

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COECI – COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

JOABBY DA COSTA BIZ

**ABORDAGEM MATEMÁTICA PARA A TEORIA DO ADENSAMENTO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO  
2021

**JOABBY DA COSTA BIZ**

**ABORDAGEM MATEMÁTICA PARA A TEORIA DO ADENSAMENTO**

**Mathematical approach to consolidation theory**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil/COECI da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).  
Orientador: Dr. Mauricio do Espirito Santo Andrade.

**TOLEDO**

**2021**



**Ministério da Educação**  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Câmpus Toledo  
Coordenação do Curso de Engenharia Civil



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

Título do Trabalho de Conclusão de Curso de Nº 261

### **Modelagem matemática para a teoria do adensamento**

por

**Joabby da Costa Biz**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 15:50 h do dia **30 de Abril de 2021** como requisito parcial para a obtenção do título **Bacharel em Engenharia Civil**. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado **APROVADO**.

---

Prof<sup>a</sup> Dra. Dione Ines Christ Milani  
(UTFPR – TD)

---

Prof Dr. Elmagno Catarino Santos Silva  
(UTFPR – TD)

---

Prof Dr. Maurício do Espirito Santo Andrade  
(UTFPR – TD)  
Orientador

---

Visto da Coordenação  
Prof. Dr. Gustavo Savaris  
Coordenador da COECI

## DEDICATÓRIA

Ao meu pai Vanderlei, a minha mãe Ana e a minha irmã Sarah que me apoiaram durante essa jornada.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por me permitir concluir mais esta etapa em minha vida, sem sua ajuda jamais teria chegado até aqui.

Ao meu professor orientador, Prof. Maurício do Espírito Santo Andrade, pelo carinho, dedicação, confiança e auxílio na realização deste trabalho.

A minha família, em especial minha companheira Ana Karen, pela compreensão e apoio durante esta caminhada.

A todos os meus professores do curso de Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná que contribuíram para minha formação.

Aos amigos que me auxiliaram a enfrentar os desafios da graduação. A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste sonho, meus sinceros agradecimentos.

## RESUMO

BIZ, Joabby C.. ABORDAGEM MATEMÁTICA PARA A TEORIA DO ADENSAMENTO. 54f. Trabalho de Conclusão de Curso – COECI – Coordenação do Curso de Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo – PR. 2021.

As camadas argilosas quando sujeitas a carregamentos verticais deformam-se no tempo, a esse processo dá-se o nome de adensamento. Tais deformações podem provocar danos consideráveis nas edificações. Neste sentido, é proposto um modelo matemático para a previsão do adensamento em argilas saturadas, levando-se em consideração os princípios apresentados nas Teorias de Terzaghi e Frohlich (1936), Taylor (1942) e Barden (1965). O modelo considera a existência de uma parcela viscosa da tensão efetiva vertical e incorpora uma lei de viscosidade não linear como propriedade fundamental. A equação obtida é apresentada em termos de dissipação de excesso de poropressão normalizada. Devido a complexidade do modelo, é aplicado a técnica numérica de diferenças divididas finitas para a solução teórica. Os resultados encontrados mostram que a parcela viscosa da tensão efetiva vertical atua retardando o adensamento. Ainda, o ajuste teórico obtido com este modelo para fator viscosidade igual a um é mais promissor que as propostas de Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014) quando comparados com os respectivos resultados experimentais.

**Palavras-chave:** Adensamento; Viscosidade; Não Linearidade; Argila saturada.

## ABSTRACT

BIZ, Joabby C.. MATHEMATICAL APPROACH TO CONSOLIDATION THEORY. 54f. Trabalho de Conclusão de Curso – COECI – Coordenação do Curso de Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo – PR. 2021.

The clay layers, when subjected to vertical loads, deform in time, this process is called consolidation. Such deformations can cause considerable damage to buildings. In this sense, a mathematical model is proposed to predict consolidation in saturated clays, taking into account the principles presented in the Theories of Terzaghi and Frohlich (1936), Taylor (1942) and Barden (1965). The model considers the existence of a viscous portion of the effective vertical stress and incorporates a nonlinear viscosity law as a fundamental property. The obtained equation is presented in terms of dissipating excess normalized poropressure. Due to the complexity of the model, the numerical technique of finite divided differences is applied to the theoretical solution. The results found show that the viscous portion of the effective vertical stress acts by delaying the consolidation. Still, the theoretical adjustment obtained with this model for a viscosity factor equal to one is more promising than the proposals of Terzaghi and Frohlich (1936) and Andrade (2014) when compared with the respective experimental results.

**Keywords:** Consolidation; Viscosity; Nonlinearity; Saturated Clay.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Malha computacional unidimensional.....	14
Figura 2 – Malha computacional bidimensional.....	14
Figura 3 – Molécula computacional para o método explícito.....	16
Figura 4 – Molécula computacional para o método implícito simples.....	17
Figura 5 – Molécula computacional para o método de Crank-Nicolson .....	18
Figura 6 – Tipos de água presentes nos vazios do solo .....	19
Figura 7 – Analogia mecânica.....	20
Figura 8 – Variação linear do índice de vazios com a tensão efetiva.....	21
Figura 9 – Curva de compressão .....	24
Figura 10 – Velocidade de deformação x Resistência estrutural plástica .....	25
Figura 11 – Grau de adensamento a ser dissipado x Fator Tempo para diferentes valores de n.....	27
Figura 12 –Grau médio de adensamento x Fator Tempo para diferentes valores de R .....	28
Figura 13 – Isócronas para $\lambda$ e para $u'$ .....	28
Figura 14 – Curva teórica de Andrade (2014) x experimental.....	30
Figura 15 – Representação esquemática do solo .....	31
Figura 16 – Fluxo através de um volume de solo.....	32
Figura 17 – Relação e x $\sigma'_{vs}$ .....	35
Figura 18 – Isócronas – n=5 e V=0,008.....	43
Figura 19 – Isócronas – n=5 e V=1.....	44
Figura 20 – Isócronas – n=5 e V=0,008.....	45
Figura 21 – Isócronas – n=5 e V=1.....	45
Figura 22 – Relação $u/\Delta\sigma_v$ x $t(\log)$ - n=5.....	47
Figura 23 – $\bar{U}$ x T com n=5 juntamente com Terzaghi e Frohlich (1936) .....	48
Figura 24 –Ajuste das curvas teóricas à experimental.....	51



## LISTA DE SIMBOLOS

$U$	Função incógnita da equação do tipo calor
$k'$	Coefficiente de condutividade térmica
$u_i$	Acréscimo de poropressão
$\sigma'$	Tensão efetiva
$\Delta\sigma$	Acréscimo de tensão
$e$	Índice de vazios
$U_z$	Grau de Adensamento Localizado
$a_v$	Coefficiente de compressibilidade
$K_z$	Coefficiente de permeabilidade
$\gamma_w$	Peso específico da água
$Pp$	Resistência estrutural plástica na teoria de Taylor
$p$	Tensão efetiva na teoria proposta por Taylor
$p_b$	Resistência de ligação da teoria de Taylor
$p_v$	Resistência estrutural viscosa da teoria de Taylor
$\tau$	Resistência viscosa do modelo proposto por Barden
$b$	Coefficiente de viscosidade estrutural não-linear de Barden
$u'$	Excesso de poropressão adimensionalizada
$u$	Excesso de poropressão
$\Delta P$	Acréscimo de tensão vertical do modelo de Barden
$\lambda$	Grau de adensamento a ser dissipado no modelo de Barden
$T$	Fator tempo adimensional
$c$	Parâmetro relacionado a permeabilidade no modelo de Barden
$a$	Coefficiente de compressibilidade linear do modelo de Barden
$H$	Espessura da camada a ser drenada
$t$	Tempo
$R$	Fator adimensional do modelo de Barden
$T_s$	Fator tempo associado a viscosidade no modelo de Barden dado por $\frac{t(\Delta P)^{-1}}{a b^n}$
$\eta$	Coefficiente de viscosidade no modelo proposto por Andrade

$\Delta\sigma_v$	Acréscimo de tensão vertical no modelo de Andrade
$Z$	Profundidade normalizada no modelo de Andrade
$z$	Profundidade
$V$	Fator viscosidade no modelo de Andrade
$m$	Número inteiro positivo
$u_h$	Pressão hidrostática

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1	JUSTIFICATIVA	12
1.2	OBJETIVOS	12
1.2.1	Objetivo Geral	13
1.2.2	Objetivos Específicos	13
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>13</b>
2.1	MÉTODOS NUMÉRICOS	13
2.1.1	Discretização	14
2.1.2	Método das Diferenças Finitas (MDF)	15
2.2	COMPRESSÃO SECUNDÁRIA AO LONGO DO TEMPO	18
2.3	TEORIA DO ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL DE TERZAGHI	20
2.4	A TEORIA DO ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL DE TAYLOR	23
2.4.1	Barden (1965)	26
2.4.2	Andrade (2014)	29
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>40</b>
4.1	RESULTADOS TEÓRICOS	40
4.2	SOLUÇÕES GRÁFICAS	43
4.3	AJUSTE DA CURVA TEÓRICA À EXPERIMENTAL	48
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>53</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Define-se recalque como o deslocamento vertical da fundação em relação a uma referência fixa, indeslocável, como o topo rochoso (CINTRA; AOKI; ALBIERO, 2011). Os recalques são oriundos das deformações por variação de volume e/ou distorções do maciço de solo compreendido entre a fundação e o indeslocável.

Toda edificação sofre recalques, dessa forma, considerações como a de pilares sobre apoios fixos que são feitas muitas vezes no cálculo estrutural estão em desacordo com a realidade.

Assim, para se ter uma modelagem estrutural mais próxima da real, é necessário que se considere no processo da análise da estrutura o adensamento do solo (CINTRA; AOKI; ALBIERO, 2011).

Com as publicações de Karl Terzaghi em 1925, um novo período da mecânica dos solos teve início. Terzaghi, conhecido como o pai da mecânica dos solos moderna, desenvolveu a teoria para o adensamento do solo que é uma das teorias mais importantes dentro da engenharia geotécnica e utilizada atualmente (BRAJA, 2010).

De acordo com Andrade (2009):

Adensamento é o processo de compressão de um solo saturado ao longo do tempo, ocasionada pela expulsão de uma quantidade de água, igual à redução do volume de vazios, como resultado da transferência gradual do excesso de poro-pressão, gerado pelo carregamento, para as tensões efetivas.

As deformações verticais, também conhecidas como recalque, são divididas em dois grupos que se diferenciam pelo tipo de solo em que o carregamento é aplicado. Em solos arenosos ou argilosos não saturados o recalque ocorre de maneira mais rápida, já em solos argilosos saturados as deformações ocorrem mais lentamente. O comportamento do solo saturado quanto a velocidade em que ocorre o recalque está relacionado com a taxa de saída de água dos seus vazios (PINTO, 2006).

Problemas que envolvem as deformações unidimensionais dos solos podem ser representados por modelos matemáticos compostos de equações diferenciais parciais, mais precisamente do tipo calor (parabólica). De acordo com Mendonça (2005, p.21, apud Wood,1990) o conhecimento é alcançado pela construção e análise de modelos. Estes modelos podem ser utilizados para a previsão e solução de problemas importantes desde que seus resultados teóricos, obtidos através de modelagem matemática, se aproximem dos resultados observados na prática.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

As equações diferenciais parciais permitem avaliar, com base em dados presentes, o comportamento futuro de diversos problemas. Entretanto, algumas modelagens podem resultar em equações diferenciais parciais complexas cuja solução exata não pode ser obtida por métodos analíticos. Para estes casos faz-se necessário utilizar um método numérico que é definido como sendo um processo de discretização, ou seja, transforma um problema contínuo com um número infinito de variáveis em um problema discreto com um número finito de variáveis que pode ser resolvido computacionalmente (FRANCO, 2006).

A teoria original para o adensamento unidimensional foi elaborada por Terzaghi e Frohlich (1936) sendo a teoria em uso geral, contudo, uma série de experimentos consistentemente observados indicam que a teoria proposta por Terzaghi e Frohlich (1936) é simplificada demais, não levando em conta fatores indispensáveis para a caracterização adequada do comportamento do solo, como por exemplo a resistência viscosa. Esta abordagem simplista leva a resultados teóricos que não são observados experimentalmente.

Diante do exposto, justifica-se o estudo proposto a fim de se analisar um modelo matemático relacionado ao adensamento dos solos mais abrangente, que gere um resultado mais próximo do observado na prática.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo desse trabalho é encontrar um modelo matemático para o adensamento unidimensional de solos argilosos saturados.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Entender como o fenômeno do adensamento pode ser modelado matematicamente.
- Analisar um modelo matemático que incorpora a não-linearidade da resistência viscosa no fenômeno do adensamento.
- Comparar os resultados fornecidos por este modelo com uma curva experimental obtida a partir de um ensaio de adensamento de longa duração.
- Verificar se o resultado decorrente deste modelo consegue reproduzir o fenômeno do adensamento secundário.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

Problemas descritos por equações diferenciais parciais podem exigir diversas técnicas para sua solução. Sendo analíticas os resultados são exatos, e, no caso de problemas em que a solução exata não pode ser obtida, utiliza-se métodos numéricos que apresentam resultados aproximados (MELO, 2011).

