

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JANAYNA DA COSTA GOULART

**MODELAGEM MATEMÁTICA E FÍSICA TEÓRICA NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

**CURITIBA
2022**

JANAYNA DA COSTA GOULART

**MODELAGEM MATEMÁTICA E FÍSICA TEÓRICA NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

**Mathematical Modeling and Theoretical Physics in Mathematics Teacher
Education**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientadora: Dr^a.Leônia Gabardo Negrelli.

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

JANAYNA DA COSTA GOULART

**MODELAGEM MATEMÁTICA E FÍSICA TEÓRICA NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 09/junho/2022

Leônia Gabardo Negrelli
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Curitiba

Emerson Joucoski
Doutorado
Universidade Federal do Paraná - Matinhos

Rita Zanlorensi Visneck Costa
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Curitiba

CURITIBA

2022

Aos meus pais, que me ajudaram na pessoa que sou.

Aos meus avós, pelos exemplos de vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, ao meu pai Elton (*in memoriam*) e meu irmão Julio por seus incentivos e ensinamentos do mundo da matemática. Agradeço à minha mãe Ione por me apoiar e incentivar em todas as decisões de vida.

Um agradecimento especial ao meu tio Alcione por sempre estar presente me dando apoio durante o curso.

Agradeço também a todos os professores do curso por todos os ensinamentos obtidos, em especial à minha orientadora, Leônia Gabardo Negrelli por aceitar orientar essa pesquisa, por me ajudar em todos os momentos de dúvida e por todo o tipo de apoio durante essa jornada.

Agradeço à professora Rita Zanlorensi Visneck Costa e ao professor Emerson Joucoski por aceitarem fazer parte da banca deste trabalho.

Um agradecimento aos meus amigos, que direta ou indiretamente, contribuíram e deram seu suporte durante os momentos de necessidade. Todos foram fundamentais.

Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim, preparar a mente para pensar.
(Albert Einstein).

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso aborda possibilidades para o uso de modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem na disciplina de Física Teórica 1, presente na matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Curitiba. O objetivo principal foi investigar possibilidades para a realização de atividades de modelagem matemática que permitam a abordagem de conteúdos presentes na ementa da referida disciplina, de modo a contribuir para a formação de um professor de Matemática frente às demandas atuais da Educação Básica, de modo especial, àquelas relacionadas a abordagens interdisciplinares de temas de estudo. Após um estudo teórico acerca da modelagem no contexto da educação básica e da formação de professores, e escolha de temas relacionados à física com potencial para abordagem via modelagem na sala de aula, foram descritas possibilidades de vivências de modelagem na formação inicial de professores, compreendendo que uma releitura de práticas consolidadas em determinadas disciplinas são uma via oportuna para o aperfeiçoamento do processo de formação inicial de professores.

Palavras-chave: modelagem matemática; formação inicial de professores; matemática e física.

ABSTRACT

This final paper addresses possibilities for the use of mathematical modeling as a teaching and learning strategy in the subject of Theoretical Physics 1, present in the curriculum of the Mathematics Degree course at the Federal Technological University of Paraná, campus Curitiba. The main objective was to investigate possibilities for carrying out mathematical modeling activities that allow the approach of contents present in the curriculum of that discipline, in order to contribute to the formation of a Mathematics teacher in the face of the current demands of Basic Education, in a special way, to those related to interdisciplinary approaches of study topics. After a theoretical study about modeling in the context of basic education and teacher training, and choice of topics related to physics with potential to be approached via modeling in the classroom, possibilities of modeling experiences in initial teacher training were described, understanding that a re-reading consolidated practices in certain disciplines is an opportune way to improve the process of initial teacher education.

Keywords: mathematical modeling; initial teacher education; mathematics and physics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Decomposição do movimento parabólico	32
Figura 2 – Gráfico da Equação (13), levando em conta o ângulo de 45° e o ângulo ideal calculado	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tempo e velocidade do corredor.....	25
Tabela 2 – Valores das médias das velocidades e distâncias percorridas para cada intervalo de tempo.....	29
Tabela 3 – Distância atingida dado o ângulo ideal para cada altura	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CREP	Currículo da Rede Estadual Paranaense
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
UTFPR-CT	Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Curitiba

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MODELAGEM MATEMÁTICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES ...	16
2.1	O Processo de Modelagem Matemática	17
2.2	Práticas de Modelagem no Ensino de Matemática.....	18
2.3	Vivências de Modelagem na Formação Inicial.....	21
3	MODELAGEM MATEMÁTICA E O ESTUDO DE FÍSICA	24
3.1	A Disciplina de Física Teórica no Curso de Licenciatura em Matemática	24
3.2	Atividades de Modelagem Matemática para a Disciplina de Física Teórica.....	26
3.2.1.	Uma corrida de 100 m e o movimento retilíneo	26
3.2.2.	Arremesso de peso e o movimento parabólico	30
3.2.3.	A patinação no gelo e a conservação do momento angular	37
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
	REFERÊNCIAS.....	45

1 INTRODUÇÃO

Durante a realização do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Curitiba (UTFPR-CT) estudam-se, em diversas disciplinas, estratégias metodológicas para o ensino da Matemática em diversos níveis de ensino. Porém, nem sempre estratégias de ensino semelhantes são utilizadas em disciplinas da matriz curricular do referido curso, de modo que os licenciandos pudessem vivenciar na prática, enquanto estudantes ainda, o emprego delas.

Uma destas estratégias metodológicas é a Modelagem Matemática que, de acordo com Bassanezi (2019, p.16) “[...] consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Para Almeida, Silva e Vertuan (2020, p. 15) a Modelagem Matemática “visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos”, que são representações simplificadas da realidade. A utilização dessa estratégia no contexto do ensino pressupõe multidisciplinaridade, removendo barreiras entre diversas áreas de pesquisa.

Nesse cenário surge o interesse em investigar questões relacionadas ao tema de estudo proposto que provém de três principais elementos: a participação recente em um projeto sobre Inovações Criativas no Ensino de Graduação, a conclusão de um primeiro curso de graduação em Física, e demandas das diretrizes atuais para a formação de professores de Matemática para a Educação Básica.

A participação no referido projeto, que ocorreu do final de 2020 até meados de 2021, revelou que é possível e viável a utilização da Modelagem Matemática como estratégia metodológica de ensino em disciplinas de graduação. O interesse em dar continuidade a estudos e ações executadas nesse período inspirou a formulação de uma proposta de pesquisa envolvendo a disciplina de Física Teórica 1, que está presente no currículo do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-CT.

Objetivos expostos no projeto de abertura deste curso, dentre eles “a necessidade de formação de equipes interdisciplinares na UTFPR capazes de propiciar o exercício da pesquisa Matemática como atividade gerenciadora na otimização da resolução de problemas do mundo real” (CURITIBA, 2010, p.195), somados às experiências da autora desta proposta no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) de Física no período de 2012 à 2014, além do

já citado projeto de inovação no ensino de graduação foram os norteadores fundamentais do estudo que se desenvolveu visando a produção do Trabalho de Conclusão de Curso.

Segundo dados disponibilizados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), em 2015 na cidade de Curitiba havia 397 professores de Física, da educação básica, dentre os quais 169 (42,6%) com formação específica em sua área, 88 (22,2%) com formação em Matemática, e os demais (35,2%) com formações diversas, havendo até professores atuando sem terem concluído um curso superior. Ampliada a nível nacional, havia 15 170 (57,4%) professores de Física, na educação básica, com formação em Matemática, contra 11 238 (42,6%) com formação específica em Física, segundo dados do INEP. Isso se deve, segundo Santos e Curi (2012), ao pequeno número de formados nessas disciplinas, que não são suficientes para atender a essa demanda. As autoras fizeram o estudo da formação dos professores que ensinam Física no Ensino Médio, analisando cursos de Licenciaturas em Matemática de 27 instituições de ensino superior, e viram que as disciplinas de Física nesses cursos “contemplam aspectos do conteúdo, porém muitas vezes desvinculados de aulas práticas (laboratórios) e, também sem abordar os aspectos didáticos do conteúdo a ensinar.” (SANTOS; CURI, 2012).

Os dados da pesquisa são preocupantes, pois a formação desses professores pode apresentar fragilidades quando considerada a área de formação e o fato de que muitos poderão atuar como professores de Física, visto que essas áreas de conhecimento têm um papel articulado. Assim é necessário esse olhar sobre os conhecimentos, em particular às disciplinas de Física nos cursos de Licenciatura em Matemática, cuidando da formação interdisciplinar desse professor. Esse fato sugere que a elaboração de atividades para as disciplinas de Física ofertadas a Cursos de Licenciatura em Matemática, que utilizam a Modelagem Matemática como estratégia de ensino aprendizagem, podem favorecer a articulação entre elas e contribuir para a formação de professores para a Educação Básica nestas duas importantes áreas do conhecimento.

