ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

GUSTAVO JOSÉ WURMEISTER FERREIRA

JADER OTÁVIO DALTO

2022

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GUSTAVO JOSÉ WURMEISTER FERREIRA
JADER OTAVIO DALTO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

LONDRINA - PR

2022

GUSTAVO JOSÉ WURMEISTER FERREIRA

SEQUENCIA DIDÁTICA DE TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

Didact Sequence of Written Production Analysis Tasks for Teaching

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Física no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador: Jader Otávio Dalto.

LONDRINA

2022

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

GUSTAVO JOSE WURMEISTER FERREIRA

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 28 de Setembro de 2022

Jader Otavio Dalto, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Angela Marta Pereira Das Dores Savioli, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Dra. Marcele Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 28/09/2022.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1. APRESENTAÇÃO

O produto educacional, aqui apresentado, foi elaborado a partir da dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, sob o título “Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Função Afim”.

A dissertação foi realizada baseada no objetivo de investigar a utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) em Matemática no ensino de Funções Afim, a partir de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

A Análise da Produção Escrita (APE) permite ao professor analisar e entender como o estudante processou o entendimento de determinado conteúdo a partir de suas produções, sejam estas provas, caderno ou uma tarefa. As Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) são tarefas elaboradas pelo professor que advém de produções de alunos, com o objetivo de ensinar ou reforçar um conteúdo.

Pesquisas desenvolvidas em Educação Matemática vêm trabalhando na perspectiva da APE como uma estratégia de ensino. Esses trabalhos sugerem que a APE, através do uso das TAPE, possam ser utilizadas em sala de aula como uma metodologia ativa de ensino.

O produto educacional é constituído de uma sequência didática de 14 TAPE para o ensino do conceito de função e aspectos principais da Função Afim, baseados na dinâmica da APE.

As 14 TAPE, provenientes da pesquisa, estão estruturadas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). Segundo Simon (1995), uma THA é constituída pelos objetivos para a aprendizagem, pelas tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos alunos e também pelas hipóteses sobre o processo de aprendizagem desses alunos. “A construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) oferece uma descrição de aspectos-chave do planejamento da aula de matemática” (FIGUEIREDO; COSTA, 2016, p. 4), ou seja, a THA é um plano de aula imaginado pelo professor de como se deve conduzir as aulas e mais, como deve ser o aprendizado.

Além disso, a THA apresenta possíveis dúvidas que os alunos possam ter, conduzidas, através de um diálogo entre alunos e professor, de acordo com os princípios das metodologias ativas, em que os alunos assumem papeis de protagonistas e participam diretamente do processo de aprendizagem, possíveis resoluções para as questões apresentadas, além da formalização do conteúdo.

Como resultado da pesquisa, podemos apontar que a estratégia Análise da Produção Escrita, com o uso das Tarefas da Análise da Produção Escrita, tem um grande potencial de uso, mostrando que os alunos que participaram destas aulas tiveram uma evolução significativa na aprendizagem dos conceitos de função.

Importante destacar que as TAPE são tarefas que exigem do aluno proatividade, devido a necessidade de leitura, interpretação, análise, reflexão, discussão e escrita sobre matemática. Assim, para se aplicar esta abordagem (APE com o uso de TAPE), é necessário que o docente esteja preparado para enfrentar algumas mudanças, como é o caso de ter que disponibilizar um maior tempo para a resolução das tarefas, uma maior interação entre os alunos e dar tempo suficiente para que os mesmos explorem a tarefa disponibilizada.

No capítulo 5, “Considerações Finais”, disponibilizamos o acesso, através de QR Codes, para as 14 TAPE, para as possíveis duvidas, resoluções e as formalizações dos conteúdos utilizados nesta pesquisa, além do acesso à dissertação original na integra.

O produto destina-se aos professores de matemática e tem como objetivo oferecer uma alternativa ao modelo tradicional de ensino capaz de promover aos alunos uma dinâmica diferenciada, reflexiva e participativa no processo de aprendizado.

2. AS TAREFAS

Para a elaboração das TAPE apresentadas nesta sequência didática foi necessário coletar produções de alunos. Para isto, foram aplicadas nove tarefas, elaboradas de acordo com os livros didáticos que fazem parte do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e que são adotados pelas escolas (Iezzi, Matemática: ciência e aplicações: ensino médio[1]; Dante, Matemática em Contexto: função afim e quadrática[2]; Andrade, Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica[3]), estas tarefas seguiram a sequência de como o conteúdo é abordado nos livros, foram utilizados os exemplos já resolvidos e problemas propostos nos livros, transformados em questões abertas, tendo sido adaptados os enunciados para o objetivo da pesquisa.

Com as produções em mãos, a próxima etapa consistiu na elaboração das TAPE e da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), que é um plano de aula que contém uma hipótese elaborada pelo professor sobre como deve ser conduzida a aula e assim uma expectativa de como a aprendizagem será processada pelos alunos.

Para isso, as produções escritas foram escolhidas de acordo com os critérios estabelecidos por Pereira (2019), “[...] resoluções que apresentem diferentes características, que estejam corretas, incorretas ou parcialmente corretas para que sejam levantados questionamentos sobre tais resoluções a fim de direcionar as conclusões dos alunos” (PEREIRA, 2019, p. 8).

A análise dessas produções, entre o certo e errado, foi baseada na resolução proposta no livro didático, para este momento do trabalho, foi selecionado apenas respostas corretas, pois como o objetivo é de ensinar um conteúdo, não fez sentido utilizar resoluções parcialmente corretas e erradas para elaborar as TAPE (os alunos não detêm o conhecimento para discernir entre o que é certo ou errado).

Foram elaboradas 14 TAPE, uma sequência de tarefas que engloba o conceito de função como relação entre variáveis, definição de função por meio da relação entre conjuntos

---

[1] IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciência e aplicações: ensino médio, volume 1 / Gelson lezzi... [et. al]. — 9. ed. — São Paulo: Saraiva, 2016

[2] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em Contexto**: função afim e quadrática. Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo: Ática, 2020.

