclusão de curso propõe realizar uma análise detalhada das aproximações realizadas por Lucca na obtenção de sua fórmula aproximada. Além de executar uma análise comparativa do cálculo da impedância mútua da linha de transmissão entre os métodos de Carson e Lucca, sendo o primeiro utilizado como referência para tal comparação.

### 1.1. OBJETIVO GERAL

O seguinte trabalho tem como objetivo analisar a Fórmula de Lucca para o cálculo da impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um duto enterrado utilizando como referência de comparação a formulação de Carson, evidenciando as possíveis diferenças relacionadas as impedâncias mutuas quando utilizadas a fórmula de Carson e a fórmula aproximada de Lucca.

### 1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- I. Analisar teórica e qualitativamente as equivalências na aplicação das fórmulas de Lucca e de Carson;
- II. Identificar e detalhar por extenso as hipóteses de simplificação realizadas na Fórmula de Lucca;
- III. Analisar o erro relativo entre as fórmulas de Lucca e de Carson para o cálculo da impedância para diferentes distâncias e frequências.

### 1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O segundo capítulo deste trabalho de conclusão de curso será dedicado a estabelecer relações teórico-qualitativas entre a Fórmula de Lucca e metodologias afins que também são utilizadas para realização do cálculo da impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um condutor subterrâneo. De maneira geral esta etapa será baseada em artigos científicos e dissertações disponibilizados por meios digitais.

Quanto ao terceiro capítulo, este será dedicado as hipóteses de simplificação aplicadas na obtenção da Fórmula de Lucca. Primeiramente serão abordados, de maneira expositiva, os conceitos matemáticos que serão necessários para o entendimento das aproximações realizadas. Em seguida, serão apresentadas as aproximações identificadas com o objetivo de esclarecer e justificar sua aplicação, além da identificação do embasamento matemático que corrobore tal aproximação.

As simulações realizadas serão apresentadas e discutidas durante o quarto capítulo do trabalho de conclusão de curso. Neste ponto serão apresentados os resultados obtidos, bem como a realização da análise de erro relativo, entre as fórmulas de Lucca e de Carson, para variações de distância lateral entre os condutores e também para variação de frequência.

O quinto e último capítulo será dedicado as conclusões retiradas durante a execução dos objetivos propostos bem como a possíveis comentários finais que possam ser feitos referindo-se ao tema em questão.

## 2. RELAÇÃO ENTRE A FÓRMULA DE LUCCA E METODOLOGIAS AFINS

Como abordado anteriormente condutores elétricos aéreos e enterrados frequentemente compartilham o mesmo corredor. Quando ocorre uma falta fase-terra, sobretensões induzidas por transientes aparecem como produto de correntes de curto-circuito no solo. Os cálculos das impedâncias mútuas entre os dois sistemas podem ser realizados pela integral de acoplamento de Pollaczek, que não possui uma solução analítica de forma fechada<sup>1</sup>, e seu integrando é altamente oscilatório para realizar uma integração numérica direta (URIBE, 2008).

Sendo assim, nota-se que as expressões de Pollaczek, dadas na forma de integrais infinitas altamente oscilantes, são difíceis de serem computadas, de modo que as aproximações são frequentemente preferidas na prática para avaliar essas impedâncias (LEGRAND et al., 2008).

Na prática, os analistas de engenharia de energia usam fórmulas aproximadas. Embora suas faixas de precisão não sejam determinadas estas fórmulas simplificadas são preferidas invés de algoritmos numéricos complicados que às vezes são muito incômodos e requerem um longo tempo de processamento da computação (URIBE, 2008).

Devido as dificuldades matemáticas na obtenção de uma expressão analítica de forma fechada ou na realização de uma integração direta de Pollaczek, autores como Uribe, 2008; Ametani et al., 2009; Zou et al., 2013; Legrand et al., 2008; e Lee et al., 2017; propõe soluções em forma de algoritmos para realizar os cálculos da impedância mútua através da integral de acoplamento de Pollaczek.

Nas subseções a seguir, serão realizadas análises teórico qualitativas da fórmula de Lucca em comparação com duas metodologias específicas. A primeira análise, de caráter introdutório, trata das fórmulas de Carson e Pollaczek, que neste trabalho serão definidas como expressões não aproximadas devido ao fato de dependerem, respectivamente, de séries e integrais infinitas. A segunda subseção,

---

<sup>1</sup> Na matemática, diz-se que uma solução é de “forma fechada”, se puder ser expressa analiticamente em termos de certas funções “bem conhecidas”. Assim, a escolha do que chamar de forma fechada ou não é bastante arbitrária e baseia-se na definição da função “conhecida” (T. THEODOULIDIS, 2015).

trará uma análise mais profunda de fórmulas analíticas aproximadas já consolidadas, que serão tratadas como metodologias de forma fechada durante toda a execução da monografia. Toda ênfase desta avaliação será direcionada à fórmula aproximada de Lucca, sob a qual se basearão todas as análises deste trabalho de conclusão de curso.

## 2.1. FÓRMULA DE LUCCA EM CONFRONTO COM METODOLOGIAS NÃO APROXIMADAS

Em praticamente todos os casos de cálculo da impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um duto enterrado a terra é modelada para ser um solo semi-infinito e homogêneo. A forma rigorosa do cálculo da impedância mútua de retorno da terra para esta modelagem foi originalmente resolvida por Carson e Pollaczek (LEE et al., 2017). De maneira semelhante a Carson, 1926; Pollaczek propôs uma fórmula para o cálculo da impedância mútua entre um condutor isolado suspenso e um condutor subterrâneo. Porém, enquanto Carson utilizou-se de séries de termos infinitos, Pollaczek fez uso de integrais infinitas.

Segundo Zou et al., 2009; há duas maneiras de se avaliar a integral de Pollaczek, a primeira delas sendo por simplificações em busca de uma expressão de forma fechada, como a formula de Wedepohl et al., 1973; onde as condições aplicadas se assemelham as aproximações realizadas por Lucca, 1994; sob a fórmula de Carson, 1926. A outra forma, trata-se o cálculo matemático da integral utilizando quadratura direta.

Os métodos de solução destas integrais complexas variam à medida que as condições de aplicação podem ser variadas, isto é, conforme o caso sobre o qual se deseja calcular a impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um duto enterrado podem-se variar as soluções utilizadas na execução do cálculo. Tal afirmação pode ser confirmada utilizando-se o trabalho realizado por Zou et al., 2013; onde o objetivo foi uma abordagem eficiente para que se pudesse avaliar as integrais de Pollaczek na situação onde a distância entre os dois condutores fosse muito grande.

Teoricamente falando, não há obstáculo em avaliar a integral de Pollaczek usando a abordagem de quadratura direta. Para a maioria das aplicações, a abordagem de quadratura direta pode funcionar muito bem. No entanto, se a distância horizontal de dois condutores for muito grande, o tempo computacional poderá ser drasticamente longo, o que torna a abordagem não pragmática (ZOU et al., 2013).

Todavia, enquanto o cálculo utilizando expressões de forma fechada pode ser tomado como suficientemente preciso para aplicações na engenharia, sem o consumo de tempo necessário para as complexas integrações, o uso direto, por exemplo, da integral de Pollaczek por quadratura tem algumas vantagens, podendo ser aplicada com qualquer parâmetro, como, diferentes frequências, pontos de campo arbitrários de interesse entre outros (ZOU et al., 2009).

Diferentes estudos mostram inúmeras maneiras de se avaliar a integral de acoplamento Pollaczek. Em seu trabalho Legrand et al., 2008; propõe um novo algoritmo para resolver as expressões originais de Pollaczek através do método de integração chamado de Quasi-Monte Carlo. Enquanto na abordagem proposta por Lee et al., 2017; a expressão da impedância de retorno à terra de Pollaczek, que inclui um integrando complexo altamente oscilatório, é dividida em duas partes, a integral definida e a cauda, a integral definida é avaliada usando a técnica do momento e a integral da cauda é avaliada usando integrais exponenciais com um integrando assintótico.

Semelhante ao já proposto por outros autores, Zou et al., 2009; e Uribe, 2008; desenvolvem em seus respectivos artigos algoritmos para o cálculo da impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um duto enterrado através da integral de acoplamento de Pollaczek. Porém, seus trabalhos se diferenciam dos demais devido ao fato de suas comparações serem estendidas, também, a outras expressões de forma fechada além da proposta por Lucca, 1994.

## 2.2. FÓRMULA DE LUCCA EM CONFRONTO COM METODOLOGIAS DE FORMA FECHADA

Quando expressões de forma fechada como as apresentadas por Lucca, 1994; e Wedepohl et al., 1973; são diretamente comparadas com formulas não

aproximadas como a de Carson, 1926; o esperado é que os resultados obtidos através das formulas aproximadas sejam significativamente mais exatos ao respeitar seus limites de aplicação como frequência e distância lateral entre os condutores.

Todavia, quanto as soluções em forma de algoritmo como as que são propostas pelos autores abordados na seção 2.1; espera-se que estas mantenham-se superiormente precisas quando comparados as expressões de forma fechada e também as formulas não aproximadas, independentemente da escolha dos parâmetros de aplicação.

As afirmações anteriores são corroboradas pela análise dos resultados apresentados na literatura, onde dados como erro relativo entre as formulas, complexidade do algoritmo e tempo de execução computacional são analisados pelos autores ao variarem parâmetros como frequência, condutividade do solo e distância lateral entre os condutores utilizados para a execução dos cálculos.

Por outro lado, ao observar os resultados obtidos por Zou et al., 2013; nota-se que para a abordagem em forma de algoritmo proposta pelo autor, o tempo computacional permanece praticamente inalterado para diferentes distâncias horizontais entre os condutores aéreo e subterrâneo, enquanto para a aplicação de quadratura direta sobre a integral de Pollaczek o tempo computacional é drasticamente alterado para maiores distâncias horizontais devido ao seu integrando oscilatório. Mantendo apenas frequência e distância horizontal como variáveis, a abordagem proposta foi comparada a fórmula de Lucca, 1994; que se mostrou suficientemente precisa quando utilizada uma frequência de 5kHz e distancias horizontais não muito elevadas. Ao elevar a frequência para 10MHz, os resultados obtidos através da expressão de forma fechada não foram satisfatórios quando comparados a solução apresentada através do algoritmo proposto.

Outra abordagem foi proposta por Ametani et al., 2009; que de maneira semelhante as aproximações de Lucca, 1994; sob a formula de Carson, 1926; encontrou analiticamente uma expressão aproximada, de forma fechada, derivada diretamente da integral de Pollaczek. Ao comparar a fórmula obtida com a fórmula de Lucca, 1994; os resultados obtidos foram idênticos para uma distância horizontal nula entre os condutores. Devido ao fato de ter sido analisada apenas para o caso de uma distância horizontal nula entre os condutores, estes resultados de comparação obtidos

por Ametani et al., 2009; com a fórmula aproximada de Lucca, 1994; não confirmam a exatidão de sua fórmula aproximada.

Uma abordagem ainda mais completa, onde também foram analisadas a velocidade e estabilidade da solução algorítmica bem como a complexidade envolvida foi proposta por Legrand et al., 2008. Quanto a precisão, a solução das integrais de Pollaczek pelo método Quasi-Monte Carlo se sobressai quando comparado a fórmula aproximada de Lucca, o que já era esperado devido as condições impostas por Lucca, 1994; na obtenção de sua fórmula aproximada. Quanto a velocidade e estabilidade, a expressão de forma fechada foi considerada superior a nova solução proposta, porém, teve seu algoritmo considerado com maior complexidade.

Visando uma solução cada vez mais próxima da realidade para o problema do acoplamento eletromagnético entre um condutor aéreo e um subterrâneo, uma aproximação que considera o solo composto por múltiplas camadas estratificadas horizontalmente foi analisada por Lee et al., 2017. Ao considerar um solo estratificado com três camadas, cada camada tendo sua condutividade, permeabilidade e espessura especificadas, utilizaram-se diferentes distancias horizontais entre os condutores e frequências para a obtenção de dados. Ao comparar os resultados entre a expressão de forma fechada de Lucca, 1994; e a abordagem proposta pelo autor, observou-se que os resultados para a magnitude da impedância alcançaram uma boa precisão, sendo praticamente irrisórias as diferenças entre ambas as abordagens. Porém, quanto ao ângulo da impedância, notam-se algumas discrepâncias entre as formulações analisadas.

Diferentes aproximações para auxiliar na solução do problema dos acoplamentos magnéticos surgem com o avanço da tecnologia ao passar dos anos. Lucca, 2018; utilizou-se de sua própria fórmula, para executar um comparativo entre duas destas aproximações, com diferenças notáveis, para o cálculo da impedância mútua entre um condutor aéreo e um condutor subterrâneo. A mais comum trata-se do Modelo de Fio Infinito (IWM, do inglês Infinite Wire Model) o qual existem inúmeras soluções para o problema dos acoplamentos eletromagnéticos, enquanto a segunda, proposta por Lucca, 2018; é chamada de Modelo de Fio Finito (FWM, do inglês Finite Wire Model). As abordagens analisadas pelo autor tem diferenças fundamentais, principalmente ao se considerar a geometria do problema, o Modelo de Fio Infinito por exemplo, não leva em consideração a existência ou não de acoplamento capacitivo devido ao paralelismo entre rede e duto para realização dos cálculos, enquanto o



Modelo de Fio Finito considera inclusive o tipo de paralelismo em seus cálculos, considerando assim apenas o acoplamento capacitivo que realmente ocorre ao longo do caso analisado.