Com a proposta atual de reformulação do Ensino Médio e também com as adequações necessárias nas práticas de sala de aula nos Anos Finais do Ensino Fundamental devido à implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) publicada em 2018, a demanda pela formação e professores com competências

multidisciplinares será cada vez maior. Por isso, experiências que permitam o licenciando de áreas afins, como é o caso da Matemática e da Física, que contemplem aspectos como os preconizados pela Modelagem Matemática, revelam-se muito oportunas e promissoras.

Considerando que a formação de um professor deve atender às demandas legais e de ordem prática relacionadas ao seu campo de atuação profissional, diante das orientações presentes no Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) (PARANÁ, 2020), vinculado ao Referencial Curricular do Paraná, que, por sua vez, orienta-se pela BNCC, pretende-se investigar possibilidades para efetivar propostas de uso da Modelagem Matemática em cursos de licenciatura. Vale destacar que o CREP apresenta a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino e aprendizagem recomendável que pode contribuir para a formação do pensamento matemático do estudante, abordando sua realidade de modo contextualizado e significativo.

O objetivo principal deste trabalho foi responder à seguinte questão: “Como a Modelagem Matemática pode ser utilizada como estratégia de ensino para a abordagem de temas da Física para licenciandos em Matemática?”.

Para conseguir respondê-la, foi necessário estipular os seguintes objetivos específicos:

- Fazer um estudo bibliográfico acerca da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem em cursos de Licenciatura em Matemática;
- Explicitar contribuições do estudo de conteúdos da Física para a formação de um professor de Matemática frente às demandas atuais da Educação Básica;
- Selecionar na ementa da disciplina de Física Teórica 1 alguns temas para o desenvolvimento de casos de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.
- Propor atividades para a disciplina de Física Teórica 1, do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-CT, considerando os temas selecionados e a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.

Este trabalho foi feito com base em um estudo teórico visando a elaboração de atividades que possam ser utilizadas na disciplina de Física Teórica 1. Para tal, realizou-se um estudo da ementa dessa disciplina a fim de selecionar temas/conteúdos para propor atividades de Modelagem Matemática em uma perspectiva educacional. Essas propostas foram feitas de modo a possibilitarem uma abordagem interdisciplinar dos temas, de acordo com objetivos da disciplina e de todo o curso de Licenciatura em Matemática.

No segundo capítulo é discutido como a Modelagem Matemática se apresenta sob a perspectiva dos autores que norteiam este trabalho.

No terceiro capítulo é mostrado como a disciplina de Física no curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-CT, é organizada e também as atividades elaboradas como objetivo final do trabalho.

No quarto capítulo são colocadas as conclusões e considerações acerca dos resultados obtidos neste estudo.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A Modelagem Matemática teve seu desenvolvimento relacionado à Matemática Aplicada e quando utilizada na Educação Matemática revela-se sob diversas abordagens. Ao utilizá-la no ensino permite que o estudante possa demonstrar seus interesses por tópicos além dos previstos usualmente nos currículos, criando oportunidades para estudá-los por meio da pesquisa. Bassanezi (2019) apresenta alguns pontos que permitem destacar a relevância e contribuições da modelagem quando usada como instrumento de pesquisa:

- Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Pode ser um método para se fazer interpolações, e extrapolações e previsões;
- Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisar eventuais tomadas de decisão;
- Pode preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais;
- Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
- Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas de conhecimento. (BASSANEZI, 2019, p. 32).

Biembengut e Hein (2019, p. 18) chamam de modelação matemática “o método que utiliza a essência da modelagem em cursos regulares”. Ela também fala que “a modelação matemática se norteia por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem.”

Para o referencial teórico deste trabalho, foram utilizados três principais aportes para a Modelagem Matemática: a formação de professores de Bassanezi (2019), as perspectivas e momentos de familiarização de Almeida, Silva e Vertuan (2020) e as ações de vivência da Modelagem Matemática de Silva (2007).

Com base neles foram apresentadas três propostas de atividades envolvendo Modelagem e Física, cada uma com um enfoque e temas diferentes, com o intuito de compreender e revelar como atividades que propiciem a interdisciplinaridade podem ser consideradas em curso de Licenciatura em Matemática.

2.1 O Processo de Modelagem Matemática

Quando se pensa nos processos da Modelagem Matemática, tem-se como referência a obra de Bassanezi. Publicada originalmente em 2002, e com algumas reedições ao longo dos anos, a obra “Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática”, traz os processos da Modelagem como um método científico, voltada para a Matemática Aplicada. Nessa obra, o autor também ressalta como a utilização desses processos em cursos de formação de professores pode contribuir com sua aprendizagem.

Bassanezi (2019) coloca que a Modelagem Matemática “é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos”. Porém é necessário ver que ela somente é eficiente quando se tem consciência de que se está trabalhando com aproximações da realidade. Já os modelos matemáticos são um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O autor define uma sequência de etapas para a realização de uma atividade de Modelagem Matemática, e são elas:

- *Experimentação*: É uma atividade laboratorial na qual se processa a obtenção de dados.
- *Abstração*: É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nessa fase se estabelece a seleção das variáveis, a problematização, e a formulação de hipóteses.
- *Resolução*: construção de um modelo matemático utilizando a linguagem matemática coerente.
- *Validação*: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto.
- *Modificação*: Ocorre caso o modelo obtido não corresponda a abstração feita no início da atividade.

Essas definições de modelos e modelagem expostos são importantes para que a atividade tenha uma linguagem concisa e que expresse as ideias de maneira clara e sem ambiguidades.

Bassanezi (2019) coloca que o próprio processo atual de formação do professor ainda não leva o licenciando a estabelecer uma associação relevante

entre o que se ensina e o mundo real. Historicamente as disciplinas são vistas de modo independente umas das outras, não havendo uma interligação delas com outras disciplinas escolares.

Contudo, utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem, pode ser um dos caminhos a tornar um curso de Matemática mais atraente e agradável, assim “uma modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.” (BASSANEZI, 2019). Sua utilização é levada em conta em um ensino mais dinâmico, visando um curso de Licenciatura construído por meio de realizações de projetos, de ações pedagógicas, fazendo com que o futuro professor reconheça a utilidade da Matemática na capacidade desta de ensinar a pensar e raciocinar com precisão.

Então, segundo Bassanezi (2019), ao se pensar na formação do estudante de Licenciatura, pode-se utilizar a Modelagem como estratégia de ensino para se ter um equilíbrio entre teoria e prática, mostrando o valor intrínseco da Matemática, enquanto ferramenta para outras áreas do conhecimento.

2.2 Práticas de Modelagem no Ensino de Matemática

Ao discutir o uso da Modelagem no ensino, deve-se pensar qual seria a concepção mais adequada, uma vez que na Matemática Aplicada ela é um método de pesquisa, mas no ensino a Modelagem precisa ser adaptada à diferentes faixas etárias e aos diferentes anos escolares. Uma das obras marcantes para esse estudo é a “Modelagem Matemática na Educação Básica”, dos autores Almeida, Silva e Vertuan, cuja primeira edição é de 2012. Nela, os autores, além de descreverem o processo de Modelagem, situando-o no contexto escolar, abordam quais os espaços indicados e as possibilidades para sua realização, de forma a trazer benefícios para os estudantes.

Assim, para Almeida, Silva e Vertuan (2020, p. 13), um modelo matemático é “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam”, sendo assim “o modelo matemático ‘dá a forma’ à solução do problema e a Modelagem Matemática é a ‘atividade’ de busca por essa solução”. Os autores concebem uma atividade de Modelagem Matemática contendo uma *situação inicial*, uma *situação final* desejada e um *conjunto de procedimentos e conceitos* necessários

para passar da situação inicial para a final. Assim, uma atividade de Modelagem Matemática, se dá em fases que são caracterizadas como:

- *Inteiração*: É o primeiro contato com a situação-problema, onde procuram-se informações e é feita a coleta de dados qualitativos e quantitativos. Leva a formulação do problema e definição de metas e objetivos a serem perseguidos.
- *Matematização*: adequação do problema em linguagem matemática, formulando hipóteses simplificadoras e selecionando variáveis, utilizando notações matemáticas apropriadas.
- *Resolução*: construção de um modelo matemático que permite responder às perguntas formuladas na fase da inteiração.
- *Interpretação de resultados e validação*: análise das respostas para o problema, considerando as teorias envolvidas e adequação do modelo para descrever a realidade em questão.