[3] ANDRADE, M. et al. **Matemática interligada**: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica / obra coletiva; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. -- 1. ed. — São Paulo: Scipione, 2020.

e as características da função afim, como lei de formação, coeficientes angular e linear, raiz e representação gráfica. Essas TAPE estão estruturadas na THA, sendo apresentadas possíveis resoluções, dúvidas e a formalização de cada conteúdo abordado.

3. TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA

Apresentamos agora a sequência das 14 TAPE, elaboradas a partir de resolução de alunos, com o objetivo de ensinar os conceitos de função e os principais aspectos da função afim.

3.1 **TAPE 1**

Objetivo: Evidenciar a noção de função como uma relação ou correspondência entre grandezas (variáveis).

3.1.2 **A Tarefa**

Figura 1 – Enunciado TAPE 1

Dois alunos, Carlos e Mara, resolveram a seguinte questão:

A tabela a seguir relaciona a medida de comprimento do lado de um quadrado (l), e a medida do perímetro (P), ambos em centímetros.

Medida de comprimento do lado.	Medida do perímetro.
1	4
2	8
3	12

a) Qual a medida do perímetro de um quadrado cujo lado mede 10 cm?

Observe a resolução do Carlos para a letra a:

Se lado 1 o perimetro é 4, a regra é multiplicar por 4.
Sendo assim, lado 10 centimetros o perimetro é 40cm.

Observe a resolução de Mara para a letra a:

l l l l
P = 4.l
P = 4.10
P = 40 cm

b) Qual a medida do lado de um quadrado cujo perímetro mede 70 cm?

Observe a resolução do Carlos para a letra b:

sera dividido 4 veses o comprimento do quadrado
70÷4 = 17,5 cm

Observe a resolução de Mara para a letra b:

4 lados
$\frac{70}{4} = 17,5$

Após análise das respostas de Carlos e Mara para o problema proposto, responda as seguintes questões:

a) Ao analisar a relação entre o lado e o perímetro do quadrado, essas grandezas possuem dependência (ou seja, existe uma conexão entre elas)? Explique.

b) Descreva uma situação qualquer do seu dia a dia que exista uma relação de dependência.

Fonte: Autoria própria (2022).

A intenção desta tarefa é fazer com que os alunos percebam que existem relações entre grandezas e é importante para o estudo das funções identificar o tipo de relação existente entre elas. No item “a” da tarefa, utilizando como referência as resoluções apresentadas por alunos, a intenção é mostrar como o lado e o perímetro do quadrado se relacionam. Já no item “b” a intenção é provocar os alunos a pensar em uma situação do cotidiano que mostra uma relação de dependência e como essa relação se apresenta.

3.2 **TAPE 2**

Objetivo: Caracterizar a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

3.2.1 **A Tarefa**

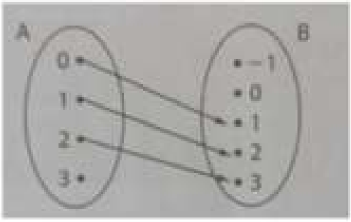
Figura 2 – Enunciado TAPE 2

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

I. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x + 1$.

x	y
0	1
1	2
2	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Não é função, pois há um elemento do conjunto domínio que não está ligado a nenhum elemento do conjunto contra domínio.

Observe a resolução da Mara para a pergunta:

Não, porque os elementos do primeiro conjunto precisam ter um correspondente no segundo conjunto e o número "3" não tem.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Não, porque um elemento de A não tem um correspondente no conjunto B.

De acordo com a situação apresentada, responda:

a) Ao analisar a primeira resposta do aluno Carlos e em seguida as outras respostas, como podemos denominar o conjunto A? E o conjunto B?

b) De acordo com as respostas dos 3 alunos, como você define uma função para este caso apresentado?

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é começar a definir uma função como uma relação entre conjuntos. A letra “a” visa destacar que o conjunto A (primeiro conjunto) é chamado de **domínio** da função, enquanto o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função. A letra “b” visa evidenciar que para uma relação ser uma função deve cumprir algumas regras, a primeira delas é que para **todos** os elementos do domínio da função (elementos do conjunto A) devem ter correspondente no conjunto contradomínio (elementos do conjunto B).

,

3.3 **TAPE 3**

Objetivo: Caracterizar de forma precisa a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

3.3.1 **A Tarefa**

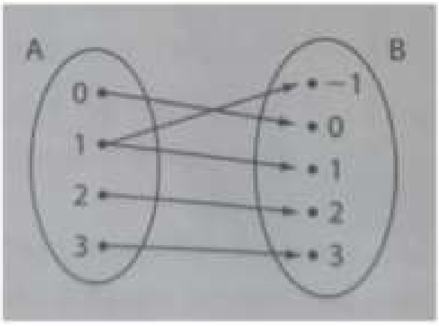
Figura 3 - Enunciado TAPE 3

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

II. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y^2 = x^2$.

x	y
0	0
1	+1
1	-1
2	2
3	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Não é função, pois há um elemento no conjunto domínio que possui mais de um correspondente no conjunto contra domínio.

Observe a resolução de Mara para a pergunta:

Não é função porque um número do conjunto A está relacionado com dois números na coluna B.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Não, porque um elemento de A correspondeu a dois elementos do conjunto B.

Agora, responda o que ser pede:

a) De acordo com as respostas dos 3 alunos, como você define uma função para este caso apresentado?
b) Compare esta situação com o caso anterior (item I), o que difere?
c) Junte as informações dos itens I e II, defina função.

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa, juntamente com o item I, é evidenciar que, para se definir uma função, é preciso determinar algumas regras. A letra “a” reforça o entendimento sobre a situação apresentada, onde, para ser uma função, cada elemento do conjunto domínio (primeiro conjunto) deve possuir apenas um correspondente no conjunto contradomínio (segundo conjunto). A letra “b” da tarefa pretende que o aluno retome a regra estabelecida no item I e faça uma comparação com o item II e a letra **c** tem como intenção de que o estudante junte as informações dos itens I e II, e observe que para se definir função as 2 regras estabelecidas nas tarefas devem ser cumpridas, ou seja, para se definir uma função cada elemento do conjunto domínio deve ter apenas um único correspondente no conjunto contradomínio.

