UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JESSICA BÓSCHI

AÇÕES DIAGONAIS DE CATEGORIAS DE HOPF

CURITIBA
2022

JESSICA BÓSCHI

AÇÕES DIAGONAIS DE CATEGORIAS DE HOPF

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

CURITIBA
2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Bóschi, Jessica
Ações diagonais de categorias de Hopf / Jessica Bóschi. – Curitiba, 2022.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Marcelo Muniz Silva Alves

1. Álgebra. 2. Hopf, Algebra de. 3. Galois, Teoria de. 4. Grupóides. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Alves, Marcelo Muniz Silva. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **JESSICA BÓSCHI** intitulada: **Ações Diagonais de Categorias de Hopf**, sob orientação do Prof. Dr. MARCELO MUNIZ SILVA ALVES, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de doutora está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Novembro de 2022.

Assinatura Eletrônica
29/11/2022 09:36:22.0
MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
29/11/2022 10:00:02.0
DIRCEU BAGIO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA)

Assinatura Eletrônica
29/11/2022 11:29:20.0
GRASIELA MARTINI
Avaliador Externo (UNIVER. FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL)

Assinatura Eletrônica
30/11/2022 15:51:53.0
ELIEZER BATISTA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica
29/11/2022 09:37:22.0
OLIVIER BRAHIC
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Ao meu companheiro.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu companheiro Claudemir que acompanha minha trajetória acadêmica desde a graduação em Matemática, obrigada por abraçar meus sonhos junto comigo e pela paciência nos vários momentos em que precisei me dedicar a eles.

À minha família, meu pai Rudimar, minha mãe Elizabete e minha irmã Rafaela, vocês sempre foram inspiração pra seguir em frente e abrigo nos momentos difíceis, sei que posso contar com vocês sempre e isso não tem preço. Obrigada pelas orações e torcida em todos os momentos.

À minha amiga Caroline que me recebeu na sua casa em Curitiba nos primeiros dias, me deu dicas valiosas de sobrevivência e me apresentou a Ana e a Bruna que foram minhas companheiras de residência durante boa parte do tempo do doutorado. Obrigada Carol por tudo!

Às minhas amigas Ana e Bruna, vocês foram incríveis, me receberam e me fizeram sentir em casa. Obrigada pelos passeios, pelas conversas no corredor, pelos exemplos de boas pessoas e por entenderem quando eu precisava estudar, estudar e estudar...

Ao meu amigo Tiago que sempre estava disposto a tirar minhas dúvidas e ouvir minhas lamentações. E à minha amiga Larissa que sempre me apoiou e mesmo de Portugal assistiu minha apresentação de qualificação de treinamento.

Aos amigos que o PPGM trouxe, Evelin, Juliana, Elias, Bruno T., Arthur, Willian V., Everton, Flávia, Luciane, Eliakim, Wesley, Wagner, Willian L., Tyszka e tantos outros. Obrigada pelo tempo de cada um dedicado a ouvir alguma dúvida ou desabafo, pelos materiais de estudo compartilhados e pelos almoços no RU. Evelin, Juliana e Elias, nossa parceria de estudos em Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais foi incrível! Bruno T., Arthur, Willian V. e Wesley vocês me salvaram inúmeras vezes com minhas dúvidas de álgebra! Juliana me ajudou demais com Medida e Integração, já durante a pandemia como disciplina remota. Aos amigos que compartilharam café na sala de estudos, conversas nos corredores sobre assuntos aleatórios ou dúvidas avassaladoras, todos vocês ajudaram a tornar tudo mais leve e divertido! Obrigada a cada um pelo período de convivência.

Aos demais amigos que mesmo à distância, eu sabia que estavam torcendo por mim.

Ao grupo de Seminários em Álgebra, que foi onde as primeiras ideias para a tese se originaram. Em especial, ao professor Marcelo que com o tema sugerido para meu primeiro seminário, me forneceu as bases para o capítulo dois dessa tese e me ensinou a usar um diagrama como demonstração; ao Arthur que me ajudou a relembrar e aprender muita coisa de álgebras de Hopf e ao Willian V. que me apresentou as cordas.

À todos os professores do PPGM que contribuiram com a minha trajetória, em especial aos que foram meus professores nas disciplinas cursadas, os professores Marcelo,

Maria Eugenia, Roberto, Elias, Ailin, Cléber, Edson, Matheus e Hudson. Obrigada pelas inúmeras vezes que estiveram disponíveis para ajudar com minhas dúvidas!

Ao meu orientador professor Marcelo, nada disso teria sido possível sem todo o seu conhecimento, paciência e apoio. Minha eterna gratidão pelo exemplo como professor, pesquisador e ser humano!

À banca de qualificação de tese, professores Marcelo, Eliezer e Olivier, obrigada por terem aceitado fazer parte da banca, pelas dicas para a melhoria do texto e ideias que poderiam aprimorar o trabalho. Em especial ao professor Eliezer cujas conversas com o professor Marcelo desde antes desta tese começar, levaram aos módulos diagonais; e também pela sugestão de fazer um teorema de dualidade, o que originou o capítulo 5 deste trabalho.

Aos demais professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica, cada um foi importante para que eu chegasse até aqui. Obrigada por estarem torcendo por mim e me ajudando em meu caminho.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, em especial ao Campus Dois Vizinhos e à Coordenação do Curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, do qual faço parte, por terem me concedido licença para cursar essa pós-graduação. Esta licença foi fundamental para que o Doutorado em Matemática fosse possível.

A Estrada segue sempre avante
Da porta onde é seu começo.
Já longe a Estrada vai, constante,
E eu vou por ela sem tropeço,
Seguindo-a com pés morosos,
Pois outra estrada vou achar
Onde há encontros numerosos.
Depois? Não posso adivinhar.
(J.R.R. Tolkien)

RESUMO

O estudo de ações e coações de álgebras de Hopf em álgebras é um dos objetivos centrais da teoria das álgebras de Hopf desde os anos setenta. Mais recentemente, em 2016, Batista, Caenepeel e Vercruysse introduziram uma generalização de álgebras de Hopf, chamada categorias de Hopf. Assim, é natural se perguntar se as definições e resultados já conhecidos para ações e coações de álgebras de Hopf, podem também ser generalizados para categorias de Hopf. Em 2018, Caenepeel e Fieremans dão algumas respostas neste sentido ao desenvolverem uma teoria de Galois para categorias de Hopf, porém várias questões permanecem ainda em aberto. Neste trabalho, usando a ação adjunta de uma álgebra de Hopf como inspiração, conseguimos obter uma definição de ação para categorias de Hopf. Como consequência obtivemos uma ação adjunta para categorias de Hopf, um produto smash que mostramos ser extensão de Galois de acordo com a teoria de Caenepeel e Fieremans, e uma conexão com a teoria clássica envolvendo ações por grupóides. Por fim, um teorema de dualidade foi construído para categorias de Hopf unindo as teorias desenvolvidas até aqui.

Palavras-chave: categoria de Hopf; produto smash; teoria de Galois; grupóides.

ABSTRACT

The study of actions and coactions of Hopf algebras on algebras has been one of the central goals of the theory of Hopf algebras since the 1970s. More recently, in 2016, Batista, Caenepeel and Vercruysse introduced a generalization of Hopf algebras, called Hopf categories. Thus, it is natural to ask whether the definitions and results already known for actions and coactions of Hopf algebras, can also be generalized to Hopf categories. In 2018, Caenepeel and Fieremans provide some answers in this regard by developing a Galois theory for Hopf categories, however several questions remain open. In this work, using the adjoint action of a Hopf algebra as inspiration, we were able to obtain a definition of action for Hopf categories. As a consequence, we managed to obtain an adjoint action for Hopf categories, a smash product which we showed to be a Galois extension according to the theory of Caenepeel and Fieremans, and a connection with the classical theory involving actions by groupoids. Finally, a duality theorem has been constructed for Hopf categories, unifying the theories developed so far.

Keywords: Hopf category; smash product; Galois theory; groupoids.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A teoria de Galois e suas generalizações têm ocupado gerações de matemáticos desde a obra de Evariste Galois, publicada em 1846, que explicava a inexistência de uma fórmula geral para obter as raízes de um polinômio de grau 5 ou superior. Dada uma extensão de corpos $E \supseteq F$, seu grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E|F)$ é o grupo de F-automorfismos de E, isto é, é o grupo dos automorfismos de E que fixa os elementos de F. Um dos principais resultados obtidos por Galois é a existência, sob algumas hipóteses, de uma bijeção entre os subcorpos de E que contém F e os subgrupos do grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E|F)$; essa bijeção é chamada de correspondência de Galois. Como consequência, mostrou-se que as equações polinomiais que podem ser resolvidas por radicais são precisamente aquelas cujo grupo de Galois é solúvel (o grupo de Galois da equação polinomial $f(X) = 0$, em que $f(X)$ tem coeficientes em F, é o grupo de Galois do corpo de decomposição do polinômio $f(X)$ sobre F). Posteriormente Chase, Harrison e Rosenberg ([10], 1965) estenderam a teoria para abarcar extensões de anéis comutativos, obtendo uma nova correspondência de Galois neste contexto.

No final dos anos 60, o estudo das ações e coações das álgebras de Hopf começou a ser desenvolvido na teoria das álgebras de Hopf, podemos citar por exemplo o artigo de Heyneman e Sweedler de 1969 ([18]) onde foi dada a definição de H-módulo álgebra. Isso possibilitou mais tarde, que a teoria de Galois fosse ampliada para incluir álgebras não comutativas no lugar de anéis comutativos, e álgebras de Hopf no lugar de grupos, levando às extensões Hopf-Galois de álgebras ([23], 1981).

A passagem de uma teoria de Galois com base em ações de grupos para uma teoria de Galois com base em coações de álgebras de Hopf está implícita no trabalho de Chase, Harrison e Rosenberg e foi inicialmente desenvolvida em [11], mas a conexão entre grupos e álgebras de Hopf é mais profunda. Pode-se considerar álgebras de Hopf em categorias monoidais trançadas arbitrárias, e deste ponto de vista um grupo é simplesmente uma álgebra de Hopf na categoria dos conjuntos. Na literatura é possível encontrar este conceito de álgebras de Hopf em categorias monoidais trançadas já no início da década de 90 em artigos de Majid [25] e [26] que ainda citam preprints anteriores.

Esta abordagem categórica de álgebras de Hopf tem sido utilizada mais recentemente, por exemplo, no artigo de Caenepeel e Lombaerde ([7], 2006) é mostrado que as Hopf G-coálgebras, introduzidas por Turaev em [39], são álgebras de Hopf em uma categoria monoidal trançada chamada categoria de Turaev. Assim, essa abordagem categórica nos permite ver várias estruturas como sendo álgebras de Hopf na categoria monoidal apropriada.

Batista, Caenepeel e Vercruysse prosseguiram com esta abordagem categórica das álgebras de Hopf em [5] (2016), onde introduziram o conceito de categoria de Hopf. Essa estrutura inclui outros objetos matemáticos, além das álgebras de Hopf, tais como: grupóides, que é uma categoria de Hopf quando a categoria monoidal inicial é a dos conjuntos; as categorias k-lineares (ou k-categorias) quando a categoria monoidal inicial é a dos k-módulos; e as Hopf G-álgebras, uma noção dual das Hopf G-coálgebras.

Logo na sequência em 2018, Caenepeel e Fieremans desenvolveram uma teoria de Galois para as categorias de Hopf k-lineares no seu artigo [8]. Entretanto, neste artigo, apenas duas construções de extensão de Galois foram dadas: uma que é a própria categoria de Hopf no caso k-linear ser uma extensão de Galois de seus coinvariantes, esta na verdade sendo uma consequência direta do teorema fundamental para módulos de Hopf desenvolvido em [5]; e a segunda é a generalização do resultado de Ulbrich que diz que uma extensão de Galois sobre a álgebra de grupo é uma álgebra fortemente graduada.

Além disso, alguns dos resultados já conhecidos para as álgebras de Hopf neste contexto de ações e coações, não puderam ser generalizados para as categorias de Hopf somente por meio do estudo desenvolvido nos trabalhos [5] e [8]. Mais especificamente, quanto à teoria de ações desenvolvida em [8] ela foi baseada na ação de uma categoria de Hopf dual e não de uma categoria de Hopf, não fornecendo construções gerais de ações. Os próprios autores de [8] mencionam ao final que falta um vínculo com a teoria já existente de ações de grupóides em álgebras, desenvolvida por Bagio e Paques em [4] e Paques e Tamusiunas em [33]. (Caenepeel e Fieremans avançam neste sentido posteriormente em [9]).

Neste trabalho, conseguimos desenvolver uma teoria de ações de categorias de Hopf. Por meio dessa teoria, foi possível obter uma ação de uma categoria de Hopf que imita a ação adjunta de uma álgebra de Hopf. Também obtemos uma noção de produto smash envolvendo uma categoria de Hopf, análoga à versão existente entre uma álgebra de Hopf H e uma H-módulo álgebra, e que será extensão de Galois no sentido apresentado por [8], acrescentando mais uma construção de extensão de Galois àquelas já dadas na literatura. Tudo isso culminou em um teorema de dualidade para categorias de Hopf. Além disso, conseguimos obter vários resultados que mostram a relação existente entre a teoria de ações aqui desenvolvida com a teoria de ações de grupóides.

Introduzimos no capítulo 1 as definições e resultados existentes para uma álgebra de Hopf usual ($\Bbbk$-álgebra de Hopf, onde $\Bbbk$ é um corpo), com enfoque nas definições de ação e coação de uma álgebra de Hopf em uma $\Bbbk$-álgebra, no produto smash associado a uma ação e também nas extensões Hopf-Galois. Ao final desse capítulo, os principais resultados de extensões Hopf-Galois quando a álgebra de Hopf tem dimensão finita, nos fornecem a motivação necessária para o último resultado do capítulo 4, o qual foi apresentado por [8] como aplicação da sua definição de extensão de Galois dual, uma versão de extensão de Galois que usa uma categoria de Hopf dual.

O capítulo 2 tem como objetivo apresentar a versão categórica dos principais objetos de estudo, buscando preparar terreno para as categorias de Hopf. Assim, são introduzidas as categorias monoidais e categorias monoidais trançadas que nos permitem definir uma álgebra de Hopf em uma categoria monoidal trançada qualquer. Com isso, a álgebra de Hopf usual tratada no capítulo 1, se torna apenas um caso particular deste, quando a categoria é a dos $\Bbbk$-espaços vetoriais. Veremos que vários resultados conhecidos para álgebras de Hopf usuais podem ser tratados de maneira categórica, com uma simples generalização do seu tratamento através dos morfismos envolvidos. A dificuldade está em fazer as demonstrações dos resultados, já que em uma categoria arbitrária não podemos supor que morfismos são funções e não podemos avaliar morfismos em elementos, por isso várias demonstrações são feitas aqui de maneira original por meio de diagramas. O diagrama permite formas diferentes de leitura, o que facilita seu entendimento, assim como dá ao trabalho um aspecto visual mais agradável.

Um recurso importante para provar resultados que envolviam muitas composições de morfismos, no capítulo 2 e nos capítulos subsequentes, foi o uso de diagramas de cordas. Por exemplo, os diagramas de cordas estão por trás da demonstração da Proposição 2.2.7. Assim, apesar de cordas não aparecerem explicitamente nesta tese, elas foram usadas de maneira a intuir a composição de morfismos que deveria ser efetuada nas demonstrações. Algumas referências em que diagramas de cordas aparecem no contexto de álgebras de Hopf e serviram de base teórica são [25] e [41].