Por mais que essas fases envolvam ações e procedimentos necessários para a realização da atividade, elas podem não ocorrer de forma linear, caracterizando a dinamicidade da atividade.

A utilização desse tipo de atividade pode não ser usual e ser desafiadora para o estudante, por isso é adequado que a familiarização com as atividades de Modelagem Matemática ocorra de forma gradativa, caracterizando diferentes *momentos de familiarização*, conforme proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2020, p. 26):

- Momento 1 – os estudantes são colocados em contato com uma situação-problema delineada, juntamente com os dados e demais informações para que eles elaborem um modelo matemático e apresentem uma solução ao problema, mobilizando seus conhecimentos e escolhendo estratégias.
- Momento 2 – uma situação-problema é proposta aos estudantes, que a complementam com coleta de dados e demais informações necessárias, formulam problemas, definem procedimentos, propõem soluções, etc.
- Momento 3 – os estudantes escolhem um tema, formulam problemas,

coletam dados, selecionam variáveis, elaboram hipóteses, escolhem estratégias, etc.

Para realizar uma atividade de Modelagem Matemática também é oportuno destacar sob que perspectiva ela será proposta. Uma perspectiva é determinada pelo objetivo principal com o qual a modelagem é desenvolvida. Segundo Kaiser e Sriraman (2006, apud ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2020, p. 28) podem ser consideradas seis perspectivas distintas: realística, contextual, sociocrítica, epistemológica, cognitiva e educacional.

A perspectiva realística envolve situações-problema destacadas da realidade, seja de uma indústria, um ambiente de trabalho ou do setor da gestão pública no setor de saúde, como por exemplo decidir em que momento será possível abandonar o uso de máscaras devido à regressão da pandemia do Coronavírus.

A perspectiva contextual coloca situações-problema contextualizadas ou com aplicações de conteúdo, levando em conta questões motivacionais. Um exemplo seria o estudo de otimização na produção de embalagens para produtos de higiene e limpeza no qual conteúdos de cálculo diferencial e integral podem ter sua aplicabilidade evidenciada.

A perspectiva sociocrítica leva em conta a ideia de que a Educação Matemática deve preparar e capacitar os estudantes para exercer a cidadania de forma autônoma. Entender a possibilidade de influência de prévias eleitorais na decisão de eleitores seria um exemplo de modelagem nessa perspectiva.

A perspectiva epistemológica prevê que as atividades devam ter como objetivo compreender a matemática enquanto teoria sendo construída na elaboração de modelos.

A perspectiva cognitivista busca compreender os processos cognitivos individuais dos estudantes no decorrer da realização de atividades de modelagem e está muito relacionada à perspectiva educacional.

A perspectiva educacional tem como foco a integração de modelos matemáticos no ensino da Matemática, levando os estudantes a investigar o “por quê” e o “como” dos modelos matemáticos. Dentro dessa perspectiva é papel do professor analisar possíveis dificuldades dos estudantes no processo de modelagem, principalmente as relacionadas à matematização e à interpretação dos resultados obtidos.

É importante conhecer essas perspectivas para que se possa refletir sobre o trabalho a ser realizado em sala de aula e planejá-lo de um modo mais adequado. É possível que uma mesma atividade contemple mais de uma perspectiva, porém é necessário ter clareza sobre essas possibilidades, pois cada uma tem seu propósito e interesse, trazendo implicações para a forma como o professor conduz o desenvolvimento das atividades de ensino, bem como os resultados obtidos por meio delas.

Assim, as perspectivas contextual e educacional foram as principais norteadoras das atividades de modelagem propostas neste estudo, dado que o objetivo principal foi a elaboração de atividades com ênfase nos modelos matemáticos dos temas e conteúdos de Física abordados, trazendo uma reflexão sobre a matematização, a interdisciplinaridade e as interpretações de resultados.

2.3 Vivências de Modelagem na Formação Inicial

A utilização da Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino pode trazer duas experiências distintas, uma para o professor e uma para o estudante. Os artigos dos autores Silva (2007) e de Silva e Dalto (2011) abordam a Modelagem no contexto da formação inicial de professores e a importância das ações de vivências, tanto para professor quanto para estudante, pois a sua utilização pode propiciar um ensino com maior motivação, facilitação da aprendizagem e preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas. Porém é necessário discutir a qualidade das ações de modelagem na formação inicial de professores na perspectiva do desenvolvimento profissional.

Silva e Dalto mostram que as práticas de modelagem em sala de aula são caracterizadas pelo conjunto de relações estabelecidas entre estudantes e o professor, sendo necessária a aprendizagem relacionada ao fazer Modelagem, à preparação de situações de Modelagem e à aplicação dessas situações em sala de aula. Isso leva à conclusão de que “a prática com Modelagem na formação de professores requer uma perspectiva capaz de possibilitar futuras implementações no exercício da docência” (SILVA; DALTO, 2011).

Barbosa (2004, apud SILVA, 2011), aponta dois domínios para a formação de professores: a experiência como estudante e a experiência como professor. Almeida (2006, apud SILVA, 2011) afirma que professores precisam ter a oportunidade de

“aprender” sobre Modelagem, “aprender” por meio da Modelagem e “ensinar” usando Modelagem. Silva (2007) coloca que se podem utilizar dois tipos de ações para incorporar a Modelagem à prática do professor: ações de vivência da Modelagem e ações didático-pedagógicas de Modelagem.

As ações de vivência da Modelagem oferecem aos licenciandos a familiaridade com o processo de modelagem, bem como oferecerem experiência com situações didáticas que envolvem situações reais, problematizações e investigações. Ao implementar as ações de vivência em disciplinas do currículo, elas podem estabelecer relações entre teoria e as aplicações da matemática, viabilizando a construção do conhecimento matemático de modo mais eficiente.

Algumas formas de ações de vivência que podem ser desenvolvidas na formação inicial, segundo Silva (2007), são:

- Exploração de modelos matemáticos, visando a recriação de modelos pelo sujeito;
- Estudo de textos com diferentes olhares sobre os comportamentos do processo de modelagem, visando a identificação das características do processo de Modelagem sob as diferentes perspectivas existentes na literatura;
- Ações de modelador, visando que o estudante desenvolva sua criatividade e habilidades de modelador;
- Análise das ações de vivência no contexto da formação inicial de professores, visando a utilização de ações propostas em diferentes momentos e disciplinas de um curso de licenciatura, focalizando a relevância da Modelagem na formação e prática profissional.

Já nas ações didático-pedagógicas, Silva (2007) traz que:

[...] a Modelagem passa a ser fonte de reflexão sobre seu potencial no processo de ensino aprendizagem, sobre os argumentos que a constituem como estratégia de ensino, sobre os obstáculos à sua implementação, sobre sua essência enquanto processo investigativo, sobre sua viabilidade, sobre os caminhos para sua implementação, entre outros. (SILVA, 2007, p. 226).

Logo, ao discutir sobre modelagem e sua implementação em sala, o foco é nas ações didático-pedagógicas, porém ao realizar uma atividade em sala utilizando

a Modelagem como recurso, utilizam-se das ações de vivência dela. Assim, o potencial da Modelagem para a formação inicial está atrelado à qualidade das ações propostas, também devendo ser coerente com a(s) perspectiva(s) de formação escolhida.

Silva (2007, p. 229) também coloca que a Modelagem permite ao licenciando “inovar nas ações que lhe são oportunizadas e desenvolver a autonomia na produção de saberes e valores”, contribuindo assim para a formação de um professor de Matemática mais reflexivo, crítico, colaborador e investigador da prática docente.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA E O ESTUDO DE FÍSICA

Neste capítulo fala-se sobre a disciplina de Física, quais são seus objetivos, sobre sua ementa e onde ela é situada na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Aqui também serão mostrados alguns exemplos de exercícios usuais encontrados em livros didáticos utilizados para a disciplina, os quais serviram de inspiração para as atividades propostas.

3.1 A Disciplina de Física Teórica no Curso de Licenciatura em Matemática

A disciplina Física Teórica 1 da matriz curricular do Curso de Licenciatura Matemática da UTFPR-CT é ofertada aos estudantes do quarto período e atualmente tem como pré-requisito a disciplina de Cálculo Diferencial A. Vale destacar que até o quarto período, o estudante já cursou as disciplinas de Funções de uma Variável Real A e Geometria Analítica A, o que auxilia também no entendimento de conteúdos de Física.

Os objetivos da disciplina de Física Teórica 1 são:

Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e introdução à linguagem físico-matemática fundamental para quantificar os todos os fenômenos físicos observados na natureza e estabelecer as bases necessárias para o estudo posterior dos Fenômenos Coletivos (Física Teórica 2). (CURITIBA, 2010, projeto de abertura do curso).