3.4 **TAPE 4**

Objetivo: Caracterizar de forma precisa a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

3.4.1 **A Tarefa**

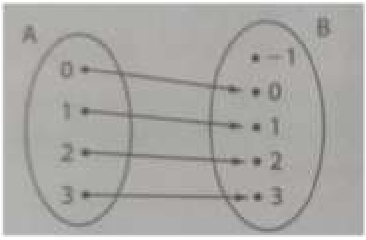
Figura 4– Enunciado TAPE 4

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

III. Associemos a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: y = x.

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Sim, porque cada elemento do primeiro conjunto tem um único correspondente no segundo conjunto.

Observe a resolução de Mara para a pergunta:

É função, pois cada elemento do conjunto domínio está ligado a um único elemento do conjunto contra domínio.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Sim, porque todo elemento do A tem um único correspon-dente no conjunto B.

Responda:

a) Utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, o que se pode concluir sobre o elemento -1 que não tem um correspondente no conjunto domínio?

Fonte: Autoria própria (2022).

Esta tarefa visa consolidar os conceitos de função, a intenção é que os estudantes percebam que todas as regras vistas anteriormente estão sendo cumpridas, ou seja, todos os elementos do domínio possuem uma única relação com os elementos do contradomínio, o fato de no conjunto contradomínio possuir um elemento que não tem correspondente no domínio não impede de ser uma função.

3.5 **TAPE 5**

Objetivo: Caracterizar de forma precisa a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

3.5.1 **A Tarefa**

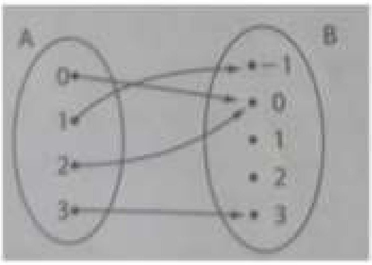
Figura 5 – Enunciado TAPE 5

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

IV. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x^2 - 2x$.

x	y
0	0
1	-1
2	0
3	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Sim, porque cada elemento do primeiro conjunto tem um único correspondente no segundo conjunto, mesmo que repita esse correspondente.

Observe a resolução da Mara para a pergunta:

É função, pois cada elemento do conjunto domínio está ligado a um único elemento do conjunto contra domínio

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Sim, porque todo elemento de A tem um único correspondente no conjunto B.

Responda:

a) Utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, o que se pode concluir sobre o elemento 0 (zero) do conjunto B (contradomínio)?

Fonte: Autoria própria (2022).

Assim como na tarefa anterior, a proposta é a consolidação das regras para uma função, porém neste caso, o elemento 0 (zero), do conjunto contradomínio, está relacionado com dois elementos do domínio, o que não impede de o exemplo ser uma função, continua valendo o que foi visto anteriormente, ou seja, todos os elementos do domínio têm relação a apenas um elemento no contradomínio.

3.6 **TAPE 6**

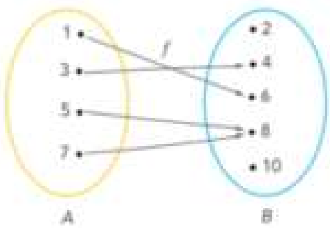
Objetivo: Consolidar o conceito de função, destacar os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma função.

3.6.1 **A Tarefa**

Figura 8 – Enunciado TAPE 6

Leticia e Vera, resolveram a seguinte questão:

1) De acordo com o diagrama a seguir, que representa a função f, responda os itens que se pede.



a) Qual é o conjunto domínio e o conjunto contradomínio de f?

Observe a resposta de Leticia para o item a:

$D(f) = \{1, 3, 5, 7\}$ $CD(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Observe a resposta de Vera para o item a:

$D = \{1, 3, 5, 7\}$

$CD = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

b) Qual é o conjunto imagem de f?

Observe a resposta de Leticia para o item b:

$Im(f) = \{4, 6, 8\}$

Observe a resposta de Vera para o item b:

$Im = \{4, 6, 8\}$

Agora responda:

a) Por que a situação apresentada é uma função?

b) Como você define o conjunto domínio e o conjunto contradomínio de uma função?

c) Como você define o conjunto imagem de uma função?

d) Qual a diferença entre o conjunto contradomínio e o conjunto imagem?

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é consolidar o conceito de função, conjunto domínio e conjunto contradomínio visto nas tarefas anteriores e definir o conjunto **imagem** de uma função.

3.7 **TAPE 7**

Objetivo: Evidenciar a estrutura/lei de formação de uma função afim.

3.7.1 **A Tarefa**

Figura 6 - Enunciado TAPE 7

Dois alunos, Carlos e Mara, resolveram a seguinte questão:

1) Vimos (tarefa 1) que a ligação entre os elementos do conjunto domínio e contradomínio pode acontecer através de uma formula (ou regra) matemática. Chamamos essa formula de **lei da função** ou **lei de correspondência**.

Nas leis de formação das funções abaixo, determine o coeficiente **a** e **b** de cada uma delas.

a) $f(x) = 2x + 1$

Resolução de Carlos para o item **a**:

A = 2
B = 1

Resolução de Mara para o item **a**:

a = 2
b = 1

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$

Resolução de Carlos para o item **b**:

A = $-\frac{1}{3}$
B = 5

Resolução de Mara para o item **b**:

a = $-\frac{1}{3}$
b = 5

c) $f(x) = \pi x - 4$

Resolução de Carlos para o item **c**:

A = π
B = -4

Resolução de Mara para o item **c**:

a = π
b = -4

Baseado nas respostas dos alunos acima, responda as seguintes questões:

a) O que você entendeu como "coeficiente a" das leis de formação apresentadas?
b) O que você entendeu como "coeficiente b" das leis de formação apresentadas?
c) Utilizando a mesma estrutura das leis de formação apresentadas, escreva uma lei de formação genérica, utilizando o "a" e o "b" como coeficientes.

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é começar a analisar um tipo específico de função, a função afim. Esta função tem uma característica importante que é a sua lei de formação, uma estrutura definida através de uma variável e coeficientes. Através desta tarefa os alunos devem ser capazes de identificar o coeficiente a e b e também uma estrutura de função afim.