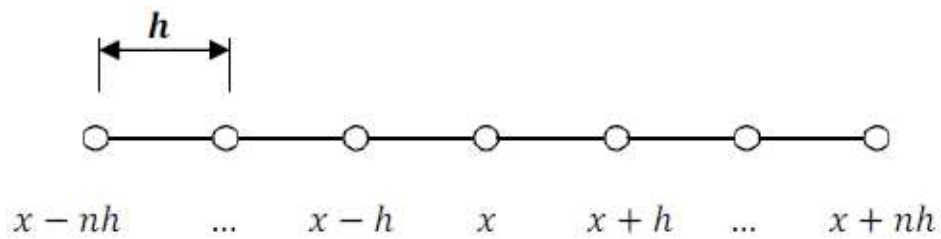
Os métodos numéricos mais utilizados são: o método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno, método dos volumes finitos e o método das diferenças finitas. A presente revisão bibliográfica tratará apenas do método das diferenças finitas (MDF).

### 2.1.1 Discretização

A resolução de problemas através de método numérico inicia-se com a discretização da região em estudo. O processo consiste em particionar o domínio definindo um conjunto finito de pontos, conhecidos como moléculas computacionais, que formam uma malha.

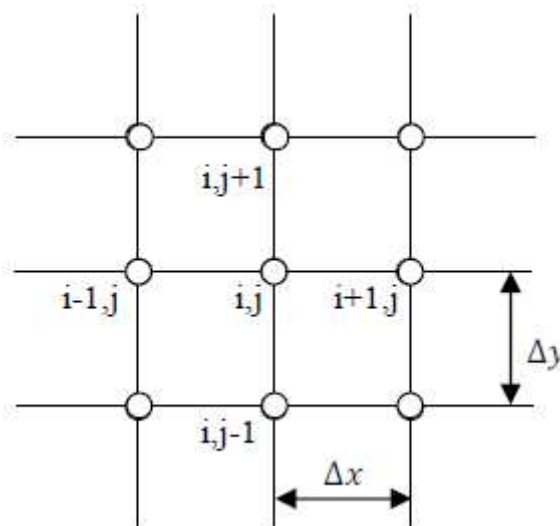
De acordo com o número de variáveis do fenômeno define-se a malha. Para problemas com uma única variável a malha é do tipo unidimensional (ver figura 1), para problemas com duas variáveis, por exemplo problemas espaço-temporais, a malha será bidimensional (ver figura 2) (MELO, 2011).

**Figura 1 – Malha computacional unidimensional**



Fonte: Melo (2011)

**Figura 2 – Malha computacional bidimensional**



Fonte: Melo (2011)

### 2.1.2 Método das Diferenças Finitas (MDF)

O método das diferenças finitas trata-se de um processo de substituição das derivadas da equação diferencial parcial por aproximações, transformando a EDP em um sistema de equações algébricas (RUGGIERO, 1996, p.357).

Tais aproximações podem ser feitas pelos métodos explícito e implícito que serão aplicados na EDP do tipo calor.

#### A. Método das Diferenças Finitas explícito aplicado na equação diferencial parcial do tipo calor

A equação do tipo calor é da forma  $\frac{\partial U}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , Sendo  $U$  a função incógnita,  $k'$  o coeficiente de condutividade térmica,  $t$  a componente temporal e  $x$  a componente espacial. Para sua resolução é necessário substituir a derivada primeira no tempo e a derivada segunda no espaço por aproximações que podem ser regressiva, progressiva ou centrada.

Para a derivada segunda adota-se a aproximação centrada por ser mais acurada (CHAPRA; CANALE, 2008, p.723), sendo ela:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i+1}^l - 2U_i^l + U_{i-1}^l}{\Delta x^2} \quad (1)$$

Para representar a derivada no tempo foi utilizado a aproximação progressiva (CHAPRA; CANALE, 2008, p.723):

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{l+1} - U_i^l}{\Delta t} \quad (2)$$

A figura 3 ilustra uma molécula computacional para as referidas aproximações no espaço e no tempo para o método explícito.

Substituindo as equações (1) e (2) na equação do tipo calor e reorganizando chega-se a seguinte expressão:



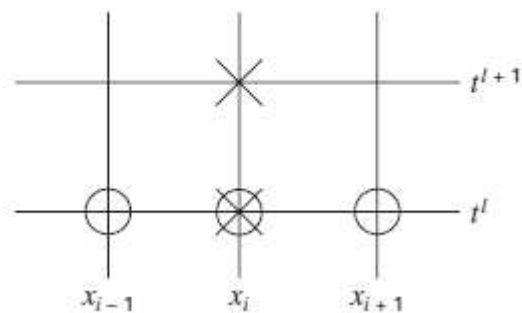
$$U_i^{l+1} \cong U_i^l + \frac{k \Delta t (U_{i+1}^l - 2U_i^l + U_{i-1}^l)}{\Delta x^2} \quad (3)$$

Pela equação (3) é possível obter de forma direta o valor do ponto na malha para um tempo avançado, desde que conhecida a condição inicial do problema.

**Figura 3 – Molécula computacional para o método explícito**

X Ponto da grade envolvido na diferença no tempo

○ Ponto da grade envolvido na diferença no espaço



Fonte: Chapre&Canale, p.724 (2011)

## B. Método das Diferenças Finitas implícito aplicado na equação diferencial do tipo calor

Enquanto o método explícito permite obter diretamente os valores da aproximação da molécula computacional, no método implícito chega-se a um sistema de equações (CHAPRA; CANALE, 2008, p.727).

O método implícito pode ser implícito simples ou método de Crank-Nicolson que é uma combinação dos métodos explícito e implícito simples.

### B.1 Método implícito simples

Neste método a aproximação para a derivada segunda da EDP é feita utilizando a diferença centrada no espaço para um tempo avançado (CHAPRA; CANALE, 2008, p.727):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i+1}^{l+1} - 2U_i^{l+1} + U_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \quad (4)$$

Para a derivada no tempo também foi utilizado a diferença progressiva apresentada na equação (2) (CHAPRA; CANALE, 2008, p.723).

A figura 4 ilustra uma molécula computacional para as referidas aproximações no espaço e no tempo para o método implícito simples.

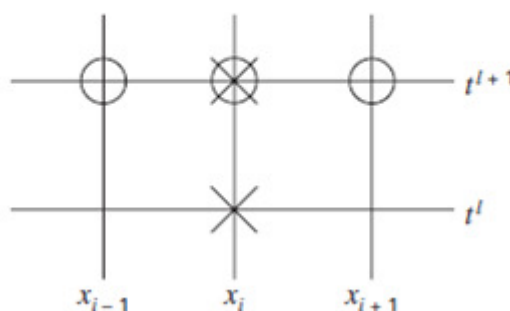
A substituição e reorganização das equações (4) e (2) na equação do tipo calor leva ao seguinte resultado:

$$U_i^l \cong U_i^{l+1} - \frac{k \Delta t (U_{i+1}^{l+1} - 2U_i^{l+1} + U_{i-1}^{l+1})}{\Delta x^2} \quad (5)$$

**Figura 4 – Molécula computacional para o método implícito simples**

✕ Pontos da grade envolvidos em diferenças no tempo

○ Pontos da grade envolvidos em diferenças no espaço



Fonte: Chapre&Canale, p.729 (2011)

## B.2 Método de Crank-Nicolson

Nele a aproximação para a derivada no espaço é a média das aproximações para o termo feitas pelos métodos explícito e implícito simples (CHAPRA; CANALE, 2008, p.730), sendo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left[ \frac{U_{i+1}^{l+1} - 2U_i^{l+1} + U_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1}^l - 2U_i^l + U_{i-1}^l}{\Delta x^2} \right] \quad (6)$$

A aproximação para a primeira derivada no tempo é do tipo (CHAPRA; CANALE, 2008, p.730):

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{l+1} - U_i^l}{2 * \frac{\Delta t}{2}} \quad (7)$$

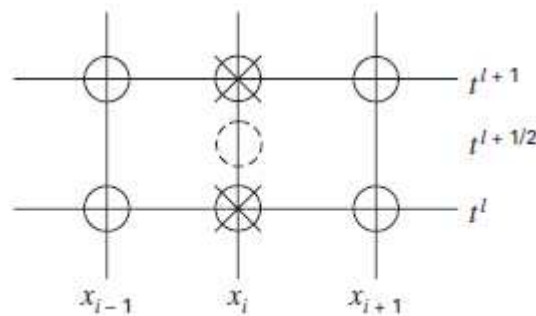
A figura 5 ilustra uma molécula computacional para as referidas aproximações no espaço e no tempo para o método de Crank-Nicolson.

As equações (6) e (7) substituídas na EDP do tipo calor resulta:

$$\frac{k}{2} * \left[ \frac{U_{i+1}^{l+1} - 2U_i^{l+1} + U_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1}^l - 2U_i^l + U_{i-1}^l}{\Delta x^2} \right] \cong \frac{U_i^{l+1} - U_i^l}{\Delta t} \quad (8)$$

**Figura 5 – Molécula computacional para o método de Crank-Nicolson**

- X Pontos da grade envolvidos em diferenças no tempo
- O Pontos da grade envolvidos em diferenças no espaço



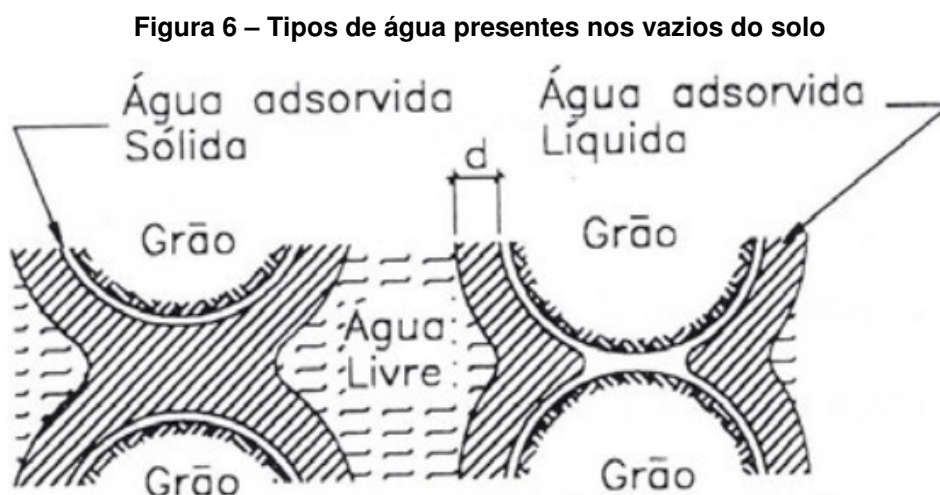
Fonte: Chapre&Canale, p.729 (2011)

## 2.2 COMPRESSÃO SECUNDÁRIA AO LONGO DO TEMPO

A deformação do solo quando sob aplicação de cargas ocorre pela expulsão da água presente em seus vazios. Nas argilas saturadas esse processo pode se desenvolver lentamente devido à baixa permeabilidade que o solo apresenta. A este fenômeno dá-se o nome de adensamento (PINTO, 2006, p.187).

Segundo Terzaghi (1941), os grãos de solo saturado são envoltos por uma camada de água adsorvida, em “estado sólido”, com grande aderência. A medida que

se distancia da superfície das partículas sólidas, a viscosidade da água adsorvida vai diminuindo até se tornar água adsorvida líquida. Para além de uma certa distância “d” a água recebe o nome de água livre e é ela quem será expulsa do solo durante o adensamento (ANDRADE, 2014, p.15). A figura 6 ilustra as águas adsorvidas sólida e líquida descritas na teoria de Terzaghi (1941).



Fonte: Terzaghi (1941)

Ainda de acordo com Terzaghi (1941), as tensões no solo podem ser parte transmitidas pelos contatos estabelecidos pela água adsorvida sólida e parte pelos contatos estabelecidos pela água adsorvida líquida. Caso as tensões sejam transmitidas exclusivamente pelos contatos sólidos, diz-se que a argila se encontra em estado solidificado. Esse estado é precedido pelo estado lubrificado em que parte das tensões são transmitidas por contatos viscosos (ANDRADE, 2014, p.16).

Terzaghi (1941) publicou uma hipótese descrevendo o processo contínuo de adensamento primário e secundário. Durante o adensamento primário a tensão total é suportada pela água livre contida nos vazios do solo. Quando a presença de água livre no solo se torna insignificante tem-se início o adensamento secundário, nesta etapa a tensão aplicada ao solo é compartilhada pelas parcelas viscosa e sólida. Com a evolução do tempo ocorre uma transferência gradual da parcela viscosa para a parcela “sólida”.