O capítulo 3 tem como objetivo apresentar as categorias de Hopf e as categorias de Hopf duais, baseado no artigo [5]. Optamos por um ponto de vista que focasse no que fosse necessário ao estudo, assim resultados sobre 2-categorias e 2-equivalências foram omitidos ou são citados superficialmente. Uma das demonstrações mais bonitas usando diagramas é dada nesse capítulo, no resultado em que mostramos que a $\mathcal{V}$-categoria oposta é uma $\mathcal{V}$-categoria (3.1.6). Incrementamos alguns resultados a respeito de categorias (duais) opostas que foram necessários nos resultados do capítulo 5. Também separamos uma seção para falar da correspondência entre categorias de Hopf e categorias de Hopf duais dada por [5], que existe quando estamos na categoria dos k-módulos projetivos finitamente gerados. Os resultados desta seção são fundamentais para construirmos o teorema de dualidade no capítulo final.

No capítulo 4 a teoria de ações para categorias de Hopf foi desenvolvida. O ponto de partida foi usar a ação adjunta de uma álgebra de Hopf, apresentada no capítulo 1 para uma álgebra de Hopf usual (1.1.4), e no capítulo 2 para o caso de uma álgebra de Hopf sobre uma categoria monoidal trançada arbitrária (2.41). A análise deste caso particular mostrou primeiramente que, se quiséssemos uma versão análoga de ação adjunta para uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf, então uma definição de A-módulo, quando A é uma $\mathcal{V}$-categoria, diferente daquela dada por [5] precisava ser formulada. Isso motivou a definição de A-módulo diagonal, e na sequência, a definição de ação de uma categoria de Hopf em uma álgebra da categoria diagonal que chamamos de ação diagonal.

A definição obtida de módulo diagonal, não é um caso isolado na literatura, pois um $\mathcal{C}$-módulo quando $\mathcal{C}$ é uma k-categoria dado por [12] é um caso particular desta definição. Ações de uma categoria em um conjunto dado por [24] e ações de um grupóide em um conjunto dado por [33] também podem ser vistas como módulos diagonais, neste caso obtivemos uma equivalência entre as categorias onde estas ações são os objetos das categorias. Já a definição de ação diagonal nos permite descrever a relação existente com as ações de grupóides em álgebra dada por [33], respondendo desse modo, ao questionamento deixado em aberto por Caenepeel e Fieremans em [8].

A ação adjunta que foi a inspiração inicial para a definição de ação diagonal, nos permitiu a construção de um exemplo geral: Mostramos que existe uma ação de uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf $\mathcal{H}$ de classe X nos seus objetos diagonais $(H_x)_{x\in X}$, que generaliza a ação adjunta no sentido de que se tivéssemos uma álgebra de Hopf (categoria de Hopf com um objeto) o caso anterior (2.41) seria obtido.

Ainda no capítulo 4, dedicamos uma seção a definir um produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ na categoria diagonal e uma categoria de Hopf $\mathcal{H}$, que é generalização do produto smash visto em 2.2.5, e provamos que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{V}$-categoria.

Também dedicamos uma seção às coações de categorias de Hopf, neste caso o que fizemos foi generalizar a definição de comódulo categoria dada em [8] para uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$ arbitrária. Foi possível mostrar que existe uma coação da categoria de Hopf no produto smash criado e que, além disso, se a categoria de Hopf for k-linear, esse produto smash é uma extensão de Galois no sentido dado por [8].

Na segunda parte do capítulo 4 (seção 4.2) apresentamos, para efeito de comparação, a teoria de ação desenvolvida por [8] que usa uma categoria de Hopf dual. Essa teoria leva a um produto smash chamado produto smash cluster que é essencialmente diferente do que apresentamos anteriormente, a começar por ser um cluster, o que fornece mais um índice para os cálculos. Também leva a uma outra noção de extensão de Galois chamada extensão de Galois dual. Conseguimos estender vários resultados de [8], originalmente restritos à $Vec_{\Bbbk}$-categorias (duais), para $\mathcal{V}$-categorias e categorias de Hopf duais sobre uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$ arbitrária.

No capítulo 5 a teoria desenvolvida de ação de categorias de Hopf juntamente com as coações de categorias de Hopf e a teoria de ação desenvolvida por [8], foram reunidadas para produzir um teorema de dualidade para categorias de Hopf. Na primeira seção do capítulo 5, debatemos sobre como relacionar módulo categorias com comódulo categorias. É aqui que vários resultados obtidos no capítulo 3 precisam ser aplicados. Já na seção 2 do capítulo 5 o teorema é apresentado, tendo como inspiração o teorema de dualidade para álgebras de Hopf de dimensão finita dado por Van der Bergh [42].

É interessante observar como a construção vai sendo feita, encaixando vários resultados obtidos ao longo dos capítulos deste trabalho como peças de um quebra-cabeça. Ao final este resultado dá uma relação entre as duas noções de extensão de Galois dadas por [8].

Ao longo de todo o texto buscou-se indicar em cada definição, exemplo, proposição ou teorema, a principal referência utilizada. Com isso, queremos dar o devido crédito aos autores consultados, bem como destacar os resultados alcançados por meio deste estudo.

Capítulo 1

PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, alguns exemplos e resultados existentes na literatura para uma álgebra de Hopf usual. Por isso, fixemos algumas notações: $\Bbbk$ é um corpo, H é uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf com multiplicação m, unidade η, comultipliação Δ, counidade ε e a antípoda de H será denotada por $\mathcal{S}$. Representaremos por Id o morfismo identidade.

Vamos nos ater àqueles resultados estritamente relacionados com os capítulos subsequentes deste estudo, para demais definições ou resultados relativos a àlgebras de Hopf, os livros [14], [29] e [34] podem ser consultados.

1.1 AÇÕES E COAÇÕES DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Nesta seção introduziremos ações e coações de uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf em uma álgebra, bem como o produto smash. Alguns exemplos são apresentados com o objetivo de ilustrar de que forma as definições e propriedades podem ser aplicadas.

As principais referências desta seção são os livros [14] e [29].

Definição 1.1.1 ([14])**.** *Seja H uma álgebra de Hopf (ou uma $\Bbbk$ -álgebra). Um H-**módulo à esquerda** é um par (A, ν) onde A é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\nu : H \otimes A \longrightarrow A$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear, com $\nu(h \otimes a) = h \cdot a$ para $h \in H$, $a \in A$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes A \arrow[r, "Id\otimes\nu"] \arrow[d, "m\otimes Id"'] & H \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\
H \otimes A \arrow[r, "\nu"'] & A
\end{tikzcd} \quad (1.1)$$

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes Id"] \arrow[dr, "\sim"'] & H \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\
 & A
\end{tikzcd} \quad (1.2)$$

ou seja, para todo $h, g \in H, a \in A$ temos:

$$(hg) \cdot a = h \cdot (g \cdot a) \qquad\qquad 1_H \cdot a = a.$$

Definição 1.1.2 ([14])**.** *Seja H uma álgebra de Hopf (ou $\Bbbk$-biálgebra). Dizemos que H **age** em uma $\Bbbk$-álgebra A ou que A é uma H-**módulo álgebra à esquerda**, se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) A é um H-módulo à esquerda.

ii) $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$, *para todo* $h \in H, a, b \in A$.

iii) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$, *para todo* $h \in H$.

Uma observação interessante sobre a definição de H-módulo álgebra é que se H é álgbera de Hopf, o item iii) pode ser visto como uma consequência dos itens i) e ii).

Naturalmente, ambas as definições acima podem ser feitas à direita.

Definição 1.1.3 ([29]). *Seja A um H-módulo à esquerda. Os* ***invariantes*** *de H em A são dados pelo conjunto:*

$$A^H = \{a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h)a, \forall\, h \in H\}.$$

Se A é H-módulo álgebra à esquerda então A^H é $\Bbbk$-subálgebra de A e é dita **álgebra de invariantes**.

Exemplo 1.1.4 (Ação adjunta, [14]). *Qualquer álgebra de Hopf H age em si mesma pela* ***ação adjunta*** *definida por:*

$$h \cdot l = \sum h_1 l\, \mathcal{S}(h_2) \tag{1.3}$$

Nesse caso, a álgebra de invariantes é $H^H = Z(H)$ *(centro de H).*

Vejamos que de fato, a aplicação dada por:

$$\begin{aligned} \nu : H \otimes H &\rightarrow H \\ h \otimes l &\mapsto h \cdot l = \sum h_1 l\, \mathcal{S}(h_2) \end{aligned}$$

é uma ação de H em H.

Note que ν pode ser escrita como a composição das aplicações $\Bbbk$-lineares:

$$\nu = m \circ (m \otimes \mathcal{S}) \circ (Id \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes Id)$$

onde $\tau : H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ é o morfismo **twist** dado por $\tau(h \otimes g) = g \otimes h$. Portanto, ν é aplicação $\Bbbk$-linear.

Sejam $h, g, l \in H$ temos:

$$\begin{aligned} \nu(m \otimes Id)(h \otimes g \otimes l) = (hg \cdot l) &= \sum (hg)_1 l\, \mathcal{S}((hg)_2), \quad (\Delta \text{ é morfismo de } \Bbbk\text{-álgebras}) \\ &= \sum h_1 g_1 l\, \mathcal{S}(h_2 g_2), \quad (\mathcal{S} \text{ é antimorfismo de álgebras}) \\ &= \sum h_1 g_1 l\, \mathcal{S}(g_2)\mathcal{S}(h_2) \\ &= h \cdot \left(\sum g_1 l\, \mathcal{S}(g_2)\right) \\ &= h \cdot (g \cdot l) = \nu(Id \otimes \nu)(h \otimes g \otimes l) \end{aligned}$$

e ainda,

$$\nu(\eta \otimes Id)(1_{\Bbbk} \otimes l) = 1_H \cdot l = 1_H l\, \mathcal{S}(1_H) = 1_H l 1_H = l.$$

Logo, H é um H-módulo à esquerda com a ação adjunta.

Verifiquemos agora o item ii) da Definição 1.1.2:

$$\begin{aligned}\sum(h_1\cdot g)(h_2\cdot l) &= \sum h_1 g\ \mathcal{S}(h_2)h_3 l\ \mathcal{S}(h_4)\\ &= \sum h_1 g\ \varepsilon(h_2) l\ \mathcal{S}(h_3)\\ &= \sum h_1 g\ l\ \mathcal{S}(\varepsilon(h_2)h_3)\\ &= \sum h_1(gl)\ \mathcal{S}(h_2)\\ &= h\cdot(gl).\end{aligned}$$

Por fim, o item iii) da Definição 1.1.2 é facilmente verificado:

$$h\cdot 1_H = h_1 1_H\ \mathcal{S}(h_2) = \varepsilon(h)1_H.$$

Portanto, H é um H-módulo álgebra.

Agora vejamos que $H^H = Z(H)$. Seja $g \in H^H$, então para todo $h \in H$ temos:

$$hg=\sum h_1\varepsilon(h_2)g=\sum h_1 g\ \varepsilon(h_2)=\sum h_1 g\ \mathcal{S}(h_2)h_3=\sum(h_1\cdot g)h_2=\sum\varepsilon(h_1)g\ h_2=gh$$

ou seja, $g \in Z(H)$. Por outro lado, se $g \in Z(H)$, então para todo $h \in H$ temos:

$$h\cdot g=\sum h_1 g\ \mathcal{S}(h_2)=\sum h_1\mathcal{S}(h_2)g=\varepsilon(h)g.$$

Logo $g \in H^H$ e concluímos que a álgebra de invariantes, neste caso, é o centro de H.

Exemplo 1.1.5 ([14]). *Seja G um grupo arbitrário que age por $\Bbbk$-automorfismos numa $\Bbbk$-álgebra A, isso significa que existe ψ um morfismo de grupos tal que*

$$\psi : G \to Aut_{\Bbbk}(A),\quad \psi(g)(a) = g\cdot a,\ \forall\ g \in G, a \in A.$$

Então, A é $\Bbbk G$-módulo álgebra, definindo ν através da propriedade universal do produto tensorial, usando ψ. Note que, nesse caso,

$$A^{\Bbbk G} = \{a \in A \mid g\cdot a = a,\ \forall\ g \in G\} = A^G$$

é a subálgebra dos elementos fixados por G. Deste exemplo vem o nome "invariantes".

Analogamente, [29] (p.41) nos diz que também vale a volta desta afirmação, ou seja, se A é $\Bbbk G$-módulo álgebra, então G atua em A por $\Bbbk$-automorfismos.

Definição 1.1.6 ([29]). *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então o* ***produto smash*** *de A por H, denotado por $A\#H$, é como $\Bbbk$-espaço vetorial $A\#H = A\otimes H$, e denotamos um elemento $a\otimes h$ como $a\#h$. Além disso, $A\#H$ tem a seguinte operação de multiplicação dos seus elementos, para $a, b \in A$ e $h, g \in H$:*

$$(a\#h)(b\#g) = \sum a(h_1\cdot b)\#h_2 g.$$

Observação 1.1.7. *Note que se considerarmos a multiplicação acima como o operador $m^{\#} : A\#H \otimes A\#H \to A\#H$, então podemos defini-lo por meio da composição de operadores, conforme o diagrama a seguir:*

$$\begin{tikzcd}
A\#H \otimes A\#H \arrow[rr, "m^{\#}"] \arrow[d, "Id\otimes\Delta\otimes Id\otimes Id"] & & A\#H \\
A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[r, "Id\otimes Id\otimes\tau\otimes Id"] & A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[r, "Id\otimes\nu\otimes Id\otimes Id"] & A \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[u, "m_A\otimes m_H"]
\end{tikzcd}$$

Logo, o produto de elementos de $A\#H$ está bem definido nos geradores desse espaço e, ainda, é $\Bbbk$-linear já que todos os operadores envolvidos são $\Bbbk$-lineares.

Proposição 1.1.8 ([14]). *$A\#H$ é uma $\Bbbk$-álgebra.*

Demonstração. Por definição, $A\#H = A \otimes H$ como $\Bbbk$-espaço vetorial e temos uma operação, que é $\Bbbk$-linear, a qual define o poduto em $A\#H$. Logo, para concluirmos que $A\#H$ é uma $\Bbbk$-álgebra basta mostrarmos que este produto é associativo e que existe uma unidade.

De fato, para $a, b, c \in A$ e $h, g, l \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
((a\#h)(b\#g))(c\#l) &= \left(\sum a(h_1 \cdot b)\#h_2g\right)(c\#l) \\
&= \sum a(h_1 \cdot b)\left((h_2g)_1 \cdot c\right)\#(h_2g)_2l \\
&= \sum a(h_1 \cdot b)(h_2 \cdot (g_1 \cdot c))\#h_3g_2l \\
&= \sum a(h_1 \cdot (b(g_1 \cdot c)))\#h_2g_2l \\
&= (a\#h)\left(\sum b(g_1 \cdot c)\#g_2l\right) \\
&= (a\#h)\left((b\#g)(c\#l)\right),
\end{aligned}$$

portanto, a multiplicação é associativa.

A unidade de $A\#H$ é $1_A\#1_H$, já que para $a \in A$ e $h \in H$, temos:

$$(a\#h)(1_A\#1_H) = \sum a(h_1 \cdot 1_A)\#h_21_H = \sum a\varepsilon(h_1)1_A\#h_2 = \sum a\#\varepsilon(h_1)h_2 = a\#h$$

e ainda,

$$(1_A\#1_H)(a\#h) = \sum 1_A((1_H)_1 \cdot a)\#(1_H)_2h = a\#h.$$

Portanto, $A\#H$ é uma $\Bbbk$-álgebra. □

Proposição 1.1.9 ([14]). *As aplicações*

$$\begin{aligned} \varphi \,:\, A &\longrightarrow A\#H \\ a &\longmapsto a\#1_H \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \psi \,:\, H &\longrightarrow A\#H \\ h &\longmapsto 1_A\#h \end{aligned}$$

são aplicações injetivas de $\Bbbk$-álgebras.