Em sua ementa são contemplados os temas de:

Medição; Movimento Retilíneo; Vetores; Movimento Multidimensional; Leis de Newton; Força e Movimento; Energia Cinética e Trabalho; Energia Potencial e Conservação da Energia; Sistema de Partículas; Centro de Massa e Conservação do Momento Linear; Rotação; Rolamento, Torque e Conservação do Momento Angular; Leis de Conservação, Simetrias e Referencial Girante; Equilíbrio Estático. (CURITIBA, 2010, projeto de abertura do curso).

Nota-se que a ementa apresenta temas com grandes potenciais para o desenvolvimento de atividades de ensino que envolvam a modelagem matemática.

Uma atividade usual na disciplina de Física Teórica 1, presente tanto em livros de Física quanto de Cálculo, consiste em fornecer alguns parâmetros e solicitar, ainda que implicitamente, que se formule uma expressão matemática que relacione as variáveis envolvidas a fim de analisar um determinado fenômeno. Por exemplo:

Um radar foi usado para registrar a velocidade de um corredor nos instantes dados na tabela.

Tabela 1 – Tempo e velocidade do corredor

t(s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
v(m/s)	0	4,67	7,34	8,86	9,73	10,22	10,51	10,67	10,76	10,81	10,81

Fonte: Adaptado do livro de Cálculo. (STEWART, 2010)

Qual a distância percorrida pelo corredor durante os cinco segundos?

Este exercício aborda os conceitos de Movimento Retilíneo, incluindo posição e deslocamento, velocidade instantânea e aceleração.

Um segundo exemplo de atividade, também presente com frequência em livros de Física Teórica, solicita a atribuição de parâmetros e valores reais em equações ou expressões já prontas. O exercício a seguir, retirado do livro Fundamentos da Física (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, p.83) é um exemplo dessa abordagem.

Um arremessador de peso de nível olímpico é capaz de lançar o peso com uma velocidade inicial de $v_0 = 15 \text{ m/s}$ de uma altura de 2,16 m. Que distância horizontal é coberta pelo peso se o ângulo de lançamento θ é a) 45° e b) 42° ?

Atividades assim apresentam um viés que favorece o uso de Modelagem Matemática na perspectiva contextual. Para que se torne uma atividade que utilize a Modelagem Matemática como estratégia de ensino é necessária uma adaptação da mesma para incluir os elementos sugeridos também pela perspectiva educacional, para poder trabalhar com o estudante os temas presentes na ementa. Com este propósito, inspirando-se em situações usualmente exploradas no ensino de conteúdos de Física, foi feita uma releitura de certas abordagens, de modo a evidenciar as etapas da modelagem e os momentos de familiarização propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2020).

3.2 Atividades de Modelagem Matemática para a Disciplina de Física Teórica

Uma forma de execução de atividades de Modelagem em cursos regulares, segundo Bassanezi (2019) é a escolha de um tema geral que possa nortear o curso como um todo. Seguindo essa ideia, foi escolhido o tema Práticas Esportivas, uma vez que ele pode ser abordado no âmbito da temática Qualidade de Vida, que permitiria, conforme interesse e/ou necessidade, o desenvolvimento destas mesmas atividades contemplando também a perspectiva sociocrítica. Esse tema geral abre possibilidades para muitas outras abordagens, pois o corpo humano visto como uma máquina, também está sujeito às leis da Física. Portanto, as três atividades propostas a seguir foram pensadas seguindo esse grande tema, mas elas podem abrir discussões para outros temas e assuntos, que envolvam a ementa da disciplina e que podem gerar outras atividades posteriormente.

As três etapas destacadas na apresentação das propostas de atividades foram inspiradas em Almeida, Silva e Vertuan (2020), mas também contém elementos da caracterização das fases da modelagem dada por Bassanezi (2019), além de contemplar as possibilidades de vivências de modelagem na formação inicial de professores dadas por Silva (2007).

Sobre o título de cada atividade, foi colocado inicialmente a situação da realidade cuja matematização permitirá uma abordagem dos conceitos e procedimentos que revelam o conteúdo em questão.

3.2.1. Uma corrida de 100 m e o movimento retilíneo

Para a primeira atividade é proposta uma releitura utilizando tanto o exercício mostrado na Seção 3.1, que é proposto no livro de Cálculo 1 (STEWART, 2010, p. 386), como também uma proposta contida em Bassanezi (2015, p. 150). Tem por base o Momento 1, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2020) apresentado na Seção 2.2, no qual a situação-problema, dados e encaminhamentos já serão dadas aos estudantes.

Assim, a etapa 1 da atividade, a colocação da situação inicial, consiste na introdução do assunto, começando com um texto para o estudante sobre corridas e uma breve história do atletismo. Também se tem a definição do problema a ser analisado. Para a etapa 2, dados do problema e matematização, tem-se a coleta de

dados, a formulação de hipóteses simplificadoras, as variáveis do problema, a análise de quais conteúdos de matemática serão necessários para resolvê-la e o modelo matemático da situação. A etapa 3 assemelha-se à fase de interpretação de resultados e validação, analisando o modelo encontrado, se ele está de acordo com o problema inicial, e onde se pode colocar mais questionamentos, podendo levar a outras discussões sobre o assunto.

Etapa 1 – Situação inicial: Treino para uma corrida

O atletismo é disputado nos Jogos Olímpicos desde a primeira edição, realizado em Atenas em 1896. Primeiramente um evento masculino, mas em 1928, nos jogos realizados em Amsterdã, as provas femininas foram incluídas. O atletismo é um conjunto de esportes que envolve as modalidades de corridas, saltos e lançamentos, entre elas, as corridas de curta distância, como as de 100 m, 200 m e 400 m rasos, média como 800 m e 1 500 m, e as longas, como de 3 000 m, 5 000 m e 10 000 m. A Maratona é uma corrida realizada na distância oficial de 42 195 km, normalmente em ruas e estradas. Única modalidade esportiva que se originou de uma lenda, seu nome foi instituído como uma homenagem à antiga lenda grega do soldado ateniense Fidípides, um mensageiro do exército de Atenas, que teria corrido 42 km entre o campo de batalha de Maratona até Atenas para anunciar aos cidadãos da cidade a vitória dos exércitos atenienses contra os persas e morreu de exaustão após cumprir a missão. (BASSANEZI, 2015).

De acordo com o site da Confederação Brasileira de Atletismo (2022), na corrida de 100 m rasos, o recordista é o jamaicano Usain Bolt, que em 2009 fez o tempo de 9,58 s na prova.

Uma pessoa que deseja participar de provas assim, deve ter um regime de treinamento muito sério e competente. Porém ela precisa começar com treinos leves pois é um exercício que exige muito de todo o corpo.

Etapa 2 – Dados do problema e matematização

Digamos então que alguém com esse desejo começa a treinar diariamente, e um dia registra sua velocidade, para poder acompanhar seu progresso. Para tal, a pessoa considera sua velocidade em cinco segundos percorridos.

Assim qual será a distância percorrida por ela?

Dados do problema:

Segundo Bassanezi (2015, p. 156), a dinâmica da corrida de 100 m rasos apresenta quatro características:

1. Período de reação: corresponde ao tempo de reação inicial do atleta ao tiro da partida.
2. Fase da aceleração positiva: após a saída, o corredor aumenta sua velocidade com o aumento da frequência e da amplitude das passadas.
3. Fase da velocidade constante: o corredor tenta manter a velocidade bem próxima da máxima.
4. Fase da aceleração negativa: próximo do final o atleta não consegue manter o mesmo ritmo e desacelera.

Utiliza-se um radar móvel para registrar a velocidade média desse corredor. A grande maioria dos radares usa o princípio do efeito Doppler para detectar a velocidade. O instrumento transmite ondas eletromagnéticas que ricocheteiam no corredor, retornando ao dispositivo com uma frequência ligeiramente diferente e essa alteração na frequência fornece a velocidade do corredor. (HAMANN, 2011)

Considerando dados da Tabela 1 da Seção 3.1, observa-se que foi somente registrada a velocidade do corredor até a entrada na fase da velocidade constante, assim, para esse primeiro momento, foi analisado somente esse movimento do atleta, levando em conta a permanência dessa velocidade até o final da corrida.

Para a resolução do problema, primeiro deve ser percebido que a aceleração do corredor não é constante, assim há que se verificar os dados a cada instante de tempo dado.

Para se calcular a distância percorrida em função do tempo, utiliza-se a equação (1):

$$\Delta x = v_m \cdot \Delta t \quad (1)$$

Onde Δx é o deslocamento do corredor dada a variação do tempo, v_m é a velocidade média dele no intervalo de tempo, e Δt a variação de tempo. Para poder calcular a média aritmética das velocidades em cada intervalo de tempo, considera-se a equação (2):

$$v_m = \frac{v_i + v_f}{2} \quad (2)$$

Onde v_i e v_f são as velocidades iniciais e finais, respectivamente.