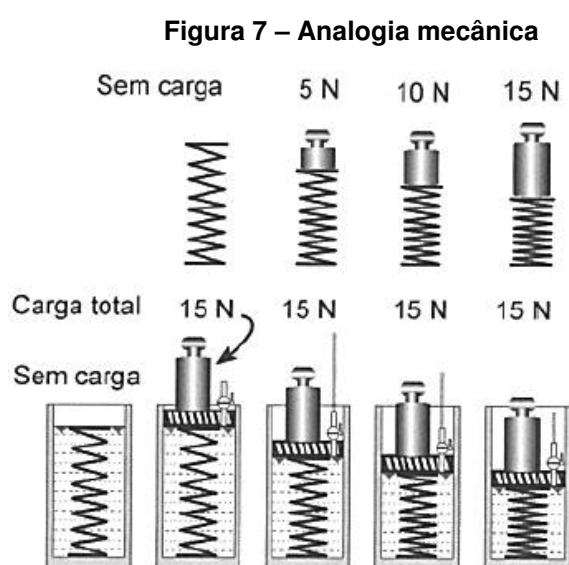
A medida que os grãos do solo vão se aproximando, a viscosidade efetiva vai aumentando de forma não-linear, as partículas vão se rearranjando, com velocidade

decrecente, até o momento em que o sistema alcança o equilíbrio. Neste momento, a tensão total aplicada no solo é resistida apenas pelos contatos sólido-sólido existentes entre os grãos, caracterizando o fim do adensamento secundário (BARDEN, 1965, p.348).

### 2.3 TEORIA DO ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL DE TERZAGHI

Para o entendimento do processo de adensamento do solo Terzaghi utilizou a analogia mecânica. Considerando o solo como sendo semelhante a uma mola, a sua deformação será proporcional ao carregamento aplicado. Para solo saturado a analogia pode ser feita considerando a mola dentro de um pistão preenchido com água e com um orifício de pequena dimensão, cuja função é representar a permeabilidade do solo.

Quando se aplica um carregamento constante no solo, no instante inicial, a mola não se deforma, pois ainda não ocorreu expulsão de água dos vazios, assim todo carregamento é suportado pela água. Devido à sobre pressão gerada pela carga, a água começa a sair do pistão, através do orifício, transferindo a reação ao esforço aplicado para a mola, e assim deformando-a. O processo continua até que todo o carregamento seja suportado integralmente pela mola (PINTO, 2006, p.202). A figura 7 ilustra a analogia descrita por Terzaghi.

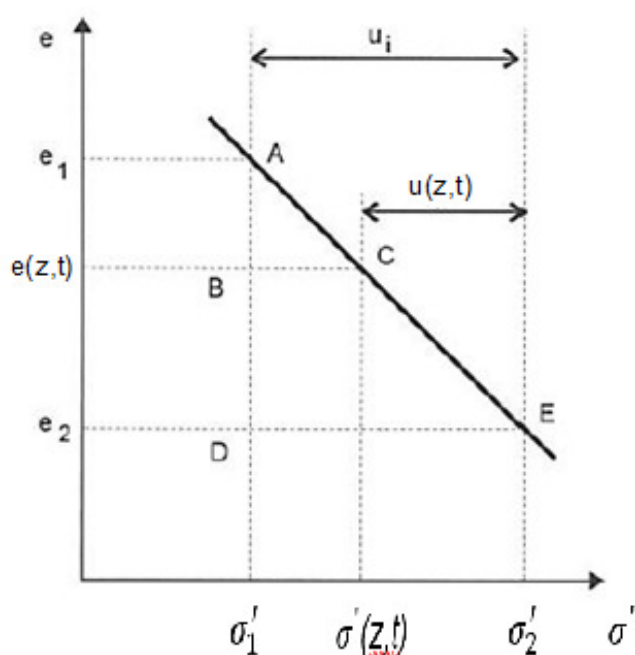


Fonte: Pinto, p.205 (2011)

Na elaboração de sua teoria, Terzaghi considera algumas hipóteses para sua validação, sendo: o solo está totalmente saturado, a compressão ocorre em uma única direção, o fluxo de água também ocorre em uma única direção, o solo é homogêneo, a água e os grãos do solo são praticamente incompressíveis se comparados com a compressibilidade do solo, o solo pode ser considerado com um elemento infinitesimal apesar de ser formado por grãos e vazios, o fluxo é governado pela Lei de Darcy, as características do solo não variam durante o processo de adensamento e o índice de vazios varia linearmente com o aumento da tensão efetiva durante o processo (PINTO, 2006, p.203).

Uma análise especial é feita para a última hipótese supracitada que é representada na figura 8:

**Figura 8 – Variação linear do índice de vazios com a tensão efetiva**



Fonte: Pinto, p.208 (2011)

Um dado solo sob tensão efetiva inicial  $\sigma'_1$  e índice de vazios inicial  $e_1$ , quando carregado, fica submetido no seu instante inicial a um acréscimo de poropressão ( $u_i$ ) de magnitude igual ao acréscimo de tensão  $\Delta\sigma$  aplicado. Neste momento, não há

variação do índice de vazios. Com o passar do tempo esse excesso de poropressão vai se dissipando até que todo acréscimo de tensão seja suportado pelo solo, atingindo uma tensão efetiva final  $\sigma'_2$  com redução do índice de vazios para um valor de  $e_2$ .

Por semelhança de triângulos obtém-se a expressão para o Grau de Adensamento Localizado ( $U_z$ ), que é uma relação entre um acréscimo de tensão efetiva para uma dada profundidade e um dado tempo e o acréscimo total de tensão efetiva, sendo:

$$U_z = \frac{\sigma'(z, t) - \sigma'_1}{\sigma'_2 - \sigma'_1} \quad (9)$$

Este parâmetro também representa o grau de dissipação de excesso de poropressão, que consiste na relação entre a poropressão dissipada em um dado tempo e profundidade e a poropressão total resultante do carregamento (PINTO, 2006, p.209):

$$U_z = \frac{u_i - u(z, t)}{u_i} \quad (10)$$

A consideração de Terzaghi de que a relação entre tensão efetiva e índice de vazios é linear permite definir a inclinação da reta na figura 8 como um indicador da compressibilidade do solo. A essa inclinação dá-se o nome de coeficiente de compressibilidade ( $a_v$ ), definido pela expressão:

$$a_v = -\frac{e_2 - e_1}{\sigma'_2 - \sigma'_1} = -\frac{de}{d\sigma'} \quad (11)$$

onde:

$e_1$ : índice de vazios inicial.

$e_2$ : índice de vazios final.

Sabendo que a variação da tensão efetiva corresponde a variação da poropressão, porém com sentido contrário, é possível reescrever a equação (11) (PINTO, 2006, p. 209):

$$a_v = \frac{de}{du} \quad (12)$$

Esta expressão foi utilizada na dedução da teoria para o adensamento de Terzaghi cuja equação é a seguinte (PINTO, 2006, p.212):

$$\frac{K_z (1 + e_1)}{\gamma_w a_v} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (13)$$

sendo:

$u$ : função incógnita excesso de poropressão.

$K_z$ : coeficiente de permeabilidade.

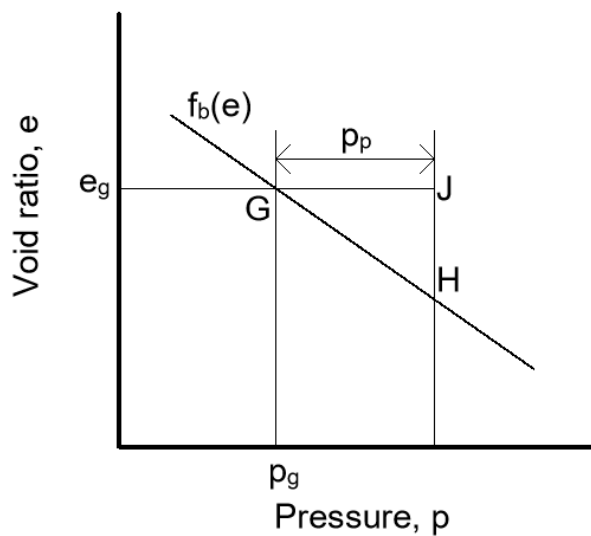
$\gamma_w$ : peso específico da água.

## 2.4 A TEORIA DO ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL DE TAYLOR

Taylor (1942) apresentou uma teoria nomeada Teoria B, esse nome serviu para diferenciar da Teoria A enunciada em 1940 por Taylor e Merchant. Na Teoria B, a tensão efetiva vertical para um dado índice de vazios, por estar acrescida de uma resistência viscosa representada pelo trecho GJ na figura 9, é superior a proposta por Terzaghi. Esse autor considera que cada índice de vazios está associado a uma única tensão efetiva, representada pela reta definida pela função  $f_b(e)$  da figura 9. A resistência viscosa adicional (resistência estrutural plástica), definida como  $P_p$ , da Teoria B é dependente da velocidade de deformação (ANDRADE, 2014, p.17).



**Figura 9 – Curva de compressão**



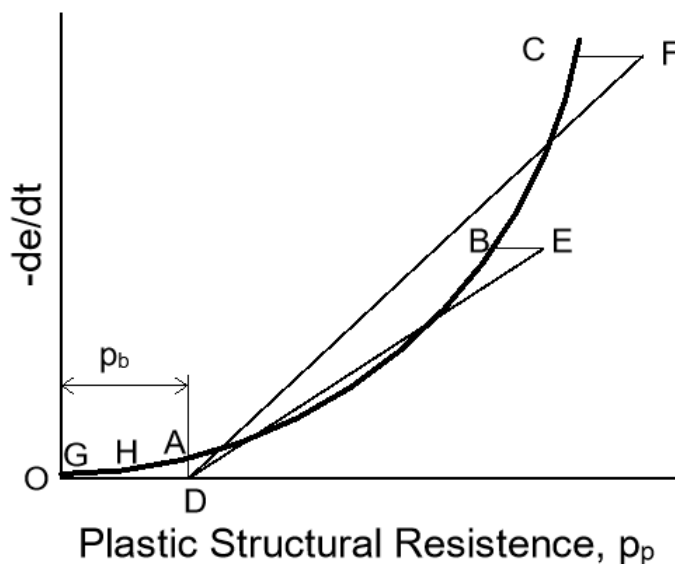
Fonte: Taylor (1942)

Pela figura 9 pode-se definir a tensão efetiva ( $p$ ), como sendo:

$$p = f_b(e) + p_p \quad (14)$$

Taylor (1942) considerou não-linear a relação entre a velocidade de deformação e a resistência viscosa. A figura 10 ilustra o modelo desenvolvido por Taylor.

Figura 10 – Velocidade de deformação x Resistência estrutural plástica



Fonte: Taylor (1942)

No desenvolvimento da Teoria B Taylor não trabalhou com a não-linearidade da viscosidade. No entanto, dividiu a resistência da argila ( $p_p$ ), também conhecida como resistência estrutural plástica, em duas parcelas: resistência de ligação ( $p_b$ ), relacionada ao adensamento secundário, e resistência estrutural viscosa ( $p_v$ ), relacionada ao adensamento primário, assim:

$$p = f_b(e) + p_b + p_v \quad (15)$$

A teoria B, ao aproximar o trecho OA da figura 10 ao trecho OD, desconsidera o adensamento secundário. Contudo, a relevância desta teoria em relação a teoria de Terzaghi está na consideração da resistência estrutural plástica (ANDRADE, 2014, p.18).

### 2.4.1 Modelo matemático de Barden (1965)

Barden (1965) na elaboração de seu modelo leva em conta a não-linearidade da resistência viscosa. Para descrever a curva da figura 10 ele incorpora em sua análise a equação proposta por Ostwald, dada por:

$$\tau = b \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right)^{1/n} \quad (16)$$

em que:

$\tau$ : resistência viscosa.

$b$ : coeficiente de viscosidade estrutural não-linear.

$n$ : número inteiro.

No desenvolvimento do modelo ele obtem um sistema de equações diferenciais parciais dada por:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial T} = -\frac{1}{R} (\lambda - u')^n \quad (18)$$

onde:

$u'$ : função incógnita excesso de poropressão adimensionalizada dada por  $\frac{u}{\Delta P}$

$\lambda$ : grau de adensamento a ser dissipado.

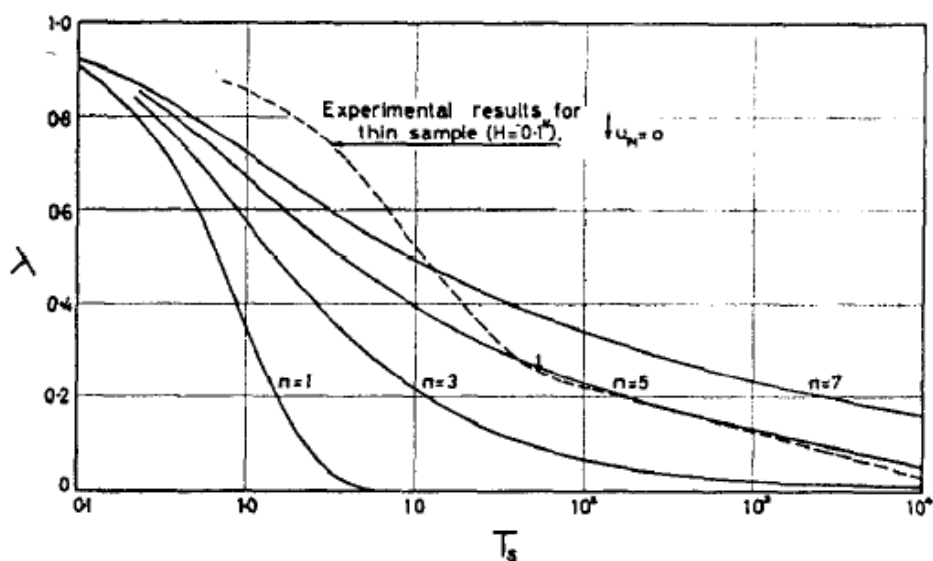
$T$ : fator tempo adimensional dado por  $\frac{c}{a} \frac{t}{H^2}$

$R$ : fator adimensional dado por  $\frac{T}{T_s}$

Para a resolução das equações (17) e (18) foram utilizados dois métodos numéricos. O primeiro foi uma combinação do método implícito simples com processo de relaxação, denominado Método A. O segundo, chamado de Método B, foi uma modificação do método explícito convencional usando a equação de Terzaghi.