3.8 **TAPE 8**

Objetivo**:** Destacar casos particulares da função afim.

3.8.1 **A Tarefa**

Figura 7 – Enunciado TAPE 8

Observe a resolução dos alunos Mara e Paulo para a questão a seguir:

1) Nas leis de formação das funções abaixo, determine o coeficiente **a** e **b** de cada uma delas e classifique a função em função linear, identidade ou constante.

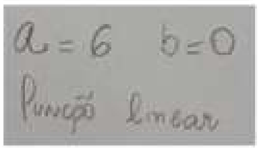
a) $f(x) = 4{,}3x$

Observe a resolução de Mara para o item **a**:

Observe a resolução de Paulo para o item **a**:

b) $f(x) = 6x$

Observe a resolução de Mara para o item **b**:



Observe a resolução de Paulo para o item **b**:

c) $f(x) = x$

Observe a resolução de Mara para o item **c**:

Observe a resolução de Paulo para o item **c**:

d) $f(x) = 0$

Observe a resolução de Mara para o item **d**:

Observe a resolução de Paulo para o item **d**:

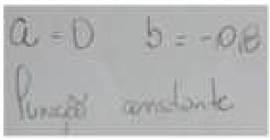
e) $f(x) = 6$

Observe a resolução de Mara para o item **e**:

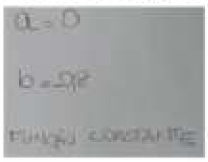
Observe a resolução de Paulo para o item **e**:

f) $f(x) = -0{,}8$

Observe a resolução de Mara para o item **f**:



Observe a resolução de Paulo para o item **f**:



Com base nas respostas dos alunos acima e em seu conhecimento de função, responda as seguintes questões:

a) São funções afim? Por quê?
b) O que você entendeu como uma função linear?
c) O que você entendeu como uma função identidade?
d) O que você entendeu como uma função constante?
e) O que você entendeu como uma função constante nula?

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é evidenciar a lei de formação de uma função afim, identificar os coeficientes a e b, e mostrar que existem casos particulares de funções afim de acordo com os valores que os coeficientes assumem.

3.9 **TAPE 9**

Objetivo: Trabalhar a representação gráfica das funções afim, identificar o papel dos coeficientes angular e linear em um gráfico de uma função afim e classificar uma função afim em crescente e decrescente.

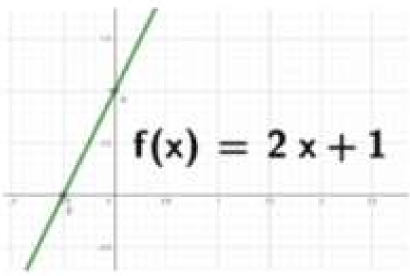
3.9.1 **A Tarefa**

Figura 8 – Enunciado TAPE 9

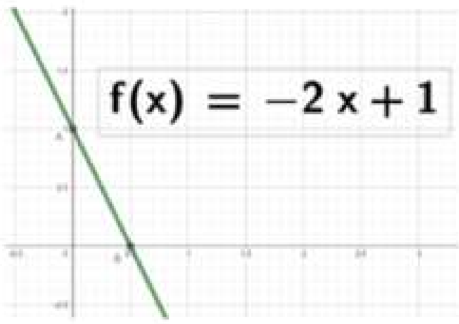
Observe a resolução dos alunos Maria e Carlos para a questão a seguir:

A representação gráfica em um plano cartesiano de uma função afim, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é uma reta. O coeficiente de **x**, indicado pela letra **a**, é chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** da reta, e está ligado à inclinação da reta com o eixo das abcissas (eixo x). Assim, existe duas possibilidades para essas retas, serem **crescentes** ou **decrescentes**. Analise **o coeficiente angular** das duas situações abaixo e classifique essas funções em crescentes ou decrescentes.

a) Crescente ou decrescente, por que?



b) Crescente ou decrescente, por que?



Resolução da Maria para a letra a:

CRESCENTE, PORQUE O COEFICIENTE A QUE É O a É POSITIVO.

Resolução da Maria para a letra b:

DECRESCENTE, PORQUE O COEFICIENTE A QUE É O a É NEGATIVO.

Resolução da Carlos para a letra a:

Crescente, porque a é positivo

Resolução da Carlos para a letra b:

Decrescente, porque a é negativo.

De acordo com as informações do enunciado e analisando as resoluções dos alunos Maria e Carlos, responda as seguintes questões:

a) Qual objeto geométrico representa a função afim no plano cartesiano?
b) O que é e para que serve o coeficiente angular de uma função afim?
c) Qual a diferença entre as leis de formação das funções da letra a e b?
d) Como se classifica uma função afim em crescente ou decrescente?

Fonte: Autoria própria (2022).

Esta tarefa visa mostrar que podemos representar uma função utilizando o plano cartesiano, que a função afim tem uma representação gráfica específica e que através dos coeficientes da lei de formação da função afim pode-se tirar algumas conclusões sobre o comportamento da função.

3.10 **TAPE 10**

Objetivo: Definir o valor numérico de uma função. Evidenciar que o valor numérico de uma função, é um valor do conjunto contradomínio, mais especificamente a imagem do elemento do conjunto domínio, que se obtém substituindo um determinado valor do conjunto domínio para a variável x.

3.10.1 **A Tarefa**

Figura 9 – Enunciado TAPE 10

Carlos, Luana e Vitor resolveram a seguinte questão:

O valor numérico de uma função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é tal que, para um determinado valor de x, tem-se um valor para f(x). Por exemplo, para um $x = x_0$, o valor numérico da função é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.