Assim, considera-se o intervalo de tempo 1 como sendo os dados referentes ao intervalo entre 0 e 0,5 segundos, o intervalo de tempo 2, referente ao intervalo entre 0,5 e 1 segundos, e assim por diante. Logo para o intervalo de tempo 1, tem-se as seguintes informações, segundo a Tabela 1 da Seção 3.1:

Intervalo de tempo 1:

$$v_i = 0 \text{ m/s} \quad v_f = 4,67 \text{ m/s}$$

$$t_i = 0 \text{ s} \quad t_f = 0,5 \text{ s}$$

Utilizando a equação 2, tem-se que:

$$v_m = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{0 + 4,67}{2} = \frac{4,67}{2} = 2,34 \text{ m/s} \quad (3)$$

A média aritmética das velocidades do corredor no intervalo de tempo 1 é de 2,335 m/s. Utilizando esse valor na equação 1, vem que:

$$\Delta x = v_m \cdot \Delta t = 2,34 \cdot 0,5 = 1,17 \text{ m} \quad (4)$$

Logo, no intervalo de tempo 1, ele correu cerca de 1,17 metros. A Tabela 2 apresenta os resultados ao realizar estes mesmos passos para os outros instantes.

Tabela 2 – Valores das médias das velocidades e distâncias percorridas para cada intervalo de tempo

Intervalo de tempo	Soma das velocidades (m/s)	Média aritmética das velocidades (m/s)	Varição de tempo (s)	Distância (m)
1	4,67	2,34	0,5	1,17
2	12,01	6,01	0,5	3,01
3	16,20	8,10	0,5	4,05
4	18,59	9,30	0,5	4,65
5	19,95	9,98	0,5	4,99
6	20,73	10,37	0,5	5,19
7	21,18	10,59	0,5	5,30
8	21,43	10,72	0,5	5,36
9	21,57	10,79	0,5	5,40
10	21,62	10,81	0,5	5,41

Fonte: Autoria própria (2022)

Somando todos os deslocamentos calculados, referente à cada instante, percebe-se que o deslocamento total do corredor foi de aproximadamente 44,5m.

Etapa 3 – Interpretação e validação

Para a última etapa é importante verificar se os dados calculados fazem sentido com a pergunta inicial. O problema inicial era “Qual a distância percorrida pelo corredor?”, o qual foi respondida, pois ele percorreu aproximadamente 44,5 m em cinco segundos. Agora pode-se abrir um pouco as discussões e ter outros questionamentos: Qual a velocidade média do corredor durante esses cinco segundos?

Para tal, utiliza-se a equação de velocidade média:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{44,5}{5} = 8,9 \text{ m/s} \quad (5)$$

Mantendo essa velocidade, em quanto tempo ele completaria a prova de 100 m rasos?

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_m} = \frac{100}{8,9} = 11,2 \text{ s} \quad (6)$$

Assim ele levaria aproximadamente 11 segundos para completar essa prova.

A atividade ainda poderá levar a questionamentos mais profundos, em relação aos atletas profissionais, recordes de prova, relações de performance e idade dos atletas, entre outras possibilidades levantadas pelos próprios estudantes.

3.2.2. Arremesso de peso e o movimento parabólico

Esta proposta é uma releitura utilizando tanto o exemplo dois mostrado na Seção 3.1, como também uma proposta contida em Bassanezi (2015, p. 173). Tem por base o Momento 2 (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2020), no qual a situação-problema é fornecida aos estudantes, porém os dados e informações pertinentes deverão ser analisados por eles.

Quando o assunto de movimentos em duas dimensões é tratado em sala, um dos tópicos é a análise de movimentos de projéteis, que pode ser uma bola, um dardo, água jorrando de uma fonte ou mesmo o corpo humano saltando uma grande

distância. Porém, nos exemplos tratados nos livros didáticos é levando em conta o movimento do objeto quando é lançado do chão, tendo assim, seu alcance máximo quando o ângulo de lançamento é de 45° . Porém, o que acontece quando o objeto não é lançado do chão, e sim considerando a altura de um atleta?

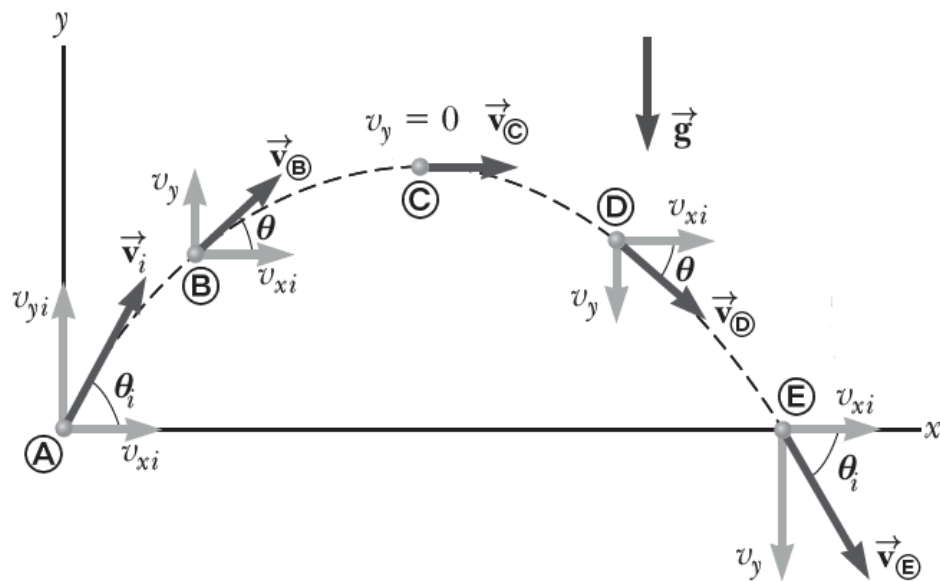
Logo para a etapa 1, a introdução será feita pelo próprio professor, primeiro com os dados e análises do tema, levando em conta os dados presentes nos livros. Após essa parte, a questão a ser levantada é: A altura de um atleta no arremesso de peso influencia em sua jogada? Desse questionamento, a procura por informações referentes ao assunto será por parte dos estudantes. Algumas outras perguntas podem ajudar nesse momento, como: Quais são as equações de movimento desse peso? Quais componentes são necessários para esse novo movimento? O que é constante e o que pode ser aperfeiçoado pelo atleta? A busca de dados para as questões inclui altura dos atletas e velocidade do arremesso.

Para a etapa 2, realizada pelos estudantes, é necessária a colocação dos dados obtidos e de algumas hipóteses e simplificações para conseguir resolver o problema. Também foi realizada a matematização e resolução do problema, onde foram definidas as variáveis do problema, qual matemática seria necessária para resolvê-la e o modelo matemático da situação. Para a etapa 3, a interpretação dos resultados obtidos é muito importante para a validação dos mesmos, analisando o modelo encontrado e se ele está de acordo com o problema inicial.

Etapa 1 – Situação inicial: Arremesso de peso

Analisando o movimento de projéteis, conforme Figura 1, pode-se notar que há dois movimentos associados, o movimento horizontal e o movimento vertical.

Figura 1 – Decomposição do movimento parabólico



Fonte: SERWAY; JEWETT (2014)

A Figura 1 mostra uma partícula lançada com rapidez inicial v_i a um ângulo θ_i acima da horizontal. Sejam (x_0, y_0) as coordenadas do ponto de lançamento; y é convencionado positivo com orientação para cima e x é convencionado positivo com orientação para a direita. A velocidade inicial v_0 quando decomposta sobre os eixos tem, então, as componentes:

$$v_{0x} = (v_0 \cdot \cos\theta)$$

$$v_{0y} = (v_0 \cdot \sen\theta)$$

Na ausência de resistência do ar não há forças contrárias ao movimento, então a aceleração é constante. O projétil não tem aceleração horizontal, de forma que a única aceleração é a vertical devido a gravidade (g), que aponta para baixo.