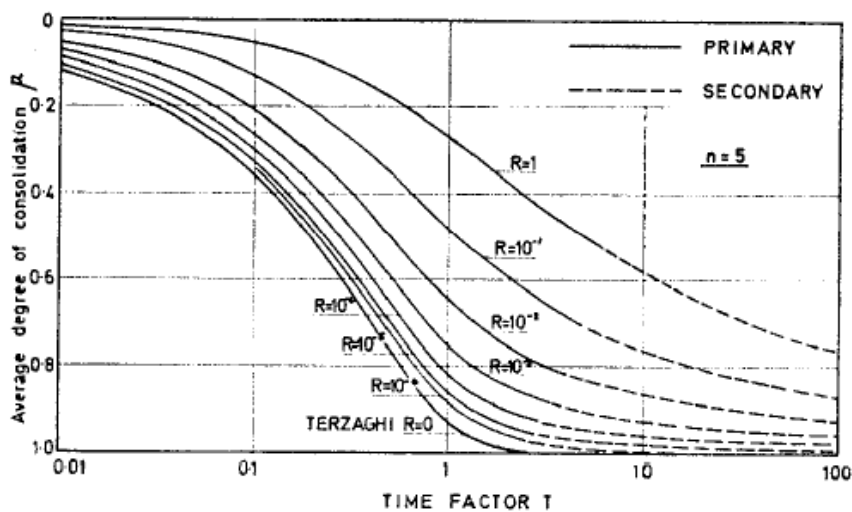
O resultado dessa modelagem foi apresentado em gráficos. A figura 11 relaciona o grau de adensamento a ser dissipado ( $\lambda$ ) com o fator tempo associado a viscosidade ( $T_s$ ) para diferentes valores de  $n$ . A figura 12 associa o grau médio de adensamento ( $\mu$ ) com o fator tempo ( $T$ ) para diferentes valores de  $R$ . A figura 13 mostra as isócronas obtidas no modelo de Barden (1965).

Figura 11 – Grau de adensamento a ser dissipado x Fator Tempo para diferentes valores de  $n$



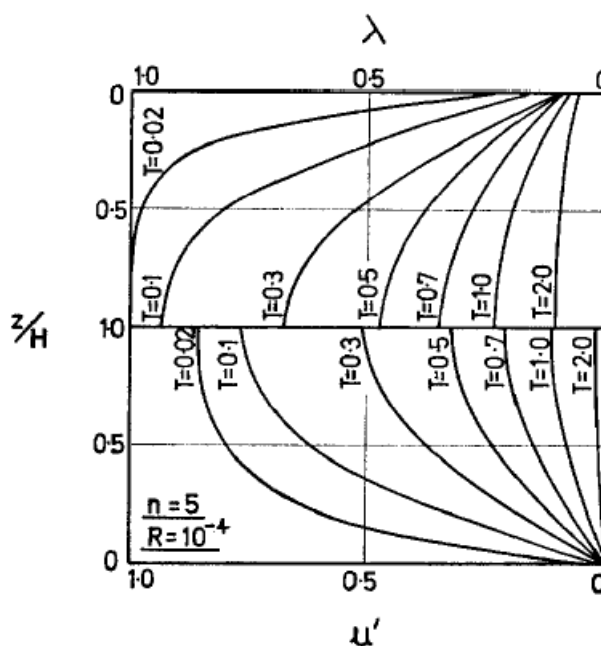
Fonte: Barden (1965)

Figura 12 – Grau médio de adensamento  $\bar{u}$  x Fator Tempo para diferentes valores de  $R$



Fonte: Barden (1965)

Figura 13 – Isócronas para  $\lambda$  e para  $u'$



Fonte: Barden (1965)

Nas figuras 11 e 12 não foi possível visualizar a “dupla-onda” (ver curva experimental na Figura 14) que caracteriza o adensamento secundário. Esse fato pode ser consequência de alguma das hipóteses adotadas por Barden (1965) ou por considerar um tempo insuficiente para a ocorrência do fenômeno. Barden (1965)

verificou que a curva teórica (ver figura 11), em seu trecho final, obtida para  $n=5$ , se ajustou adequadamente à curva experimental.

Na figura 13, Barden (1965) mostrou que as isócronas de excesso de pororessão normalizada ( $u'$ ) decaem mais rapidamente que as do índice de vazios apresentado implicitamente através do parâmetro  $\lambda$ . Portanto, bem diferente da solução de Terzaghi na qual as isócronas de  $\lambda$  e  $u'$  são idênticas.

#### 2.4.2 Modelo matemático de Andrade (2014)

Andrade (2014) apresentou uma equação linear para o adensamento unidimensional admitindo a tensão efetiva composta por duas parcelas: uma parcela viscosa e outra estabelecida pelos contatos sólido-sólido. No desenvolvimento de sua teoria obteve a EDP de ordem 3 que segue:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{M' \partial^2 u}{\eta \partial z^2} - \frac{\gamma_w \partial u}{\eta k_z \partial t} = 0 \quad (19)$$

A solução analítica da equação (19) é apresentada a seguir:

$$\frac{u(Z, T, V)}{\Delta \sigma_v} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M(V M^2 + 1)} e^{\frac{-M^2 T}{(V M^2 + 1)}} \text{sen}(MZ) \quad (20)$$

onde:

$Z$ : Profundidade normalizada, dado por  $\frac{z}{H}$ .

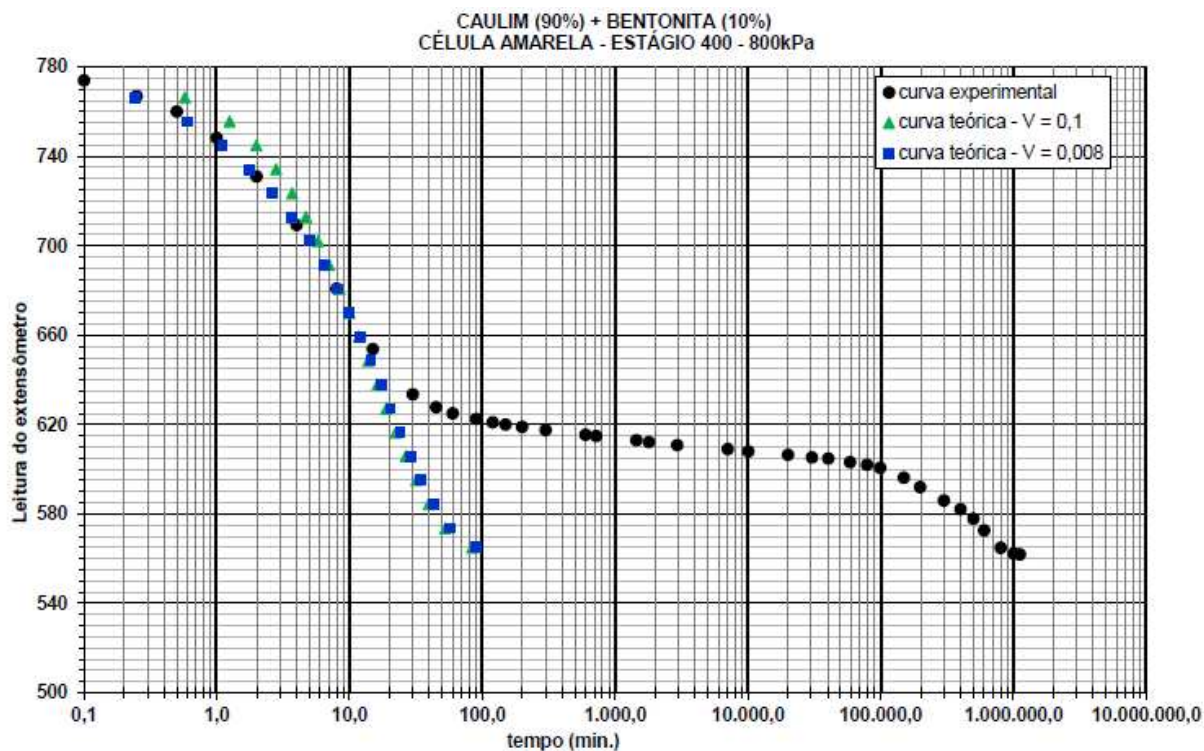
$T$ : Fator tempo, dado por  $\frac{c_v^* t}{H^2}$ .

$V$ : Fator viscosidade, dado por  $\frac{\eta k_z}{\gamma_w H^2}$ .

$M$ : Termo dado por  $\frac{(2m+1)\pi}{2}$

As soluções gráficas da expressão (20) para os fatores viscosidade ( $V$ ) iguais a 0,1 e 0,008 ajustadas a curva experimental de longa duração são apresentadas na figura (14):

Figura 14 – Curva teórica de Andrade (2014) x experimental



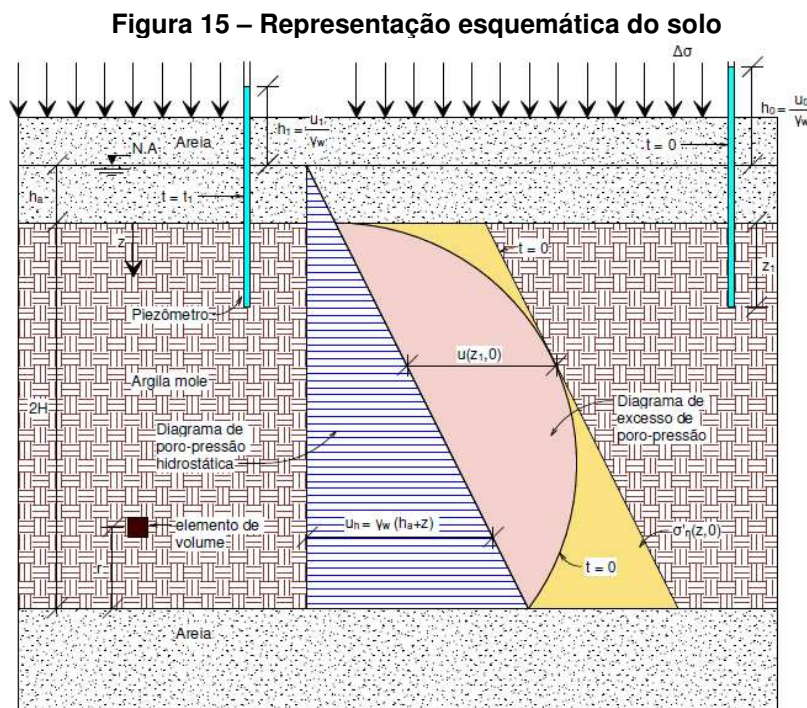
A teoria desenvolvida por Andrade (2014) não apresentou a dupla onda observada na curva experimental (ver figura 14). Este fato foi atribuído a adoção da linearidade da função viscosidade como hipótese de trabalho na construção do seu modelo matemático. No entanto, a evolução do adensamento de sua teoria foi mais lenta que a de Terzaghi, fato este justificado pela consideração da resistência viscosa.

Os resultados obtidos, tanto para o grau médio de adensamento em termos de deformação como o excesso de poropressão, foram iguais a Teoria B de Taylor.

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Para o desenvolvimento do modelo matemático, considerar-se-á uma camada de argila saturada com espessura  $2H_d$ , drenada por camadas de areia no seu topo e na sua base. Um carregamento vertical ( $\Delta\sigma_v$ ) é aplicado na superfície do solo arenoso

gerando um excesso de poropressão ( $u$ ) na camada de argila. Esse excesso de poropressão será dissipado no decorrer do tempo caracterizando o fenômeno do adensamento. O problema do adensamento unidimensional estudado pode ser representado pela Figura 15:



Fonte: Autor (2020)

Foi definido um conjunto de hipóteses simplificadoras para permitir a construção da Equação Diferencial Parcial (EDP) Não Linear do modelo matemático que se espera reger o fenômeno. As hipóteses são as seguintes:

Restrição (I): O solo é homogêneo e saturado.

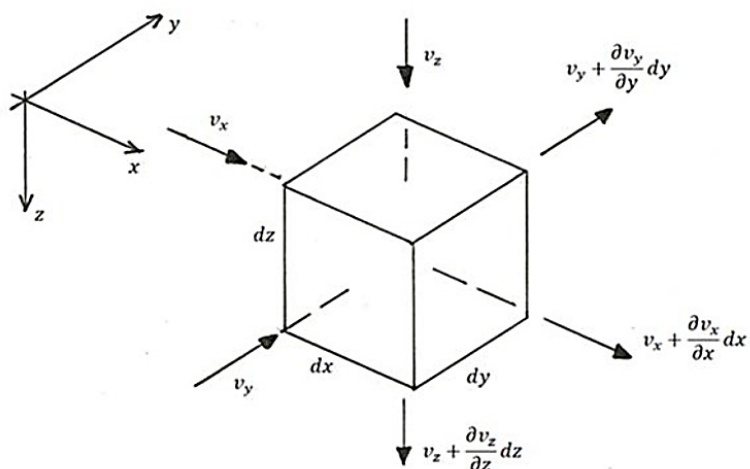
Restrição (II): As partículas sólidas e a água são incompressíveis.