I. Seja a função afim $f(x) = 3x + 2$

a) Calcule a f(0):

Veja a resolução de Carlos:

$y(x) = 3.x + 2$
$y(0) = 3.0 + 2$
$y(0)\ 0 + 2 = 2$
$y = 2$

Veja a resolução de Luana:

$F=(0) = 3.0 + 2 =$
$F=(0) = 2$

Veja a resolução de Vitor:

$f(x) = 3x + 2$
$f(0) = 3.0 + 2 = 2$

b) Calcule a f(1):

Veja a resolução de Carlos:

$y(1) = 3.1 + 2$
$y(1) = 3 + 2 = 5$
$y = 5$

Veja a resolução de Luana:

$F=(1) = 3.1 + 2$
$F=(1) = 5$

Veja a resolução de Vitor:

$f(x) = 3x + 2$
$f(1) = 3.1 + 2 = 5$

c) Calcule a f(-3):

Veja a resolução de Carlos:

$y(-3) = 3.(-3) + 2$
$y(-3) = -9 + 2 = -7$
$y = (-7)$

Veja a resolução de Luana:

$f(-3) = 3.-3 + 2$
$f(-3) = -7$

Veja a resolução de Vitor:

$f(x) = 3x + 2$
$f(-3) = 3.-3 + 2 = -7$

Analisando as respostas dos alunos, responda:

a) O que você entendeu como valor numérico de uma função?
b) Como se calcula o valor numérico de uma função?
c) Por que o aluno Carlos escreveu "y" e os outros alunos "f" nas resoluções?

Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando as respostas dos alunos que resolveram a questão, a intenção é que os estudantes percebam que para calcular o valor numérico de uma função deve ser substituído um valor do conjunto domínio no lugar de x, e dessa forma, encontrarão o valor da função, no contradomínio da mesma.

3.11 **TAPE 11**

Objetivo: Utilizar o valor numérico da função para determinar o seu valor inicial e formalizar o conceito de coeficiente linear.

3.11.1 **A Tarefa**

Figura 10– Enunciado TAPE 11

Carlos, Luana e Vitor resolveram a seguinte questão:

Chama-se valor inicial da função o número **b** (chamado de **coeficiente linear** da função afim f(x) = ax + b), tal que f(0) = b. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine o valor inicial de cada uma delas.

a) $f(x) = -2x + 3$

Observe a resolução de Carlos:

$f(0): -2.0+3$
$f(0): 0+3$
$f(0): 3$

Observe a resolução de Luana:

$f(0) = -2\cancel{0}+3$
$f(0) = 3$

Observe a resolução de Vitor:

$b = +3$

b) $f(x) = 5x - 1$

Observe a resolução de Carlos:

$f(0) = 5.0-1$
$f(0) = 0-1$
$f(0) = -1$

Observe a resolução de Luana:

$f(0) = 5\cancel{0}-1$
$f(0) = -1$

Observe a resolução de Vitor:

$b = -1$

c) $f(x) = 7x$

Observe a resolução de Carlos:

$f(0) = 7.0$
$f(0) = 0$

Observe a resolução de Luana:

$f(0) = 7\cancel{0}$
$f(0) = 0$

Observe a resolução de Vitor:

$b = 0$

Baseado nas resoluções acima, responda:

a) O que é valor inicial de uma função?
b) Por que nas respostas do Vitor ele escreveu o coeficiente "b" como resposta?
c) Como é chamado o coeficiente "b" da função afim?

Fonte: Autoria própria (2022).

A TAPE 11 consolida a ideia de valor numérico de uma função, determina o que é o valor inicial e define o coeficiente *b* da função afim como sendo o **coeficiente linear**.

3.12 **TAPE 12**

Objetivo: Definir e determinar o **zero** ou a **raiz** de uma função.

3.12.1 **A Tarefa**

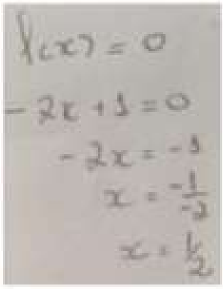
Figura 11 – Enunciado TAPE 12

Carlos, Luana e Vitor resolveram a seguinte questão:

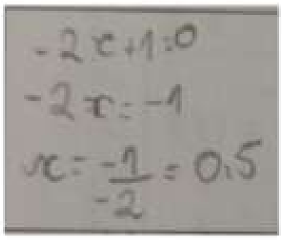
Raiz ou **zero** de um função afim, dada por $f(x) = ax + b$, com a ≠ 0, é o número real "x" tal que f(x) = 0. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine a raíz de cada uma delas.

a) $f(x) = -2x + 1$

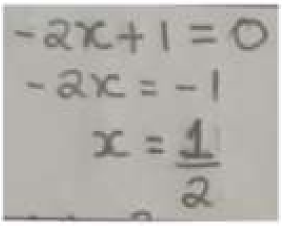
Observe a resolução de Carlos:



Observe a resolução de Luana:

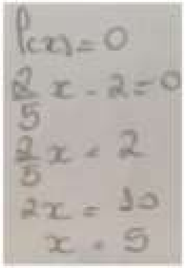


Observe a resolução de Vitor:



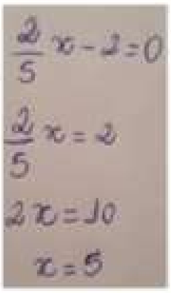
b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 2$

Observe a resolução de Carlos:



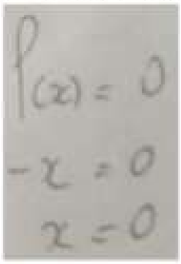
Observe a resolução de Luana:

Observe a resolução de Vitor:

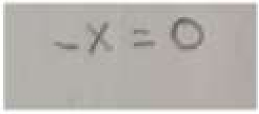


c) $f(x) = -x$

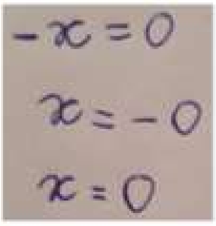
Observe a resolução de Carlos:



Observe a resolução de Luana:



Observe a resolução de Vitor:



Responda as seguintes questões baseada na resolução dos alunos acima:

a) Por que nas resoluções apresentadas a lei de formação da função foi igualada a zero?
b) O que você entendeu como raiz ou zero de uma função?
c) Determina a raiz das seguintes funções:
   I. $f(x) = 3x - 12$
   II. $f(x) = -2x - 10$

Fonte: Autoria própria (2022).