Por outro lado, autores como Zou et al., 2009; e Uribe, 2008; além de desenvolverem uma nova solução em forma de algoritmo para o cálculo da impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um duto subterrâneo através da integral de acoplamento de Pollaczek, utilizaram-se também de expressões de forma fechada como as de Lucca, 1994; Wedepohl et al., 1973; e a fórmula recomendada pelo Telegraph and Telephone Consultative Committee (CCITT) para execução e validação de seus resultados. Abaixo são apresentadas as expressões de forma fechada para o cálculo da impedância mútua entre um condutor aéreo e um condutor subterrâneo utilizadas pelos autores:

$$Z_{LUCCA} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{\bar{R}_{12}}{R_{12}} - \frac{2\bar{y}}{3\gamma^3} \left[ \frac{\bar{y}^2 - 3a^2}{\bar{R}_{12}^6} \right] \right) (\Omega/m) \quad (02)$$

$$Z_{WEDEPOHL} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \ln \left( -\frac{2/e}{\gamma a} \right) + 0.5 - \frac{4}{3} \gamma (y_1 + y_2) \right) (\Omega/m) \quad (03)$$

$$Z_{CCITT} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{1.851}{\gamma R_{12}} + \frac{2}{3} \gamma (y_1 + y_2) \right) (\Omega/m) \quad (04)$$

As equações de Wedepohl (03) e do CCITT (04) apresentadas, se encontram normalizadas através dos parâmetros da fórmula obtida por G. Lucca, 1994; onde a constante de Euler é representada por  $e$ .

Tanto Zou et al., 2009; quanto Uribe, 2008; realizam uma análise comparativa semelhante utilizando as fórmulas (02), (03) e (04) em comparação com as suas soluções propostas. Fixando parâmetros como a condutividade do solo, e a altura dos condutores aéreo e subterrâneo, ambos realizaram simulações tendo como variáveis a distância horizontal entre os condutores e a frequência.

Todavia, Uribe, 2008; apenas solucionou em forma de algoritmo a integral de acoplamento de Pollaczek, Zou et al., 2009; aplicou a Tecnologia de Extração

Assintótica aproximando seu integrando original para propor uma nova solução para o cálculo da impedância mútua entre um condutor aéreo e um condutor subterrâneo.

A obtenção das respostas das simulações e das comparações realizadas para obtenção de erros relativos, foram realizadas de maneira separada, entre partes real e imaginária por ambos os autores. Para a solução em forma de algoritmo direta, proposta por Uribe, 2008; tratando-se da parte real da impedância calculada, as expressões de forma fechada (02), (03) e (04) e a solução numérica proposta convergem para valores cada vez menores com o aumento da frequência e da distância lateral entre os condutores, todavia, para a parte imaginária da impedância as formulas (03) e (04) apresentam resultados satisfatórios somente na faixa de baixa frequência, enquanto a fórmula (02) apresentou um excelente desempenho durante todo o intervalo analisado.

Contudo, para Zou et al., 2009; as fórmulas (02), (03) e (04) são aceitáveis apenas quando a distância horizontal entre os dois condutores não é grande, pois estas expressões são simplificadas sobre certas condições visando a obtenção de uma expressão de forma fechada. De maneira diferente a estas fórmulas, a solução proposta mostrou-se suficientemente precisa para ambas as partes, real e imaginária da impedância mútua para uma ampla gama de distâncias horizontais e frequências. Sendo assim, ao comparar com as expressões de forma fechada cujo tempo de computação é mais competitivo do que a abordagem proposta, o mérito desta nova abordagem é menor restrição da faixa de parâmetros, desde que a validade da integral de Pollaczek seja garantida.

Ao realizarem análises referentes ao erro relativo entre as expressões de forma fechada (02), (03) e (04) e as soluções propostas, tanto Zou et al., 2009; quanto Uribe, 2008; chegaram à conclusão de que a fórmula obtida por Lucca, 1994; expressão (02), apresenta uma faixa de erro muito menor quando comparada com as demais, especialmente ao serem respeitos seus limites de aplicação.

Ao respeitar as limitações da fórmula obtida por Lucca, 1994; que são advindas das aproximações realizadas em busca da expressão de forma fechada, isto é, para frequências suficientemente baixas, para valores comuns de condutividade do solo e para uma distância lateral entre os condutores superior a profundidade do condutor subterrâneo, a fórmula (02) apresenta em todos os casos resultados satisfatórios e totalmente condizentes com o esperado.

### 3. HIPÓTESES DE SIMPLIFICAÇÃO NA FÓRMULA DE LUCCA

Nesta etapa serão identificadas e analisadas as hipóteses de simplificação utilizadas por G. Lucca, 1994; na obtenção de sua expressão aproximada de forma fechada. Além de identificar as hipóteses pretende-se justificar e embasar a aplicação de cada uma das suposições.

#### 3.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

##### 3.1.1 POTENCIAIS HERTZIANOS

Campos elétricos e magnéticos possuem inúmeras possibilidades de representação dependentes das regiões em que se encontram e nas quais serão analisados.

Ao analisarmos estes campos para uma região homogênea, isotrópica, livre de fontes de carga para o campo elétrico e livre de fontes de corrente para o campo magnético, temos que ambas variações de fluxo são nulas, ou seja:

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad (6)$$

Nesta região, o campo elétrico, bem como o campo magnético podem ser derivados de um vetor auxiliar da função potencial, denominado vetor Potencial de Hertz. Este vetor pode ser do tipo magnético, para o campo elétrico, e também do tipo elétrico, para o campo magnético.

$$\bar{E} = -j\omega\mu\nabla\times\Pi_h \quad (7)$$

$$\bar{H} = j\omega\varepsilon\nabla\times\Pi_e \quad (8)$$

Através da aplicação do operador rotacional na equação (7) obtemos:

$$\nabla \times \bar{H} = k^2 \nabla \times \Pi_h \quad (9)$$

$$\bar{H} = k^2 \Pi_h + \nabla \cdot \phi \quad (10)$$

Sabendo que  $\nabla \cdot \Pi_h$  e  $\phi$  são arbitrários, e fazendo com que satisfaçam a condição de Lorentz, isto é:

$$\nabla \cdot \Pi_h = \phi \quad (11)$$

Desta forma, temos que o vetor Potencial Magnético de Hertz  $\Pi_h$ , é a solução da equação de Helmholtz escrita da forma:

$$\nabla^2 \Pi_h + k^2 \Pi_h = 0 \quad (12)$$

Na prática a função escalar arbitrária  $\phi$  não precisa ser determinada. Para o potencial Elétrico, fazendo-se uma análise semelhante à realizada para o potencial magnético temos que o vetor Potencial Elétrico de Hertz  $\Pi_e$ , é a solução da equação de Helmholtz escrita da forma:

$$\nabla^2 \Pi_e + k^2 \Pi_e = 0 \quad (13)$$

No estudo da propagação de ondas em guias cilíndricas verificamos que os modos elétricos transversais podem ser derivados de um potencial magnético Hertziano  $\Pi_h$  tendo um único componente ao longo do eixo de propagação, enquanto isso, os modos magnéticos transversais podem ser derivados do potencial elétrico Hertziano  $\Pi_e$ , com uma única componente, também dirigida ao longo do eixo de propagação (COLLIN, 1990).

### 3.1.2 SÉRIE DE TAYLOR

Na matemática, uma função  $f(x)$  de classe  $C^{n,2}$  pode ser representada em torno de  $x_0 = a$  mediante a Série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad (14)$$

Com coeficientes  $a_n$  determinados por:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (15)$$

### 3.1.3 TEOREMA DE LIEBNITZ

Matematicamente falando, a regra geral, ou teorema de Leibnitz generaliza a regra do produto para uma derivada. Afirmando que se,  $f$  e  $g$  são ambas funções de classe  $C^n$  podemos escrever:

$$(f \cdot g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \cdot g^{(n-k)} \quad (16)$$

Onde  $\binom{n}{k}$  é o coeficiente binomial dado da seguinte maneira:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} \quad (17)$$

---

<sup>2</sup> Função de Classe  $C^n$ : funções diferenciáveis  $n$ -vezes.

### 3.2 ANÁLISE DAS HIPÓTESES DE SIMPLIFICAÇÃO NA FÓRMULA DE LUCCA

Ao iniciar a procura para uma expressão de forma fechada, Lucca, 1994; parte da equação (18), que se trata da fórmula geral para o cálculo da impedância mútua entre um condutor aéreo e um condutor subterrâneo apresentada pelo CCITT:

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2e^{-\lambda y_1} e^{y_2 \sqrt{\lambda^2 - k_e^2}} \cos(\lambda a)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - k_e^2}} d\lambda \quad (18)$$

Que pode ser convenientemente reescrita da seguinte maneira:

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_e^2} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_e^2} + \lambda} \right] e^{-\lambda y_1} e^{y_2 \sqrt{\lambda^2 - k_e^2}} \cos(\lambda a) d\lambda \quad (19)$$

A partir da expressão (19), G. Lucca, 1994; busca aproximações que levam a obtenção da fórmula (02):

$$Z_{LUCCA} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{\bar{R}_{12}}{R_{12}} - \frac{2\bar{y}}{3\gamma^3} \left[ \frac{\bar{y}^2 - 3a^2}{\bar{R}_{12}^6} \right] \right) \quad (2)$$

$$K_e^2 = -j\omega\mu_0\sigma_e \quad (2.1)$$

$$\gamma = jK_e \quad (2.2)$$

$$a = x_2 - x_1 \quad (2.3)$$

$$R_{12} = \sqrt{a^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.4)$$

$$\bar{R}_{12} = \sqrt{\bar{y}^2 + a^2} \quad (2.5)$$

$$\bar{y} = y_1 - y_2 + 2/\gamma \quad (2.6)$$

A primeira aproximação encontrada analisa os valores de frequência e condutividade do solo utilizados para o cálculo da impedância mútua entre um condutor aéreo e um condutor subterrâneo buscando simplificar a equação (19).

Segundo Lucca, 1994; ao considerarmos frequências suficientemente baixas e valores comuns para a condutividade do solo  $\sigma_e$ , observando a equação (19) podemos efetuar a seguinte aproximação:

$$e^{y_2\sqrt{\lambda^2-k_e^2}} \approx e^{\lambda y_2} \quad (20)$$

O que pode ser facilmente comprovado ao aplicarmos os valores típicos para frequência e condutividade do solo, utilizando:

$$\begin{cases} f = 50\text{Hz} \\ \sigma_e = 0,01\text{S/m} \end{cases}$$

$$K_e^2 = -j3.9478 \times 10^{-6}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} f = 50\text{Hz} \\ \sigma_e = 0,001\text{S/m} \end{cases}$$

$$K_e^2 = -j3.9478 \times 10^{-7}$$

Levando em conta os valores extremamente pequenos do termo  $K_e^2$ , e considerando que  $\lambda$  atinja valores consideravelmente maiores, devido seu limite de integração que tende ao infinito, temos então que  $\lambda^2 \gg K_e^2$ , sendo assim, fazemos com que o termo  $K_e^2$  tenda a zero:

$$e^{y_2\sqrt{\lambda^2-k_e^2}} = e^{y_2\sqrt{\lambda^2}}$$

$$\sqrt{\lambda^2} = \lambda$$

$$e^{y_2\sqrt{\lambda^2-k_e^2}} \approx e^{y_2\lambda} \quad (20)$$

Levando em consideração os cálculos expostos, notamos que a primeira aproximação realizada por Lucca, 1994; através dos conceitos considerados, foi obtida com êxito.

A segunda aproximação, equação (21), trata dos campos induzidos em fontes subterrâneas por correntes localizadas acima de um solo plano homogêneo.

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2} + \lambda} = e^{-2\frac{\lambda}{\gamma}} \left[ 1 + \frac{\lambda^3}{3\gamma^3} - \frac{3\lambda^5}{20\gamma^5} + \dots \right] \quad (21)$$

Para chegarmos a este resultado buscaremos fundamentação em conceitos de eletrodinâmica e matemática aplicada.

Segundo Wait e Spies, 1969; a Teoria das Imagens, em eletrostática, tem inúmeras aplicações e sua validade já está estabelecida, e em eletrodinâmica é utilizada em alguns casos para explicações sobre ondas refletidas.

Para frequências baixas como as abordadas, normalmente não se utiliza a Teoria da imagens, porém, no campo quasi-próximo<sup>3</sup>; verifica-se que os campos no ar resultantes de correntes induzidas no solo podem ser bem representados por uma variação desta teoria.

Em resumo, o que é feito por Wait e Spies, 1969; é o desenvolvimento sistemático de uma Teoria das Imagens modificada para calcular campos induzidos em fontes subterrâneas por correntes localizadas acima de um solo plano homogêneo.

Para tal, algumas considerações iniciais devem ser feitas:

- I. Respeitando um sistema tridimensional de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ .
- II. Considerando um fio infinito em  $z = z_0$ .
- III. Corrente uniforme  $Ie^{j\omega t}$  na direção  $y_+$ .
- IV. Terra homogênea com condutividade  $\sigma$ .
- V. A constante dielétrica  $\varepsilon$  ocupa todo o espaço para  $z < 0$ .

Para tais condições a resultante do campo elétrico na região isolante  $z > 0$  tem a seguinte forma (WAIT; SPIES; 1969):

$$E_y = \frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\mu_0} \left[ e^{[-\mu_0|z-z_0|]} + \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} e^{[-\mu_0(z+z_0)]} \right] \cos(\lambda x) d\lambda \quad (22)$$

<sup>3</sup> Quasi-próximo: região onde as distâncias significativas do problema são pequenas em comparação ao comprimento de onda do espaço livre, porém grandes ao serem comparadas com a profundidade da pele de terra.