Restrição (III): As deformações são infinitesimais.

Tomando-se na camada argilosa um elemento cúbico infinitesimal  $dV$  de solo, pode-se definir os fluxos e as vazões através do referido elemento. A representação do fluxo através do volume de solo é apresentada na figura a seguir:



Figura 16 – Fluxo através de um volume de solo



Fonte: Andrade (2014)

A partir da Figura 16 é possível definir as vazões de entrada e saída nas direções x, y e z.

$$Q_e = \frac{V_e}{\Delta t} = v_e \cdot A_e = v_x dydz + v_y dxdz + v_z dxdy \quad (21)$$

$$Q_s = \frac{V_s}{\Delta t} = v_s \cdot A_s$$

$$= \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dxdz + \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dxdy \quad (22)$$

Onde,

$Q_e$ : vazão de entrada

$Q_s$ : vazão de saída

$V_e$ : volume de entrada

$V_s$ : volume de saída

$v_e$ : velocidade de entrada

$v_s$ : velocidade de saída

$A_e$ : área de entrada

$A_s$ : área de saída

A variação de volume  $dV$  de solo no tempo é dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Q_s - Q_e = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (23)$$

Da Figura 15 define-se a carga hidráulica total ( $H$ ) de um dado elemento de volume de solo, que se encontra a uma distância  $r$  da base da camada de argila.

$$H = h_a + h_p + h_c = (r) + \left[ (2H_d - r) + h_a + \frac{u}{\gamma_w} \right] = 2H_d + h_a + \frac{u}{\gamma_w} \quad (24)$$

Onde,

$h_a$ : carga altimétrica (admitida constante)

$h_p$ : carga piezométrica

$h_c$ : carga cinética (desprezível)

$2H_d$ : espessura da camada de argila mole (ver Figura 15)

$u$ : excesso de poropressão

$\gamma_w$ : peso específico da água

Restrição (IV): Considera-se válida a Lei de Darcy para o fluxo através de um elemento de solo:

$$v_x = k_x i_x = k_x \frac{\partial H}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (25)$$

$$v_y = k_y i_y = k_y \frac{\partial H}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \quad (26)$$

$$v_z = k_z i_z = k_z \frac{\partial H}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \quad (27)$$

Sendo,

$i_x, i_y, i_z$ : gradiente hidráulico nas direções  $x, y$  e  $z$

$k_x, k_y, k_z$ : coeficiente de permeabilidade nas direções  $x, y$  e  $z$

A substituição das equações (25), (26) e (27) na equação (23) resulta em:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left( k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

Restrição (V): Considera-se que o fluxo de água e a compressão ocorrem apenas na direção  $z$  (ver Figura 16):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left( k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) dx dy dz \quad (28)$$

Substituindo (24) em (28):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k_z \frac{\partial^2 (2H_d + h_a + \frac{u}{\gamma_w})}{\partial z^2} dx dy dz$$

Sabendo-se que o volume do elemento de solo é dado por  $V = dx dy dz$  e que por definição  $\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta e}{1 + e_1}$ , pode-se escrever que:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{1}{1 + e_1} \left( \frac{\partial e(z, t)}{\partial t} \right) = \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \quad (29)$$

Onde,

$\varepsilon_v$ : deformação volumétrica específica (vertical)

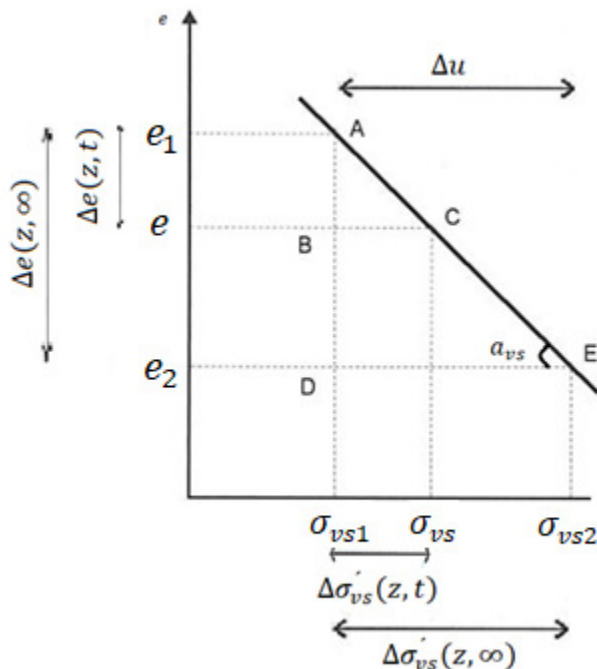
$e_1$ : índice de vazios inicial (constante)

$k_z$ : coeficiente de permeabilidade na direção  $z$  do solo

Restrição (VI): A variação de volume se dá exclusivamente pela variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva vertical ( $\sigma'_{vs}$ ).

Da Figura 17 é possível estabelecer uma relação entre índice de vazios ( $e$ ) e a parcela sólido-sólido da tensão efetiva vertical.

Figura 17 – Relação  $e$  versus  $\sigma'_{vs}$



Fonte: Autor (2020)

A inclinação da reta  $\overline{ACE}$  da Figura 17 representa o Coeficiente de Compressibilidade Vertical Sólido-Sólido, dado por:

$$a_{vs} = -\frac{\Delta e}{\Delta \sigma'_{vs}} \quad (30)$$

Restrição (VII): A tensão efetiva vertical é composta por duas parcelas: uma parcela viscosa ( $\sigma'_{v\eta}$ ) e uma parcela sólido-sólido ( $\sigma'_{vs}$ ).

$$\sigma'_v = \sigma'_{vs} + \sigma'_{v\eta} = \Delta \sigma_v - u \quad (31)$$

A substituição de (30) em (31) resulta em:

$$e(z, t) = e_2 - a_{vs} [(\Delta \sigma_v - u(z, t)) - \sigma'_{v\eta}(z, t)] \quad (32)$$

Restrição (VIII): A parcela viscosa da tensão efetiva vertical é descrita por uma lei de viscosidade não linear apresentada em Barden (1965).

$$\sigma'_{v\eta} = -\bar{\eta} \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (33)$$

Onde,

$\bar{\eta}$ : coeficiente médio de viscosidade (adotado constante).

$n$ : número inteiro maior do que 1 (um).

Derivando (32) em relação ao tempo e substituindo (33) na expressão da derivada obtida tem-se:

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = a_{vs} \left\{ \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\bar{\eta} \left( \frac{\partial e(z, t)}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \right\} \quad (34)$$

Ainda, substituindo (29) em (34):

$$\frac{k_z(1 + e_1)}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = a_{vs} \left\{ \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\bar{\eta} \left( \frac{k_z(1 + e_1)}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \right\} \quad (35)$$

Restrição (IX): Algumas propriedades do solo não variam durante o adensamento, sendo elas: coeficiente de permeabilidade do solo ( $k_z$ ), índice de vazios inicial ( $e_1$ ) e peso específico da água ( $\gamma_w$ ).

Dessa forma pode-se escrever:

$$c = \frac{k_z(1 + e_1)}{\gamma_w} \quad (36)$$

Para a obtenção da Equação do Adensamento proposta, definiu-se o excesso de poropressão normalizada como sendo:

$$u'(z, t) = \frac{u(z, t)}{\Delta\sigma_v} \quad (37)$$

Ainda, estabeleceu-se os fatores adimensionais: Fator Tempo ( $T$ ) e Fator Profundidade ( $Z$ ):

$$T = \frac{c}{a_{vs}} \frac{t}{H_d^2} \quad (38)$$

$$Z = \frac{z}{H_d} \quad (39)$$

A substituição das equações (36), (37), (38) e (39) em (35) conduziu a seguinte Equação Diferencial Parcial:

$$\left[ \bar{\eta} a_{vs} c^{\frac{1-n}{n}} \Delta \sigma_v^{\frac{1-n}{n}} \right] \left( \frac{\partial^3 u'}{(H_d^4 \frac{a_{vs}}{c}) \partial Z^2 \partial T} \right)^{1/n} + \frac{\partial^2 u'}{H_d^2 \partial Z^2} - \frac{1}{H_d^2} \frac{\partial u'}{\partial T} = 0 \quad (40)$$

Para a resolução do problema, adotou-se as seguintes condições de contorno:

- $Z = 0$ :  $u'(0, T) = 0$  (41.1)

- $Z = 2$ :  $u'(2, T) = 0$  (41.2)

E a condição inicial:

- $T = 0$ :  $u'(Z, 0) = 1$  (41.3)

A Equação (40) juntamente com as condições apresentadas fornecem o Problema de Valor de Contorno (PVC) a ser solucionado. Por se tratar de um Equação Diferencial Parcial de ordem 3, não linear com grau  $1/n$ , utilizou-se método numérico.

Como a geometria do problema de adensamento estudado é regular, o Método das Diferenças Finitas (MDF) foi escolhido devido a sua "simplicidade". Neste método substituiu-se as derivadas parciais por aproximações do tipo centrada para o espaço e progressiva para o tempo. As respectivas expressões são:

$$\frac{\partial^3 u'}{\partial Z^2 \partial T} \approx \frac{1}{\Delta Z^2 \Delta T} [(u'_{i+1}{}^{l+1} - u'_{i+1}{}^l) - 2(u'_i{}^{l+1} - u'_i{}^l) + (u'_{i-1}{}^{l+1} - u'_{i-1}{}^l)] \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial Z^2} \approx \frac{u'_{i+1}{}^l - 2u'_i{}^l + u'_{i-1}{}^l}{\Delta Z^2} \quad (43)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial T} \approx \frac{u'_i{}^{l+1} - u'_i{}^l}{\Delta T} \quad (44)$$

A notação  $i$  apresentada no subscrito de  $u'$  designa a dimensão espacial, enquanto a notação sobrescrita  $l$  indica a dimensão temporal.

Substituindo as equações (42), (43) e (44) em (40) e multiplicando a expressão resultante por  $H_d^2$  obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \frac{\bar{\eta} a_{vs} c^{\frac{1-n}{n}} \Delta \sigma_v^{\frac{1-n}{n}}}{(H_d^4 \frac{a_{vs}}{c})^{1/n}} \right] \left[ \frac{1}{\Delta Z^2 \Delta T} \right]^{1/n} H_d^2 \right\} [(u'_{i+1}{}^{l+1} - u'_{i+1}{}^l) - 2(u'_i{}^{l+1} - u'_i{}^l) \\ & + (u'_{i-1}{}^{l+1} - u'_{i-1}{}^l)]^{1/n} + \left[ \frac{u'_{i+1}{}^l - 2u'_i{}^l + u'_{i-1}{}^l}{\Delta Z^2} \right] - \left[ \frac{u'_i{}^{l+1} - u'_i{}^l}{\Delta T} \right] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Definindo o parâmetro adimensional denominado Fator Viscosidade ( $V$ ):

$$V = \left[ \frac{\bar{\eta} a_{vs} c^{\frac{1-n}{n}} \Delta \sigma_v^{\frac{1-n}{n}}}{(H_d^4 \frac{a_{vs}}{c})^{1/n}} \right] H_d^2 \quad (46)$$

E fazendo-se:

$$J = \left[ V \frac{1}{\Delta Z^2 \Delta T} \right]^{1/n} \quad (47)$$

Substituindo (46) e (47) em (45):

$$J[(u'_{i+1}{}^{l+1} - u'_{i+1}{}^l) - 2(u'_i{}^{l+1} - u'_i{}^l) + (u'_{i-1}{}^{l+1} - u'_{i-1}{}^l)]^{1/n} + \left[ \frac{u'_{i+1}{}^l - 2u'_i{}^l + u'_{i-1}{}^l}{\Delta Z^2} \right] - \left[ \frac{u'_i{}^{l+1} - u'_i{}^l}{\Delta T} \right] = 0 \quad (48)$$

Elevando (48) a  $n$  e reescrevendo:

$$J^n[(u'_{i+1}{}^{l+1} - 2u'_i{}^{l+1} + u'_{i-1}{}^{l+1} - u'_{i+1}{}^l + 2u'_i{}^l - u'_{i-1}{}^l)] = \left\{ \left[ \frac{u'_i{}^{l+1} - u'_i{}^l}{\Delta T} \right] - \left[ \frac{u'_{i+1}{}^l - 2u'_i{}^l + u'_{i-1}{}^l}{\Delta Z^2} \right] \right\}^n \quad (49)$$

A equação de diferenças (49) com as condições de contorno  $u'_0{}^l = u'_2{}^l = 0$  e inicial  $u'_i{}^0 = 1$  descrevem o problema a ser resolvido algebricamente.

A condição inicial adotada é a mesma utilizada no trabalho de Barden (1965) e pela Teoria descrita por Terzaghi e Frohlich (1936).