No movimento horizontal, em qualquer instante t , o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial, $x - x_0$, é dado pela equação do movimento uniforme:

$$x(t) = x_0 + (v_0 \cos\theta)t \quad (7)$$

O movimento vertical é o movimento sujeito a aceleração da gravidade, para uma partícula em queda livre. O mais importante é que a aceleração é constante. Assim o deslocamento vertical é dado pela equação:

$$y(t) = y_0 + (v_0 \text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

O arremesso de peso consiste em arremessar uma esfera de metal o mais longe possível. A bola oficial masculina tem massa de 7,26 kg e é geralmente feita de bronze ou ferro fundido e chumbo, e possui cerca de 12 cm de diâmetro. Para o feminino, a bola diminui para 9 cm de diâmetro e cerca de 4kg. O arremessador deve colocar a esfera entre o ombro e o pescoço, no início do lançamento, e lançá-la com a ponta dos dedos. Durante o lançamento, o atleta deve rodar sobre si mesmo e lançar. (BASSANEZI, 2015). Duas perguntas são importantes para um atleta arremessador: 1) Qual o melhor ângulo para a jogada? e 2) A altura do atleta influencia na distância final?

Etapa 2 – Dados do problema e matematização

Primeiro, as equações do movimento parabólico para os eixos horizontal e vertical, respectivamente, serão consideradas sob a forma de sistema, apresentadas na equação (9):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + (v_0 \text{cos}\theta)t \\ y(t) = y_0 + (v_0 \text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (9)$$

Para a equação do deslocamento em $x(t)$, $x_0 = 0$, pois o ponto de partida da bola é a posição do atleta. Para a equação do deslocamento em $y(t)$, $y_0 = h$, pois a altura inicial é a distância entre ombros do atleta e o chão. Assim, as equações de (9) ficam:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \text{cos}\theta)t \\ y(t) = h + (v_0 \text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (10)$$

Para obter a equação geral do movimento, isola-se t na primeira equação de (10):

$$t = \frac{x}{v_0 \text{cos}\theta} \quad (11)$$

Substituindo (11) na equação de $y(t)$ em (10), vem que:

$$y = h + (v_0 \text{sen}\theta) \left(\frac{x}{v_0 \text{cos}\theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \text{cos}\theta} \right)^2$$

$$y = h + \left(\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} \right) x - \frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta} x^2 \quad (12)$$

A Equação (12) descreve o movimento parabólico, considerando a altura do chão ao ombro do atleta. A distância máxima do arremesso, $x_{\text{máx}}$ será alcançada quando $y = 0$, ou seja,

$$0 = h + \left(\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} \right) x - \frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta} x^2 \quad (13)$$

A equação (13) nos leva a uma equação polinomial de segundo grau e a raiz que nos fornece o alcance máximo do peso é dada por:

$$x_{\text{máx}} = \frac{-\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} - \sqrt{\left(\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}\right)^2 - 4\left(-\frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta}\right)h}}{2\left(-\frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta}\right)}$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} + \sqrt{\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}^2\theta} + \left(\frac{2gh}{v_0^2 \text{cos}^2\theta}\right)}}{\left(\frac{2g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta}\right)}$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \text{cos}^2\theta}{g} \left[\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} + \frac{1}{\text{cos}\theta} \sqrt{\text{sen}^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right]$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \text{cos}\theta}{g} \left[\text{sen}\theta + \sqrt{\text{sen}^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right] \quad (14)$$

Vale destacar que apenas o cálculo da raiz positiva foi exposto, visto que apenas esta tem significado prático para o problema em questão, o que é possível visualizar na Figura 2, exposta adiante.

A distância máxima, dada por (14) depende de v_0 , h e θ . Tendo h como a distância entre ombro do atleta e o chão, v_0 é a velocidade de lançamento que cada atleta pode aperfeiçoar e θ o ângulo de lançamento. Assim, o atleta deve se preocupar com o ângulo de arremesso, já que ele sabe como obter a velocidade de lançamento.

Obtém-se o máximo de $x_{\text{máx}}$, quando a derivada da Equação (14), $\frac{dx_{\text{máx}}}{d\theta}$, for igual a zero. Assim:

$$\frac{dx_{\text{máx}}}{d\theta} = \frac{v_0^2 \cos\theta}{g} \left[\cos\theta + \frac{1}{2} \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{\text{sen}^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}} \right] - \left[\text{sen}\theta + \sqrt{\text{sen}^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right] \left[-\frac{v_0^2 \text{sen}\theta}{g} \right] = 0 \quad (15)$$

Simplificando a Equação (15) chega-se a:

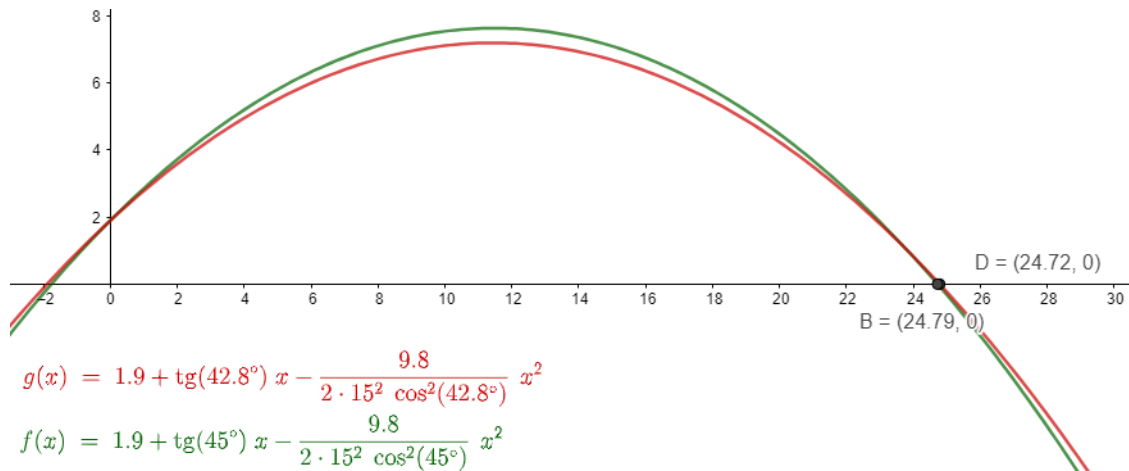
$$\text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)}} \quad (16)$$

Ao calcular o arco seno da Equação (16), tem-se o ângulo ideal que leva a distância máxima do arremesso. Considerando um atleta com h com 1,90 m, e velocidade inicial de 15 m/s, e a aceleração da gravidade de $9,8 \text{ m/s}^2$, dados retirados do exemplo 2 da Seção 3.1, tem-se que o ângulo ideal é de:

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{1,9 \cdot 9,8}{15^2} \right)}} = 0,679 \Rightarrow \theta = 42,8^\circ \quad (17)$$

Assim pode-se ver que quando se leva em conta a altura inicial sendo maior que a altura final, o ângulo inicial para atingir a distância máxima diminui. Pode-se ver melhor na Figura 2, construída utilizando o aplicativo de matemática dinâmica GeoGebra, os gráficos da equação 13, quando se leva em conta o ângulo de 45° e o ângulo de 42° .

Figura 2 – Gráfico da Equação (13), levando em conta o ângulo de 45° e o ângulo ideal calculado



Fonte: Autoria própria (2022)

O arremesso com o ângulo de 45° resulta em uma distância de 24,72 m, enquanto que com o ângulo de 42,8° resulta em uma distância de 24,79 m.

Etapa 3 – Interpretação e validação

Foi possível observar que quando levamos em consideração a altura diferente de zero em um lançamento de um objeto, o ângulo que resulta em uma máxima distância já não é mais 45°, conforme é visto nos livros. Outro resultado pertinente é que esse ângulo ideal vai variar conforme a altura de cada atleta. Podemos observar no quadro a seguir:

Tabela 3 – Distância atingida dado o ângulo ideal para cada altura

Altura do atleta (m)	Ângulo maximizado (graus)	Distância máxima (m)
1,60	43,1323	24,51
1,65	43,0778	24,55
1,70	43,0235	24,60
1,75	42,9693	24,65
1,80	42,9155	24,69
1,85	42,8618	24,74
1,90	42,8083	24,79
1,95	42,7550	24,83
2,00	42,7020	24,88
2,05	42,6491	24,93
2,10	42,5964	24,97

Fonte: Autoria própria (2022)

Quanto mais alto o atleta, menor deve ser esse ângulo, considerando a velocidade a mesma dos cálculos anteriores. Então, a altura influencia na jogada do atleta, sendo necessário levar em consideração sua altura para poder saber qual melhor velocidade e ângulo para um arremesso perfeito.

3.2.3. A patinação no gelo e a conservação do momento angular

Esta atividade foi baseada no Momento 3, mostrado na Seção 2.2, no qual os estudantes podem escolher um tema, formulam os problemas, coletam dados, selecionam variáveis, elaboram hipóteses, escolhem estratégias. Mesmo sendo um momento de escolha para eles, é trazido aqui um exemplo de como se dão as etapas nesse momento.