Demonstração. É claro que ambas as aplicações são $\Bbbk$-lineares. Sejam $a, b \in A$,

$$\varphi(a)\varphi(b) = (a\#1_H)(b\#1_H) = a(1_H \cdot b)\#1_H1_H = ab\#1_H = \varphi(ab)$$

e ainda, $\varphi(1_A) = 1_A\#1_H = 1_{A\#H}$. Logo, φ é morfismo de $\Bbbk$-álgebras.

Tomando $h, g \in H$ temos

$$\psi(h)\psi(g) = (1_A\#h)(1_A\#g) = 1_A(h_1 \cdot 1_A)\#h_2g = \varepsilon(h_1)1_A\#h_2g = 1_A\#hg = \psi(hg)$$

e $\psi(1_H) = 1_A\#1_H = 1_{A\#H}$. Logo ψ também é morfismo de $\Bbbk$-álgebras.

A injetividade dos morfismos segue do fato de que 1_H, assim como 1_A são linearmente independentes sobre $\Bbbk$. □

O resultado a seguir é um caso particular de um mais forte que envolve um produto smash definido a partir de uma ação fortemente interna ([16], Teorema 4.2.8). Aqui vamos nos ater ao caso particular da ação fortemente interna ser a ação adjunta, já que este é o caso de interesse neste estudo.

Proposição 1.1.10 ([16])**.** *Dada H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf, H é uma H-módulo álgebra pela ação adjunta conforme Exemplo 1.1.4. Nesse caso, $H\#H \simeq H \otimes H$ como álgebras.*

Demonstração. Sabemos que $H\#H = H \otimes H$ como $\Bbbk$-espaço vetorial, defina:

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ H\#H &\longrightarrow H \otimes H \\ h \otimes k &\longmapsto hk_1 \otimes k_2 \end{aligned}$$

e vejamos que φ é um morfismo de álgebras. Sejam $a, b, h, g \in H$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi\left((a\#h)(b\#g)\right) &= \varphi\left(a(h_1 \cdot b)\#h_2g\right) \\ &= a(h_1 \cdot b)(h_2g)_1 \otimes (h_2g)_2 \\ &= a(h_1b\mathcal{S}(h_2))h_3g_1 \otimes h_4g_2 \\ &= ah_1b\ \varepsilon(h_2)g_1 \otimes h_3g_2 \\ &= ah_1bg_1 \otimes h_2g_2 \\ &= (ah_1 \otimes h_2)(bg_1 \otimes g_2) \\ &= \varphi(a \otimes h)\varphi(b \otimes g) \end{aligned}$$

e ainda,

$$\varphi(1_{H\#H}) = \varphi(1_H \otimes 1_H) = 1_H \otimes 1_H = 1_{H\otimes H}$$

logo, φ é morfismo de álgebras.

Vejamos agora que ψ é morfismo inverso de φ, onde ψ é definido por:

$$\begin{aligned} \psi \ : \ H \otimes H &\longrightarrow H\#H \\ h \otimes k &\longmapsto h\mathcal{S}(k_1) \otimes k_2. \end{aligned}$$

De fato, sejam $h, k \in H$,

$$(\psi \circ \varphi)(h \otimes k) = \psi(hk_1 \otimes k_2) = hk_1\mathcal{S}(k_2) \otimes k_3 = h\varepsilon(k_1) \otimes k_2 = h \otimes k$$

e também

$$(\varphi \circ \psi)(h \otimes k) = \varphi(h\mathcal{S}(k_1) \otimes k_2) = h\mathcal{S}(k_1)k_2 \otimes k_3 = h\varepsilon(k_1) \otimes k_2 = h \otimes k.$$

Portanto, φ é um isomorfismo de álgebras. □

Até aqui, citamos apenas a ação de uma álgebra de Hopf H. Agora vamos definir uma coação, mas antes precisamos da definição de H-comódulo.

Definição 1.1.11 ([14]). *Seja H uma álgebra de Hopf (ou uma $\Bbbk$-coálgebra). Um H-* ***comódulo à direita*** *é um par (A, ρ) onde A é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\rho : A \longrightarrow A \otimes H$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear, que denotamos por $\rho(a) = \sum a_0 \otimes a_1 \in A \otimes H$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & A \otimes H \arrow[d, "Id\otimes\Delta"] \\ A \otimes H \arrow[r, "\rho\otimes Id"'] & A \otimes A \otimes H \end{tikzcd} \qquad (1.4)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes H \arrow[d, "Id\otimes\varepsilon"] \\ & A \otimes \Bbbk \end{tikzcd} \qquad (1.5)$$

ou seja, para todo $a \in A$ temos:

$$\sum (a_0)_0 \otimes (a_0)_1 \otimes a_1 = \sum a_0 \otimes (a_1)_1 \otimes (a_1)_2 \qquad \text{e} \qquad \sum a_0 \varepsilon(a_1) = a.$$

Exemplo 1.1.12 ([29]). *Seja G um grupo, A é $\Bbbk G$-comódulo à direita se e somente se A é um módulo G-graduado.*

De fato, se A é $\Bbbk G$-comódulo à direita, então pela definição acima, A é um $\Bbbk$-espaço vetorial e existe uma aplicação ρ que é $\Bbbk$-linear e satisfaz os diagramas (1.4) e (1.5). Defina $A_g = \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes g\}$ para cada $g \in G$.

Podemos escrever $\rho(a) = \sum_{g \in G} a_g \otimes g$, para $a \in A$. Usando (1.4) obtemos para qualquer $a \in A$:

$$\sum_g a_g \otimes g \otimes g = \sum_g \rho(a_g) \otimes g,$$

logo $\rho(a_g) = a_g \otimes g$. Ou seja, $a_g \in A_g$.

Usando (1.5) temos $\sum_g a_g \varepsilon(g) = a$, então $\sum_g a_g = a$ para qualquer $a \in A$.

Agora se $\sum_g a_g = 0$, aplicando ρ obtemos que $a_g = 0$ para todo $g \in G$. Portanto $A = \oplus_{g \in G} A_g$.

Reciprocamente, se A é módulo G-graduado, basta definir $\rho(a_g) = a_g \otimes g$ para todo $a_g \in A_g$.

Definição 1.1.13 ([14]). *Seja H uma álgebra de Hopf (ou $\Bbbk$-biálgebra). Dizemos que H* ***coage*** *em uma $\Bbbk$-álgebra A ou que A é uma H-**comódulo álgebra à direita**, se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) A é um H-comódulo à direita.

ii) $\sum (ab)_0 \otimes (ab)_1 = \sum a_0 b_0 \otimes a_1 b_1$, para todo $a, b \in A$.

iii) $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

Note que na Definição 1.1.13, dizer que as condições ii) e iii) são válidas é equivalente a dizer que ρ é morfismo de álgebras.

Também pode-se mostrar que, se H é uma álgebra de Hopf, o item iii) é uma consequência dos itens i) e ii), assim como ocorre na definição 1.1.2.

Definição 1.1.14 ([29]). *Seja A um H-comódulo à direita. Os* **coinvariantes** *de H em A são dados pelo conjunto:*

$$A^{coH} = \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1_H\}.$$

Se A é uma H-comódulo álgebra à direita, então A^{coH} é $\Bbbk$-subálgebra de A, chamada **álgebra de coinvariantes** de A.

A seguir, apresentamos o exemplo mais elementar de H-comódulo álgebra.

Exemplo 1.1.15 ([14]). *Qualquer álgebra de Hopf H é H-comódulo álgebra à direita (e à esquerda) com* $\rho = \Delta$. *E, neste caso,* $H^{coH} = \Bbbk 1_H$.

De fato, os diagramas da definição de H-comódulo se tornam os diagramas de coassociatividade e counidade quando $\rho = \Delta$, assim o item i) da Definição 1.1.13 é satisfeito. Já os itens ii) e iii) seguem de Δ ser morfismo de álgebras. Portanto, toda álgebra de Hopf H é H-comódulo álgebra (na verdade, é suficiente que H seja biálgebra).

Agora vejamos que $H^{coH} = \Bbbk 1_H$. Seja $h \in H^{coH}$, então pela definição de coinvariantes e sabendo que $\rho = \Delta$ obtemos:

$$h \otimes 1 = \sum h_1 \otimes h_2.$$

Aplicando $\varepsilon \otimes Id$ a ambos os lados e usando o isomorfismo canônico $\Bbbk \otimes H \simeq H$ encontramos $h = \varepsilon(h)1_H$, ou seja, $h \in \Bbbk 1_H$. Por outro lado, se $h \in \Bbbk 1_H$ então $h = \alpha 1_H$ com $\alpha \in \Bbbk$, logo

$$\rho(h) = \Delta(\alpha 1_H) = \alpha\Delta(1_H) = \alpha 1_H \otimes 1_H = h \otimes 1_H$$

ou seja, $h \in H^{coH}$. Portanto $H^{coH} = \Bbbk 1_H$.

A proposição a seguir nos dá outro exemplo de H-comódulo álgebra à direita.

Proposição 1.1.16 ([14]). *O produto smash* $A\#H$ *é uma* H*-comódulo álgebra à direita com*

$$\begin{aligned} \rho : A\#H &\longrightarrow A\#H \otimes H \\ a\#h &\longmapsto \sum (a\#h_1) \otimes h_2 \end{aligned}$$

e ainda, $(A\#H)^{coH} = A\#\Bbbk 1_H \simeq A$.

Demonstração. Pela Proposição 1.1.8, $A\#H$ é $\Bbbk$-álgebra, e é claro que ρ conforme dado é $\Bbbk$-linear. Vejamos que $A\#H$ é H-comódulo à direita, para $a \in A, h \in H$ temos:

$$\begin{aligned} (Id \otimes \Delta) \circ \rho(a\#h) &= (Id \otimes \Delta)\left(\sum (a\#h_1) \otimes h_2\right) \\ &= \sum (a\#h_1) \otimes \Delta(h_2) \\ &= \sum (a\#h_1) \otimes h_2 \otimes h_3 \\ &= \sum \rho(a\#h_1) \otimes h_2 \\ &= (\rho \otimes Id)\left(\sum (a\#h_1) \otimes h_2\right) \\ &= (\rho \otimes Id) \circ \rho(a\#h) \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}(Id\otimes\varepsilon)\circ\rho(a\#h) &= (Id\otimes\varepsilon)\left(\sum(a\#h_1)\otimes h_2\right)=\sum(a\#h_1)\otimes\varepsilon(h_2)\\ &= \sum(a\#h_1\varepsilon(h_2))\otimes 1_{\Bbbk}=a\#h.\end{aligned}$$

Logo, $A\#H$ é H-comódulo à direita.

Vejamos agora que o item ii) da Definição 1.1.13 é satisfeito. Para $a,b\in A$ e $h,g\in H$ temos

$$\begin{aligned}\rho\left((a\#h)(b\#g)\right) &= \rho\left(\sum a(h_1\cdot b)\#h_2g\right)\\ &= \sum(a(h_1\cdot b)\#h_2g_1)\otimes h_3g_2\\ &= \sum(a\#h_1)(b\#g_1)\otimes h_2g_2\\ &= \left(\sum(a\#h_1)\otimes h_2\right)\left(\sum(b\#g_1)\otimes g_2\right)\\ &= \rho(a\#h)\rho(b\#g).\end{aligned}$$

Por fim, vejamos o item iii) da Definição 1.1.13,

$$\rho(1_{A\#H})=\rho(1_A\#1_H)=1_A\#1_H\otimes 1_H=1_{A\#H}\otimes 1_H.$$

Portanto, $A\#H$ é H-comódulo álgebra à direita.

Busquemos agora os coinvariantes de $A\#H$. Suponha que $a\#h\in(A\#H)^{coH}$, então

$$a\#h\otimes 1_H=\rho(a\#h)=\sum(a\#h_1)\otimes h_2.$$

Aplicando $Id\otimes\varepsilon\otimes Id$ e usando os isomorfismos canônicos obtemos:

$$a\#\varepsilon(h)1_H=a\#\varepsilon(h_1)h_2=a\#h$$

Logo $a\#h\in A\#\Bbbk 1_H$.

A inclusão contrária é imediata pois $\rho(a\#1_H)=a\#1_H\otimes 1_H$, para $a\in A$. Assim obtemos $(A\#H)^{coH}=A\#\Bbbk 1_H$.

Para finalizar, $A\#\Bbbk 1_H\simeq A$ segue de 1.1.9, já que φ é morfismo de $\Bbbk$-álgebras injetivo e $Im(\varphi)=A\#\Bbbk 1_H$. Portanto, $(A\#H)^{coH}=A\#\Bbbk 1_H\simeq A$. □

Exemplo 1.1.17 ([14]). *Seja G um grupo e A uma $\Bbbk$-álgebra G-graduada , ou seja, $A=\oplus_{g\in G}A_g$ soma direta de espaços vetorias, com $A_gA_h\subseteq A_{gh}$, para todo $g,h\in G$. Então A é $\Bbbk G$-comódulo álgebra com*

$$\rho:A\to A\otimes\Bbbk G \qquad\qquad \rho(a)=\sum_{g\in G}a_g\otimes g$$

onde $a=\sum_{g\in G}a_g$, $a_g\in A_g$ quase todos sendo zero. Além disso, os coinvariantes neste caso são dados por $A^{co\Bbbk G}=A_1$, onde 1 é o elemento neutro de G.

Vejamos que A é $\Bbbk G$-comódulo álgebra. Já vimos em 1.1.12 que A é $\Bbbk$G-comódulo $\Leftrightarrow$ A é módulo G-graduado. Assim, só precisamos mostrar que as equações ii) e iii) de 1.1.13 são válidas.

Sejam $a, b \in A$, por um lado temos

$$\rho(ab) = \sum_{g \in G} (ab)_g \otimes g$$

mas $a = \sum_{x \in G} a_x$, $b = \sum_{y \in G} b_y$ e então $ab = \sum_{x,y \in G} a_x b_y$, onde $a_x a_y \in A_g \Leftrightarrow xy = g$. Logo:

$$ab = \sum_{x,y \in G} a_x b_y = \sum_{g \in G} \underbrace{\left(\sum_{y \in G} a_{gy^{-1}} b_y \right)}_{\in A_g}.$$

Como a decomposição na soma direta é de maneira única, temos $(ab)_g = \sum_{y \in G} a_{gy^{-1}} b_y$. Portanto temos:

$$\begin{aligned} \rho(ab) &= \sum_{g \in G} (ab)_g \otimes g = \sum_{g \in G} \left(\sum_{y \in G} a_{gy^{-1}} b_y \right) \otimes g = \sum_{x,y \in G} a_x b_y \otimes xy \\ &= (\sum_{x \in G} a_x \otimes x)(\sum_{y \in G} b_y \otimes y) = \rho(a)\rho(b). \end{aligned}$$

Como $1_A \in A_1$, o que pode ser observado em [30] (Proposição 1.1.1), então $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1$, onde 1 é o elemento neutro do grupo G e $1 = 1_{\Bbbk G}$. Segue que A é $\Bbbk G$-comódulo álgebra.

Agora, vejamos que $A^{co\Bbbk G} = A_1$. É claro que se $a \in A_1$ então $a \in A^{co\Bbbk G}$.

Tome então $a \in A^{co\Bbbk G}$, temos que $\rho(a) = a \otimes 1$. Mas $a = \sum_g a_g$, então $\rho(a) = \sum_g a_g \otimes g$. Assim devemos ter $a = a_1 \in A_1$.

Observação 1.1.18 ([29], p. 41). *A volta do Exemplo 1.1.17 também é válida, ou seja, se A é $\Bbbk G$-comódulo álgebra, então A é álgebra G-graduada. Parte disso já foi demonstrado no Exemplo 1.1.12, o restante é consequência dos itens ii) e iii) da Definição 1.1.13.*

A proposição a seguir nos diz que no caso de H ter dimensão finita, as ações e coações estão naturalmente relacionadas.