Onde a permeabilidade magnética  $\mu_0$  é considerada a mesma para todo espaço. Outros parâmetros necessitam de uma definição prévia para realizarmos tal processo de mudança na Teoria das Imagens, sendo estes:

$$\mu_0 = (\lambda^2 + \gamma_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (22.1)$$

$$\mu = (\lambda^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \quad (22.2)$$

$$\gamma_0 = j(\varepsilon_0 \mu_0)^{\frac{1}{2}} \quad (22.3)$$

$$\gamma = [j\mu_0\omega(\sigma + j\varepsilon\omega)]^{\frac{1}{2}} \quad (22.4)$$

Ao considerarmos a constante dielétrica da metade superior do plano (ar) como sendo  $\varepsilon_0$  e invocarmos a suposição quase-estática, podemos negligenciar as correntes de deslocamento da metade superior ao definirmos  $\gamma_0 = 0$ . Ao aplicarmos tal definição:

$$\gamma_0 = 0$$

$$\mu_0 = \sqrt{\lambda^2}$$

$$\mu_0 = \lambda$$

Sendo assim, a equação (22) se torna:

$$E_y = \frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\mu_0} \left[ e^{[-\lambda|z-z_0|]} + \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} e^{[-\lambda(z+z_0)]} \right] \cos(\lambda x) d\lambda \quad (23)$$

Que é valido para as seguintes condições:

$$\begin{cases} |z - z_0| > 0 \\ z \geq 0 \\ z_0 \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, o campo  $E_y$  ainda resulta em uma integração direta. O objetivo é obter uma representação do campo elétrico em termos de um campo direto e a contribuição de uma fonte imagem.

De início desenvolvemos a função:

$$f(\lambda) = e^{\lambda\alpha} \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \quad (24)$$

Em uma expansão de Série de Taylor no entorno de  $\lambda = 0$ , onde a principal tarefa será a busca pelos coeficientes  $a_n$  determinados pela expressão (15).

$$\frac{df}{d\lambda} = f(\lambda) \left[ \alpha - \frac{2\mu}{(\mu + \lambda)(\mu - \lambda)} \right] \quad (25)$$

$$f_{(0)}^{(1)} = f(0)[\alpha - 2\mu]|_{\lambda=0} \quad (26)$$

Arbitrariamente, façamos com que:

$$\left[ \alpha - \frac{2\mu}{(\mu + \lambda)(\mu - \lambda)} \right] = g(\lambda) \quad (27)$$

Ao aplicarmos a Regra da Cadeia para derivada teremos:

$$\begin{aligned} f_{(\lambda)}^{(1)} &= f(\lambda)g(\lambda) \\ f_{(\lambda)}^{(2)} &= f_{(\lambda)}^1 g(\lambda) + f(\lambda)g_{(\lambda)}^1 \\ f_{(\lambda)}^{(3)} &= f_{(\lambda)}^2 g(\lambda) + 2f_{(\lambda)}^1 g_{(\lambda)}^1 + f(\lambda)g_{(\lambda)}^2 \\ f_{(\lambda)}^{(4)} &= f_{(\lambda)}^3 g(\lambda) + 3f_{(\lambda)}^2 g_{(\lambda)}^1 + 3f_{(\lambda)}^1 g_{(\lambda)}^2 + f(\lambda)g_{(\lambda)}^3 \end{aligned}$$

Observando os coeficientes das expressões acima desenvolvidas, notamos a formação do Triângulo de Pascal. Escrevemos então:

$$f_{(0)}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} f_{(0)}^{(n-1-j)} g_{(0)}^j \quad (28)$$

$$f_{(0)}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} f_{(0)}^{(n-1-j)} \left[ \frac{d^j}{d\lambda^j} \left( \alpha - \frac{2}{\mu} \right) \right] |_{\lambda=0} \quad (29)$$

A partir da análise do termo derivativo na expressão (29) para valores de  $j$  temos que:

$$\frac{d^0}{d\lambda^0} \left( \alpha - \frac{2}{\mu} \right) |_{\lambda=0} = \alpha - \frac{2}{\gamma}; j = 0 \quad (30)$$

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} \left( \alpha - \frac{2}{\mu} \right) |_{\lambda=0} = -2 \left[ \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \right] |_{\lambda=0}; j = 1, 2, 3 \dots \quad (31)$$

Agora analisando o termo derivativo da expressão (31), temos, a partir da Série de Taylor:

$$(\lambda^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[ \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \lambda^j |_{\lambda=0} \quad (32)$$

E a partir do Teorema Binomial:

$$(\lambda^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j)!}{\lambda(2\lambda)^{2j} (j!)^2} \lambda^{2j} \quad (33)$$

Em seguida, igualando as expressões (32) e (33) em termos de  $\lambda$ :

$$\left[ \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \right] |_{\lambda=0} = \begin{cases} (-1)^{\frac{j}{2}} \frac{(j!)^2}{\lambda(2\lambda)^j \left( \frac{1}{2} j! \right)^2}; j = 2, 4, 6 \dots \\ 0; j = 1, 3, 5 \dots \end{cases} \quad (34)$$

Por consequência,  $f(0) = 1$ , e assim podemos escrever a derivada  $n$ -ésima para  $\lambda = 0$  aplicando novamente o Teorema de Liebnitz, podemos escrever:

$$f_{(0)}^{(n)} = \sum_{j=0}^N \binom{n-1}{2j} f_{(0)}^{(n-1-2j)} A_j; n = 1, 2, 3 \dots \quad (35)$$

Onde:

$$N = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1); & n = \text{ímpar} \\ \frac{1}{2}(n-2); & n = \text{par} \end{cases}$$

$$A_j = \left[ \frac{d^{2j}}{d\lambda^{2j}} \left( \alpha - \frac{2}{\mu} \right) \right]_{\lambda=0}$$

O que, mais uma vez para  $\lambda = 0$  nos dá explicitamente:

$$A_0 = \alpha - \frac{2}{\gamma} \quad (36)$$

$$A_j = (-1)^{j+1} \frac{2}{\gamma(2\gamma)^{2j}} \left( \frac{(2j)!}{j!} \right)^2; \quad j = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (37)$$

Escolhendo um valor arbitrário para a constante  $\alpha$  temos:

$$\alpha = \frac{2}{\gamma}$$

$$A_0 = 0$$

O que se segue para  $f^1(0)$  e  $f^2(0)$ , obtendo assim o resultado a seguir:

$$f(0) = 1$$

$$f^1(0) = f^2(0) = 0$$

$$f_{(0)}^{(n)} = \sum_{j=0}^N \binom{n-1}{2j} f_{(0)}^{(n-1-2j)} A_j; \quad n = 3, 4, 5 \dots \quad (38)$$

As condições dos valores de N são as mesmas apresentadas para a expressão (35) e:

$$A_j = (-1)^{j+1} \frac{2}{\gamma(2\gamma)^{2j}} [(j+1)(j+2) \dots (2j)]; j = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (39)$$

Através do desenvolvimento geral acima demonstrado:

$$\frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} = e^{-\alpha\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (40)$$

$$\frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} = e^{-\alpha\lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda^3}{3\gamma^3} - \frac{3\lambda^5}{20\gamma^5} + \frac{\lambda^6}{18\gamma^6} + \frac{5\lambda^7}{56\gamma^7} \dots \right] \quad (41)$$

Utilizando as definições (22.2) e de  $\alpha$  temos então:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2} + \lambda} = e^{-2\frac{\lambda}{\gamma}} \left[ 1 + \frac{\lambda^3}{3\gamma^3} - \frac{3\lambda^5}{20\gamma^5} + \dots \right] \quad (21)$$

Ao aplicar as deduções (20) e (21) na integral (19), Lucca, 1994; obteve os resultados a seguir:

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - e^{-2\frac{\lambda}{\gamma}} \left[ 1 + \frac{\lambda^3}{3\gamma^3} - \frac{3\lambda^5}{20\gamma^5} + \dots \right] \right] e^{-\lambda y_1} e^{\lambda y_2} \cos(\lambda a) d\lambda \quad (42)$$

Rearranjando:

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda(y_1 - y_2)} - e^{-\lambda\bar{y}}] \cos(\lambda a) d\lambda + C \right) \quad (43)$$

Onde:

$$C = \frac{1}{3\gamma^3} \frac{\partial Q}{\partial x_2^2} + \frac{3}{20\gamma^5} \frac{\partial Q}{\partial x_2^4} \dots \quad (43.1)$$

$$Q = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\bar{y}} \cos(\lambda a) d\lambda \quad (43.2)$$

$$\bar{y} = y_1 - y_2 + 2/\gamma \quad (2.6)$$

Avaliando o termo  $Q$  obtemos o seguinte resultado:

$$Q = \frac{\bar{y}}{\bar{y}^2 + a^2}$$

Após aplicadas as duas aproximações, podemos, segundo Gradshteyn e Ryzhik, 1980; escrever a expressão (43) em sua forma fechada, sendo esta:

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{R}_{12}^2}{R_{12}^2} + C \right) \quad (44)$$

$$R_{12}^2 = a^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (2.4)$$

$$\bar{R}_{12}^2 = \bar{y}^2 + a^2 \quad (2.5)$$

O termo  $C$  na equação (44) pode ser omitido nos casos onde:

$$|\gamma R_{12}|^3 \gg 1$$

O que é verificado nos casos onde a distância entre os dois condutores é maior que a pele de terra<sup>4</sup>.

Para provarmos que este termo pode realmente ser negligenciado para o caso específico voltaremos a análise dos campos elétricos realizada por Wait e Spies, 1969.

Sendo assim, a dedução (41) pode ser aplicada na integral do campo elétrico (23), resultando em:

$$E_y = \frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda|z-z_0|} - e^{-\lambda(z+z_0+\alpha)}] \cos(\lambda x) d\lambda - \frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{\lambda^3}{3\gamma^3} - \frac{3\lambda^5}{20\gamma^5} + \dots \right] e^{-\lambda(z+z_0+\alpha)} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (45)$$

Ao avaliarmos as integrais da expressão (45), encontramos resultados semelhantes aos obtidos por Lucca, 1994; sendo estes:

---

<sup>4</sup> Pele de terra: Profundidade sob a qual o condutor subterrâneo está enterrado.

$$E_y = \frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi} \left[ \log \left[ \frac{R_a}{R_0} \right] + \frac{1}{3\gamma^3} \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{3}{20\gamma^5} \frac{\partial Q}{\partial x^4} \dots \right] \quad (46)$$

$$R_0 = [x^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (46.1)$$

$$R_a = [x^2 + (z + z_0 + \alpha)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (46.2)$$

$$Q = \int_0^\infty e^{-\lambda(z+z_0+\alpha)} \cos \lambda x dx \quad (46.3)$$

Neste caso os termos derivativos podem ser negligenciados para uma condição também semelhante a imposta por Lucca, 1994.

$$|\gamma^3 R^3| \gg 1$$

$$R = [x^2 + (z + z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Esta condição, segundo Wait e Spies, 1969; não é uma condição particularmente rigorosa, uma vez que, apenas requer que a distância  $R$  seja maior que a profundidade da pele de terra  $\delta$ , onde:

$$\begin{cases} \gamma = (1 + j)\delta^{-1} \\ \delta = \left( \frac{2}{\sigma\mu_0\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Se:

$$\varepsilon_0\omega \ll \sigma$$

A ausência de termos de correção envolvendo  $1/\gamma$  e  $1/\gamma^2$  na expressão (46) se deve a escolha arbitrária de  $\alpha = 2/\gamma$ . Fisicamente isso significa que os campos da fonte de linha podem ser bem aproximados pelo campo direto somado a uma contribuição da fonte imagem localizada abaixo da terra em uma profundidade complexa (WAIT, SPIES, 1969):

Tais explanações cabem também a omissão do termo  $C$  na expressão (44), porém, na busca de uma expressão de forma fechada que atenda a casos mais gerais, Lucca, 1994; segue suas deduções para casos onde  $C$  não pode ser omitido.

Neste caso, onde a condição de negligenciamento não é respeitada, pode-se então, para fins de engenharia, manter-se apenas o primeiro termo de correção da expressão (43.1) (WAIT, SPIES, 1969).

$$C = \frac{1}{3\gamma^3} \frac{\partial Q}{\partial x^2} = -\frac{2\bar{y}}{\bar{R}_{12}^4} \left[ 1 - \frac{4a^2}{\bar{R}_{12}^2} \right] \quad (47)$$

Agora, com  $C$  definido por (47), (44) então se torna:

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{R}_{12}^2}{R_{12}^2} - \frac{2\bar{y}}{\bar{R}_{12}^4} \left[ 1 - \frac{4a^2}{\bar{R}_{12}^2} \right] \right) \quad (48)$$

Ao serem aplicadas as definições (2.4), (2.5) e (2.6) obtidas na execução do trabalho, (48), torna-se pôr fim a expressão de forma fechada proposta por Lucca, 1994.

$$Z_{LUCCA} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{\bar{R}_{12}}{R_{12}} - \frac{2\bar{y}}{3\gamma^3} \left[ \frac{\bar{y}^2 - 3a^2}{\bar{R}_{12}^6} \right] \right) \quad (2)$$

$$K_e^2 = -j\omega\mu_0\sigma_e \quad (2.1)$$

$$\gamma = jK_e \quad (2.2)$$

$$a = x_2 - x_1 \quad (2.3)$$

$$R_{12} = \sqrt{a^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.4)$$

$$\bar{R}_{12} = \sqrt{\bar{y}^2 + a^2} \quad (2.5)$$

$$\bar{y} = y_1 - y_2 + \frac{2}{\gamma} \quad (2.6)$$



#### 4. SIMULAÇÕES

No âmbito das simulações, estas serão realizadas visando uma análise de erro entre as equações (1) e (2) para variações de frequência e da distância lateral entre os condutores aéreo e subterrâneo. Para tal pretende-se replicar os gráficos obtidos por Lucca, 1994; e adicionar a eles o equacionamento de Carson, 1926.