Da figura 17, define-se:

$$U_z = \frac{u_i - u(z, t)}{u_i} = 1 - u'(z, t) \rightarrow u' = 1 - U_z \quad (50)$$

$U_z$ : Porcentagem localizada do adensamento

$u_i$ : excesso de poropressão inicial

$u(z, t)$ : excesso de poropressão em função de  $z$  e  $t$

A substituição de (50) em (49) fornece a equação de diferenças para a Porcentagem Localizada de Adensamento:

$$J^n[(U_{z,i+1}{}^{l+1} - 2U_{z,i}{}^{l+1} + U_{z,i-1}{}^{l+1} - U_{z,i+1}{}^l + 2U_{z,i}{}^l - U_{z,i-1}{}^l)] = \left\{ \left[ \frac{U_{z,i}{}^{l+1} - U_{z,i}{}^l}{\Delta T} \right] - \left[ \frac{U_{z,i+1}{}^l - 2U_{z,i}{}^l + U_{z,i-1}{}^l}{\Delta Z^2} \right] \right\}^n \quad (51)$$

Para a expressão (51) as condições de contorno e inicial são:  $U_{z,0}{}^l = U_{z,2}{}^l = 1$  e  $U_{z,i}{}^0 = 0$



A expressão (49) foi resolvida através da utilização da ferramenta *Solver* do Excel.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 RESULTADOS TEÓRICOS

A equação de diferenças finitas em termos de Porcentagem Localizada do Adensamento ( $U_z$ ), descrita em (51), se assemelha a equação de diferenças em termos de Dissipação de Excesso de Poropressão Normalizada, apresentada em (49). Evidentemente as incógnitas das respectivas equações e as condições de contorno e inicial particularizam o problema.

A função não linear Viscosidade, apresentada em (46), recebeu este nome por conter o termo  $\bar{\eta}$  que representa a viscosidade média do solo, admitida constante durante a ocorrência do fenômeno do adensamento. O Fator Tempo (T), descrito em (38) é diferente do Fator Tempo das propostas de Terzaghi e Frohlich (1936) e de Barden (1965) por apresentar um Coeficiente de Adensamento Vertical Modificado ( $c_v^* = c/a_{vs}$ ), cujos termos são definidos por Andrade (2014). Na modelagem de Barden (1965) tem-se o termo  $c_v = c/a_v$ , a grande diferença está no fato de o Coeficiente de Adensamento Vertical ( $c_v$ ) não incorporar o conceito de parcela sólido-sólido da tensão efetiva vertical, apresentado indiretamente em  $a_{vs}$ . O Coeficiente de Compressibilidade Vertical ( $a_{vs}$ ) é a inclinação da curva de compressão para um dado estado de tensão sólido-sólido (Ver Figura 17).

O Fator Viscosidade (V), definido na equação (46), depende, dentre outros parâmetros, da distância de drenagem ( $H_d$ ). Da análise da equação, verifica-se que os efeitos da viscosidade são mais marcantes em laboratório do que em campo.

Ainda, tomando-se  $n = 1$  na equação (46), obtém-se:

$$V = \frac{\bar{\eta} c}{H_d^2} \quad (52)$$

Trata-se do mesmo Fator Viscosidade da Teoria B de Taylor (1942), diferenciando-se do modelo de Andrade (2014) apenas pela presença do termo  $(1 + e_1)$  presente no parâmetro  $c$ . Isso se justifica pelo fato de Andrade (2014) ter construído sua equação partindo-se do princípio:

$$\sigma'_{v\eta} = -\bar{\eta} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\bar{\eta} \frac{1}{1 + e_1} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (53)$$

Entretanto, as soluções de Taylor (1942) e Andrade (2014) são as mesmas.

A equação de diferenças de Dissipação do Excesso de Poropressão Normalizada, apresentada em (49), descreve matematicamente a saída de água dos vazios de um solo argiloso saturado. A equação algébrica é não linear com ordem  $n$ . Além disso, por apresentar apenas fatores adimensionais é geral e serve para todo solo argiloso saturado. Assim, deve-se entender que a equação (49) é mais completa que as Teorias de Andrade (2014) e Terzaghi e Frohlich (1936). Dessa forma, particularizando a referida equação deve-se obter as equações desenvolvidas pelas Teorias citadas acima. Para averiguação desse fato, tomando  $V = 0$  e  $n = 1$ , na equação (49), obtém-se:

$$u_i^{l+1} = u_i^l + \frac{\Delta T}{\Delta Z^2} (u_{i+1}^l - 2u_i^l + u_{i-1}^l) \quad (54)$$

Como se observa, a expressão (54) é a mesma equação de diferenças finitas da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936), dessa forma, pode-se afirmar que a equação (49) está de acordo com a literatura.

Do mesmo modo, fixando-se um valor para o Fator Viscosidade ( $V$ ) e  $n = 1$ , partindo-se da expressão (49), chega-se aos resultados obtidos por Andrade (2014) e Taylor (1942).

Ainda, adotando-se  $\bar{\eta} = 0 \rightarrow V = 0$ , na equação (40) chega-se, através de algebrismo, na seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - \frac{a_{vs}}{c} \frac{\partial u'}{\partial t} = 0 \quad (55)$$

A equação (55) trata-se da conhecida EDP do Calor da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936), cuja solução é conhecida e apresentada nos cursos básicos de Mecânica dos Solos.

Tomando-se  $n = 1$  na expressão (40) obtém-se:

$$(\bar{\eta} a_{vs}) \left( \frac{\partial^3 u'}{\partial z^2 \partial t} \right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - \frac{a_{vs}}{c} \frac{\partial u'}{\partial t} = 0 \quad (56)$$

A equação (56) é a mesma apresentada e resolvida analiticamente por Andrade (2014).

Fazendo  $V = 0$  e  $n = 1$  na equação (51), obtém-se a equação de diferenças finitas da Porcentagem Localizada do Adensamento da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936):

$$\frac{U_{z,i}^{l+1} - U_{z,i}^l}{\Delta T} = \frac{U_{z,i+1}^l - 2U_{z,i}^l + U_{z,i-1}^l}{\Delta Z^2} \quad (57)$$

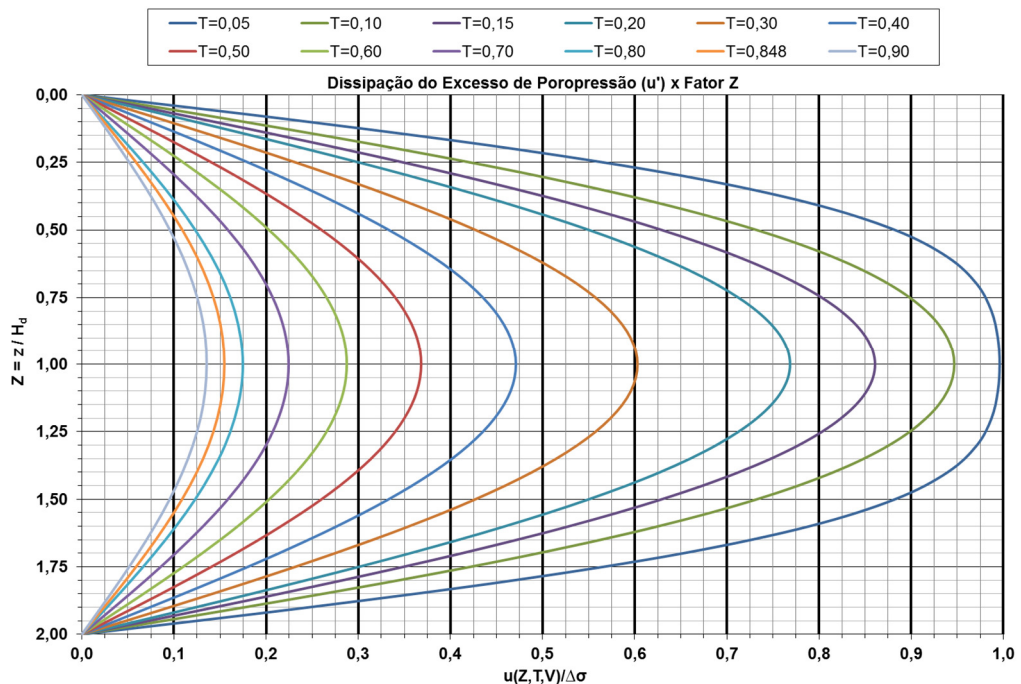
Em relação a escolha dos parâmetros  $\Delta T$  e  $\Delta Z$ , demonstra-se que, para haver convergência, o valor da relação de  $\frac{\Delta T}{\Delta Z}$  não deve ser superior a 0,5 e que os erros causados pela omissão das derivadas superiores do Teorema de Taylor são reduzidos, a um valor mínimo, quando a razão  $\frac{\Delta T}{\Delta Z}$  for de  $\frac{1}{6}$ . Para o presente trabalho adotou-se o valor de 0,002 para  $\Delta T$  e 0,1 para  $\Delta Z$ . Os valores escolhidos foram “calibrados” através de comparação dos resultados numéricos (MDF) obtidos por Terzaghi e Frohlich (1936) com sua solução analítica.

## 4.2 SOLUÇÕES GRÁFICAS

As expressões (49) e (51) são gerais e podem ser apresentadas de forma gráfica.

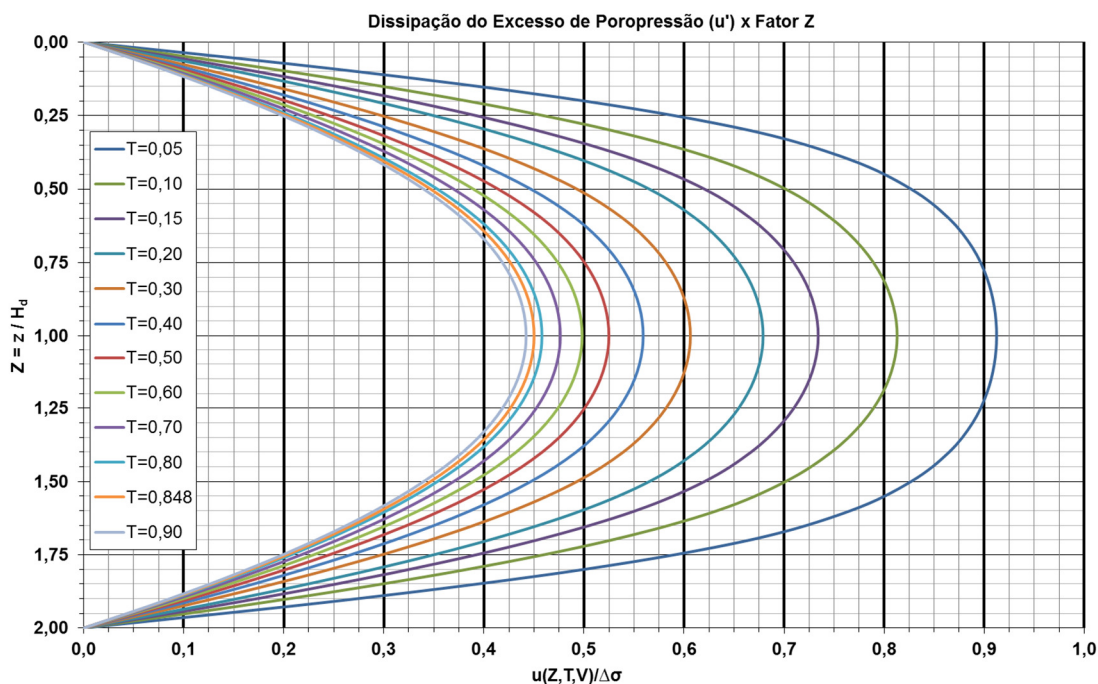
Para o excesso de poropressão normalizada ( $u' = u/\Delta\sigma_v$ ) fixou-se o valor do Fator Viscosidade ( $V$ ) e para cada Fator Tempo ( $T$ ) observou-se o comportamento da função  $u'$  com o Fator Profundidade ( $Z$ ). Construiu-se curvas, conhecidas como isócronas, para representar a dissipação do excesso de poropressão normalizada ao longo do tempo. Estas curvas, apresentadas nas Figuras 18 e 19, foram criadas considerando-se  $n = 5$  e Fatores Viscosidade  $V = 0,008$  e  $V = 1$  respectivamente. Adotou-se  $n = 5$  porque Barden (1965) em seu trabalho obteve, com este valor, um bom ajuste teórico na “cauda” do adensamento secundário quando comparado com os resultados obtidos experimentalmente. O valor de  $V = 0,008$  foi escolhido porque Andrade (2014), em sua modelagem, conseguiu um bom ajuste teórico na curva experimental para o trecho inicial do adensamento. O Fator Viscosidade  $V = 1$  buscou amplificar os efeitos viscosos na análise do fenômeno.