A TAPE 12 trabalha a raiz da função afim, diferentemente do valor numérico, em que os estudantes deveriam fazer o cálculo de um determinado valor de x para obter o valor da função, a raiz de uma função é descobrir qual o valor do x que torna a função igual a zero, ou seja, qual o valor de x que determina um valor numérico zero para a função. A letra "c" da tarefa exige o cálculo da raiz das funções apresentadas.

3.13 **TAPE 13**

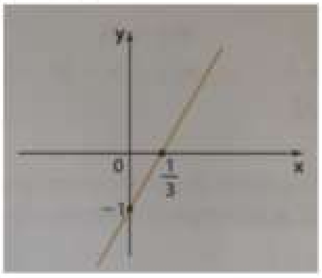
Objetivo: Correlacionar os coeficientes angular e linear com o gráfico de uma função afim.

3.13.1 **A Tarefa**

Figura 12 – Enunciado TAPE 13 – parte 1

Observe a resolução dos alunos Arthur, Davi e Laura para a questão abaixo:

1) Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = 3x - 1$. Observe o gráfico da função.



a) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

Resolução de Arthur:

Cresente, pois o coeficiente angular a é 3, positivo

Resolução de Davi:

Crescente, porque o valor de a é positivo

Resolução de Laura:

Crescente, pois o coeficiente "a" é 3, positivo.

b) Determine a raiz da função. A seguir, faça uma análise e descreva qual a relação da raiz e o gráfico da função.

Resolução de Arthur:

$3x-1=0$
$3x=1$
$x=\frac{1}{3}$

A raiz é o ponto onde passa pelo eixo x no gráfico.

Resolução de Davi:

$3x-1=0$
$3x=1$
$x=\frac{1}{3}$

A raiz é o ponto onde se passa pelo eixo x

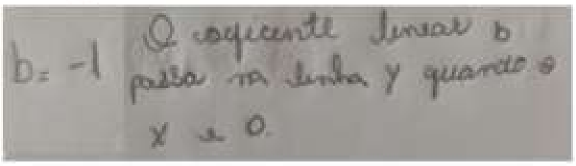
Resolução de Laura:

Raiz $= (\frac{1}{3}, 0)$

A Raiz está cruzando na reta X.

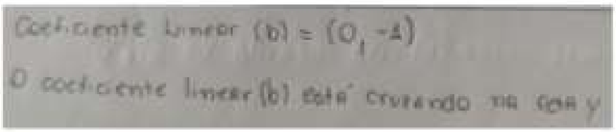
c) Determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

Resolução de Arthur:



Resolução de Davi:

Resolução de Laura:



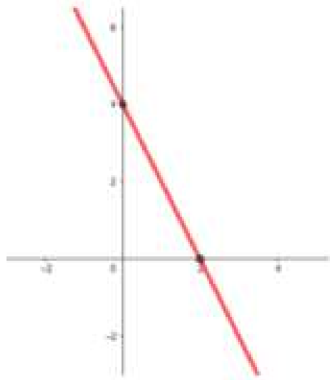
Analisando as resoluções dos alunos, responda:

a) Como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

b) Por que a resposta de Laura para o item "b" foi raiz = ($\frac{1}{3}$, 0)?

c) Como identificar o coeficiente linear ("b") da função afim analisando somente o gráfico.

d) Dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

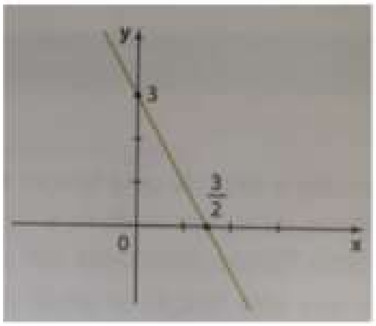


Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 13 – Enunciado TAPE 13 – parte 2

Observe a resolução dos alunos Arthur, Davi e Laura para a questão abaixo:

2) Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = -2x + 3$. Observe o gráfico da função.



a) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

Observe a resolução de Arthur:

Decrescente, pois o coeficiente angular a é -2, negativo

Observe a resolução de Davi:

função decrescente, pois "a" é negativo.

Observe a resolução de Laura:

Decrescente pois o coeficiente angular é negativo

b) Determine a raiz da função? A seguir, faça uma análise e descreva qual a relação da raiz e o gráfico da função.

Observe a resolução de Arthur:

$f(x) = 0$
$-2x + 3 = 0$
$-2x = -3$
$x = \frac{-3}{-2}$
$x = \frac{3}{2}$

É o ponto que a reta cruza com o eixo x

Observe a resolução de Davi:

$Raiz = \frac{3}{2}$ | Onde a reta cruza o eixo x.

Observe a resolução de Laura:

$\frac{3}{2}$ pois é o ponto em que a reta corta o eixo 'X'

c) Determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

Observe a resolução de Arthur:

b=3 é onde a reta passa pelo y

Observe a resolução de Davi:

b= 3 / onde a reta cruza o eixo y.

Observe a resolução de Laura:

o coeficiente linear é o 3 e ele é o ponto em que a reta corta o eixo "y"

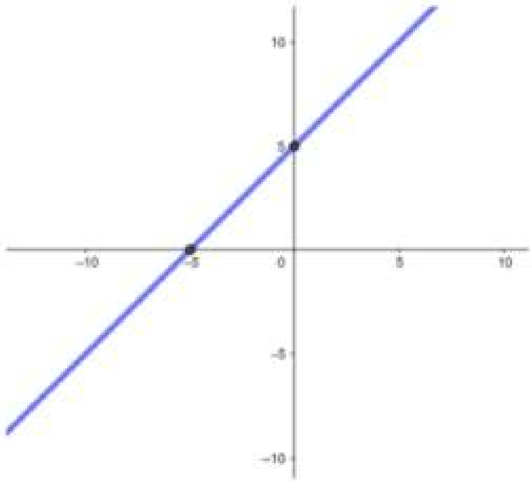
Analisando as resoluções dos alunos, responda:

a) Como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

b) Por que na resposta do item "b" do Davi e da Laura eles não realizaram cálculos para determinar a raiz?

c) Como identificar o coeficiente linear ("b") da função afim analisando somente o gráfico.

d) Dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.