Proposição 1.1.19 ([14], p.244). *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma $\Bbbk$-álgebra. Então A é uma H-comódulo álgebra (à direita), se e somente se, A é uma H^*-módulo álgebra (à esquerda). Além disso, nesse caso temos também $A^{H^*} = A^{coH}$.*

Demonstração. (ideia) Seja $\dim_{\Bbbk} H = n$ com $\{e_1, ..., e_n\}$ base de H e $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ base dual de H^*. Suponha que A é uma H-comódulo álgebra, então A se torna uma H^*-módulo álgebra definindo a ação por

$$f \cdot a = \sum a_0 f(a_1), \quad \forall\, f \in H^*, a \in A.$$

Reciprocamente, se A é uma H^*-módulo álgebra, então A é uma H-comódulo álgebra com:

$$\rho(a) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot a \otimes e_i, \quad \forall\, a \in A.$$

□

Observação 1.1.20. *Note que na Proposição 1.1.19, como a dimensão de H é finita, podemos trocar H por H^* e usar $H^{**} \simeq H$.*

Exemplo 1.1.21 ([14]). *Vimos no Exemplo 1.1.17 que* A *é* $\Bbbk G$*-comódulo álgebra com* $\rho(a) = \sum_g a_g \otimes g$*. Se considerarmos* G *um grupo finito, então podemos usar a proposição anterior 1.1.19 para obter que* A *é* $(\Bbbk G)^*$*-módulo álgebra.*

De fato, considerando $\{\phi_g : g \in G\}$ *base dual de* $(\Bbbk G)^*$*, então a ação é definida por:*

$$\phi_h \cdot a = \sum_g a_g \, \phi_h(g) = a_h, \quad \forall\, a = \sum_g a_g \in A, \quad a_g \in A_g.$$

Assim $\phi_g \cdot A \subseteq A_g$*, ou seja,* $\{\phi_g\}$ *atua como projeções.*

Note que se começarmos com essa ação de $(\Bbbk G)^*$ *em* A*, com* A *uma álgebra* G*-graduada, obtemos através da Proposição 1.1.19, a mesma coação* ρ *dada inicialmente de* $\Bbbk G$ *em* A*.*

Também podemos ver que $A^{co\Bbbk G} = A_1 = A^{(\Bbbk G)^*}$*.*

1.2 EXTENSÕES DE GALOIS

Nesta seção apresentaremos o conceito de extensão de Galois de uma $\Bbbk$-álgebra por uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf, que engloba o conceito de extensões de Galois para corpos, conhecido como caso clássico da teoria de extensões.

Veremos também os principais resultados que mostram que, sob algumas condições, existem equivalências com uma comódulo álgebra ser uma extensão de Galois. Entre estes, se destaca o teorema de estrutura de Schneider para módulos de Hopf que caracteriza extensões Hopf-Galois fielmente planas por meio de uma equivalência entre categorias.

A principal referência nesta seção foi [29].

Definição 1.2.1 ([29], [37]). *Sejam* H *uma álgebra de Hopf e* A *uma* H*-comódulo álgebra à direita com coação* $\rho : A \to A \otimes H$*. Dizemos que* A *é uma* ***H-extensão de Galois*** *de* A^{coH} *(à direita), ou que a extensão* $A^{coH} \subseteq A$ *é* ***H-Galois*** *à direita, se a aplicação*

$$\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \longrightarrow A \otimes H, \quad \beta(a \otimes b) = (a \otimes 1)\rho(b) = \sum ab_0 \otimes b_1$$

é bijetiva.

Definição 1.2.2 ([37]). *Se* A *é uma* H*-extensão de Galois de* $\Bbbk$*, então dizemos que* A *é um* ***objeto de Galois*** *(à direita).*

Observação 1.2.3. *A aplicação* β *é morfismo de* A*-bimódulos e de* H*-comódulo à direita.*

É claro que $A \otimes_{A^{coH}} A$ *é* A*-módulo à direita e à esquerda através do produto de* A *à direita e à esquerda, respectivamente. Essa mesma aplicação vale para* $A \otimes H$ *ser* A*-módulo à esquerda, porém para ser* A*-módulo à direita deve-se usar que* A *é* H*-comódulo:*

$$(a \otimes h) \cdot a' = aa'_0 \otimes ha'_1$$

Para a estrutura de H*-comódulo usa-se a estrutura de* H*-comódulo de* A *e de* H*, respectivamente, então* $A \otimes_{A^{coH}} A$ *é* H*-comódulo à direita com:*

$$\rho(a \otimes b) = \sum a \otimes b_0 \otimes b_1$$

e $A \otimes H$ é H-comódulo à direita com:

$$\rho(a \otimes h) = \sum a \otimes h_1 \otimes h_2.$$

As verificações dessas afirmações são bastante diretas e serão omitidas.

A seguir veremos alguns exemplos de extensões de Galois. O primeiro exemplo mostra que a definição de extensão de Galois dada acima, inclui o caso de extensões de Galois para corpos.

Exemplo 1.2.4 ([14], [36])**.** *Considere G um grupo finito que age por $\Bbbk$-automorfismos em um corpo $E \supseteq \Bbbk$. Pelo Exemplo 1.1.5 sabemos que E é $\Bbbk G$-módulo álgebra, o que pela Proposição 1.1.19, é equivalente a dizer que E é $(\Bbbk G)^*$-comódulo álgebra.*

Assim, se considerarmos $G = \{g_1, ..., g_n\} \subseteq \Bbbk G$ e $\{p_1, ..., p_n\} \subseteq (\Bbbk G)^*$ sua base dual, a coação de $(\Bbbk G)^*$ em E é dada por:

$$\begin{aligned} \rho \,:\, E &\longrightarrow E \otimes (\Bbbk G)^* \\ a &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot a \otimes p_i. \end{aligned}$$

Além disso, temos por 1.1.5 e 1.1.19 que $E^G = E^{\Bbbk G} = E^{co(\Bbbk G)^*}$. Assim, pela Definição 1.2.1, E é $(\Bbbk G)^*$-extensão de Galois de $E^G := F$, se a aplicação

$$\begin{aligned} \beta \,:\, E \otimes_F E &\longrightarrow E \otimes (\Bbbk G)^* \\ a \otimes b &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} a(g_i \cdot b) \otimes p_i \end{aligned}$$

for bijetiva.

No sentido clássico, E/F é dita uma extensão de Galois se $F = E^G$ com G sendo o grupo de Galois, ou equivalentemente, se $[E : F] = |G|$.

Assim, supondo que E/F é uma extensão de Galois no sentido clássico, então como $|G| = n$ podemos fixar $\{u_1, ..., u_n\}$ uma base de E sobre F. Desse modo, todo elemento $w \in E \otimes_F E$ pode ser escrito como $w = \sum_1^n x_j \otimes u_j$ com $x_j \in E$. Se $w \in ker(\beta)$, então

$$0 = \beta(w) = \sum_{i,j} x_j(g_i \cdot u_j) \otimes p_i,$$

mas $\{p_i\}$ é um conjunto linearmente independente, logo $\sum_j x_j(g_i \cdot u_j) = 0$, para todo i. Esse somatório ser igual a 0 é equivalente a um sistema de equações homogêneo n por n:

$$\begin{bmatrix} g_1 \cdot u_1 & g_1 \cdot u_2 & \cdots & g_1 \cdot u_n \\ g_2 \cdot u_1 & g_2 \cdot u_2 & \cdots & g_2 \cdot u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n \cdot u_1 & g_n \cdot u_2 & \cdots & g_n \cdot u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Se o sistema acima possui solução não-trivial, então o determinante da matriz $(g_i \cdot u_j)_{i,j}$ é zero. Mas também é zero o determinante da matriz transposta, ou seja, o sistema abaixo possui solução não-trivial:

$$\begin{bmatrix} g_1 \cdot u_1 & g_2 \cdot u_1 & \cdots & g_n \cdot u_1 \\ g_1 \cdot u_2 & g_2 \cdot u_2 & \cdots & g_n \cdot u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1 \cdot u_n & g_2 \cdot u_n & \cdots & g_n \cdot u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Ou seja, existem $b_1, b_2, ..., b_n$, *não todos nulos, tais que* $\sum_{j=1}^{n} b_j(g_j \cdot u_i) = 0$ *para todo* i. *Isso contradiz o teorema de Dedekind [20], já que* $g_1, g_2, ..., g_n$ *são linearmente independentes. Logo,* $x_j = 0$ *para todo* j *e* β *é injetora.*

Para concluir que β *é sobrejetora, basta ver que* β *é* F*-linear e* $dim_F(E \otimes_F E) = dim_F(E \otimes (\Bbbk G)^*) = n^2$.

Reciprocamente, supondo que β *é bijetiva, então* $dim_F(E \otimes_F E) = dim_F(E \otimes (\Bbbk G)^*)$. *Mas* $dim_F(E \otimes_F E) = [E : F]^2$ *e* $dim_F(E \otimes (\Bbbk G)^*) = [E : F]|G|$, *então* $[E : F] = |G|$ *e segue que* E/F *é extensão de Galois.*

O próximo exemplo, que na verdade é um resultado feito primeiro por Ulbrich em 1981, relaciona as extensões de Galois com as graduações. Vimos no Exemplo 1.1.17 e na observação subsequente que:

$$\text{A é } \Bbbk G\text{-comódulo álgebra} \Leftrightarrow \text{A é álgebra G-graduada.}$$

e que no caso de A ser $\Bbbk G$-comódulo álgebra, seus coinvariantes são dados por $A^{co\Bbbk G} = A_1$.

Tendo isso em mente, o resultado a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para A ser $\Bbbk G$-extensão de Galois de A_1.

Teorema 1.2.5 ([29], p. 126)**.** $A_1 \subseteq A$ *é* $\Bbbk G$*-Galois se, e somente se,* A *é fortemente graduada, isto é,* $A_x A_y = A_{xy}$, *para todo* $x, y \in G$.

Exemplo 1.2.6 ([14])**.** *Seja* H *uma álgebra de Hopf, pelo Exemplo 1.1.15 sabemos que todo* H *é* H*-comódulo álgebra com coação dada por* Δ *e que* $H^{coH} = \Bbbk 1_H$. *Então,* H *é* H*-extensão de Galois de* $\Bbbk$.

De fato, vejamos que a aplicação

$$\begin{aligned} \beta \ : \ & H \otimes H \longrightarrow H \otimes H \\ & (h \otimes g) \longmapsto \sum hg_1 \otimes g_2 \end{aligned}$$

é bijetiva. Defina $\alpha : H \otimes H \to H \otimes H$ por $\alpha(h \otimes g) = \sum h\mathcal{S}(g_1) \otimes g_2$ e vejamos que α é inversa de β.

$$(\alpha \circ \beta)(h \otimes g) = \alpha\left(\sum hg_1 \otimes g_2\right) = \sum hg_1\mathcal{S}(g_2) \otimes g_3 = \sum h\varepsilon(g_1) \otimes g_2 = h \otimes g$$

$$(\beta \circ \alpha)(h \otimes g) = \beta\left(\sum h\mathcal{S}(g_1) \otimes g_2\right) = \sum h\mathcal{S}(g_1)g_2 \otimes g_3 = \sum h\varepsilon(g_1) \otimes g_2 = h \otimes g.$$

Logo $\alpha = \beta^{-1}$ e portanto, β é aplicação bijetiva.

Este último exemplo faz parte de um resultado mais forte, dado por [37] que diz que dada H uma biálgebra, H é álgebra de Hopf se, e somente se, a extensão $\Bbbk 1_H \subseteq H$ é H-Galois. Além disso, este exemplo nos diz que toda álgebra de Hopf é um objeto de Galois, conforme a Definição 1.2.2.

O próximo exemplo apresenta cálculos bastante semelhantes ao que acabamos de apresentar, porém ele foi a inspiração para um importante resultado no capítulo 4 (Teorema 4.1.55). Assim a repetição de alguns detalhes é justificada.

Exemplo 1.2.7 ([14]). *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda, o Exemplo 1.1.16 dá uma estrutura de H-comódulo álgebra à direita para $A\#H$ e, neste caso, $(A\#H)^{coH} = A\#\Bbbk 1_H \simeq A$. Vejamos que $A\#H$ é H-extensão de Galois de A, ou seja, que a aplicação*

$$\begin{aligned} \beta \ : \ A\#H \otimes_A A\#H &\longrightarrow (A\#H) \otimes H \\ (a\#h) \otimes_A (b\#g) &= \sum (a\#h)(b\#g)_0 \otimes (b\#g)_1 \end{aligned}$$

é bijetora. Note que, como o produto tensorial é sobre A, $A\#H$ é A-módulo à direita e A-módulo à esquerda pela ação induzida do morfismo de álgebras φ dado em 1.1.9, então $(a\#h)\otimes(b\#g) = (a\#h)(b\#1_H)\otimes(1_A\#g) = (a(h_1 \cdot b)\#h_2)\otimes(1_A\#g)$, ou seja, é suficiente definir β em elementos da forma $(a\#h)\otimes(1_A\#g)$.

Logo, consideremos

$$\begin{aligned} \beta((a\#h)\otimes(1_A\#g)) &= \sum (a\#h)(1_A\#g_1)\otimes g_2 \\ &= \sum (a(h_1 \cdot 1_A)\#h_2g_1)\otimes g_2 \\ &= \sum (a\varepsilon(h_1)1_A)\#h_2g_1)\otimes g_2 \\ &= \sum (a\#hg_1)\otimes g_2 \end{aligned}$$

e vejamos que α definida por:

$$\alpha((a\#h)\otimes g) = \sum (a\#h\mathcal{S}(g_1))\otimes(1_A\#g_2)$$

é a inversa de β.

De fato,

$$\begin{aligned} (\alpha\circ\beta)((a\#h)\otimes(1_A\#g)) &= \alpha\left(\sum (a\#hg_1)\otimes g_2\right) \\ &= \sum (a\#hg_1\mathcal{S}(g_2))\otimes(1_A\#g_3) \\ &= \sum (a\#h\varepsilon(g_1))\otimes(1_A\#g_2) \\ &= (a\#h)\otimes(1_A\#g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\beta\circ\alpha)((a\#h)\otimes g) &= \beta\left(\sum (a\#h\mathcal{S}(g_1))\otimes(1_A\#g_2)\right) \\ &= \sum (a\#h\mathcal{S}(g_1)g_2)\otimes g_3 \\ &= \sum (a\#h\varepsilon(g_1))\otimes g_2 \\ &= (a\#h)\otimes g. \end{aligned}$$

Portanto, $A\#H$ é uma extensão H-Galois de A.

Se H é de dimensão finita, a Proposição 1.1.19 nos diz que uma H-módulo álgebra à esquerda é o mesmo que uma H^*-comódulo álgebra à direita, então podemos falar de uma

H^*-extensão de Galois. A seguir apresentamos um importante resultado que apresenta várias condições equivalentes para este caso.

Teorema 1.2.8 ([29], p.133)**.** *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $A^H \subseteq A$ é extensão H^*-Galois;

2) a) A aplicação $\pi : A\#H \to End_{A^H}(A)$, onde $End_{A^H}(A)$ é o conjunto dos endomorfismos de A como A^H-módulo à direita, definida por $\pi(a\#h)(b) = a(h \cdot b)$ é um isomorfismo de álgebras, e

b) A é um A^H-módulo à direita projetivo finitamente gerado;

3) A é gerador na categoria dos $A\#H$-módulos à esquerda.

4) Para qualquer $A\#H$-módulo à esquerda M, considere $A\otimes_{A^H} M^H$ como $A\#H$-módulo à esquerda com ação de $A\#H$ sobre A induzida por π. Então a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : A \otimes_{A^H} M^H &\longrightarrow M\\ a \otimes m &\longmapsto a \cdot m\end{aligned}$$

é um isomorfismo de $A\#H$-módulo à esquerda.

Queremos chamar atenção para o seguinte ponto: o Teorema 1.2.8 pode ser usado para obter um teorema de dualidade para álgebras de Hopf de dimensão finita.