**Figura 18 – Isócronas –  $n=5$  e  $V=0,008$**



Fonte: Autor (2021)

**Figura 19 – Isócronas –  $n=5$  e  $V=1$**

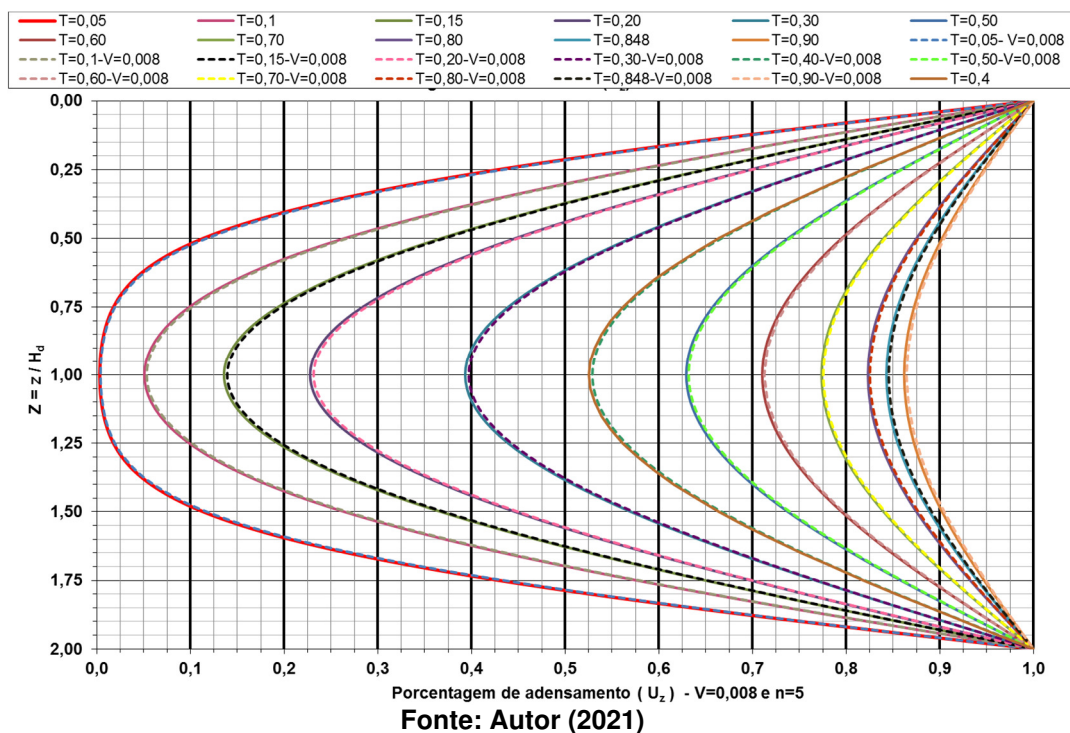
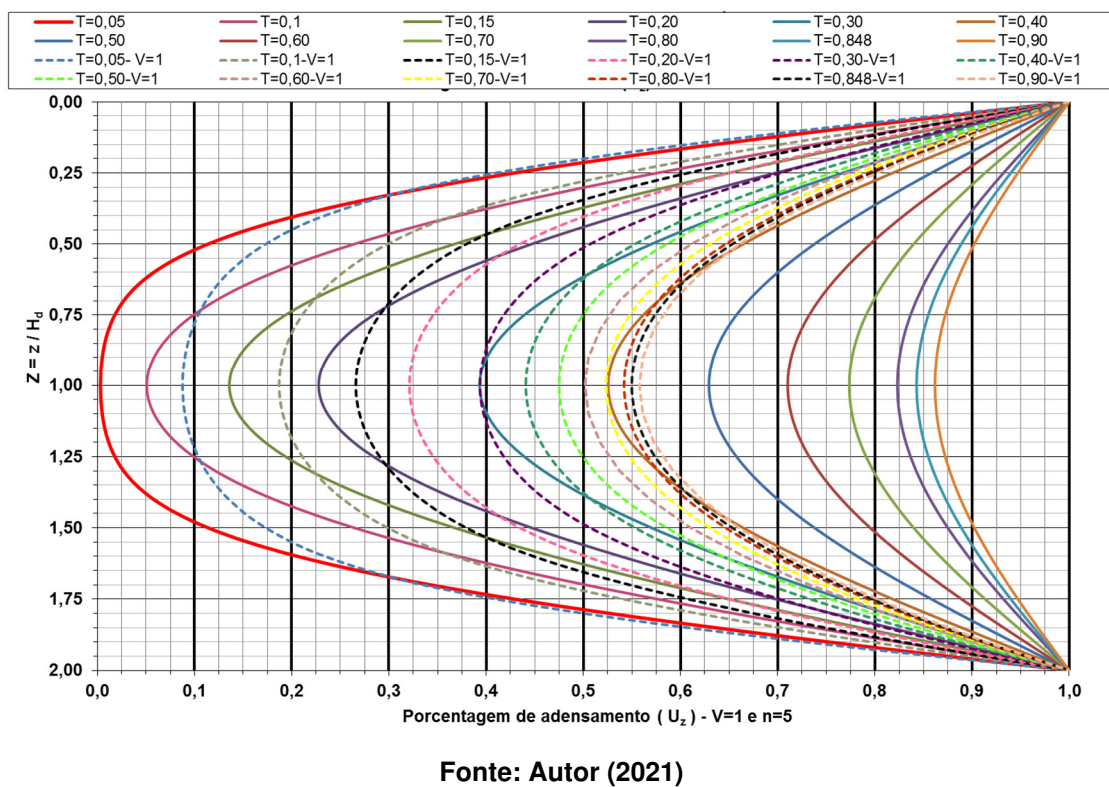


**Fonte: Autor (2021)**

Nas figuras (18) e (19), a dissipação do excesso de poropressão normalizada é sempre igual a 1 para  $T = 0$  (condição inicial do problema). Esta hipótese está em conformidade com as abordagens de Terzaghi e Frohlich (1936) e Barden (1965).

Comparando as isócronas fica evidente o efeito da resistência viscosa atuando no processo de adensamento do solo. Por exemplo, a área externa da parábola para  $T = 0,05$  em  $V = 1$  é maior que a área externa para  $T = 0,05$  em  $V = 0,008$ , isso indica que quanto maior o Fator Viscosidade, maior a parcela viscosa resistiva disponível. A parcela viscosa da tensão efetiva ( $\sigma'_{v\eta}$ ) atua retardando o fenômeno do adensamento.

A análise do problema em termos de porcentagens de adensamento localizadas ( $U_z$ ) é apresentada nas figuras (20) e (21). Os resultados, ao longo do Fator Profundidade ( $Z$ ), para cada Fator Tempo ( $T$ ) e  $n$  e  $V$  fixos são apresentados em linhas pontilhadas. Nestas figuras as linhas contínuas mostram, para fins comparativos, os resultados analíticos obtidos por Terzaghi e Frohlich (1936).

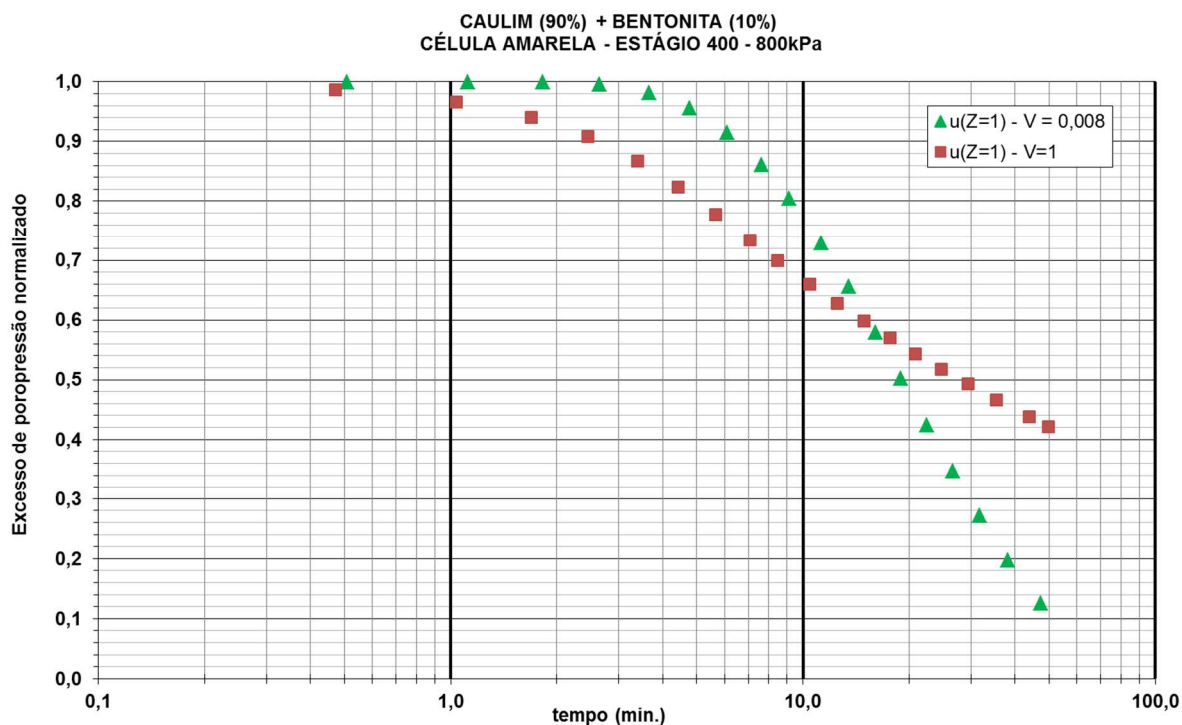
Figura 20 – Isócronas –  $n=5$  e  $V=0,008$ Figura 21 – Isócronas –  $n=5$  e  $V=1$ 

Da figura (20) verifica-se que os resultados nas duas teorias são muito próximos. Tal fato se deve a escolha do Fator Viscosidade ( $V = 0,008$ ) ser um valor muito próximo do valor da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) que é  $V = 0$ .

Na figura (21) nota-se a diferença entre os resultados deste modelo e a Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936), justificado pelo valor considerável atribuído ao Fator Viscosidade. Observa-se que os efeitos viscosos atuam no modelo matemático de forma mais marcante para Fatores Tempo mais avançados. Por exemplo, para  $T = 0,05$  o modelo (linhas pontilhadas) mostra o adensamento mais adiantado do que na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) (linhas contínuas), somente para  $T \geq 0,30$  o modelo descreve a saída de água dos vazios do solo de forma mais lenta que a Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). Supõe-se que a escolha da condição inicial adotada para o problema esteja proporcionando este resultado. Com base nos experimentos de Carvalho (1997) e de Taylor (1942), acredita-se que a viscosidade atua no solo desde a aplicação do acréscimo de tensão, sendo assim, a solução obtida por este modelo não poderia estar, para  $T < 0,30$ , a frente dos resultados obtidos por Terzaghi e Frohlich (1936).

A Figura 22 apresenta a relação entre a dissipação do excesso de poropressão normalizada e o tempo, para um dado valor de  $V$  e  $n$ , no centro da camada ( $Z = 1$ ).

Figura 22 – Relação  $u/\Delta\sigma_v \times t$  (log) -  $n = 5$



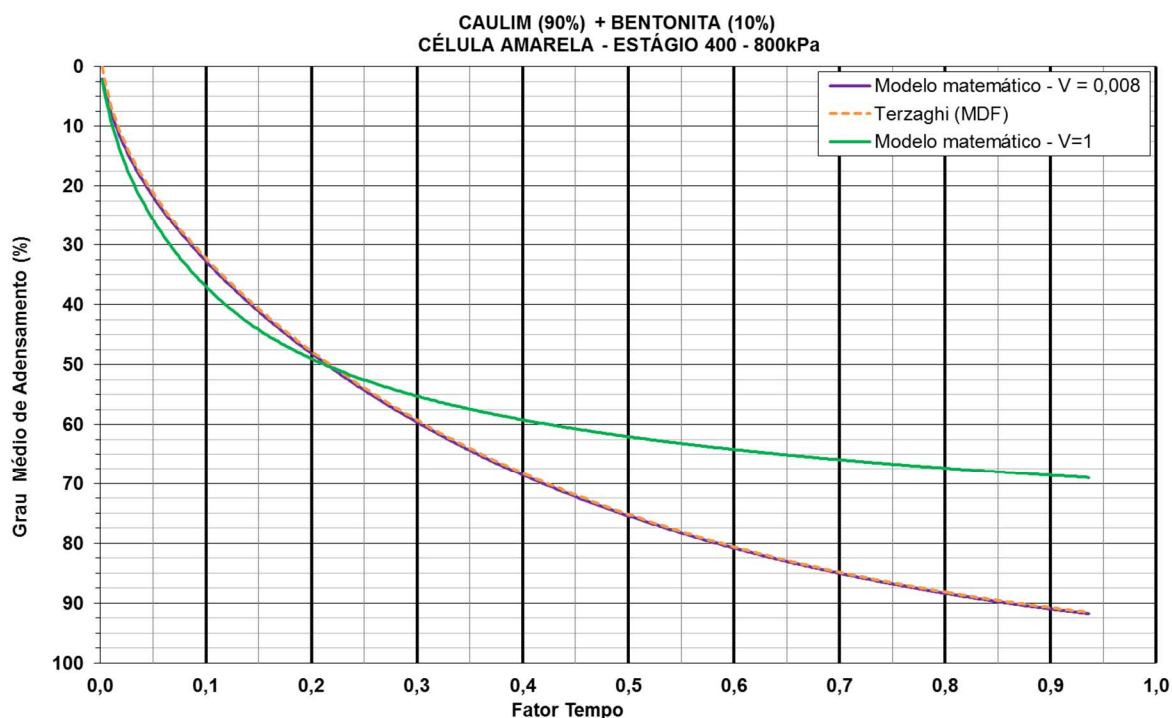
Fonte: Autor (2021)

Da figura 22, verifica-se que para  $t < 15$  min a curva de dissipação para  $V = 1$  está abaixo da curva de dissipação para  $V = 0,008$ , isto é, a dissipação do excesso de poropressão normalizada ( $u'$ ) está mais avançada. Destaca-se que o tempo  $t \cong 15$  min equivale ao Fator Tempo de 0,30, isso condiz com a análise realizada na discussão da Figura (21). Para  $V = 1,0$ ,  $u'$  percorre uma trajetória mais vagarosa com uma inclinação suave ao longo do tempo, esse fato se deve a maior resistência viscosa considerada com a adoção de um Fator Viscosidade maior.