Fonte: Autoria própria (2022).

Nas tarefas anteriores vimos que a representação gráfica de uma função afim é uma reta, que através do coeficiente angular a, classificamos a função em crescente ou decrescente, e aprendemos a fazer o valor numérico de uma função assim como sua raiz. Na TAPE 13 o objetivo é juntar todas essas informações e retomar esses conteúdos utilizando o gráfico como apoio.

A TAPE 13 está dividida em dois itens, “1” e “2”, e a intenção da tarefa é fazer a conexão dos coeficientes e da raiz da função afim com o gráfico, o que difere os itens “1” e “2” é que uma função tem o coeficiente angular positivo, logo é crescente e a outra tem o coeficiente angular negativo, portanto decrescente. No final dos itens é dada uma situação em que os alunos devem colocar em prática o que entenderam.

3.14 **TAPE 14**

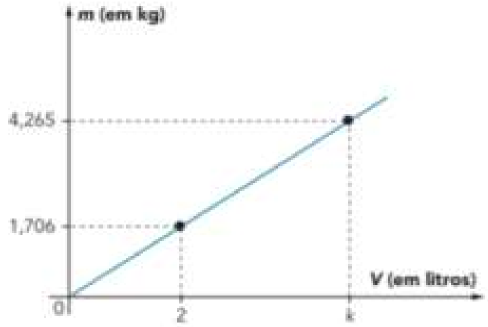
Objetivo: Consolidar todas as informações vistas nas tarefas anteriores através de um problema rotineiro de função afim.

3.14.1 **A Tarefa**

Figura 14 – Enunciado TAPE 14

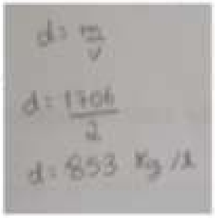
Os Alunos Marcia, Claudia e Otavio resolveram a seguinte questão:

O gráfico a seguir mostra a relação entre a medida de massa e a medida de volume do óleo diesel.

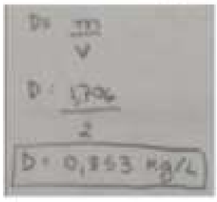


a) Determine a medida de densidade (isto é, a razão entre a medida de massa e a medida de volume) desse óleo, em quilogramas por litro.

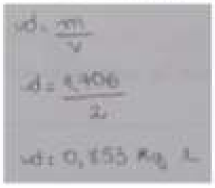
Observe a resolução da Marcia:



Observe a resolução da Claudia:

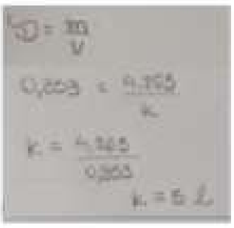


Observe a resolução do Otavio:

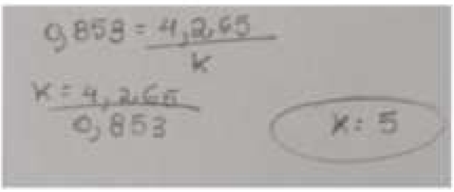


b) Calcule o valor do k.

Observe a resolução de Marcia:



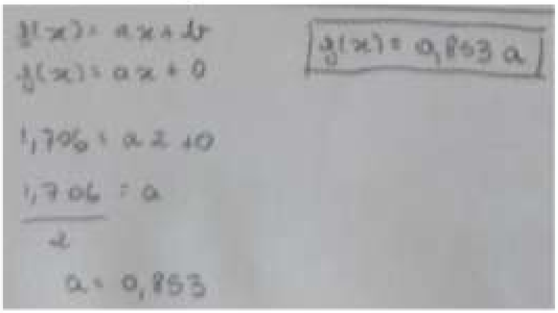
Observe a resolução de Claudia:



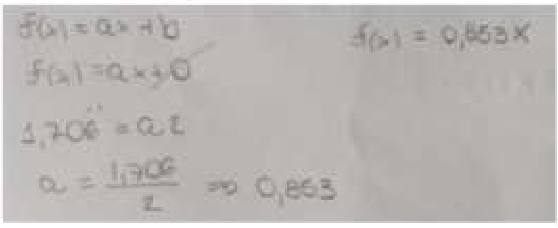
Observe a resolução do Otavio:

c) Qual a lei da função que modela essa situação.

Observe a resolução de Marcia:



Observe a resolução de Claudia:



Observe a resolução do Otavio:

Diante das resoluções apresentadas pelos alunos, responda:

a) Vimos na TAPE 1 que uma função é uma relação entre grandezas, quais são as grandezas envolvidas nesta situação?

b) Qual é o conjunto domínio e contradomínio desta função?

c) Por que na resolução da letra "a" os 3 alunos realizaram a divisão do valor do eixo y com o valor do eixo x?

d) Observe a resolução dos alunos para a letra "b" e explique com suas palavras o procedimento adotado por eles.

e) Na letra "c" os três alunos adotaram a estrutura de uma função afim para representar a lei de formação, por que?

f) Por que os alunos adotaram o coeficiente linear "b" como sendo zero?

g) Observe a resolução da letra "c", explique como os alunos determinaram o coeficiente angular "a".

Fonte: Autoria própria (2022).

4. ORIENTAÇÕES PARA APLICAÇÃO DAS TAPE

Ao utilizar a estratégia APE e as TAPE em suas aulas, é importante o professor perceber que há uma diferenciação entre o que ensinar e de que forma ensinar, desviando as atenções centradas no professor e voltando o olhar para o aluno. Sendo assim, é importante que o docente seja um orientador, capaz de estimular o aluno a evoluir e a desenvolver as tarefas propostas.

O docente deve estar preparado para enfrentar algumas mudanças, como é o caso de ter que disponibilizar um maior tempo para a resolução das tarefas, uma maior interação entre os alunos e dar tempo suficiente para que os mesmos explorem a tarefa disponibilizada.

Assim, recomenda-se, ao entregar as TAPE para os alunos, que eles façam uma leitura individual e em seguida uma leitura em conjunto. Neste momento, é importante observar se há alguma dúvida ou palavras desconhecidas para os alunos, é importante esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se com os alunos, consultar um dicionário.