Segundo Theodoulidis, 2015; a contribuição original de Carson, 1926; pode ser escrita da seguinte forma:

$$Z_{CARSON} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{D_2}{D_1} + I_c \right) \quad (49)$$

Onde o segundo termo entre parênteses representa os termos P e Q da equação (1), correções necessárias devido ao solo que até o momento eram descritas por séries infinitas e variam conforme a distância.

$$I_c = \int_0^{\infty} \frac{e^{-H\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\Omega}} (e^{ja} + e^{-ja}) d\lambda \quad (49.1)$$

Mantendo a nomenclatura estabelecida para a equação (2) na Figura 3, temos os parâmetros a seguir:

$$D_1 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + x_{12}^2} \quad (49.2)$$

$$D_2 = \sqrt{H^2 + x_{12}^2} \quad (49.3)$$

$$H = y_1 + y_2 \quad (49.4)$$

$$\Omega = \omega\mu_0\sigma \quad (49.5)$$

Ainda seguindo as definições de Theodoulidis, 2015; a expressão (49.1) é composta por duas integrais de forma abreviada escritas da seguinte forma:

$$\frac{1}{j\Omega} \int_0^\infty \left( \sqrt{\lambda^2 + j\Omega} - \lambda \right) e^{-(H \pm ja)\lambda} d\lambda = \frac{1}{j\Omega} \int_0^\infty \left( \sqrt{\lambda^2 + j\Omega} \right) e^{-(H \pm ja)\lambda} d\lambda - \frac{1}{j\Omega} \int_0^\infty \lambda e^{-(H \pm ja)\lambda} d\lambda \quad (50)$$

Segundo Carson, 1926; o primeiro termo do lado direito da expressão (50) pode ser representado pela soma:

$$\frac{1}{u_{1,2}} [K_1(u_{1,2}) + G(u_{1,2})] \quad (51)$$

$$u_1 = \sqrt{j\Omega}(H - ja) \quad (51.1)$$

$$u_2 = \sqrt{j\Omega}(H + ja) \quad (51.2)$$

Onde; a primeira função na expressão (50) é na verdade a função de Bessel de segundo tipo e primeira ordem apresentada da seguinte forma:

$$K_1(z) = -\frac{\pi}{2} Y_1(z) \quad (52)$$

E o segundo termo na soma é a série de potências absolutamente convergente:

$$G(z) = \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{3^2 5} + \frac{z^6}{3^2 5^2 7} \dots \quad (53)$$

Que segundo Theodoulidis, 2015; é a definição da série de potências da seguinte função que envolve a função Struve de primeira ordem:

$$G(z) = \frac{2}{\pi} H_1(z) \quad (54)$$

O segundo termo do lado direito da expressão (50) também é representado pela função Struve de primeira ordem, porém com o seguinte formato:

$$G(u_2) = \frac{\pi}{2u_2} H_1(u_2) \quad (55)$$

A avaliação da integral para o cálculo da impedância mútua de Carson, 1926; agora é então reduzida ao cálculo da função Struve de argumentos complexos. A partir deste ponto, devido às limitações computacionais da época, Carson, 1926; aplicou aproximações adicionais utilizando séries infinitas e expansões assintóticas, por fim se lamentando de que o resultado final obtido aparenta-se ser tão complicado.

Em comparação a outras metodologias de solução, como a quadratura direta ou a expansão assintótica e considerando o aparato computacional disponível atualmente, segundo Theodoulidis, 2015; o cálculo das funções de Bessel e Struve é realizado de maneira rápida e trivial ao utilizar o *software* Matlab®, o problema deste cálculo trivial se encontra no maior intervalo de argumentos, onde ambas as funções assumem grandes valores complexos enquanto o resultado final é um pequeno número complexo.

Sendo assim, o cálculo de ambas funções de maneira separada, levaria a um grande erro. Theodoulidis, 2015; propõe uma abordagem onde se calculam ambas funções  $H_1(z)$  e  $Y_1(z)$  de maneira separada para um intervalo específico  $|z| \leq z_0$ , e quando não houver problemas de cancelamento calcula-se então  $H_1(z) - Y_1(z)$  para  $|z| \geq z_0$ , usando uma aproximação assintótica.

Com base em uma combinação de expansões Chebyshev para  $|z| \leq 16$  e aproximações racionais para  $|z| \geq 16$ , Theodoulidis, 2015; escreveu e testou minuciosamente uma rotina vetorizada no *software* Matlab® para avaliar rapidamente a função  $H_1(z) - Y_1(z)$  com a precisão de 14 dígitos significativos. Essa rotina extremamente rápida está disponível pelo autor no Matlab File Exchange e pode ser chamada de  $StruveH_1Y_1(z)$ .

A fórmula de Carson, 1926; será simulada através das rotinas em Matlab® acima explicadas, que podem ser encontradas nas referências deste trabalho de conclusão de curso. Esta será tomada como referência para o cálculo do erro percentual da simulação da fórmula de Lucca, 1994. As simulações serão realizadas utilizando as expressões (2) e (49), e o erro percentual será calculado da seguinte maneira:

$$Erro(\%) = 100 \left( \frac{Z_{CARSON} - Z_{LUCCA}}{Z_{CARSON}} \right) \quad (56)$$

Os parâmetros utilizados, seguem a nomenclatura da Figura 3 e são:

$$x_1 = 5m; y_1 = 15m; x_2 = 7m; y_2 = -1m.$$

#### 4.1 ANÁLISE DE ERRO PARA VARIAÇÃO DA DISTÂNCIA LATERAL

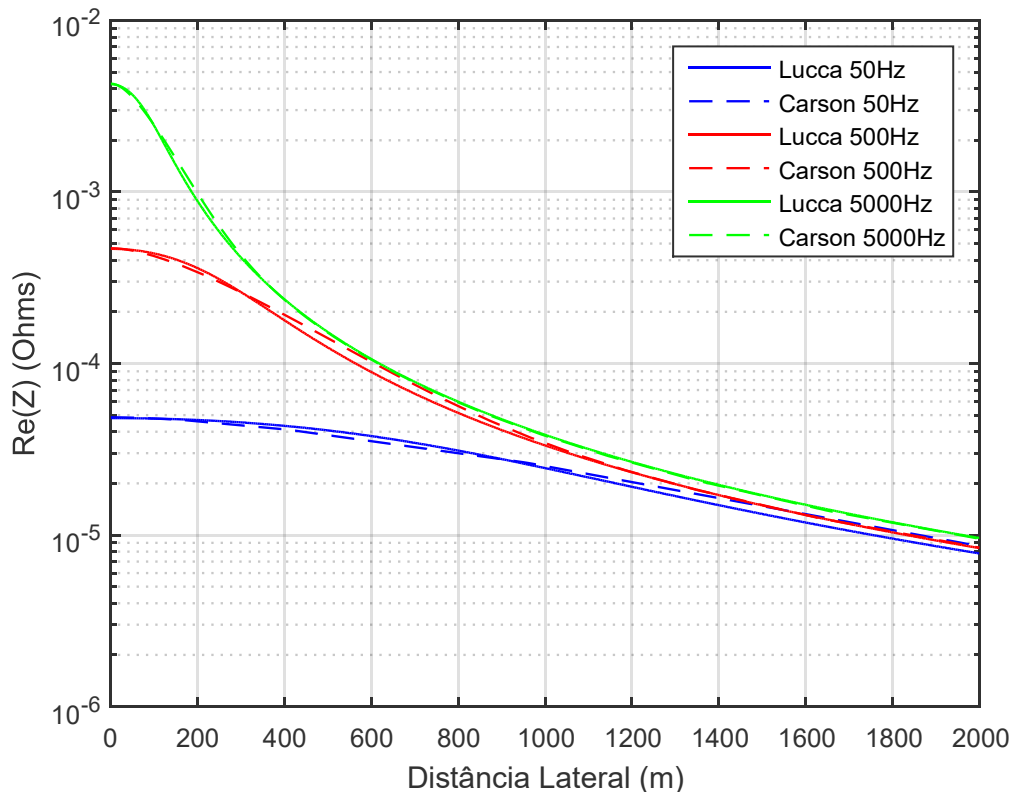


Figura 4: Parte real da impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.01$ ).

Fonte: Autoria própria.

Analisando a Figura 4 nota-se que para a parte real da impedância não ocorrem grandes divergências ao serem comparadas as equações (2) e (49). Todavia, percebe-se que a equação (49), fórmula de Carson, entrega valores relativamente maiores que a equação (2), fórmula de Lucca para alguns valores de distância lateral.

Para a frequência de 50Hz, a equação (49) entrega valores significativamente maiores ao ser comparada com a equação (2) para distâncias laterais a partir de 1000m até o limite de simulação de 2000m. Enquanto para a frequência de 500Hz, essa maior diferença de valores é mais perceptível para distâncias laterais entre 400m e 900m. E ainda, ao observar a maior frequência utilizada para simulação, no valor de 5000Hz, a divergência mais significativa de valores entre as equações (49) e (2) aparenta estar entre 100m e 300m.

Para cada frequência simulada existe uma faixa de maior discrepância entre os valores das equações analisadas para variação da distância lateral, estas

conclusões esperaram ser confirmadas realizar a análise de erro entre as equações de estudo.

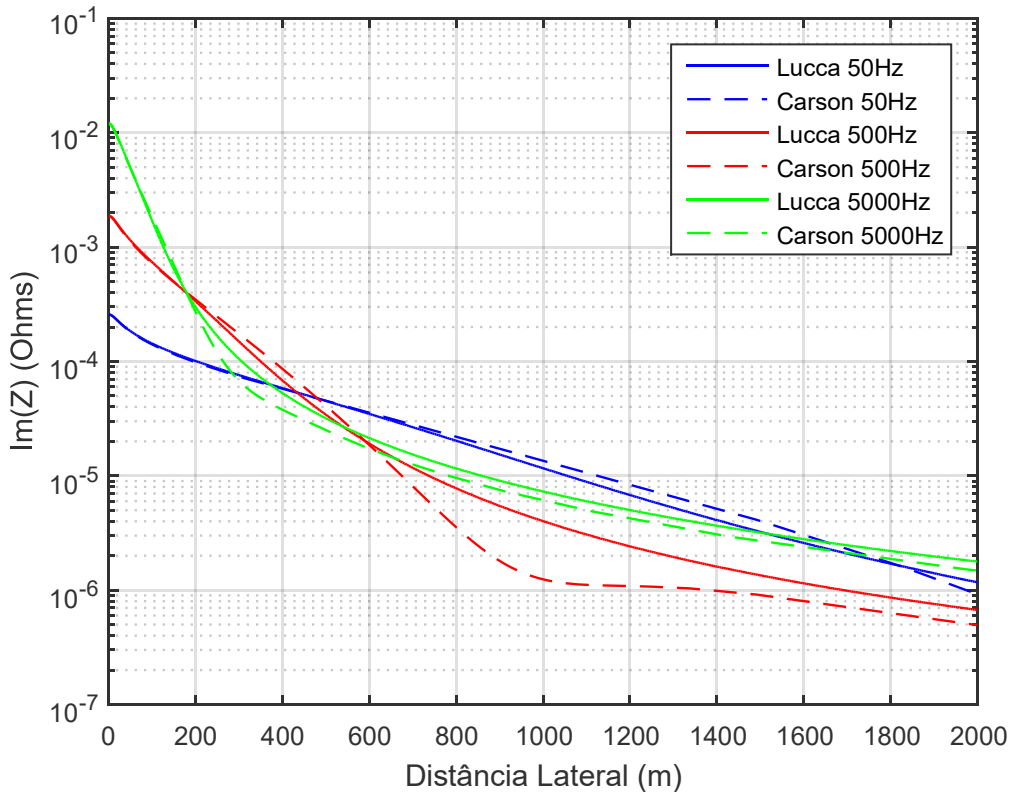


Figura 5: Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.01$ ).

Fonte: Autoria própria.

Enquanto isso, para a parte imaginária da impedância, Figura 5, o afastamento gradual das curvas se apresenta de maneira mais acentuada. Para uma frequência de 50Hz, a partir de uma distância lateral de aproximadamente 800m, a equação (49) apresenta valores maiores e praticamente constantes perante a equação (2) até aproximadamente 1900m. Enquanto para a frequência de 500Hz, a curva referente a equação (49) apresenta valores ligeiramente maiores que a equação (2) para uma faixa entre 200m e 600m, seguida de um cruzamento para valores significativamente menores, até um ponto máximo em aproximadamente 1000m, a partir do qual segue com valores menores porém com uma ligeira redução de diferença. Já para o maior valor de frequência analisado, 5000Hz, a equação (49) possui valores insignificamente maiores que a equação (2) até aproximadamente 200m, a partir deste ponto os valores se tornam menores até que em 600m se tornam praticamente constantes sem qualquer grande alteração até o limite estipulado de distância lateral.