De fato, vimos no Exemplo 1.2.7 que $A\#H$ é extensão H-Galois de A. Supondo que H seja uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então H^* é também álgebra de Hopf de dimensão finita e, sendo $A\#H$ uma H-comódulo álgebra à direita (Proposição 1.1.16), então podemos usar a Proposição 1.1.19 para obter que $A\#H$ é H^*-módulo álgebra à esquerda com ação definida por:

$$f \cdot (a\#h) = a\#h_1 f(h_2). \tag{1.6}$$

Assim, o teorema de dualidade que apresentamos a seguir é uma consequência de 1) $\Rightarrow$ 2), trocando A por $A\#H$ e H^* por H:

Teorema 1.2.9 ([42], Teorema de Dualidade para Álgebras de Hopf)**.** *Seja H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita e seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então existe um isomorfismo entre as álgebras $(A\#H)\#H^*$ e $End_A(A\#H)$.*

No artigo de Blattner e Montgomery [6], com as adequações necessárias, foi apresentado um teorema de dualidade para álgebras de Hopf arbitrárias. Aqui não vamos adentrar nesse caso, visto que para o que faremos no último capítulo deste trabalho, a versão para dimensão finita é suficiente para comparação.

Ainda sobre o Teorema 1.2.8, há extensões dele para coações de álgebras de Hopf que não necessariamente têm dimensão finita, como o resultado de Schneider que apresentaremos mais adiante. Para enunciar este resultado, precisamos observar que a categoria de módulos sobre o produto smash $A\#H^*$ coincide com a categoria de (H, A)-módulos de Hopf; vejamos a seguir como identificar estas categorias.

Definição 1.2.10 ([29])**.** *Seja A uma H-comódulo álgebra à direita com morfismo $\rho : A \to A \otimes H$. Então M é um (H, A)-**módulo de Hopf** à direita se:*

i) M é um H-comódulo à direita via $\delta : M \to M \otimes H$;

ii) M é um A-módulo à direita.

iii) Para todo $m \in M$ e $a \in A$,

$$\delta(m \cdot a) = \sum m_0 \cdot a_0 \otimes m_1 a_1.$$

Denotamos por $\mathcal{M}_A^H$ a categoria dos (H, A)-módulos de Hopf. Analogamente temos ${}_A\mathcal{M}^H$, trocando no item ii) da definição acima direita por esquerda e também podemos definir ${}^H\mathcal{M}_A$ e ${}^H_A\mathcal{M}$ pedindo que A seja uma H-comódulo álgebra à esquerda.

Proposição 1.2.11 ([29]). *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então*

1) ${}_A\mathcal{M}^H = {}_{A\#H^*}\mathcal{M}$

2) $\mathcal{M}_A^H = \mathcal{M}_{A\#H^*}$

Demonstração. 1) Seja $M \in {}_{A\#H^*}\mathcal{M}$, temos como hipótese que A é H^*-módulo álgebra à esquerda pela definição do produto smash. Pela Proposição 1.1.19, A é H-comódulo álgebra à direita com $\rho(a) = \sum e_i^* \cdot a \otimes e_i$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base de H e $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ é base dual de H^*.

Além disso, usando os morfismos de álgebras dados em 1.1.9, temos que:

- M é A-módulo à esquerda pela ação: $a \cdot m = (a\#1_{H^*}) \cdot m$ e
- M é H^*-módulo à esquerda por: $h^* \cdot m = (1_A\#h^*) \cdot m$.

Este último item implica pela Proposição 1.1.19 que M é H-comódulo à direita com estrutura dada por: $\delta(m) = \sum_{i=1}^n (1_A\#e_i^*) \cdot m \otimes e_i$.

Vejamos que vale a compatibilidade para todo $m \in M$ e $a \in A$:

$$\begin{aligned}
\delta(a \cdot m) &= \delta((a\#1_{H^*}) \cdot m) = \sum_{k=1}^n (1_A\#e_k^*) \cdot [(a\#1_{H^*}) \cdot m] \otimes e_k \\
&= \sum_{k=1}^n ((e_k^*)_1 \cdot a\#(e_k^*)_2) \cdot m \otimes e_k \\
&= \sum_{i,j} (e_i^* \cdot a\#e_j^*) \cdot m \otimes e_i e_j \\
&= \sum_{i,j} (e_i^* \cdot a\#1_{H^*}) \cdot [(1_A\#e_j^*) \cdot m] \otimes e_i e_j \\
&= \sum a_0 \cdot m_0 \otimes a_1 m_1.
\end{aligned}$$

Logo, $M \in {}_A\mathcal{M}^H$.

Por outro lado, se começarmos com $M \in {}_A\mathcal{M}^H$, então A é H-comódulo álgebra à direita por hipótese, e portanto A é H^*-módulo àlgebra à esquerda (por 1.1.19).

Também temos que M tem estrutura de A-módulo à esquerda e de H-comódulo à direita então pela Proposição 1.1.19, M também é H^*-módulo à esquerda por:

$$h^* \cdot m = \sum m_0 h^*(m_1).$$

Assim, M é $A\#H^*$-módulo à esquerda por:

$$(a\#h^*)\cdot m = \sum a\cdot m_0\, h^*(m_1).$$

2) Suponha que $M \in \mathcal{M}_{A\#H^*}$, então de modo análogo ao item 1), usando a Proposição 1.1.9, temos:

   - M é A-módulo à direita por $m\cdot a = m\cdot(a\#1_{H^*})$
   - M é H^*-módulo à direita por $m\cdot h^* = m\cdot(1_A\#h^*)$.

   Definimos a ação de H^* à esquerda em M via: $h^*\cdot m = m\cdot(1_A\#\mathcal{S}^*(h^*))$, onde $\mathcal{S}^*$ é a antípoda de H^*, vamos omitir aqui a verifição de que M é H^*-módulo com essa aplicação. Então, novamente por 1.1.19 obtemos que M é H-comódulo à direita com:

$$\delta(m) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*\cdot m\otimes e_i = \sum_{i=1}^{n} m\cdot(1_A\#\mathcal{S}^*(e_i^*))\otimes e_i$$

   Para verificar a compatibilidade usa-se a seguinte equivalência dada por [13] para todo $h^*\in H^*$:

$$\delta(m\cdot a) = \sum m_0\cdot a_0\otimes m_1a_1 \Leftrightarrow h^*\cdot(m\cdot a) = \sum(h_1^*\cdot m)(h_2^*\cdot a).$$

   Por outro lado, tomando $M\in\mathcal{M}_A^H$, então M será um $A\#H^*$-módulo à direita por:

$$m\cdot(a\#h^*) = \overline{\mathcal{S}}(h^*)\cdot(m\cdot a)$$

   onde $\overline{\mathcal{S}}$ é a inversa da antípoda de H^*.

□

A seguir apresentamos o teorema de estrutura para módulos de Hopf de Schneider, este teorema caracteriza extensões Hopf-Galois fielmente planas por meio de equivalências entre categorias, uma delas sendo a categoria dos módulos de Hopf.

Teorema 1.2.12 ([38])**.** *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e A uma H-comódulo álgebra à direita com $B = A^{coH}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) a) $B\subseteq A$ é H-Galois à direita e

   b) A é fielmente plano como B-módulo à esquerda (à direita);

2) o funtor $\mathcal{M}_B\to\mathcal{M}_A^H$ dado por $M\mapsto M\otimes_B A$ é uma equivalência.

3) o funtor ${}_B\mathcal{M}\to_A\mathcal{M}^H$ dado por $M\mapsto A\otimes_B M$ é uma equivalência.

Usando teoria da descida (descent theory), Schauenburg apresenta em [37] a equivalência 1) $\Leftrightarrow$ 2) do teorema acima, fazendo uma demonstração mais direta e sem exigir a dimensão finita de H.

Os resultados acima parecem ter inspirado alguns dos resultados dados em [8] para categoria de Hopf (dual), mas em particular gostaríamos de estabelecer uma ligação com a Proposição 6.2 de [8], que será o último resultado apresentado na seção 4.2.1 deste trabalho. Por isso, concluímos este capítulo com a seguinte observação:

Observação 1.2.13. *Considerando H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, o teorema de Schneider 1.2.12 nos dá a equivalência:*

1) a) $B \subseteq A$ é H-Galois à direita e

b) A é fielmente plano como B-módulo à esquerda (à direita);

$$\Updownarrow$$

3) o funtor ${}_B\mathcal{M} \rightarrow_A \mathcal{M}^H$ dado por $M \mapsto A \otimes_B M$ é uma equivalência. com $B = A^{coH} = A^{H^*}$.

A Proposição 1.2.11 nos dá

$${}_A\mathcal{M}^H = {}_{A\#H^*}\mathcal{M}$$

E ainda, o Teorema 1.2.8 trocando-se H por H^* no seu enunciado nos dá a seguinte equivalência:

1) $A^{H^*} \subseteq A$ é extensão H-Galois;

$$\Updownarrow$$

2) a) A aplicação $\pi : A\#H^* \rightarrow End_{A^{H^*}}(A)$ é um isomorfismo de álgebras, e

b) A é um A^{H^*}-módulo à direita projetivo finitamente gerado.

Juntando estes resultados, para H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, A uma H-comódulo álgebra à direita e $B = A^{H^*}$, obtemos que os itens (I) e (II) abaixo são equivalentes:

(I) a) A aplicação $\pi : A\#H^* \rightarrow End_B(A)$ é um isomorfismo de álgebras,

b) A é um B-módulo à direita projetivo finitamente gerado e

c) A é fielmente plano como B-módulo à esquerda (à direita);

(II) o funtor ${}_B\mathcal{M} \rightarrow {}_{A\#H^*}\mathcal{M}$ é uma equivalência.

Capítulo 2

ÁLGEBRAS DE HOPF EM CATEGORIAS MONOIDAIS

Este capítulo introduzirá os conceitos de categorias monoidais e categorias trançadas, o que permitirá estender o conceito de álgebra de Hopf usual, para uma álgebra de Hopf em uma categoria monoidal trançada. Dessa forma, uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf será um caso particular quando a categoria em questão é a dos $\Bbbk$-espaços vetorias.

A dificuldade em trabalhar com essas versões mais gerais de álgebras de Hopf surge do fato de que todas as demonstrações precisam ser feitas em termos de morfismos, não mais em termos de elementos. Por exemplo, a notação de Sweedler que é bastante vantajosa no caso de uma álgebra de Hopf usual, aqui não pode ser utilizada. Buscando contornar essa dificuldade, várias demonstrações foram feitas usando-se diagramas.

As principais referências deste capítulo foram [22] e [1].

2.1 ÁLGEBRAS DE HOPF EM CATEGORIAS MONOIDAIS

Nesta seção começamos apresentando uma categoria monoidal, exemplos e principais propriedades, em seguida, definimos álgebra e coálgebra em uma categoria monoidal e mais alguns exemplos são dados.

Para definirmos uma biálgebra, e posteriormente uma álgebra de Hopf, em uma categoria monoidal é necessário que exista uma trança, por isso definimos uma categoria monoidal trançada. Vários resultados análogos às biálgebras (e/ou álgebras de Hopf) usuais são dados, sempre com as demonstrações adaptadas usando composição de morfismos ou diagramas.

Definição 2.1.1 ([22]). *Uma* ***categoria monoidal*** $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, I, a, l, r)$ *consiste de*

i) *uma categoria* $\mathcal{V}$*,*

ii) *um funtor* $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *chamado produto tensorial,*

iii) *um objeto* I *de* $\mathcal{V}$ *chamado unidade,*

iv) $a = a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$ *é um isomorfismo natural chamado associador,* *v)* $l = l_A : I \otimes A \longrightarrow A$ *e* $r = r_A : A \otimes I \longrightarrow A$ *são isomorfismos naturais chamados de unidade à esquerda e unidade à direita, respectivamente,*

tal que para todo A, B, C, D *objetos de* $\mathcal{V}$ *os seguintes diagramas, conhecidos como* ***diagrama do pentágono*** *e* ***diagrama do triângulo****, comutam:*

$$\begin{tikzcd}
 & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[drr, "a_{A,B,C\otimes D}"] & & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[urr, "a_{A\otimes B,C,D}"] \arrow[dr, "a_{A,B,C}\otimes D"'] & & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
 & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "a_{A,B\otimes C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[ur, "A\otimes a_{B,C,D}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "a_{A,I,B}"] \arrow[dr, "r_A\otimes B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "A\otimes l_B"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Observação 2.1.2. *Note que nos diagramas acima estamos chamando o morfismo* $id_A : A \to A$ *simplesmente por* A*. Em geral, não há confusão com essa identificação e faremos uso dela no decorrer do texto.*

Para detalhar um pouco mais o significado dos isomorfismos naturais apresentados na definição, e que serão utilizados posteriormente, faremos a seguinte observação.

Observação 2.1.3. *1) O associador* a *ser um isomorfismo natural significa que para cada* A, B, C *objetos da categoria* $\mathcal{V}$*, temos um isomorfismo*

$$a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

tal que, se tivermos morfismos $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ *e* $h : C \to C'$ *então o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "a_{A,B,C}"] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"'] & A \otimes (B \otimes C) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"] \\
(A' \otimes B') \otimes C' \arrow[r, "a_{A',B',C'}"'] & A' \otimes (B' \otimes C')
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

2) Do mesmo modo, as unidades à esquerda e à direita serem isomorfismos naturais, significa que temos uma coleção de isomorfismos, para cada objeto A da categoria $\mathcal{V}$:

$$l_A : I \otimes A \to A \qquad\qquad r_A : A \otimes I \to A$$

tal que se tivermos um morfismo $f : A \to A'$ os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} I \otimes A \arrow[r, "l_A"] \arrow[d, "I\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ I \otimes A' \arrow[r, "l_{A'}"'] & A' \end{tikzcd} \qquad (2.4)$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes I \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "f\otimes I"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A' \otimes I \arrow[r, "r_{A'}"'] & A' \end{tikzcd} \qquad (2.5)$$

Definição 2.1.4 ([22])**.** *Uma categoria monoidal é dita **estrita** quando os isomorfismos $a_{A,B,C}$, l_A e r_A são identidades para todo A, B, C objetos em $\mathcal{V}$. Neste caso, teremos:*

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C \quad \text{e} \quad I \otimes A = A = A \otimes I.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos de categorias monoidais.

Exemplo 2.1.5. *A categoria dos conjuntos, denotada por <u>Sets</u> é uma categoria monoidal. O produto tensorial é o produto cartesiano de conjuntos e o objeto unidade é dado pelo conjunto unitário $\{*\}$. O associador é dado pela coleção de isomorfismos naturais*

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z} : (X \times Y) \times Z &\longrightarrow X \times (Y \times Z) \\ ((x, y), z) &\longmapsto (x, (y, z)) \end{aligned}$$

com X, Y, Z conjuntos, $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$. E as unidades à esquerda e à direita são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} l_X : \{*\} \times X &\longrightarrow X \\ (*, x) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} r_X : X \times \{*\} &\longrightarrow X \\ (x, *) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.6. *A categoria dos módulos (à esquerda) sobre um anel comutativo k, denotado por ${}_k\mathcal{M}$ é uma categoria monoidal. O produto tensorial é o produto tensorial usual sobre k e o objeto unidade da categoria é o anel k. O associador é dado por:*

$$\begin{aligned} a_{L,M,N} : (L \otimes_k M) \otimes_k N &\longrightarrow L \otimes_k (M \otimes_k N) \\ (l \otimes m) \otimes n &\longmapsto l \otimes (m \otimes n) \end{aligned}$$

com L, M, N k-módulos (à esquerda), $l \in L, m \in M$ e $n \in N$. E as unidades à esquerda e à direita são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} l_M : k \otimes_k M &\longrightarrow M \\ \lambda \otimes m &\longmapsto \lambda m \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} r_M : M \otimes_k k &\longrightarrow M \\ m \otimes \lambda &\longmapsto \lambda m \end{aligned}$$

para $\lambda \in k$. Analogamente temos a categoria dos k-módulos à direita denotada por $\mathcal{M}_k$.