Os Graus Médios de Adensamento ( $\bar{U}$ ), para um dado valor de  $T$  com  $n = 5$  e Fatores Viscosidades de 0,008 e 1, foram encontrados tomando-se uma média ponderada das isócronas para  $U_z \times Z$ . A figura 23 apresenta os resultados obtidos para o modelo juntamente com os Graus Médios da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936).



Figura 23 –  $\bar{U} \times T$  com  $n = 5$  juntamente com Terzaghi e Frohlich (1936)



A evolução do fenômeno para  $V = 1$  mostra-se mais acelerada no início do processo até  $T \cong 0,2$ . Mas em seguida, o adensamento se desenvolve mais lentamente atingindo o “fim”, não mostrado na figura,  $\bar{U} = 100\%$ , para Fatores Tempo bem superiores aos considerados na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). O modelo matemático com  $V = 0,008$  e a Teoria Terzaghi e Frohlich (1936) apresenta Graus Médios de Adensamento muito próximos. Este fato já era esperado, uma vez que o Fator Viscosidade é próximo de zero.

### 4.3 AJUSTE DA CURVA TEÓRICA À EXPERIMENTAL

Para modelagem da curva experimental é necessário determinar-se os parâmetros  $\bar{\eta}$  e  $c_v^*$ . O valor de  $\bar{\eta}$  é determinado indiretamente através da adequada escolha do Fator Viscosidade ( $V$ ). O ajuste da curva seguiu o processo descrito por

Andrade (2014). Tal procedimento se resume da seguinte forma: Inicialmente admite-se um valor de  $V$ . Associado a esse Fator Viscosidade, busca-se o valor do Fator Tempo ( $T$ ) para  $\bar{U} = 50\%$ . Na sequência determina-se o valor do coeficiente de adensamento modificado através da curva experimental de adensamento. Para tal, semelhantemente ao Método apresentado por Casagrande (1936) determina-se  $t_{50}$ . O valor do coeficiente de adensamento modificado ( $c_v^*$ ) é calculado através da seguinte expressão:

$$c_v^* = \frac{T_{50} H_{d50}^2}{t_{50}} \quad (58)$$

Sendo:

$H_{d50}$ : Distância de drenagem correspondente a 50% do adensamento.

Conforme recomendado por Andrade (2014), para verificar se o valor de  $V$  inicialmente adotado é o correto, reproduz-se com  $c_v^*$  calculado a curva teórica e a compara com a curva experimental. Se o ajuste não for satisfatório, toma-se um novo Fator Viscosidade e repete-se o processo até obter-se um bom ajuste das curvas.

Sendo assim, o presente modelo é verificado quanto a sua eficácia através do ajuste entre as curvas teórica e experimental. A curva experimental de adensamento descreve um estágio de acréscimo de tensão de 400 kPa para 800 kPa de um solo artificial composto de uma mistura de caulim (90%) e bentonita (10%). O referido ensaio é apresentado detalhadamente por Carvalho (1997).

Andrade (2014) aplicando na curva experimental processo semelhante ao Método de Casagrande obteve os seguintes valores para  $c_v^*$ :  $d_s \approx 777$ ,  $d_{100} = 563$ , portando,  $d_{50} = 670$  ( $H_{d50} = 0,775$  cm) e  $t_{50} = 10$  min. Assim, admitindo-se  $V = 0,008$  obteve-se  $c_v^* = 2,015 \times 10^{-4}$  cm<sup>2</sup>/s. Com os valores de  $V$  e  $c_v^*$  o Andrade (2014) chegou nos “pontos quadrados” da Figura (24). Como observa-se, a Teoria desenvolvida por Andrade (2014) não foi capaz de reproduzir a “dupla onda” observada nos ensaios experimentais.

O Método de Casagrande, utilizado para o ajuste da curva da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) à experimental forneceu os seguintes valores:  $d_s = 786$ ,  $d_{100} = 622,5$  e, portanto,  $d_{50} = 704,3$  ( $H_{d50} = 0,792 \text{ cm}$ ) e  $t_{50} = 4,4$  min. Para esses valores chega-se a  $c_v = 4,682 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ . O ajuste para esta Teoria é apresentado em “pontos triangulares” na Figura (24). A Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) também não conseguiu reproduzir a “dupla onda” observada experimentalmente.

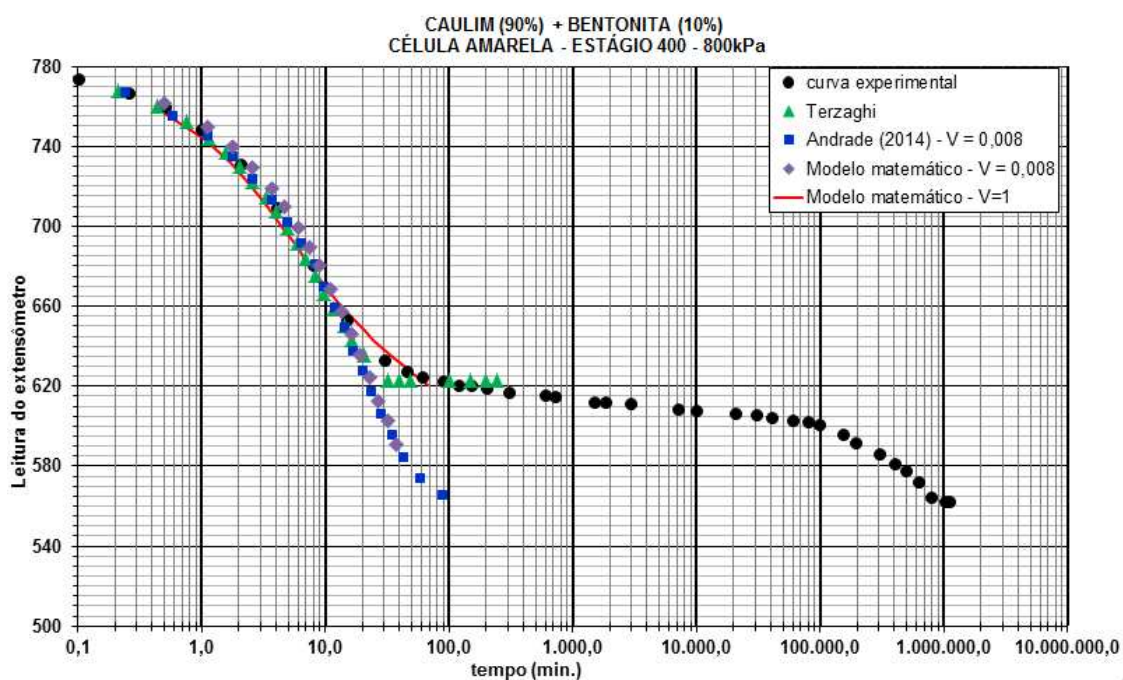
Vale destacar que o valor de  $d_{100}$  adotado nesta modelagem é o mesmo sugerido por Andrade (2014), ou seja, representa a leitura do extensômetro referente ao “fim” do adensamento secundário. Já o valor de  $d_{100}$  da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) corresponde a leitura do extensômetro referente ao “fim” do adensamento primário obtido através do Método de Casagrande.

Os valores de  $d_{50}$  e  $t_{50}$  de Andrade (2014) foram utilizados na presente modelagem matemática para obtenção de  $c_v^*$ . Optou-se por tomar o mesmo valor  $V$  de Andrade (2014) como ponto de partida, ou seja,  $V = 0,008$  e verificar o ajuste do presente modelo com a curva experimental. Como os Fatores Tempo para um Grau Médio de Adensamento de 50% são diferentes para os modelos, foi necessário recalcular o coeficiente de adensamento modificado obtendo-se  $c_v^* = 1,972 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ . Os resultados do modelo para  $V = 0,008$  é apresentado na Figura (24) em “pontos losangos” e mostram que o ajuste não foi adequado para o trecho final da curva de adensamento. Como se observa na Figura (24), a solução gráfica obtida para o presente modelo apresenta um comportamento similar ao obtido por Andrade (2014) e Terzaghi e Frohlich (1936), com diferença em relação a leitura final de  $d_{100}$ . O não ajuste satisfatório para a “cauda” do adensamento atribui-se ao valor de  $V$  adotado, sendo muito próximo de zero. Isso significa dizer que a resistência viscosa existente é insignificante.

Como o ajuste não foi satisfatório, repetiu-se o procedimento descrito por Andrade (2014). Tomando-se um novo valor de  $V$  recalculou-se os parâmetros  $\bar{\eta}$  e  $c_v^*$ . Adotando-se  $V = 1$ , utilizando-se novamente os valores de  $d_{50}$  e  $t_{50}$  obtidos por Andrade (2014), recalculou-se o coeficiente de adensamento modificado cujo valor foi de  $c_v^* = 2,122 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ . A Figura (24) apresenta o novo ajuste através de uma

linha vermelha contínua. Verifica-se que a modelagem adotada indica um ajuste satisfatório à curva experimental pelo menos para o início da cauda do adensamento. Os resultados obtidos mostram que a modelagem matemática para  $V = 1$  e  $n = 5$  é mais promissora que as propostas por Andrade (2014) e Terzaghi e Frohlich (1936).

**Figura 24 – Ajustes das curvas teóricas à experimental**



## 5 CONCLUSÕES

O modelo matemático desenvolvido considera a existência de uma parcela viscosa da tensão efetiva, sua lei é baseada numa proposta de Barden (1965). Respalda-se em um conjunto de hipóteses, construiu-se uma equação diferencial parcial não linear de ordem três. A EDP foi modelada de modo a incorporar parâmetros adimensionais, sendo eles: Fator Profundidade ( $Z$ ), Fator Tempo ( $T$ ) e Fator Viscosidade ( $V$ ), dessa forma, ela é considerada geral e válida para qualquer argila saturada. A equação foi resolvida numericamente em termos de dissipação de excesso de poropressão ( $u'$ ) e de porcentagem de adensamento ( $U_Z$ ), sendo mais

completa que as fornecidas por Andrade (2014) e Terzaghi e Frohlich (1936). Assim, particularizando-a pode-se obter as equações dos referidos autores.

A análise do Fator Viscosidade ( $V$ ) sugere que a viscosidade atua no campo, porém, mais marcantemente em laboratório.

A evolução do adensamento no modelo matemático desenvolvido mostra-se mais acelerado no início do fenômeno. Contudo, o processo se desenvolve vagarosamente até atingir o “fim” para Fatores Tempo (ou tempos) bem superiores aos considerados na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). Isso indica que a parcela viscosa atua retardando o adensamento.

Por fim, observa-se que o ajuste da curva teórica obtida para  $V = 1$  e  $n = 5$  conduz a resultados mais promissores que as propostas de Andrade (2014) e Terzaghi e Frohlich (1936).

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, M.E.S., 2009. **Contribuição ao Estudo das Argilas Moles da Cidade de Santos**. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- ANDRADE, M. E. S. **O ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL CONSIDERANDO A RESISTÊNCIA VISCOSA À COMPRESSÃO**. 2014. 198 f. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014.
- BARDEN, L. **CONSOLIDATION OF CLAY WITH NON-LINEAR VISCOSITY**. 1965. 18 f.
- BRAJA, M. **Fundamentos de ENGENHARIA GEOTÉCNICA**. Tradução da 6ª edição norte-americana. Thomson, 2010.
- CARVALHO, S. R. L. **Uma Teoria de Adensamento com Compressão Secundária**. 265f. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.
- CHAPRA, C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para a Engenharia**. 5.ed. São Paulo: AMGH Editora Ltda, 2011.
- CINTRA, J.C.A; AOKI, N; ALBIERO, J.H. **Fundações diretas: projeto geotécnico**. Oficina de Textos, 2011
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Universidades, 2006.
- MENDONÇA, H. M. X. **SOBRE A MODELAGEM DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA GEOTÉCNICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**. 2005. 174 f. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.
- MELO, K. J. M. **APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EXPLÍCITO NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR PARA O CASO TRANSIENTE E UNIDIMENSIONAL**. 2011. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Ciência e Tecnologia), Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Angicos-RN , 2011.
- PINTO, C. S. **Curso Básico de Mecânica dos Solos em 16 aulas**. 3 ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2006.
- RUGGIERO, M. A. G. **CÁLCULO NUMÉRICO: ASPÉCTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS**. 2ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

TAYLOR, D.W. 1942, "**Research on Consolidation of Clays**", *Pub Massachusetts Institute of Technology*. Department of Civil and Sanitary Engineering, Serial n. 82, 147 pp.

TERZAGHI, K., FROHLICH, O. K. **Theorie der Setzung von Tonschichten**. Franz Deuticke. Leipzig : Wien, 1936

TERZAGHI, K., 1941. **Undisturbed Clay Samples and Undisturbed Clays**", *Journal of Boston Society of Civil Engineers*. vol. XXVIII, July, n.3. Republicado in Contributions to Soil Mechanics 1941-1959. Boston Society of Civil Engineers, Boston, pp. 45-65.