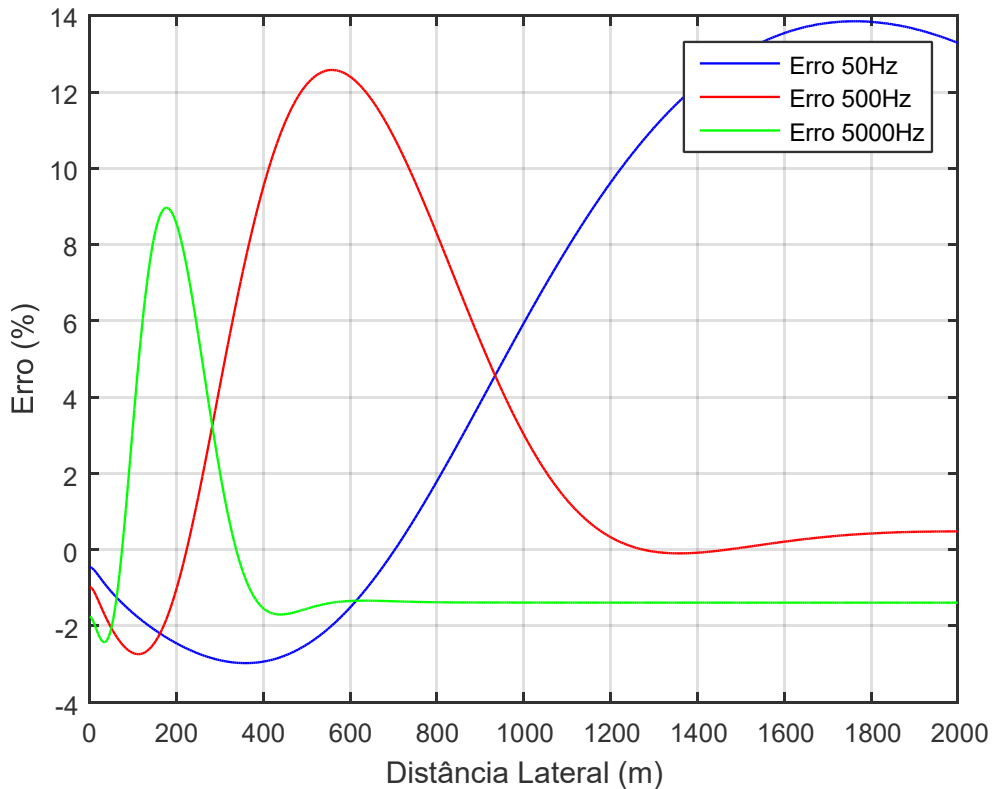


Figura 6: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.01$ ).

Fonte: Autoria própria.

Na análise da Figura 6, erro da parte real da impedância, a partir da equação (56), nota-se que o maior valor de erro percentual encontrado foi de aproximadamente 14% para a frequência de 50Hz a uma distância aproximada de 1800m. Já para uma frequência de 500Hz o erro cresce de maneira contínua até aproximadamente 550m, onde atinge um máximo de 12,5%, decrescendo até 1200m e se estabelecendo próximo de zero até o fim do curso de simulação. Enquanto isso, para 5000Hz a parte real da impedância apresenta um maior erro para uma distância lateral menor que as demais frequências analisadas. O erro máximo calculado foi de aproximadamente 9% para uma distância lateral inferior a 200m. A partir deste máximo o erro decai e permanece constante a partir dos 600m.

Como esperado notam-se grandes alterações para as diferentes frequências utilizadas, principalmente nas regiões onde se encontram os erros máximos para cada uma bem como as variações que ocorrem em cada curva. As maiores oscilações ainda se encontram na curva de 50Hz que se trata de uma frequência utilizada em sistemas elétricos de potência.

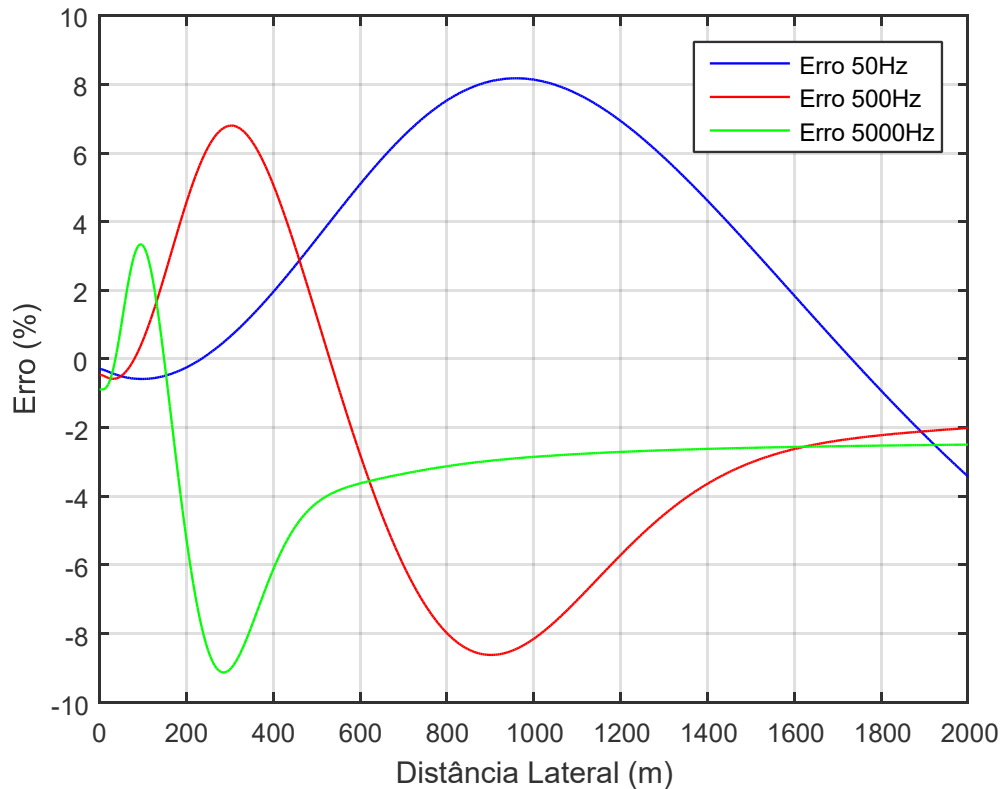


Figura 7: Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.01$ ).

Fonte: Autoria própria.

Enquanto isso, na análise do erro da parte imaginária da impedância, Figura 7, encontram-se valores menores de erro se comparados a parte real, porém, com maiores oscilações conforme a variação da distância lateral, ainda assim a equação (2) apresenta erro menor que 10% para toda a excursão da distância lateral.

Para 50Hz o erro cresce de maneira contínua até aproximadamente 1000m, chegando a um valor de erro máximo próximo de 8%, decrescendo até o fim do curso de simulação. Já para 500Hz a equação (2) entrega valores menores que a equação (49) entre 0m e aproximadamente 500m, a partir deste ponto os valores da parte imaginária da impedância calculados a partir da expressão (2) são sempre maiores que os calculados a partir da expressão (49). O erro máximo para a frequência avaliada fica em torno de 9% para uma distância lateral de aproximados 900m. De maneira semelhante ao que ocorreu para 500Hz, a uma frequência de 5000Hz as variações e os pontos de erro máximo ocorrem para distâncias laterais menores ao serem comparados com as demais frequências. O erro máximo fica também em torno de 9%, porém a uma distância lateral inferior, de aproximadamente

300m. E a partir de 600m não ocorrem variações significativas no erro entre as funções avaliadas.

Analogamente as simulações anteriores, para a variação da distância lateral, foram realizadas simulações para condutividade específica do solo com um valor comum de  $\sigma_e = 0,001\text{S/m}$ , afim de que sejam avaliadas as diferenças que são consequências desta mudança.

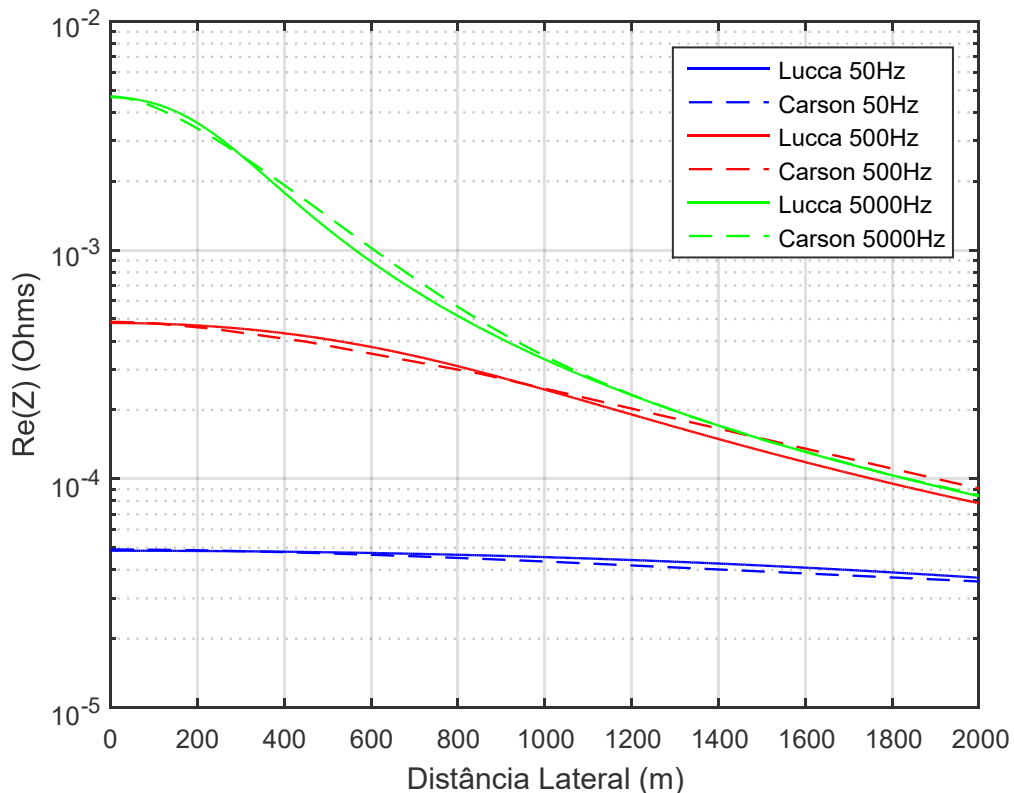


Figura 8: Parte real da impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.001$ ).

Fonte: Autoria própria.

Ao comparar as curvas da Figura 8 com as apresentadas na Figura 4, nota-se que a maior alteração ocorreu para a menor frequência, de 50Hz. Sendo assim a parte real da impedância sofre maiores alterações a baixas frequências com a mudança da condutividade do solo. Neste caso, para nenhuma das frequências simuladas notam-se grandes pontos de divergência entre as equações (2) e (49), muito semelhante as curvas obtidas na Figura 4.

Todavia, a mudança da condutividade do solo, afetou as curvas da parte imaginária da impedância para todas as frequências simuladas, conforme é apresentado na Figura 9.



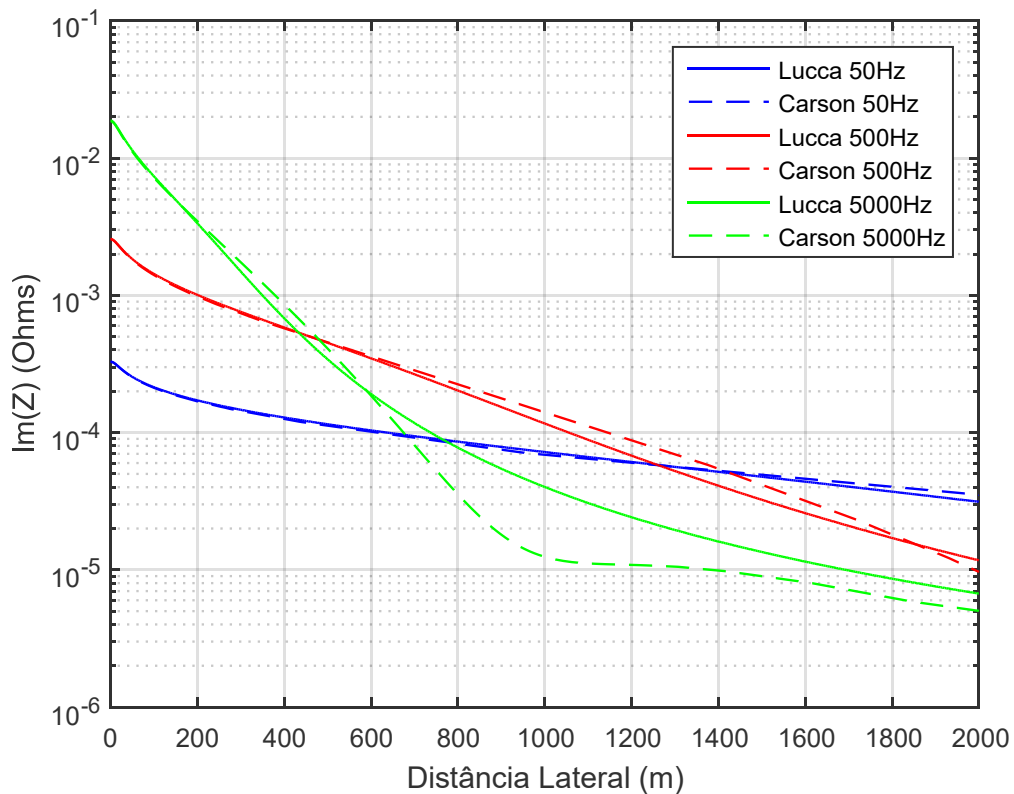


Figura 9: Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.001$ ).

Fonte: Autoria própria.

Quanto a análise do erro para a variação da distância lateral, as Figuras 10 e 11, mostram que diferentemente do que pôde ser analisado para uma condutividade de  $\sigma_e = 0,01\text{S/m}$ , para um valor inferior, no valor de  $\sigma_e = 0,001\text{S/m}$ , o menor erro para a parte real da impedância, Figura 10, é encontrado na frequência de 50Hz, onde a equação (2) possui valores maiores do que (49) durante toda a variação da distância lateral, o erro fica entre 0 e aproximadamente 3% para toda a faixa de 0m a 2000m.

Para a parte imaginária da impedância, Figura 11, a maior diferença em comparação com a Figura 7, também é para a frequência de 50Hz, onde o erro máximo ao ser comparado com a condutividade de  $\sigma_e = 0,01\text{S/m}$  passa de 8% em aproximadamente 1000m para um valor máximo de 6% no limite da distância lateral simulada, de 2000m.

Os erros para as demais frequências mantêm curvas e valores muito semelhantes aos analisados nas Figuras 6 e 7. Seus valores máximos são muito próximos aos encontrados anteriormente, porém ocorrem para diferentes frequências e distâncias laterais.