Quando se trabalham os conceitos de momento angular, conservação do momento angular e inércia, alguns exemplos estudados são os de esportes que envolvem giros. Tanto no balé quanto na patinação artística no gelo, os atletas fazem recursos de giros e piruetas em suas rotinas. A inspiração para a atividade é dada tanto pelos Jogos Olímpicos de inverno que aconteceram em 2021, quanto por um filme há muito tempo visto, lançado pela Walt Disney Pictures em 2005 com o título “Sonhos no gelo”, que conta a história de Casey Carlyle, uma garota que utilizava os elementos de Física para melhorar as habilidades dela na patinação no gelo, conseguindo uma bolsa em Harvard por fazer tal estudo. Assim, temos que a inspiração para as atividades de modelagem podem surgir de diversos lugares, não somente dos livros didáticos.

Assim, para a realização da etapa 1 primeiro pensaram-se em alguns elementos da prática da patinação, como os giros e saltos praticados pelos atletas. Após a análise de algumas fontes sobre o assunto, o seguinte questionamento foi levantado: por quanto tempo um patinador consegue girar, sem que ele coloque a vida em risco? Desse questionamento, a procura por mais informações referentes ao assunto se fez necessária. Pode-se então começar com outras perguntas, como “Qual a velocidade de um patinador?”, “Qual o número de giros que ele pode e deve fazer em um movimento?”.

Na etapa 2, foi feita a busca de dados para as questões, como massa de um patinador, velocidade inicial de giro, proporções e tamanho dos braços dos atletas. Foram necessárias a colocação de algumas hipóteses e simplificações para conseguir

resolver o problema. Também foi realizada a matematização e resolução do problema, quando foram definidas as variáveis do problema, qual matemática seria necessária para resolvê-la e o modelo matemático da situação. Para a etapa 3, a interpretação dos resultados obtidos foi muito importante para a validação dos mesmos, analisando o modelo encontrado e se ele estava de acordo com o problema inicial.

Etapa 1 – Situação inicial: Patinação no gelo

A patinação artística no gelo teve as primeiras competições em meados de 1880 e a União Internacional de Patinação surgiu em 1892. Fez parte dos Jogos Olímpicos de Verão em 1908 e 1920 e entrou para os Jogos de Inverno em 1924 (CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE DESPORTOS NO GELO, 2022). Os patinadores competem nos programas curtos e livres, sempre ao som de músicas, e suas rotinas incluem saltos, giros, levantamentos, arremessos e sequências coreográficas. Ao olhar os programas, às vezes se têm a impressão que os movimentos são fáceis e não requerem esforço para realizá-los. Mas será que isso é certo? Na verdade, os patinadores precisam de treinos constantes, sempre desafiando os limites do próprio corpo, além disso é necessário o conhecimento físico de todos os movimentos envolvidos e as habilidades necessárias para realizá-los.

Os giros e piruetas são passos sempre presentes em todas as rotinas de todos os patinadores, mas é necessário muito treino para chegar ao nível de excelência. Contudo, o que a Física tem a ver com esses passos? Esses passos são regidos pela ideia de conservação, em particular o momento angular, que matematicamente é expressa pela equação

$$L = I \cdot \omega$$

Onde a velocidade angular da patinadora (ω) é multiplicada por seu momento de inércia (L) e que está associado à rotação de um corpo em torno de um mesmo eixo de rotação (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, p.301). Para que ela consiga manter o equilíbrio ao girar, não devem existir forças de torque (“forças de giro”) externo agindo sobre si, se isso ocorrer o momento angular é constante, ou seja, há a conservação do momento angular. A inércia rotacional é entendida como a resistência do corpo ao movimento de rotação e ela aumenta quando a massa é distribuída longe do eixo de rotação, mas diminui quando a massa é distribuída próximo ao eixo de rotação. Então, para uma patinadora, por exemplo, ao trazer seus braços mais próximos ao corpo a sua inércia de rotação diminui e, para conservar o

momento angular, a velocidade do giro tem que aumentar, permitindo a conservação do momento angular para que ela gire.

Então, qual a velocidade que uma patinadora consegue chegar ao realizar esse movimento? Quantos giros são seguros de serem feitos?

Etapa 2 – Dados do problema e matematização

De acordo com leituras feitas em livros didáticos (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012; TIPLER, 2010) algumas considerações serão necessárias. Primeiro, foi considerada uma patinadora de altura 1,60 m e um corpo com massa de 50 kg. Os braços foram considerados como massas separadas do corpo, como se fossem barras fixas na extremidade do eixo de rotação com massa de 4 kg cada. Para uma simplificação de formas, o corpo humano foi considerado um cilindro de raio 20 cm, e os braços têm um tamanho de 1 m a partir do eixo de rotação, quando abertos. A velocidade inicial de um giro foi de 1,5 rev/s, considerando-se alguns exemplos encontrados nas leituras.

Assim, se não há torque externo, há uma conservação do momento angular, logo:

$$\begin{aligned}\Delta L &= 0 \\ L_f - L_i &= 0 \\ L_{\text{braço fechado}} - L_{\text{braço aberto}} &= 0 \\ L_{\text{braço fechado}} &= L_{\text{braço aberto}} \\ I_{\text{braço fechado}} \cdot \omega_{\text{braço fechado}} &= I_{\text{braço aberto}} \cdot \omega_{\text{braço aberto}} \\ \omega_{\text{braço fechado}} &= \frac{I_{\text{braço aberto}} \cdot \omega_{\text{braço aberto}}}{I_{\text{braço fechado}}}\end{aligned}\tag{18}$$

Precisa-se então, das informações do momento de inércia da patinadora considerando o braço fechado, o momento de inércia com o braço aberto e a velocidade de giro com o braço aberto. Para o cálculo do momento de inércia da patinadora com o braço aberto, temos que considerar tanto o momento de inércia de seu corpo, quanto o momento de inércia de seu braço aberto, assim:

$$I_{\text{braço aberto}} = I_{\text{braço aberto}} + I_{\text{corpo}}\tag{19}$$

Ao considerar o corpo humano como um corpo rígido, mais especificamente como um cilindro, em rotação em torno de seu eixo longitudinal, pode-se utilizar a equação do momento de inércia de um cilindro sólido $I = \frac{1}{2}mr^2$, e ao considerar o braço como uma barra rígida fixa na extremidade, utiliza-se a equação do momento de inércia de uma barra rígida com eixo de rotação na extremidade: $I = \frac{1}{3}ml^2$, onde l é o tamanho do braço, lembrando que há dois braços envolvidos. (SERWAY; JEWETT, 2014, p.325).

Assim, o momento de inércia quando os braços estão abertos é de:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{braço aberto}} &= 2 \left(\frac{1}{3} m_{\text{braço}} l^2 \right) + \frac{1}{2} m_{\text{corpo}} r^2 \\
 I_{\text{braço aberto}} &= 2 \left(\frac{1}{3} (4)(1)^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (0,2)^2 \\
 I_{\text{braço aberto}} &= 2,67 + 1 \\
 I_{\text{braço aberto}} &= 3,67 \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Para o cálculo do momento de inércia da patinadora ao fechar o braço, foi considerada o momento de inércia de seu corpo, igual ao anterior, e o momento de inércia de seu braço fechado, onde foi utilizada a ideia de que ele é um aro adicional em torno do cilindro (corpo). Para essa abordagem, a espessura dos braços não influencia no tamanho do cilindro, então o raio usado será o mesmo do anterior. Assim:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{braço fechado}} &= I_{\text{braço fechado}} + I_{\text{corpo}} \\
 I_{\text{braço fechado}} &= 2(m_{\text{braço}}r^2) + \frac{1}{2} m_{\text{corpo}}r^2 \\
 I_{\text{braço fechado}} &= 2((4)(0,2)^2) + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (0,2)^2 \\
 I_{\text{braço fechado}} &= 0,32 + 1 \\
 I_{\text{braço fechado}} &= 1,32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Pode-se perceber que ao fechar o braço, o valor do momento de inércia diminui, conforme foi visto nas considerações iniciais. Agora, tendo a velocidade inicial de giro, com os braços abertos, como 1,5 rev/s, vem que:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{braço fechado}} &= \frac{I_{\text{braço aberto}} \cdot \omega_{\text{braço aberto}}}{I_{\text{braço fechado}}} \\ \omega_{\text{braço fechado}} &= \frac{3,67 \cdot 1,5}{1,32} \\ \omega_{\text{braço fechado}} &= 4,17 \frac{\text{rev}}{\text{s}}\end{aligned}\tag{22}$$

Ou seja, a velocidade final do giro com os braços fechados chega a aproximadamente 4 rev/s.