Exemplo 2.1.7. *Um caso particular do anterior, é tomar um corpo $\Bbbk$ ao invés de um anel comutativo, então temos a categoria dos $\Bbbk$-espaços vetoriais, denotado por $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$.*

Exemplo 2.1.8 ([15], p.44). *Seja G um monóide (ou um grupo), a categoria dos espaços vetoriais G-graduados é uma categoria monoidal, denotada por $\Bbbk - Vec_G$. Nesse caso, um objeto é um $\Bbbk$-espaço vetorial V com uma decomposição $V = \oplus_{g\in G} V_g$ e os morfismos são dados por morfismos $\Bbbk$-lineares que preservam a graduação, ou seja, um morfismo*

$$f : V = \bigoplus_{g\in G} V_g \longrightarrow W = \bigoplus_{g\in G} W_g$$

tal que $f(V_g) \subseteq W_g$, para todo $g \in G$. O produto tensorial nessa categoria é definido por

$$(V \otimes W)_g = \bigoplus_{\substack{x,y\in G\\ xy=g}} (V_x \otimes W_y)$$

e o objeto unidade é $I = \oplus_{g\in G} 1_g$ onde $1_g = \begin{cases} \Bbbk, \text{se } g = e \\ 0, \text{se } g \neq e \end{cases}$.

O associador e as unidades são dados de maneira análoga ao caso $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$. Assim, basta verificar que os isomorfismos $\Bbbk$-lineares $a_{U,V,W}$, l_V e r_V preservam a graduação.

No caso do associador $a_{U,V,W}$, tomamos x em $((U \otimes V) \otimes W)_g$, então

$$x = \sum_j z_j \otimes w_j \text{ em que } z_j \otimes w_j \in (U \otimes V)_{a_j} \otimes W_{b_j}, \text{ com } a_j b_j = g.$$

Por sua vez, $z_j = \sum_i u_i^j \otimes v_i^j$ em que $u_i^j \otimes v_i^j \in U_{c_{i,j}} \otimes V_{d_{i,j}}$, com $c_{i,j} d_{i,j} = a_j$. Assim

$$x = \sum_j \left(\sum_i u_i^j \otimes v_i^j \right) \otimes w_j \text{ com cada termo em } U_{c_{i,j}} \otimes V_{d_{i,j}} \otimes W_{b_j} \text{ e } c_{i,j} d_{i,j} b_j = g.$$

Como o associador já é $\Bbbk$-linear podemos suprimir os somatórios e considerar $x = (u \otimes v) \otimes w$ onde $u \in U_a$, $v \in V_b$ e $w \in W_c$ com $abc = g$. Desse modo,

$$a_{U,V,W}(x) = a_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w) \in U_a \otimes (V_b \otimes W_c).$$

Como $U_a \otimes (V_b \otimes W_c)$ é subespaço de $(U \otimes (V \otimes W))_{abc}$, então temos $a_{U,V,W}(x) \in (U \otimes (V \otimes W))_g$, como queríamos mostrar.

No caso da unidade esquerda (a direita é análogo), queremos ver que $l_V((I \otimes V)_g) \subseteq V_g$, tomamos então $x \in (I \otimes V)_g$,

$$x = \sum_j r_j \otimes v_j \text{ em que } r_j \otimes v_j \in 1_{a_j} \otimes V_{b_j}, \text{ com } a_j b_j = g$$

mas, conforme vimos acima, $1_{a_j} = \begin{cases} \Bbbk, \text{se } a_j = e \\ 0, \text{se } a_j \neq e \end{cases}$. Logo, se $a_j \neq e$ o termo do somatório é nulo e nos resta somente o caso $a_j = e$, portanto obtemos $r_j \otimes v_j \in \Bbbk \otimes V_g$. Novamente, como l_V é $\Bbbk$-linear podemos considerar $x = \lambda \otimes v$ com $\lambda \in \Bbbk$ e $v \in V_g$ então

$$l_V(x) = l_V(\lambda \otimes v) = \lambda v \in V_g \quad \text{já que } V_g \text{ é } \Bbbk\text{-subespaço}.$$

Exemplo 2.1.9. *A categoria dos R-bimódulos com R um anel, é uma categoria monoidal, que será denotada por $Bimod_R$. O produto tensorial e a unidade são como no Exemplo 2.1.6, assim como o associador. As unidades à esquerda e à direita são as triviais:*

$$\begin{array}{rcl} l_M : R \otimes_R M & \longrightarrow & M \\ \lambda \otimes m & \longmapsto & \lambda m \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} r_M : M \otimes_R R & \longrightarrow & M \\ m \otimes \lambda & \longmapsto & m\lambda \end{array}$$

para $\lambda \in R$, $m \in M$ onde M é um R-bimódulo.

Exemplo 2.1.10. *Dada H uma $\Bbbk$-biálgebra, (ou uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf) a categoria dos H-módulos à esquerda denotada por ${}_H\mathcal{M}$, é uma categoria monoidal. Os morfismos nesta categoria são os morfismos de H-módulos. O produto tensorial é o produto tensorial sobre $\Bbbk$, já que dados A e B H-módulos à esquerda, temos que $A \otimes_{\Bbbk} B$ é H-módulo à esquerda* ([29], p. 14) *com ação dada por:*

$$\begin{aligned} \nu_{A\otimes B} : H \otimes A \otimes B &\longrightarrow A \otimes B \\ h \otimes a \otimes b &\longmapsto h \cdot (a \otimes b) = \sum (h_1 \cdot a) \otimes (h_2 \cdot b). \end{aligned}$$

A unidade é a mesma da categoria $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$, e neste caso, é fácil ver que $\Bbbk$ é H-módulo com ação dada por: $h \cdot 1_{\Bbbk} = \varepsilon(h)1_{\Bbbk}$. O associador $a_{A,B,C}$ e as unidades à esquerda l_A e à direita r_A são os mesmos da categoria $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$, assim já são isomorfismos $\Bbbk$-lineares, basta verificar que são morfismos de H-módulos. No caso do associador, tomando $h \in H$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ temos:

$$\begin{aligned} \nu_{A\otimes(B\otimes C)} \circ (H \otimes a_{A,B,C})(h \otimes (a \otimes b) \otimes c) &= h \cdot (a \otimes (b \otimes c)) \\ &= \sum (h_1 \cdot a) \otimes (h_2 \cdot (b \otimes c)) \\ &= \sum (h_1 \cdot a) \otimes [(h_2 \cdot b) \otimes (h_3 \cdot c)] \\ &= a_{A,B,C}\left(\sum [(h_1 \cdot a) \otimes (h_2 \cdot b)] \otimes (h_3 \cdot c)\right) \\ &= a_{A,B,C}\left(\sum (h_1 \cdot (a \otimes b) \otimes (h_2 \cdot c)\right) \\ &= a_{A,B,C}\,(h \cdot ((a \otimes b) \otimes c)) \\ &= a_{A,B,C} \circ \nu_{(A\otimes B)\otimes C}\,(h \otimes (a \otimes b) \otimes c)\,. \end{aligned}$$

No caso da unidade à esquerda (à direita é análogo), temos:

$$\begin{aligned} \nu_A \circ (H \otimes l_A)(h \otimes 1_{\Bbbk} \otimes a) &= h \cdot (1_{\Bbbk} a) = 1_{\Bbbk}(h \cdot a) \\ &= l_A(1_{\Bbbk} \otimes (h \cdot a)) = l_A(1_{\Bbbk} \otimes \left(\sum \varepsilon(h_1)h_2 \cdot a\right)) \\ &= l_A\left(\sum (\varepsilon(h_1)1_{\Bbbk} \otimes (h_2 \cdot a))\right) = l_A\left(\sum (h_1 \cdot 1_{\Bbbk}) \otimes (h_2 \cdot a)\right) \\ &= l_A(h \cdot (1_{\Bbbk} \otimes a)) = l_A \circ \nu_{\Bbbk\otimes A}(h \otimes 1_{\Bbbk} \otimes a). \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.11. *Dada H uma $\Bbbk$-biálgebra, a categoria dos H-comódulos à direita denotada por $\mathcal{M}^H$, é uma categoria monoidal. Os morfismos nesta categoria são morfismos de H-comódulos. O produto tensorial é o produto tensorial sobre $\Bbbk$, já que dados A e B H-comódulos à direita temos que $A \otimes_{\Bbbk} B$ é H-comódulo à direita* ([29], p. 14) *com coação dada por:*

$$\rho(a \otimes b) = \sum a_0 \otimes b_0 \otimes a_1 b_1.$$

O objeto unidade é $\Bbbk$ que é H-comódulo à direita com coação definida por $\rho(1_{\Bbbk}) =$

$1_{\Bbbk} \otimes 1_H$.

O associador $a_{A,B,C}$ *e as unidades à esquerda* l_A *e à direita* r_A *são os mesmos da categoria* $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$*, assim basta verificar que são morfismos de* H*-comódulos. Tomando* $a \in A, b \in B, c \in C$ *temos:*

$$\begin{aligned} \rho_{A\otimes(B\otimes C)} \circ a_{A,B,C}((a \otimes b) \otimes c) &= \rho_{A\otimes(B\otimes C)}(a \otimes (b \otimes c)) \\ &= \sum a_0 \otimes (b_0 \otimes c_0) \otimes a_1(b_1c_1) \\ &= (a_{A,B,C} \otimes H) \left(\sum (a_0 \otimes b_0) \otimes c_0 \otimes (a_1b_1)c_1\right) \\ &= (a_{A,B,C} \otimes H) \circ \rho_{(A\otimes B)\otimes C}((a \otimes b) \otimes c). \end{aligned}$$

Logo, $a_{A,B,C}$ *é isomorfismo de H-comódulos. Também temos:*

$$\begin{aligned} (\rho \circ l_A)(1_{\Bbbk} \otimes a)) &= \rho(1_{\Bbbk}a) = \sum 1_{\Bbbk}a_0 \otimes a_1 = \sum 1_{\Bbbk}a_0 \otimes 1_Ha_1 \\ &= (l_A \otimes H) \left(\sum 1_{\Bbbk} \otimes a_0 \otimes 1_Ha_1\right) = ((l_A \otimes H) \circ \rho)(1_{\Bbbk} \otimes a). \end{aligned}$$

Portanto, l_A *é isomorfismo de H-comódulos. Para* r_A *é análogo.*

Observação 2.1.12. *Note que o Exemplo 2.1.8 é um caso particular do Exemplo 2.1.11, para* $H = \Bbbk G$*. Já que, vimos no Exemplo 1.1.12 que* V *é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial* G*-graduado, se e somente se,* V *é um* $\Bbbk G$*-comódulo à direita.*

O exemplo a seguir difere dos demais por ser um exemplo de categoria monoidal estrita.

Exemplo 2.1.13 ([2])**.** *Fixemos uma categoria* $\mathcal{C}$*,* $End(\mathcal{C})$ *é uma categoria cujos objetos são funtores* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *e os morfismos são as transformações naturais. Desse modo, o morfismo identidade para um objeto* F *é a transformação natural identidade* $id_F : F \to F$*, e a composição é dada pela composição vertical das transformações naturais. A categoria* $(End(\mathcal{C}), \otimes, Id_{\mathcal{C}})$ *é uma categoria monoidal estrita, com o produto tensorial definido por:*

$$\begin{aligned} \otimes : End(\mathcal{C}) \times End(\mathcal{C}) &\longrightarrow End(\mathcal{C}) \\ (G, F) &\longmapsto G \circ F \\ (\beta, \alpha) &\longmapsto \beta * \alpha \end{aligned}$$

onde $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *são funtores,* α*,* β *são transformações naturais com* $*$ *sua composição horizontal. A verificação de que* $\otimes$ *é de fato um funtor será omitida, mas pode ser consultada em [2]. Note que* $a_{H,G,F}$*,* l_F *e* r_F *serão identidades já que valem:* $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$*,* $id_{\mathcal{C}} \circ F = F$ *e* $F \circ id_{\mathcal{C}} = F$*, portanto a categoria é monoidal estrita.*

A próxima proposição nos dá uma relação entre o associador e as unidades em uma categoria monoidal.

Proposição 2.1.14 ([22] p.23 e [1] p.7)**.** *Em uma categoria monoidal* $(\mathcal{V}, \otimes, I, a, l, r)$*, os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes I \arrow[rr, "a_{A,B,I}"] \arrow[dr, "r_{A\otimes B}"'] & & A \otimes (B \otimes I) \arrow[dl, "A\otimes r_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes A) \otimes B \arrow[rr, "a_{I,A,B}"] \arrow[dr, "l_{A\otimes B}"'] & & I \otimes (A \otimes B) \arrow[dl, "l_{A\otimes B}"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Demonstração. Vamos mostrar que o diagrama (2.6) comuta mostrando primeiro que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes I) \otimes D \arrow[rr, "a_{A,B,I}\otimes D"] \arrow[dr, "r_{A\otimes B}\otimes D"'] & & (A \otimes (B \otimes I)) \otimes D \arrow[dl, "(A\otimes r_B)\otimes D"] \\
& (A \otimes B) \otimes D &
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

comuta para quaisquer objetos A, B, D em $\mathcal{V}$. A ideia de mostrar a comutatividade do diagrama incluindo um objeto à direita, de acordo com [1], vem do fato de que o objeto unidade no diagrama do triângulo (2.2) está entre dois objetos.

Note que a flecha superior no diagrama (2.8) é um dos lados do diagrama do pentágono (2.1). Deste modo, construímos o próximo diagrama tomando como base (contorno externo) o diagrama do pentágono com $C = I$ e posicionamos no canto inferior esquerdo o diagrama (2.8) o qual queremos provar ser comutativo.

$$\begin{tikzcd}
& & (A\otimes B)\otimes(I\otimes D) \arrow[dd, "(A\otimes B)\otimes l_D"] \arrow[ddrr, "a_{A,B,I\otimes D}"] & & \\
& \circlearrowright \text{ por } (2.2) & & \circlearrowright \text{ por } (2.3) & \\
((A\otimes B)\otimes I)\otimes D \arrow[uurr, "a_{A\otimes B,I,D}"] \arrow[rr, "r_{A\otimes B}\otimes D"] \arrow[dddr, "a_{A,B,I}\otimes D"'] & & (A\otimes B)\otimes D \arrow[dr, "a_{A,B,D}"] & & A\otimes(B\otimes(I\otimes D)) \arrow[dl, "A\otimes(B\otimes l_D)"'] \\
& (2.8) & \circlearrowright \text{ por } (2.3) & A\otimes(B\otimes D) & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por } (2.2) \\
& (A\otimes(B\otimes I))\otimes D \arrow[uuur, "(A\otimes r_B)\otimes D"] \arrow[rr, "a_{A,B\otimes I,D}"'] & & A\otimes((B\otimes I)\otimes D) \arrow[uu, "A\otimes(r_B\otimes D)"] \arrow[uuur, "A\otimes a_{B,I,D}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que no diagrama acima, o contorno externo comuta já que é o diagrama do pentágono e na parte interna todos os diagramas, exceto o diagrama (2.8), comutam usando a naturalidade de a e o diagrama do triângulo conforme indicado. Note que no triângulo superior direito usamos o fato de $id_{A\otimes B} = id_A \otimes id_B$. Para concluir que (2.8) comuta, basta adicionar o fato de que $a_{A,B,C}, r_A, l_A$ são isomorfismos para quaisquer objetos A, B, C. Em composição de morfismos temos:

$$\begin{aligned}
&((A \otimes r_B) \otimes D) \circ (a_{A,B,I} \otimes D) = \\
&\quad = a^{-1}_{A,B,D} \circ (A \otimes (r_B \otimes D)) \circ a_{A,B\otimes I,D} \circ (a_{A,B,I} \otimes D) \\
&\quad = a^{-1}_{A,B,D} \circ (A \otimes (B \otimes l_D)) \circ (A \otimes a_{B,I,D}) \circ a_{A,B\otimes I,D} \circ (a_{A,B,I} \otimes D) \\
&\quad = ((A \otimes B) \otimes l_D) \circ a^{-1}_{A,B,I\otimes D} \circ (A \otimes a_{B,I,D}) \circ a_{A,B\otimes I,D} \circ (a_{A,B,I} \otimes D) \\
&\quad = (r_{A\otimes B} \otimes D) \circ a^{-1}_{A\otimes B,I,D} \circ a^{-1}_{A,B,I\otimes D} \circ (A \otimes a_{B,I,D}) \circ a_{A,B\otimes I,D} \circ (a_{A,B,I} \otimes D) \\
&\quad = r_{A\otimes B} \otimes D.
\end{aligned}$$

Portanto, (2.8) comuta.