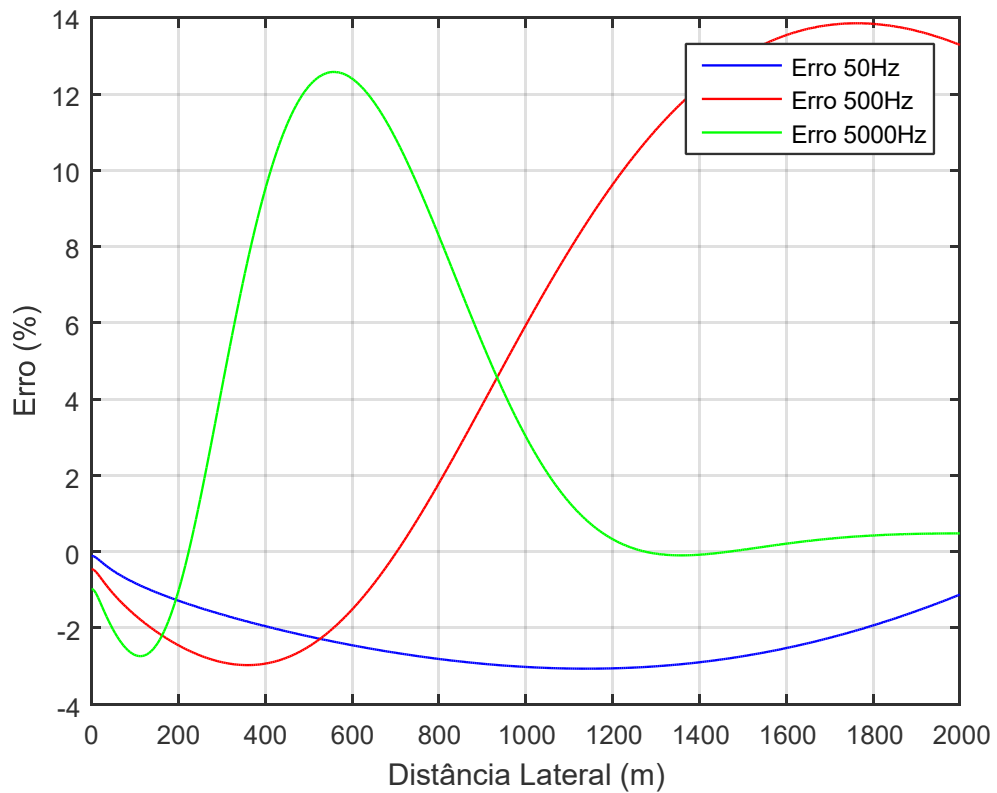


Figura 10: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.001$ ).

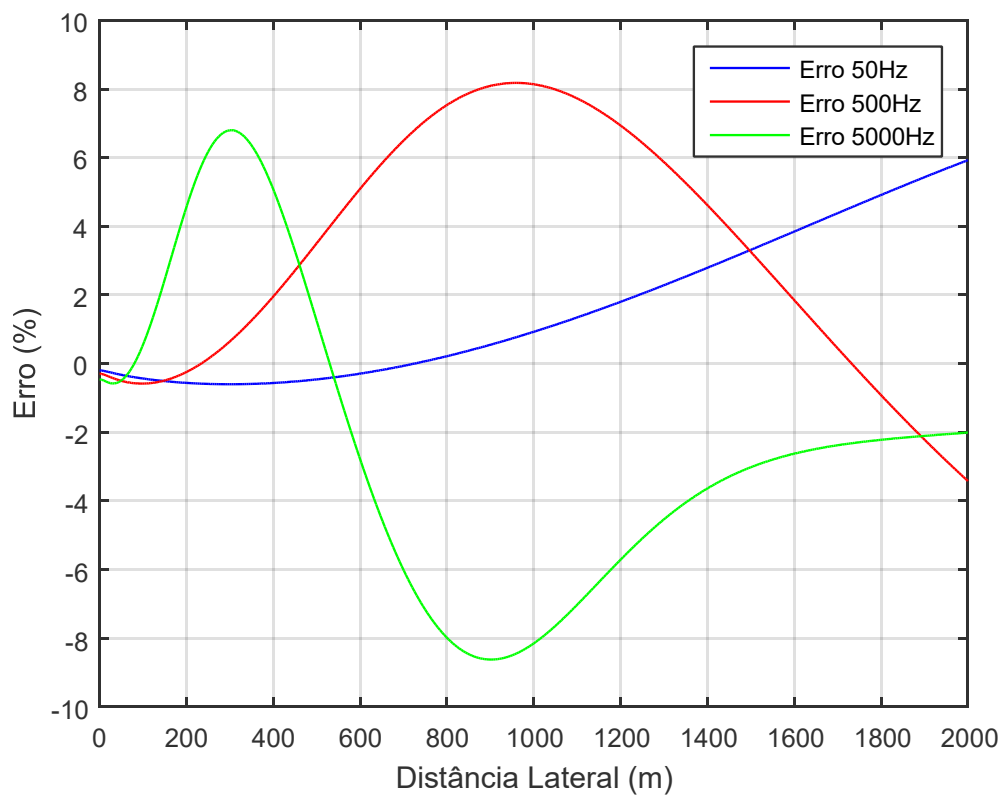


Figura 11: Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Distância Lateral ( $\sigma_e = 0.001$ ).

Fonte: Autoria própria.

Utilizando uma geometria muito semelhante a utilizada por Lucca, 1994; na obtenção de sua fórmula, durante os anos, vários autores propuseram algoritmos que se utilizam, principalmente, das metodologias não aproximadas de Pollaczek para o cálculo da impedância mútua entre condutores aéreos e subterrâneos, e realizaram comparações semelhantes as que estão sendo apresentadas neste trabalho de conclusão de curso, efetuando variações de distância lateral entre os condutores.

Para realizar uma comparação com as simulações realizadas durante a execução do trabalho, retomamos a análise realizada por Uribe, 2008; no qual o erro relativo máximo obtido através da fórmula (02), por meio de gráfico semelhante a Figura 5, foi encontrado na componente imaginária da impedância, em que para a frequência de 50Hz o erro aproximado foi de 45,65% para uma distância horizontal de 1878m. No entanto, como abordado por Uribe, 2008; as integrais de Pollaczek foram derivadas considerando um solo homogêneo, e para tal caso, a validade das curvas obtidas e apresentadas é para uma distância horizontal amostrada de até 606,06m, na qual o erro relativo na fórmula de Lucca, 1994; é de 2,39%.

Quanto a análise do erro relativo das partes real e imaginária entre as expressões de forma fechada e a solução por algoritmo proposta por Uribe, 2008; por meio de gráficos semelhantes as Figuras 4 e 5, novamente a expressão de forma fechada (02) apresentou um melhor desempenho perante as demais fórmulas, expressões (03) e (04), durante toda a faixa de distância horizontal entre os condutores aéreo e subterrâneo, bem como para as três frequências analisadas, nos valores de 50Hz, 500Hz e 5000Hz.

Ao retomarmos outra análise já abordada na execução do trabalho e observarmos os gráficos obtidos por Zou et al., 2009; notamos que dentre as fórmulas utilizadas, (02), (03) e (04) para comparação com a solução proposta pelo autor, para a parte real da impedância, a partir de aproximadamente 40m de distância horizontal a fórmula de Lucca, 1994; é a que mais se aproxima do resultado obtido pela solução proposta, enquanto as demais divergem de maneira acentuada. Para parte imaginária as discrepâncias entre as fórmulas são mais evidentes, entretanto, quando atingem aproximados 400m de distância horizontal entre os condutores, novamente, a fórmula que mais se assemelha a solução proposta é a de Lucca, 1994. Sendo assim podemos concluir que dentre as expressões de forma fechada utilizadas, para Zou et al., 2009; a fórmula (02) foi a qual apresentou resultados mais satisfatórios.

Segundo Zou et al., 2009; as fórmulas (02), (03) e (04) são aceitáveis quando a distância horizontal entre os dois condutores não é grande, pois estas expressões são simplificadas sobre certas condições visando a obtenção de uma expressão de forma fechada. De maneira diferente as expressões (02), (03) e (04), nota-se que a solução proposta por Zou et al., 2009; é suficientemente precisa para ambas as partes, real e imaginária da impedância, para uma ampla gama de distâncias horizontais entre os condutores. Ao comparar com as expressões de forma fechada cujo tempo de computação é mais competitivo do que a abordagem proposta, o mérito desta nova abordagem é menor restrição da faixa de parâmetros, desde que a validade da integral de Pollaczek seja garantida. (ZOU et al., 2009).

#### 4.2 ANÁLISE DE ERRO PARA VARIAÇÃO DA FREQUÊNCIA

Ainda seguindo os parâmetros anteriormente apresentados de acordo com a Figura 3, as simulações foram realizadas para a variação da frequência enquanto a distância lateral foi mantida constante.

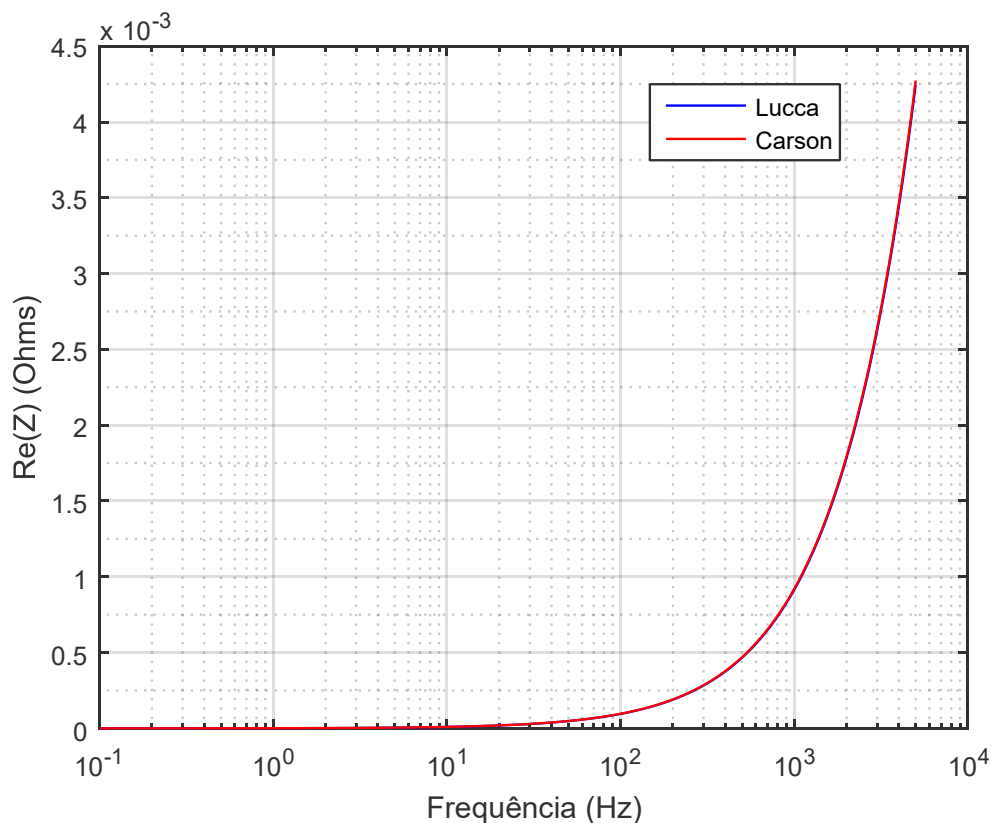


Figura 12: Parte Real da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.01$ ).

Fonte: Autoria própria

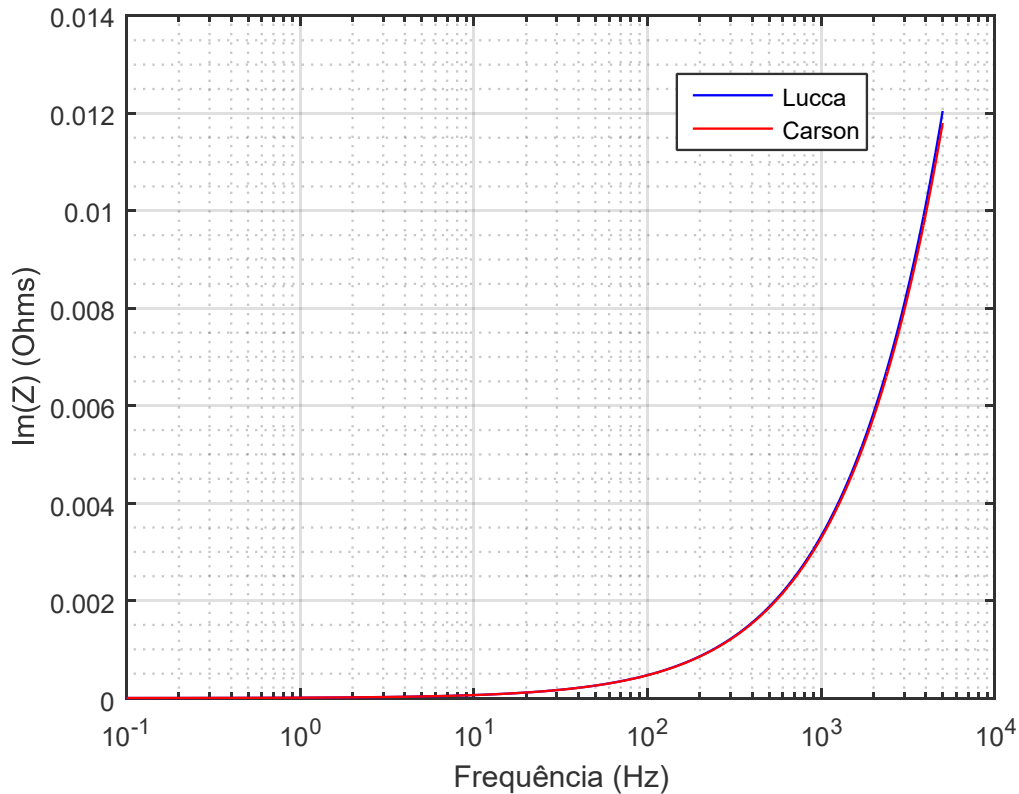


Figura 13: Parte Imaginária da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.01$ ).