De posse da TAPE, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, individualmente devem resolvê-la (essa foi uma opção minha, como pesquisador, mas nada impede que seja em grupo, desde que cada aluno faça seu próprio registro). A tarefa proposta terá resoluções de outros estudantes, e através destas resoluções o aluno deve fazer análise, reflexão, discussão (durante a aplicação foi permitido a troca de informações entre os alunos) e escrita sobre matemática, o que conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula (de acordo com a THA).

Durante a realização das tarefas pelos alunos, o professor tem um papel fundamental de observar e incentivar. O professor, como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decorrer da aplicação das TAPE.

A formalização do conteúdo deve ocorrer após a resolução de cada TAPE. Atentar-se que a formalização das TAPE 2, 3, 4 acontecerão juntamente com a TAPE 5, o mesmo para as TAPE 10,11, que terão sua formalização na TAPE 12. A TAPE 14 não tem formalização, pois ela é uma TAPE que visa retomar os conceitos vistos por todas as tarefas.

Para a formalização o professor pode promover um debate com os alunos apresentando os termos técnicos e a teoria envolvida na TAPE. O professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através das resoluções das TAPE.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta sequência didática de Tarefas de Análise da Produção Escrita oferece aos professores uma alternativa ao modelo tradicional de ensino, na qual o aluno participa ativamente no processo, fazendo análises de questões respondidas por outros estudantes.

A sequência de 14 TAPE apresentada contempla os principais aspectos no ensino de Função como uma relação entre variáveis e características e definições da Função Afim. A partir destas tarefas, o professor pode elaborar novas TAPE, seja para aprofundamento do conteúdo ou para reforçar o que já foi visto, destacando que é de suma importância estar atento aos objetivos da aprendizagem e às particularidades da TAPE, como sendo tarefas que propõe reflexão, investigação, discussão, que instiguem a curiosidade e a criatividade dos alunos.

Para facilitar a utilização deste material, disponibilizamos, através do QR Code, as 14 TAPE no formato pdf.

Ainda em relação à aplicação das TAPE, é possível visualizar possíveis dúvidas que os alunos possam ter, além de diferentes resoluções esperadas para as tarefas propostas e a formalização do conteúdo, acessando o link abaixo.

Aos interessados em conhecer resultados da utilização destas tarefas no Ensino Médio, recomendamos a leitura, acessando o QR CODE abaixo, da dissertação *Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Função Afim*, vinculada a este produto educacional, que relata como foram aplicadas as 14 TAPE pelo primeiro autor, descrevendo e analisando de forma mais detalhada as ocorrências em cada uma das tarefas propostas.

Ainda na dissertação, é possível analisar especificamente o desempenho de dois alunos no decorrer das TAPE e em uma atividade diagnóstica de Função Afim, evidenciando uma evolução significativa nos conceitos abordados, o que demonstra que as aulas, por meio da Análise da Produção Escrita (APE), com a utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) como ferramenta de ensino, tem um grande potencial para ser utilizado pelos professores.

6. REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. et al. **Matemática interligada**: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica / obra coletiva; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. -- 1. ed. –- São Paulo: Scipione, 2020.

BURIASCO, R. L. C. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **Bolema,** Rio Claro (SP), a. 22, n. 33, 2009, p. 69-96. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

CARDOSO, M. A. M. **Tarefas de Análise da Produção Escrita em Matemática: Quatro Histórias da Construção de uma Proposta de Ensino para a Educação de Jovens e Adultos.** 2017. 105f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UTFPR), Londrina, 2017.

CARDOSO, M. Ap. M; PEREIRA, F. F; DALTO, J.O. **Configurando a análise da produção escrita como estratégia de ensino a partir de uma experiência com o sétimo ano,** ACTIO, Curitiba, v. 3, n. 3, p. 358-377, set. /Dez. 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em Contexto**: função afim e quadrática. Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo: Ática, 2020.

DONEZE, I. S. **A construção de tarefas de análise da produção escrita para ensino e aprendizagem de matemática.** 2019. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina/Cornélio Procópio, Londrina, 2019.

FIGUEIREDO, S. A.;Costa, N. M. L. **Trajetória Hipotética De Aprendizagem E A Compreensão Das Relações Trigonométricas No Ciclo.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016.

IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciência e aplicações: ensino médio, volume 1 / Gelson lezzi... [et. al]. — 9. ed. — São Paulo: Saraiva, 2016.

MINATO, S. N. **Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Progressões Geométricas.** 2019. 53f. TCC (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UTFPR), Londrina, 2019.

PEREIRA, F. F. **Conhecimentos mobilizados por graduandos e professores que ensinam Matemática em um curso de formação sobre Tarefas de Análise da Produção Escrita**. 2019. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017, 2019.

PEREIRA, F. F.; DONEZE, I. S. DALTO, J. O. Caracterizando Tarefas de Análise da Produção Escrita por meio do ensino de Equações. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.7, n.14, p.236-255, jul.- dez. 2018.

PEREIRA, F. F.; DALTO J. O. **Tarefas de análise da produção escrita: uma proposta de curso de extensão.** Dissertação de Mestrado (Programa de pós-graduação em Ensino de Matemática PPGMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Londrina, 2019.

PEREIRA, E. R. S. **Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de análise combinatória.** 2021. 84f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UTFPR), Londrina, 2021.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática:** de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 157f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SANTOS, E. R.; BURIASCO, R. L. C. **Análise Da Produção Escrita Em Matemática Como Uma Estratégia De Ensino**: Algumas Considerações. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.1, p.119-136, 2015.

SIMON, M. A (1995). **Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective**. Journal for research in Mathematics Education, 26 (2), 114-145. 1995.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C. de; CIANI, A. B. A avaliação como prática de investigação e análise da produção escrita em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, *[S. l.]*, n. 25, 2012. Disponível em: https://periodicos.puc-campinas.edu.br/reveducacao/article/view/106. Acesso em: 28 mar. 2022.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que Alunos da Escola Básica Mostram Saber por Meio de sua Produção Escrita em Matemática.** 2007. 115f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.