No próximo diagrama vamos usar o (2.8) no lado esquerdo agora com $D = I$, pois sabemos que comuta para qualquer objeto D. Do lado direito, vamos obter o diagrama (2.6) o qual queremos mostrar que comuta.

$$\begin{tikzcd}
 & ((A \otimes B) \otimes I) \otimes I \arrow[r, "r_{(A\otimes B)\otimes I}"] \arrow[d, "a_{A,B,I}\otimes I"] \arrow[ddl, "r_{A\otimes B\otimes I}"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.8)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.5)"] & (A \otimes B) \otimes I \arrow[d, "a_{A,B,I}"] \arrow[ddr, "r_{A\otimes B}"] \arrow[dr, phantom, "(2.6)"] & \\
 & (A\otimes(B\otimes I))\otimes I \arrow[r, "r_{A\otimes(B\otimes I)}"'] \arrow[dl, "(A\otimes r_B)\otimes I"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.5)"] & A\otimes(B\otimes I) \arrow[dr, "A\otimes r_B"] & \\
(A \otimes B) \otimes I \arrow[rrr, "r_{A\otimes B}"'] & & & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

Assim para ver que (2.6) comuta, basta observar que o diagrama externo comuta pela naturalidade de r e que r_A é isomorfismo para qualquer objeto A. Em composição de morfismos:

$$\begin{aligned}
(A \otimes r_B) \circ a_{A,B,I} &= (A \otimes r_B) \circ r_{A\otimes(B\otimes I)} \circ (a_{A,B,I} \otimes I) \circ r^{-1}_{(A\otimes B)\otimes I} \\
&= r_{A\otimes B} \circ ((A \otimes r_B) \otimes I) \circ (a_{A,B,I} \otimes I) \circ r^{-1}_{(A\otimes B)\otimes I} \\
&= r_{A\otimes B} \circ (r_{A\otimes B} \otimes I) \circ r^{-1}_{(A\otimes B)\otimes I} \\
&= r_{A\otimes B}
\end{aligned}$$

Portanto o diagrama (2.6) comuta.

A demonstração do diagrama (2.7) é totalmente análoga. □

A proposição a seguir nos dá relações entre os morfismos unidade à direita e à esquerda e a unidade da categoria.

Proposição 2.1.15 ([1], p.8). *Valem as seguintes igualdades para qualquer objeto A de uma categoria monoidal $\mathcal{V}$:*

1) $l_{I\otimes A} = I \otimes l_A$ *2)* $r_{A\otimes I} = r_A \otimes I$ *3)* $l_I = r_I$

Demonstração. 1) Note que pela naturalidade de l (2.4), temos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I \otimes I \otimes A \arrow[r, "l_{I\otimes A}"] \arrow[d, "I\otimes l_A"'] & I \otimes A \arrow[d, "l_A"] \\
I \otimes A \arrow[r, "l_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

ou seja, $l_A \circ l_{I\otimes A} = l_A \circ (I \otimes l_A)$. Como o morfismo l_A é um isomorfismo, obtemos então $l_{I\otimes A} = I \otimes l_A$.

2) Análogo ao item 1).

3) Usando o diagrama (2.7) com $A = B = I$ obtemos:

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes I) \otimes I \arrow[rr, "a_{I,I,I}"] \arrow[dr, "l_I\otimes I"'] & & I \otimes (I \otimes I) \arrow[dl, "l_{I\otimes I}"] \\
& I \otimes I &
\end{tikzcd}$$

mas pelo que fizemos no item 1), a seta do lado direito $l_{I\otimes I} = I \otimes l_I$. Agora, usando o diagrama do triângulo (2.2) para $A = B = I$, obtemos:

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes I) \otimes I \arrow[rr, "a_{I,I,I}"] \arrow[dr, "r_I\otimes I"'] & & I \otimes (I \otimes I) \arrow[dl, "I\otimes l_I"] \\
& I \otimes I &
\end{tikzcd}$$

Com isso, conseguimos a seguinte igualdade $l_I \otimes I = l_{I\otimes I} \circ a_{I,I,I} = (I \otimes l_I) \circ a_{I,I,I} = r_I \otimes I$.

Por fim, usando a naturalidade de r dada por (2.5) temos:

$$\begin{tikzcd}
I \otimes I \otimes I \arrow[r, "r_{I\otimes I}"] \arrow[d, "l_I \otimes I"'] & I \otimes I \arrow[d, "l_I"] \\
I \otimes I \arrow[r, "r_I"'] & I
\end{tikzcd}$$

A seta superior deste diagrama pode ser trocada por $r_I \otimes I$, já que pelo item 2) temos $r_{I\otimes I} = r_I \otimes I$, além disso, pelo cálculo anterior ao diagrama $l_I \otimes I = r_I \otimes I$, sendo ainda, isomorfismos. Portanto, $r_I = l_I$.

□

Em categorias monoidais podemos generalizar o que conhecemos como álgebra.

Definição 2.1.16 ([1])**.** *Seja $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, I, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Uma **álgebra** em $\mathcal{V}$ é uma tripla (A, m, η), onde A é um objeto em $\mathcal{V}$, $m : A \otimes A \to A$ e $\eta : I \to A$ são morfismos em $\mathcal{V}$, chamados **multiplicação** e **unidade** de A respectivamente, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "m\otimes A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "A\otimes m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

(2.9)

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
I \otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes A"] \arrow[dr, "l_A"'] & & A \otimes I \arrow[ul, "A\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

(2.10)

Vejamos a seguir alguns exemplos de álgebras em categorias monoidais.

Exemplo 2.1.17 ([1])**.** *O objeto unidade I é uma álgebra na categoria $\mathcal{V}$. De fato, defina a multiplicação $m : I \otimes I \to I$ por l_I e a unidade $\eta : I \to I$ como o morfismo identidade em I. Então os diagramas* (2.9) *e* (2.10) *são verificados como segue:*

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes I) \otimes I \arrow[rr, "a_{I,I,I}"] \arrow[d, "m\otimes I"'] \arrow[drr, "r_I\otimes I"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.2)"] & I \otimes (I \otimes I) \arrow[d, "I\otimes m = I\otimes l_I"] \\
I \otimes I \arrow[r, "m"'] & I & I \otimes I \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & I \otimes I \arrow[dd, "m"] & \\
I \otimes I \arrow[ur, "\eta\otimes I"] \arrow[dr, "l_I"'] & & I \otimes I \arrow[ul, "I\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r_I"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

No digrama da esquerda, usamos o diagrama do triângulo (2.2) *e em seguida, a Proposição 2.1.15 item 3) que nos dá $l_I = r_I$. Enquanto que no diagrama da direita, basta usar somente 2.1.15 item 3).*

Exemplo 2.1.18 ([1])**.** *Se $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$, uma álgebra em $\mathcal{V}$ é uma $\Bbbk$-álgebra usual. Basta notar que se A é uma álgebra em $Vec_{\Bbbk}$, então A é $\Bbbk$-espaço vetorial e os morfismos m e η serão $\Bbbk$-lineares. Definindo a multiplicação de elementos de A como $m(a \otimes b) = ab$, para $a, b \in A$ e a unidade de A $\eta(1_{\Bbbk}) = 1_A$ então o diagrama* (2.9) *nos dá a associatividade da multiplicação e o diagrama* (2.10) *a propriedade da unidade.*

Por outro lado, se A é uma $\Bbbk$-álgebra com multiplicação $m(a,b) = ab$ e unidade 1_A, é também uma álgebra em $Vec_{\Bbbk}$. De fato, sendo a multiplicação $\Bbbk$-bilinear, a propriedade universal do produto tensorial nos dá uma única aplicação $\Bbbk$-linear tal que $m(a \otimes b) = ab$, e sendo a multiplicação associativa, o diagrama (2.9) comuta. Sendo o corpo $\Bbbk$ a unidade da categoria neste caso, η é dado por $\eta(1_{\Bbbk}) = 1_A$ e portanto, o diagrama (2.10) também comuta.

Exemplo 2.1.19. *No Exemplo 2.1.10 vimos que a categoria dos H-módulos ${}_H\mathcal{M}$ é uma categoria monoidal, sendo uma subcategoria de $Vec_{\Bbbk}$. Assim uma álgebra nessa categoria é, antes de qualquer coisa, uma álgebra em $Vec_{\Bbbk}$. Portanto, existem os morfismos m e η $\Bbbk$-lineares tais que os diagrama (2.9) e (2.10) são comutativos. Além disso, se A é uma álgebra na categoria dos H-módulos, então A é um H-módulo e os morfismos m e η são morfismos de H-módulos. Logo os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
H \otimes A \otimes A \arrow[r, "H\otimes m"] \arrow[d, "\mu"'] & H \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes \Bbbk \arrow[r, "H\otimes\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & H \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\
\Bbbk \arrow[r, "\eta"'] & A
\end{tikzcd}$$

onde μ define a ação de H em $A \otimes A$, ν define a ação de H em A e ξ define a ação de H em $\Bbbk$.

Em elementos, a comutatividade do diagrama da esquerda significa que, dados $a, b \in A$ e $h \in H$:

$$(\nu \circ (H \otimes m))\,(h \otimes a \otimes b) \;=\; (m \circ \mu)\,(h \otimes a \otimes b)$$

o que, considerando a definição de μ dada no Exemplo 2.1.10, implica:

$$h \cdot (ab) \;=\; \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$$

que é exatamente o item ii) da Definição 1.1.2.

Já o diagrama da direita, para $h \in H$ nos fornece:

$$\nu(h \otimes \eta(1_{\Bbbk})) \;=\; \eta(\xi(h \otimes 1_{\Bbbk}))$$

o que nos dá o item iii) da Definição 1.1.2:

$$h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A.$$

Logo, concluímos que uma álgebra na categoria ${}_H\mathcal{M}$ é uma H-módulo álgebra.

Por outro lado, uma H-módulo álgebra é álgebra na categoria monoidal dos H-módulos, basicamente fazendo o caminho inverso.

Exemplo 2.1.20. *No Exemplo 2.1.11 vimos que a categoria dos H-comódulos $\mathcal{M}^H$ é uma categoria monoidal. Uma álgebra nessa categoria é uma H-comódulo álgebra, já que os morfismos multiplicação e unidade deverão ser morfismos de H-comódulos. Por outro lado, é fácil ver que uma H-comódulo álgebra é uma álgebra na categoria dos H-comódulos.*

Dado G um grupo e A uma $\Bbbk$-álgebra graduada de tipo G, vimos no Exemplo 1.1.17 que A é $\Bbbk G$-comódulo álgebra. O exemplo acima nos diz que também podemos ver

A como uma álgebra na categoria $\mathcal{M}^{\Bbbk G}$.

Exemplo 2.1.21 ([7])**.** *Se $\mathcal{V} = \underline{Sets}$, uma álgebra é um monóide.*

De fato, se A é uma álgebra em $\underline{Sets}$, então A é um conjunto juntamente com duas funções $m : A \times A \to A$ e $\eta : \{*\} \to A$ tal que os diagramas (2.9) *e* (2.10) *comutam. Logo, usando a comutatividade destes diagramas, obtemos que m é uma operação associativa e $\eta(*)$ é o elemento neutro do conjunto. Portanto, A é um monóide.*

Reciprocamente, dado A um monóide temos uma operação $. : A \times A \to A$ que é associativa e um elemento neutro $e \in A$. Assim, basta definir $m(a, b) = a.b$ e $\eta(*) = e$ e obtemos uma álgebra em $\underline{Sets}$.

A seguir, define-se uma coálgebra em uma categoria monoidal.

Definição 2.1.22 ([1])**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal. Uma* ***coálgebra*** *em $\mathcal{V}$ é uma tripla (C, Δ, ε), onde C é um objeto em $\mathcal{V}$, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to I$ são morfismos em $\mathcal{V}$, chamados de* ***comultiplicação*** *e* ***counidade*** *de C respectivamente, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & C \otimes C \arrow[d, "C\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes C"'] & (C \otimes C) \otimes C & C \otimes (C \otimes C) \arrow[l, "a^{-1}_{C,C,C}"]
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[ld, "l_C^{-1}"'] \arrow[rd, "r_C^{-1}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
I \otimes C & & C \otimes I \\
& C \otimes C \arrow[lu, "\varepsilon\otimes C"] \arrow[ru, "C\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

Vejamos a seguir alguns exemplos de coálgebras.

Exemplo 2.1.23. *O objeto unidade I é uma coálgebra na categoria $\mathcal{V}$. Basta definir $\Delta = l_I^{-1} = r_I^{-1}$ e $\varepsilon = I$. A demonstração segue de modo análogo ao Exemplo 2.1.17.*

Exemplo 2.1.24. *Quando $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$, uma coálgebra é uma $\Bbbk$-coálgebra usual.*

Exemplo 2.1.25 ([7])**.** *Em $\underline{Sets}$, uma coálgebra é um conjunto X, juntamente com duas funções $\Delta : X \to X \times X$ e $\varepsilon : X \to \{*\}$ que são unicamente determinadas.*

De fato, a aplicação ε só pode ser definida como $\varepsilon(x) = *$, para todo $x \in X$. A princípio não sabemos como o morfismo Δ deve ser definido, mas sabemos que $\Delta(x) = (y, z) \in X \times X$. Então usando a comutatividade do diagrama (2.12)*, obtemos:*

$$\begin{aligned} ((\varepsilon \times X) \circ \Delta)(x) &= l_X^{-1}(x) \\ (*, z) &= (*, x) \\ z &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ((X \times \varepsilon) \circ \Delta)(x) &= r_X^{-1}(x) \\ (y, *) &= (x, *) \\ y &= x \end{aligned}$$

Logo, $\Delta(x) = (x, x)$, para todo $x \in X$.

Por outro lado, se tomarmos um conjunto qualquer X e definirmos $\Delta(x) = (x, x)$ e $\varepsilon(x) = *$ para todo $x \in X$, obtemos uma coálgebra em $\underline{Sets}$.

Podemos definir morfismo de álgebras e morfismo de coálgebras em uma categoria $\mathcal{V}$.

Definição 2.1.26 ([1])**.** *Sejam (A, m_A, η_A) e (B, m_B, η_B) álgebras em uma categoria monoidal $\mathcal{V}$. Dizemos que $f : A \longrightarrow B$ é um* ***morfismo de álgebras*** *se f é um morfismo em $\mathcal{V}$ tal que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} \qquad (2.13) \qquad \begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
I \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] &
\end{tikzcd} \qquad (2.14)$$

Definição 2.1.27 ([1]). *Sejam* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *e* $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ *coálgebras em uma categoria monoidal* $\mathcal{V}$*. Dizemos que* $f : C \longrightarrow D$ *é um **morfismo de coálgebras** se* f *é um morfismo em* $\mathcal{V}$ *tal que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D
\end{tikzcd} \qquad (2.15) \qquad \begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
I &
\end{tikzcd} \qquad (2.16)$$

Podem existir em uma categoria monoidal, objetos que sejam álgebras e também coálgebras, neste caso teríamos um objeto $H = (H, m_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$. Se pedirmos, além disso uma compatibilidade destas estruturas, teremos uma biálgebra em $\mathcal{V}$, que será definida mais adiante.