Fonte: Autoria própria.

A Figura 12 apresenta a parte real da impedância para variação da frequência. Com o aumento da frequência é notório o aumento gradual do valor da parte real da impedância. Ambas as expressões, (2) e (49) tem valores extremamente próximos para uma variação de frequência de 0Hz a 5000Hz sem grandes divergências dentro do curso de simulação. Seguindo a análise gráfica o erro para a variação de frequência tende a ser extremamente pequeno para a parte real da impedância.

De maneira semelhante, para a parte imaginária da impedância não ocorrem grandes divergências, conforme ilustra a Figura 13, todavia, para 5000Hz, fica notório um valor ligeiramente maior por parte da expressão (2), fórmula de Lucca, 1994. Sendo assim, os valores de erro esperados para a parte imaginária da impedância também são realmente pequenos.

As Figuras 14 e 15, ilustram, respectivamente, a partir da expressão (56), os erros para variação de frequência da parte real e imaginária da impedância.

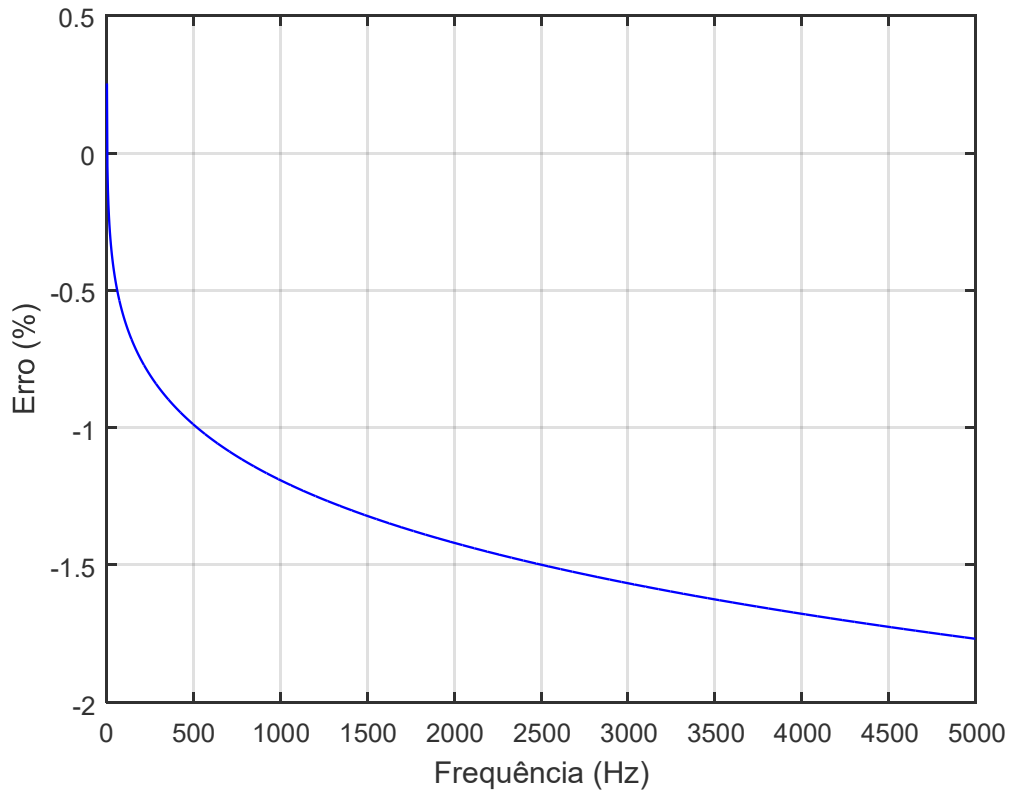


Figura 14: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.01$ ).

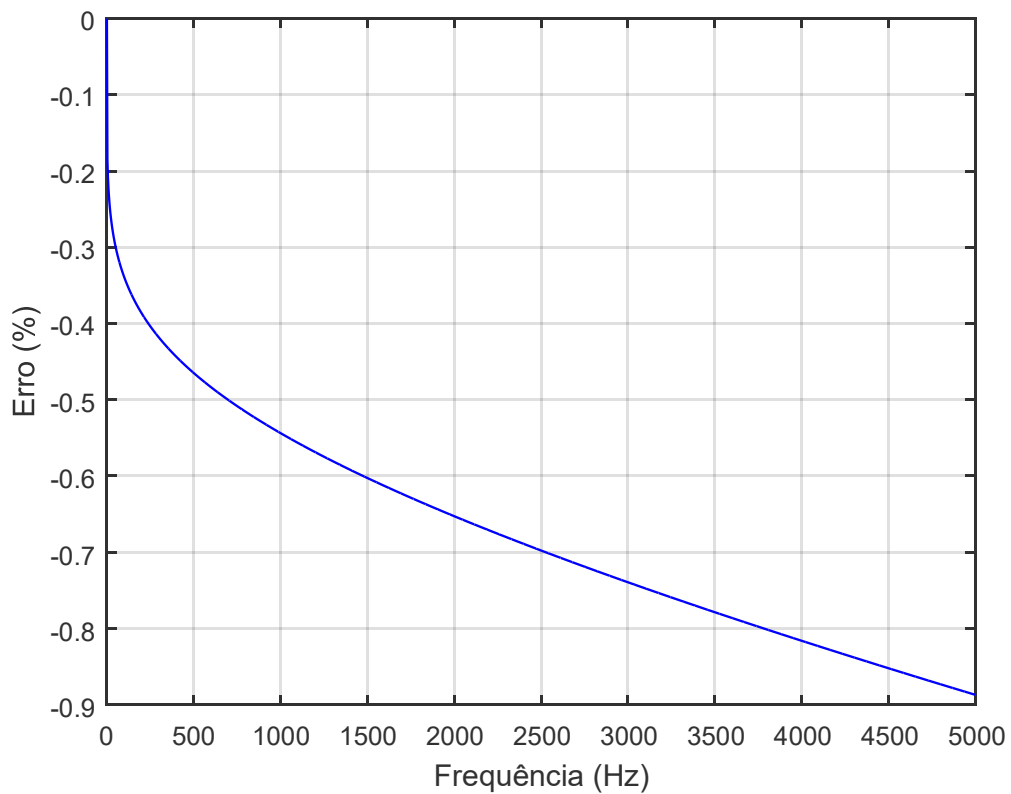


Figura 15: Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.01$ ).

Fonte: Autoria própria.

Conforme discutido anteriormente, as Figuras 14 e 15 realmente nos mostram que os valores de erro para a variação da frequência entre as equações (2) e (49) é extremamente pequeno. Para a parte real da impedância, Figura 14, o erro se mantém em uma faixa de 2%, enquanto para a parte imaginária, Figura 15, esse valor é reduzido para menos de 1%.

Para uma mudança do valor de condutividade do solo para  $\sigma_e = 0,001\text{S/m}$ , os valores das partes reais e imaginária da impedância calculados pelas formulas de Lucca e de Carson, as curvas mantém a mesma tendência das Figuras 12 e 13, com um pequeno aumento de valores. Enquanto isso o erro calculado é ainda menor que o apresentado anteriormente pelas Figuras 14 e 15.

As figuras a seguir apresentam as curvas para o valor de condutividade específica do solo acima discutido.

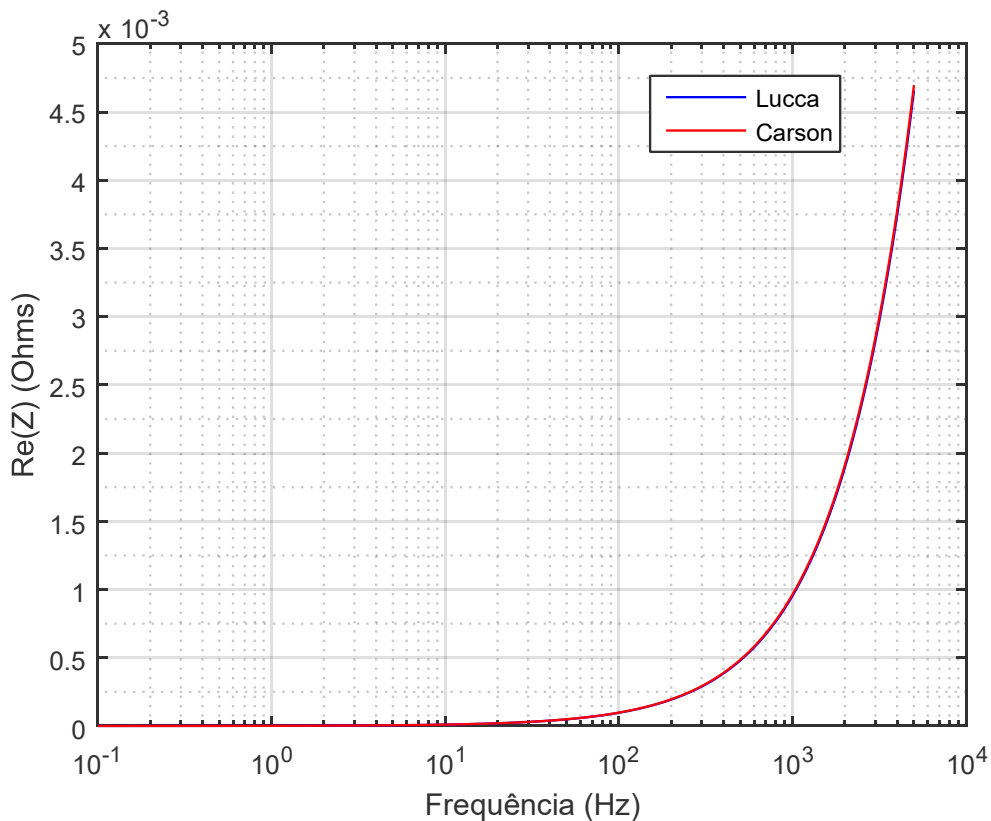


Figura 16: Parte Real da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.001$ ).

Fonte: Autoria própria.

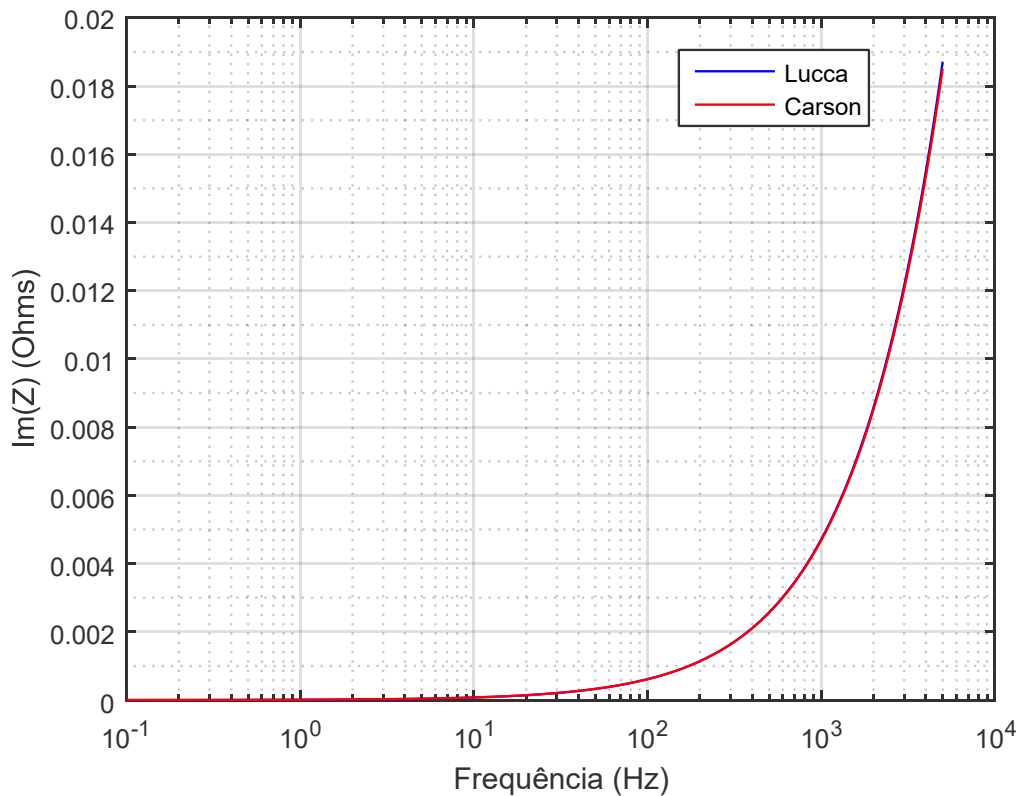


Figura 17: Parte Imaginária da Impedância para a Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.001$ ).

Fonte: Autoria própria.

Conforme abordado previamente, as curvas das Figuras 16 e 17, são muito semelhantes as das Figuras 12 e 13. Sendo assim, para a variação de frequência, uma alteração no valor da condutividade do solo não acarreta alterações bruscas como as observadas nas curvas para a variação da distância lateral no subitem anterior.