Etapa 3 – Interpretação e validação

Foi possível observar que a velocidade do patinador mais que dobra ao realizar esse movimento. Mas mesmo com todas as leituras e cálculos, não é possível chegar ao número exato de quantos giros um patinador pode fazer, pois também entra em conta a sua experiência e treinamento. De acordo com as leituras feitas e vídeos sobre o esporte (TANAKA, 2022), para competições, um patinador que consegue dar mais de 10 giros, já é considerado muito experiente e de alta performance. Tendo como base os dados aqui utilizados, seria um movimento que duraria uns três segundos, e observando algumas rotinas, é visto que é um tempo coerente com o calculado. Assim, não seria recomendado que uma pessoa iniciante em patinação já fizesse um movimento como esse, já que exige demais de seu corpo, embora seja algo mais comum para atletas profissionais.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo foi motivado pelas aulas da disciplina Modelagem Matemática no Ensino A, ofertada no sétimo período do curso de Licenciatura em Matemática, e teve seu projeto construído a partir da experiência de participação em um projeto sobre Inovações Criativas no Ensino de Graduação. Essas duas vivências revelaram que é possível e viável a utilização da modelagem matemática como estratégia metodológica de ensino em disciplinas de graduação. A partir desse pressuposto, e considerando o potencial para estender tais vivências e estudos a outras disciplinas do curso, decidimos voltar nosso olhar para a disciplina de Física Teórica, uma vez que o título de licenciada em Física trouxe-nos a oportunidade de um olhar interdisciplinar entre as duas áreas.

As atividades aqui apresentadas refletem os objetivos iniciais do trabalho. A Modelagem Matemática, utilizada como uma estratégia de ensino, pode ser utilizada em outras disciplinas do curso de Licenciatura que sejam relacionadas com a própria matemática. É importante para o estudante ter esse contato em sua formação inicial, tanto com a Física quanto com a Modelagem, para que ele as possa usar de maneira eficiente em seu exercício da docência.

As atividades foram montadas combinando o entendimento do processo de modelagem de Bassanezi (2019), com a proposta de momentos de familiarização de Almeida, Silva e Vertuan (2020) e contemplando as ações de vivência de Silva (2007), e mostrando que o uso da Modelagem não é algo estático, podendo se adequar a cada momento, tema e objetivo.

Foram colocadas três atividades, cada uma com foco em um dos três momentos de familiarização apresentados por Almeida, Silva e Vertuan (2020), para que os estudantes se familiarizassem com a Modelagem enquanto estratégia de ensino e aprendizagem. A primeira foi concebida partindo do Momento 1, no qual o professor traz os dados, o modelo e os encaminhamentos que são necessários para que o estudante possa realizar a atividade. Assim foi apresentado o estudo da velocidade e das distâncias percorridas por um corredor, utilizando os conceitos do movimento retilíneo, levando o estudante a refletir sobre os dados calculados e se os dados obtidos são possíveis na realidade. Para tal foi levado em conta somente a velocidade do atleta até atingir o momento de velocidade constante. Um outro encaminhamento para a atividade poderia incluir os dados da fase de desaceleração

dele, mudando os resultados obtidos bem como as interpretações e questionamentos finais.

A segunda atividade foi concebida partindo do Momento 2, no qual o assunto e a situação-problema são fornecidos aos estudantes pelo professor, mas os dados e modelos deveriam ser feitos por eles. Com o estudo de movimentos parabólicos, podemos introduzir o movimento feito por um atleta de arremesso de peso, que executa esse movimento ao jogar uma bola a partir de seu ombro, com o objetivo de atingir uma distância máxima. Assim, uma discussão para ser feita com os estudantes no início da atividade diz respeito a como esse movimento é realizado, bem como quais são as equações que regem esse movimento. O estudante então é levado a buscar essas respostas, e buscar outros dados que necessita, como altura dos atletas e velocidade inicial de jogada. Ao final dessa atividade, o estudante encontrará o modelo que leva ao cálculo do ângulo ideal de lançamento para que a distância seja maximizada. Uma outra possibilidade para essa atividade é a de obter um modelo no qual consigamos calcular qual a velocidade ideal que leve a um melhor arremesso.

A terceira atividade foi concebida no Momento 3, no qual tanto a situação-problema, quanto os dados e encaminhamentos são buscados pelos estudantes. Ela é um exemplo de que podemos ter a inspiração para uma atividade vinda de vários lugares, já que a mesma foi pensada após o contato com um filme que abordou os conceitos de inércia e conservação do momento angular em um exercício de patinação no gelo. Isso levou a desenvolver a atividade que procurava saber qual a velocidade que um patinador consegue chegar ao realizar o giro e quantos giros podem ser feitos. Essa questão foi um pouco mais complicada, pois algumas simplificações foram necessárias para que conseguíssemos chegar a uma resposta, como adotar que o corpo de um patinador é um cilindro, o tamanho de seu braço, uma aproximação de altura e de massa. Nessa atividade foi possível calcular a velocidade final de um giro, mas não há como dizer quantos giros são possíveis, pois para isso, é necessário levar em conta as habilidades do patinador. O que temos como certeza, devido às leituras feitas, é que um patinador que consegue chegar aos 10 giros, já é considerado um atleta de alta performance e muito experiente.

Logo podemos perceber que propostas de uso da modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem abrem espaço para questionamentos e pesquisas que os exercícios tradicionais usualmente não demandam, levando assim a um estudo mais profundo dos temas tratados, bem como sua consideração no

mundo real. Também é possível que ao final da atividade não se possam responder às perguntas feitas inicialmente, porém devemos entender que mais do que a obtenção de um valor numérico como resultado, vale a oportunidade de vivência “ação de modelador” por parte do estudante, preconizada por Silva (2007).

Este trabalho nos permitiu estudar e formular essas atividades visando uma melhor aprendizagem do estudante. Também nos fez aspirar futuros estudos como, por exemplo, qual seria a melhor forma de introduzir atividades de modelagem para estudantes da graduação, ou quais seriam os impactos que a introdução dessas atividades proporcionaria na futura atuação profissional de licenciandos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2020. 157 p. 2ª reimpressão.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019. 5ª reimpressão.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARVALHO, Marie Jane Soares; NEVES, Breno Gonçalves Bragatti; MELO, Rafaela da Silva. **CultivEduca**. 2016. Disponível em: <http://cultiveduca.ufrgs.br/>. Acesso em: 18 jul. 2021.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; ESPIRITO SANTO, Adilson Oliveira do. **Possibilidades de modelagem matemática na sala de aula**. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni. Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: EDUEL, 2011. p. 161-180.

CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE ATLETISMO. **Recordes Mundiais**. 2022. Disponível em: <https://www.cbat.org.br/novo/?pagina=recordes>. Acesso em: 24 jun. 2022

CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE DESPORTOS NO GELO. **A Patinação Artística**. 2022. Disponível em: <http://www.cbdg.org.br/modalidades/patinacao-artistica/>. Acesso em: 27 jun. 2022

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**. volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

HAMANN, Renan. **Como funcionam os radares de trânsito [infográfico]**. 2011. Disponível em: <https://www.tecmundo.com.br/infografico/10350-como-funcionam-os-radares-de-transito-infografico-.htm>. Acesso em: 24 jun. 2022.

PARANÁ, SEED. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. 2020. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 18 jul. 2021.

SANTOS, Cintia Aparecida Bento dos; CURI, Edda. A formação dos professores que ensinam física no ensino médio. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 18, n. 4, p. 837-849, 2012.

SERWAY, Raymond A.; JEWETT, John W. **Princípios de Física**: volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014. Tradução da 5ª edição norte-americana.

SILVA, Denise Knorst. Ações de modelagem para a formação inicial de professores de Matemática. In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J.L. **Modelagem matemática na educação matemática brasileira**: Pesquisas e Práticas Educacionais. Recife: Sbem, 2007. v.3, p. 215-232.

SILVA, Denise Knorst; DALTO, Jader Otavio. Modelagem matemática na formação de professores: compartilhando uma experiência. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: EDUEL, 2011. p. 181-200.

SONHOS no Gelo. Direção: Tim Fywell. Produção: Bridget Johnson. [S.l.]: Walt Disney Pictures, 2005. 1 DVD (98 min), color.

STEWART, James. **Cálculo**: volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2010. Tradução da 6ª edição norte-americana.

TANAKA, Yukimifu. **Aprenda o idioma da patinação artística**. 2022. Disponível em: <https://olympics.com/pt/noticias/aprenda-o-idioma-da-patinacao-artistica>. Acesso em: 27 jun. 2022.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**: volume 1. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

UTFPR (Universidade Tecnológica Federal do Paraná) - Departamento Acadêmico de Matemática. **Projeto de abertura do Curso de Licenciatura em Matemática**: 2010. Curitiba, 2010.