Enquanto isso, de maneira diferentes aos valores de erro para a variação da distância lateral, que se mantiveram relativamente altos mesmo após a alteração do valor da condutividade específica do solo, os valores de erro relativo calculados para o caso da variação de frequência sofrem uma significativa redução ao se utilizar uma condutividade específica menor para o solo. Anteriormente o erro da parte real, Figura 14, estava na faixa de 2%, após a alteração da condutividade específica do solo, este valor foi reduzido a menos de 1% durante toda a faixa de simulação. O mesmo ocorre para a parte imaginária da impedância, onde de um valor menor do que 1%, na Figura 15, passou-se para um valor inferior a 0.5%. Esta afirmação se confirma ao serem observadas as Figuras 18 e 19.



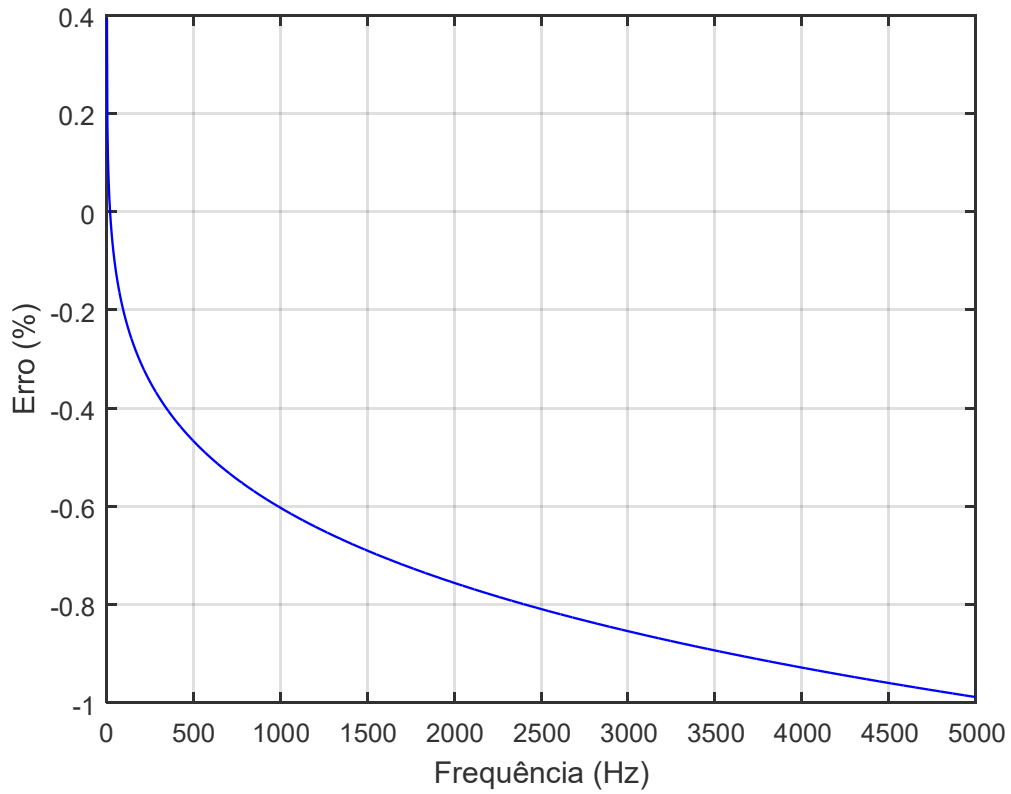


Figura 18: Erro da Parte Real da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.001$ ).

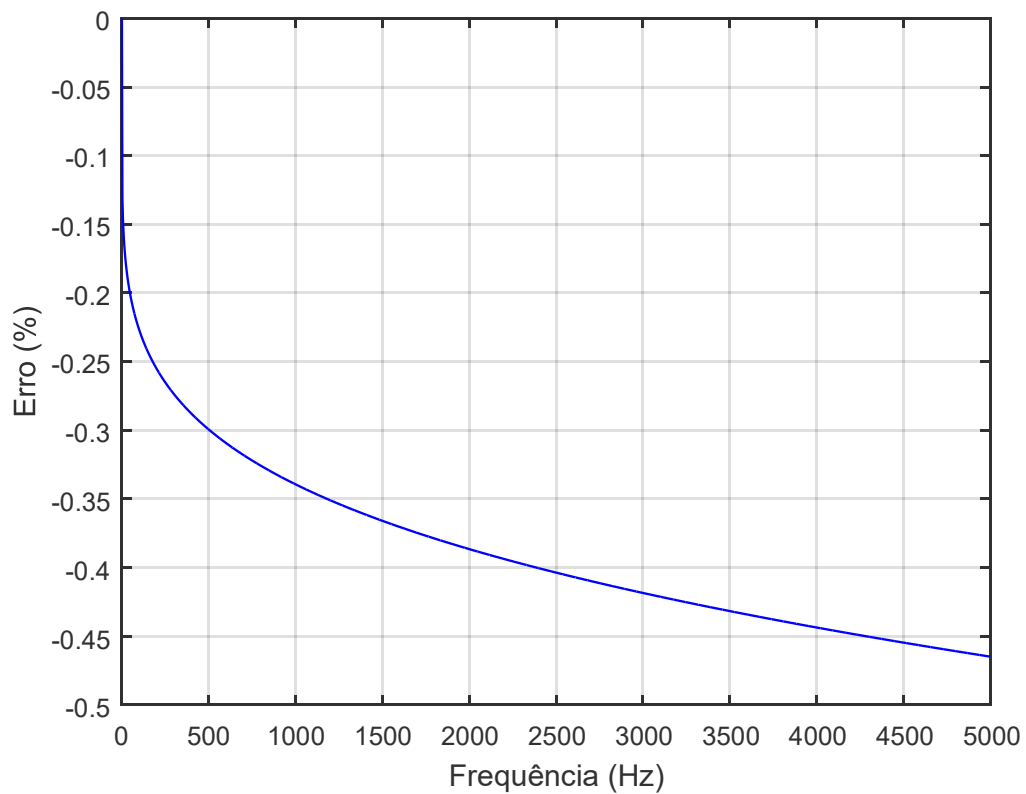


Figura 19: Erro da Parte Imaginária da Impedância para Variação da Frequência ( $\sigma_e = 0.001$ ).

Fonte: Autoria própria.

Conforme já abordado anteriormente, muitas soluções foram propostas ao longo dos anos, utilizando diferentes metodologias para o cálculo da impedância mútua entre um condutor aéreo e um condutor subterrâneo. Lee et al., 2017; com sua abordagem de solo estratificado, também já abordada na execução deste trabalho, encontrou para a formula de Lucca, 1994; um erro relativo que se mantivera abaixo de 4,0% mesmo para uma distância horizontal de 1000m entre os condutores e uma frequência de 1MHz.

Ao realizar uma análise semelhante a das Figuras 14 e 15 em comparação com as Figuras 18 e 19, através do gráficos encontrados por Lee et al., 2017; para a variação de frequência, pode-se, de maneira semelhante, concluir que para a variação de frequência ocorre uma significativa redução de erro a partir da redução da condutividade do solo.

## 5. CONCLUSÃO E COMENTÁRIOS FINAIS

O presente trabalho de conclusão de curso teve por objetivo fazer uma análise da fórmula de Lucca, 1994; para o cálculo da impedância mútua entre uma linha de transmissão aérea e um condutor subterrâneo utilizando como comparação a fórmula de Carson, 1926.

Desta maneira, foram feitas então uma análise teórica detalhada, comparando a utilização das diferentes metodologias, que foram tratadas como metodologias não aproximadas, compostas por Carson e Pollaczek e metodologias de forma fechada, onde se encaixou a formula Lucca, 1994; principal objetivo deste trabalho.

A fim de confirmar as aproximações realizadas por Lucca, 1994; em busca de sua expressão de forma fechada, uma análise matemática das aproximações encontradas foi realizada durante o trabalho. Para cada aproximação encontrada, foram escritos processos matemáticos através de referências apresentadas, que por fim, levaram a fórmula de Lucca, 1994; em sua forma final, evidenciando também conceitos físicos, de extrema importância para o completo entendimento de sua utilização, não detalhados originalmente pelo autor.

Na sequência, as simulações tendo a expressão de Carson, 1926; e a metodologia de Theodoulidis, 2015; como referência de comparação para com a metodologia aproximada de Lucca, 1994; apresentaram resultados realmente satisfatórios, onde os valores de erro são considerados aceitáveis. Além disso, concluiu-se que fatores como a frequência de simulação e a distância horizontal entre os condutores aéreo e subterrâneo tem grande influência sob o cálculo da impedância mútua e sua precisão quando utilizada a fórmula aproximada de Lucca, 1994.

Após o fim da análise teórica e também das simulações realizadas durante a execução deste trabalho, levando em consideração os dados obtidos e também dos mais diversos autores utilizados, e considerando o fato de que a formula de G. Lucca, 1994; não pode ser utilizada para casos específicos como aplicações em pontos de campo arbitrários ou para distâncias laterais muito grandes entre os condutores como outras soluções apresentadas, conclui-se que a formula de Lucca, 1994; tratando-se de uma expressão de forma fechada, aproximada a partir da fórmula de Carson, 1926; é uma boa solução para ser utilizada em casos reais de engenharia.

Esta afirmação pode ser embasada levando-se em conta que os algoritmos e as aproximações realizadas pelos diversos autores abordados visam dar uma maior precisão ao cálculo da impedância mútua entre um condutor aéreo e um condutor subterrâneo.

Finalmente, como sugestões de trabalhos futuros, a metodologia de forma fechada proposta por Lucca, 1994; poderia ser comparada diretamente a outras metodologias de forma fechada, como as abordadas na análise teórica deste trabalho. Adicionalmente, poderia ser utilizada para calcular a impedância mútua entre condutores das mais diversas configurações de redes elétricas, aérea, compacta e subterrânea. Por fim, este trabalho ainda pode ser utilizado como um passo inicial para estudos mais avançados, como o cálculo de tensões e correntes induzidas no condutor subterrâneo ou a validade da aplicação deste método para distâncias laterais e frequências variadas.

## REFERÊNCIAS

FURLAN, A. G. L. **Estudo de interferências eletromagnéticas entre linhas de transmissão e dutos enterrados**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2015.

NELSON, J. P. Power Systems in Close Proximity to Pipelines. **IEEE Transactions on Industry Applications**, vol IA-22, nº. 3, Maio/Junho 1986.

OUADAH, M.; ZERGOUG, M. Analysis of the Electromagnetic Interferences between Overhead Power Lines and Buried Pipelines. **Mediterranean Journal of Modeling and Simulation**, 01 (2014) 013–023.

LUCCA, G. Mutual Impedance Between an Overhead and a Buried Line with Earth Return. **Proc. Int. Electr. Eng. 9th Int. Conf. EMC**, pp. 80-86, 1994.

CARSON, J. R. Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return. **Bell Syst Tech. J.**, vol 5, p. 539-554, 1926.

CIGRE Working Group 36.02: **Guide on the influence of high voltage AC power systems on metallic pipelines – Electromagnetic Compatibility with telecommunication circuits, low voltage networks and metallic structures**. CIGRE, 1995.

GRADSHTEYN, I, S.; RYZHIK, I, M.; **Table of Integrals, Series and Products**. Academic Press, 1980.

URIBE, F, A. Calculating Mutual Ground Impedances Between Overhead and Buried Cables, **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, vol. 50, no. 1, pp. 198–203, Feb. 2008.

AMETANI, A.; YONEDA, T.; BABA, Y.; NAGAOKA, N. An Investigation of Earth-Return Impedance Between Overhead and Underground Conductors and Its Approximation, **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, vol.51, no. 3, Ago. 2009.

LUCCA, G. Different Approaches in Calculating AC Inductive Intereference from Powerlines on Pipelines. **IET Science. Measurement. Technology.**, Vol. 12 Iss. 6, pp. 802-806, 2018.

ZOU, J.; LEE, J, B.; CHANG, S, H. An Efficient Algorithm for Calculating the Earth Return Mutual Impedance of Conductors With Asymptotic Extraction Technology, **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, 2009.

LEGRAND, X.; XÉMARD, A.; FLEURY, G.; AURIOL, P.; NUCCI, C, A. A Quasi-Monte Carlo Integration Method Applied to the Computation of the Pollaczek Integral, **IEEE Transactions on Power Delivery.**, Vol. 23, no. 3, Jul 2008.

ZOU, J.; ZHOU, C.; ZHANG, B.; LEE, J.; CHANG, S. An Efficient and Generalized Algorithm for Calculating the Earth Return Impedance With Pollaczek Integral Using the Moment Technique, **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, Vol. 55, no. 6, Dez 2013.

LEE, J.; ZHANG, B.; ZOU, J.; JU, M. Efficient Evaluation of Earth Return Impedances of Arbitrary Conductor Arrangements With a Horizontally Multilayered Soil, **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, Vol. 59, no. 1, Fev 2017.

WEDEPOHL, L, M.; WILCOX, D, J. Transient Analysis of Underground Power-Transmission Systems, **Proc. IEEE**, Vol. 120, no. 2, pp. 253–260, Fev. 1973.

THEODOULIDIS, T. On the Closed-Form Expression of Carson's Integral, **Periodica Polytechnica Eletrical Engineering and Computer Science**, pp 26-29, Jan. 2015.

COLLIN, E, R. Field Theory of Guided Waves. **Hoboken: Wiley – IEEE Press**, 1991.

WAIT, J, R.; SPIES, K, P. On the Image Representation of The Quasi-Static Fields of a Line Current Source Above the Ground, **ESSA Research Laboratories**, Canadian Journal of Physics, 47, 2731, 1969.

THEODOULIDIS, T. Struve Functions. 2012. [Online]. Disponível em: [https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37302-struve-functions?s\\_tid=srchtitle](https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37302-struve-functions?s_tid=srchtitle) [Acessado em: 21 de Agosto de 2019].

THEODOULIDIS, T. Carson's Integral. 2015. [Online]. Disponível em: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/50134-carson-s-integral> [Acessado em: 21 de Agosto de 2019].