Essa compatibilidade é estabelecida ao pedirmos que m_H e η_H sejam morfismos de coálgebras, (ou equivalentemente, que Δ_H e ε_H sejam morfismos de álgebras). Um problema que surge disso, é que precisamos dar uma estrutura de coálgebra (e de álgebra) para $H \otimes H$, o que só terá sentido se a categoria monoidal tiver uma trança, é o que veremos na sequência.

Definição 2.1.28 ([22], [1]). *Uma **trança** para uma categoria monoidal* $\mathcal{V}$ *é um isomorfismo natural* $\sigma : \otimes \Rightarrow \otimes \circ \Gamma$*, onde* $\Gamma : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ *é o funtor flip definido nos objetos como* $\Gamma(A, B) = (B, A)$*. Isso significa que para todo* A, B *objetos de* $\mathcal{V}$*, existe um isomorfismo*

$$\sigma_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

tal que o seguinte diagrama comuta para quaisquer morfismos $f : A \to A'$*,* $g : B \to B'$*:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,B}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & B \otimes A \arrow[d, "g\otimes f"] \\
A' \otimes B' \arrow[r, "\sigma_{A',B'}"'] & B' \otimes A'
\end{tikzcd} \qquad (2.17)$$

Além disso, os seguintes diagramas devem comutar, para quaisquer A*,* B*,* C *objetos de* $\mathcal{V}$*:*

$$\begin{tikzcd}
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "a_{B,A,C}"] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[dr, "B \otimes \sigma_{A,C}"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\sigma_{A,B} \otimes C"] \arrow[dr, "a_{A,B,C}"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\sigma_{A,B \otimes C}"'] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[ur, "a_{B,C,A}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.18}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "a^{-1}_{A,C,B}"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[dr, "\sigma_{A,C} \otimes B"] & \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[ur, "A \otimes \sigma_{B,C}"] \arrow[dr, "a^{-1}_{A,B,C}"'] & & & (C \otimes A) \otimes B \\
& (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\sigma_{A \otimes B,C}"'] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[ur, "a^{-1}_{C,A,B}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.19}$$

Em geral, quando nos referirmos aos diagramas (2.18) e (2.19), estaremos utilizando a observação a seguir, já que na maior parte deste texto fixaremos uma categoria monoidal estrita.

Observação 2.1.29. *Note que no caso da categoria monoidal $\mathcal{V}$ ser estrita, o diagrama* (2.18) *nos diz que:*

$$\sigma_{A,B\otimes C} = (B \otimes \sigma_{A,C}) \circ (\sigma_{A,B} \otimes C)$$

e o diagrama (2.19) *nos diz que:*

$$\sigma_{A\otimes B,C} = (\sigma_{A,C} \otimes B) \circ (A \otimes \sigma_{B,C})$$

Definição 2.1.30 ([22]). *Uma* ***categoria monoidal trançada*** *é um par $(\mathcal{V}, \sigma)$ onde $\mathcal{V}$ é uma categoria monoidal e σ é uma trança.*

Definição 2.1.31 ([22], [1]). *Uma categoria monoidal trançada é dita* ***simétrica*** *se para quaisquer objetos A, B de $\mathcal{V}$ tivermos $\sigma_{B,A} = (\sigma_{A,B})^{-1}$.*

Alguns exemplos de categorias monoidais trançadas (e simétricas) são:

Exemplo 2.1.32 ([1]). *A categoria monoidal $(Vec_{\Bbbk}, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk)$ é naturalmente trançada com o morfismo twist $\tau_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ dado por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$. Essa categoria é ainda simétrica.*

Exemplo 2.1.33 ([1]). *A categoria monoidal* ($\underline{Sets}, \times, \{*\}$) *é trançada com a trança dada, para cada* X, Y*, pelo morfismo* $\sigma_{X,Y} : X \times Y \to Y \times X$*, dado por:* $\sigma_{X,Y}(x, y) = (y, x)$*. Essa categoria é também simétrica.*

A próxima proposição nos fornece propriedades interessantes da trança com relação à associatividade e às unidades:

Proposição 2.1.34 ([22] p.33). *Em uma categoria monoidal trançada, os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes I \arrow[rr, "\sigma_{A,I}"] \arrow[dr, "r_A"'] & & I\otimes A \arrow[dl, "l_A"] \\
& A &
\end{tikzcd} \qquad (2.20)$$

$$\begin{tikzcd}
I\otimes A \arrow[rr, "\sigma_{I,A}"] \arrow[dr, "l_A"'] & & A\otimes I \arrow[dl, "r_A"] \\
& A &
\end{tikzcd} \qquad (2.21)$$

$$\begin{tikzcd}
& & & (A\otimes C)\otimes B \arrow[dr, "\sigma_{A,C}\otimes B"] & & & \\
& & A\otimes(C\otimes B) \arrow[ur, "a^{-1}_{A,C,B}"] & & (C\otimes A)\otimes B \arrow[dr, "a_{C,A,B}"] & & \\
& A\otimes(B\otimes C) \arrow[ur, "A\otimes\sigma_{B,C}"] & & & & C\otimes(A\otimes B) \arrow[dr, "C\otimes\sigma_{A,B}"] & \\
(A\otimes B)\otimes C \arrow[ur, "a_{A,B,C}"] \arrow[dr, "\sigma_{A,B}\otimes C"'] & & & & & & C\otimes(B\otimes A) \\
& (B\otimes A)\otimes C \arrow[dr, "a_{B,A,C}"'] & & & & (C\otimes B)\otimes A \arrow[ur, "a_{C,B,A}"'] & \\
& & B\otimes(A\otimes C) \arrow[dr, "B\otimes\sigma_{A,C}"'] & & (B\otimes C)\otimes A \arrow[ur, "\sigma_{B,C}\otimes A"'] & & \\
& & & B\otimes(C\otimes A) \arrow[ur, "a^{-1}_{B,C,A}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(2.22)

Demonstração. Para mostrar que o diagrama (2.20) comuta, vamos usar uma estratégia parecida com a utilizada na demonstração de (2.6). Vamos começar mostrando que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
I\otimes(A\otimes I) \arrow[rr, "I\otimes\sigma_{A,I}"] \arrow[dr, "I\otimes r_A"'] & & I\otimes(I\otimes A) \arrow[dl, "I\otimes l_A"] \\
& I\otimes A &
\end{tikzcd} \qquad (2.23)$$

Tomando como diagrama externo o diagrama (2.18) com $B = C = I$, podemos construir o diagrama a seguir posicionando (2.23) no canto superior direito:

$$\begin{tikzcd}
 & & (I\otimes A)\otimes I \arrow[rr, "a_{I,A,I}"] \arrow[ddrr, "r_{I\otimes A}"'] & & I\otimes(A\otimes I) \arrow[dd, "I\otimes r_A"] \arrow[ddrr, "I\otimes\sigma_{A,I}"] & & \\
 & & \circlearrowright \text{ por } (2.5) & \circlearrowright \text{ por } (2.6) & & (2.23) & \\
(A\otimes I)\otimes I \arrow[uurr, "\sigma_{A,I}\otimes I"] \arrow[rr, "r_{A\otimes I}"] \arrow[ddrr, "a_{A,I,I}"'] & & A\otimes I \arrow[rr, "\sigma_{A,I}"] & & I\otimes A & & I\otimes(I\otimes A) \arrow[ll, "I\otimes l_A"] \\
 & \circlearrowright \text{ por } (2.6) & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \circlearrowright \text{ por } (2.2) & \\
 & & A\otimes(I\otimes I) \arrow[uu, "A\otimes r_I"'] \arrow[rr, "\sigma_{A,I\otimes I}"'] & & (I\otimes I)\otimes A \arrow[uu, "r_I\otimes A"] \arrow[uurr, "a_{I,I,A}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Usando a comutatividade dos diagramas internos, conforme demarcado no diagrama acima, a comutatividade do diagrama externo, e ainda, usando que $a_{A,B,C}$ e $\sigma_{A,B}$ são isomorfismos para quaisquer objetos A,B,C, concluímos que o diagrama (2.23) comuta.

No próximo diagrama, vamos posicionar o diagrama (2.23) do lado esquerdo, e o diagrama que queremos mostrar a comutatividade, do lado direito:

$$\begin{tikzcd}
 & I\otimes(A\otimes I) \arrow[rr, "l_{A\otimes I}"] \arrow[dd, "I\otimes\sigma_{A,I}"] \arrow[ddddl, "I\otimes r_A"'] & & A\otimes I \arrow[dd, "\sigma_{A,I}"'] \arrow[ddddr, "r_A"] & \\
 & \circlearrowright \text{ por } (2.23) & \circlearrowright \text{ por } (2.4) & & \\
 & I\otimes(I\otimes A)) \arrow[rr, "l_{I\otimes A}"'] \arrow[ddl, "I\otimes l_A"] & & I\otimes A \arrow[ddr, "l_B"'] & (2.20) \\
 & & \circlearrowright \text{ por } (2.4) & & \\
I\otimes A \arrow[rrrr, "l_A"'] & & & & A
\end{tikzcd}$$

Assim, já que o contorno externo do diagrama comuta devido à naturalidade de l, usando a comutatividade dos diagramas internos demarcados acima, e ainda, usando que l_A é isomorfismo para qualquer objeto A, obtemos que (2.20) comuta.

A demonstração de que o diagrama (2.21) comuta é totalmente análoga ao que fizemos, e portanto, será omitida.

Para o diagrama (2.22), construímos três diagramas internos por meio das setas tracejadas, conforme diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
 & & & (A\otimes C)\otimes B \arrow[dr, "\sigma_{A,C}\otimes B"] & & & \\
 & & A\otimes(C\otimes B) \arrow[ur, "a^{-1}_{A,C,B}"] \arrow[dddrrr, dashed, "\sigma_{A,C\otimes B}"] & & (C\otimes A)\otimes B \arrow[dr, "a_{C,A,B}"] & & \\
 & A\otimes(B\otimes C) \arrow[ur, "A\otimes\sigma_{B,C}"] \arrow[dddrrr, dashed, "\sigma_{A,B\otimes C}"] & & & \circlearrowright \text{ por } (2.18) & C\otimes(A\otimes B) \arrow[dr, "C\otimes\sigma_{A,B}"] & \\
(A\otimes B)\otimes C \arrow[ur, "a_{A,B,C}"] \arrow[dr, "\sigma_{A,B}\otimes C"'] & & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & & C\otimes(B\otimes A) \\
 & (B\otimes A)\otimes C \arrow[dr, "a_{B,A,C}"'] & \circlearrowright \text{ por } (2.18) & & & (C\otimes B)\otimes A \arrow[ur, "a_{C,B,A}"'] & \\
 & & B\otimes(A\otimes C) \arrow[dr, "B\otimes\sigma_{A,C}"'] & & (B\otimes C)\otimes A \arrow[ur, "\sigma_{B,C}\otimes A"'] & & \\
 & & & B\otimes(C\otimes A) \arrow[ur, "a^{-1}_{B,C,A}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Como cada um dos diagramas internos comuta, então o diagrama externo também comuta.

□

Observação 2.1.35. *Note que no caso da categoria monoidal ser estrita, os diagramas* (2.20) *e* (2.21) *nos dizem que:*

$$\sigma_{A,I} = A = \sigma_{I,A} \tag{2.24}$$

Os corolários a seguir nos fornecem duas relação entre as tranças, que podem ser obtidas a partir do diagrama (2.22), em uma categoria monoidal estrita. Mais adiante, no capítulo 3, vamos utilizar o resultado a seguir para mostrar que A^{op} é uma $\mathcal{V}$-categoria.

Corolário 2.1.36 ([22])**.** *Seja* $(\mathcal{V}, \sigma)$ *uma categoria monoidal estrita trançada. Então o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes B\otimes C \arrow[r, "\sigma_{A,B}\otimes C"] \arrow[d, "A\otimes\sigma_{B,C}"'] & B\otimes A\otimes C \arrow[d, "\sigma_{B\otimes A,C}"] \\
A\otimes C\otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,C\otimes B}"'] & C\otimes B\otimes A
\end{tikzcd} \tag{2.25}$$

Demonstração. Usa-se (2.19) do lado direito e (2.18) na parte inferior do diagrama, lembrando que como a categoria é estrita a associatividade se torna a identidade e, assim, é omitida do diagrama como pode-se observar abaixo:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes C \arrow[r, "\sigma_{A,B} \otimes C"] \arrow[d, "A \otimes \sigma_{B,C}"'] \arrow[dr, phantom, "(2.25)"] & B \otimes A \otimes C \arrow[r, "B \otimes \sigma_{A,C}"] \arrow[d, "\sigma_{B \otimes A,C}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & B \otimes C \otimes A \arrow[dl, "\sigma_{B,C} \otimes A"] \\
A \otimes C \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,C \otimes B}"] \arrow[d, "\sigma_{A,C} \otimes B"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.18)"] & C \otimes B \otimes A & \\
C \otimes A \otimes B \arrow[ur, "C \otimes \sigma_{A,B}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Para concluir que (2.25) comuta basta acrescentar que o contorno externo do diagrama é o diagrama (2.22). □

A próxima propriedade da trança é bastante semelhante com a dada em (2.25), ela será necessária no capítulo 3 para mostrar que C^{op} é uma $\mathcal{V}$-categoria dual.

Corolário 2.1.37. *Seja* $(\mathcal{V}, \sigma)$ *uma categoria monoidal estrita trançada. Então o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes C \arrow[r, "\sigma_{A,B \otimes C}"] \arrow[d, "\sigma_{A \otimes B,C}"'] & B \otimes C \otimes A \arrow[d, "\sigma_{B,C} \otimes A"] \\
C \otimes A \otimes B \arrow[r, "C \otimes \sigma_{A,B}"'] & C \otimes B \otimes A
\end{tikzcd} \tag{2.26}$$

Demonstração. De fato, basta construir os diagramas no lado superior e no lado esquerdo usando as propriedades das tranças (2.18) e (2.19), respectivamente. Depois disso, basta notar que o diagrama externo se torna o diagrama (2.22).

$$\begin{tikzcd}
 & & B \otimes A \otimes C \arrow[d, "B \otimes \sigma_{A,C}"] \\
 & A \otimes B \otimes C \arrow[ur, "\sigma_{A,B} \otimes C"] \arrow[r, "\sigma_{A,B \otimes C}"] \arrow[dl, "A \otimes \sigma_{B,C}"'] \arrow[d, "\sigma_{A \otimes B,C}"] \arrow[dr, phantom, "(2.26)"] \arrow[ur, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright \text{ por } (2.18)"] & B \otimes C \otimes A \arrow[d, "\sigma_{B,C} \otimes A"] \\
A \otimes C \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,C} \otimes B"'] \arrow[ur, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & C \otimes A \otimes B \arrow[r, "C \otimes \sigma_{A,B}"'] & C \otimes B \otimes A
\end{tikzcd}$$

□

Observação 2.1.38. *Com as propriedades de categorias monoidais apresentadas até aqui foi possível perceber que no caso de a categoria monoidal ser estrita, os cálculos (e diagramas) podem ser mais concisos. Por isso, nas demonstrações dos demais resultados vamos considerar uma categoria monoidal estrita.*

Fazer isso não oferece prejuízo aos nossos resultados, tendo em vista o resultado clássico de que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita. A demonstração deste resultado pode ser vista com detalhes em [1] ou em [2].

O próximo resultado mostra que produto tensorial de álgebras em uma categoria $\mathcal{V}$ também é álgebra nesta categoria e, apesar de [1] oferecer a demonstração por meio da composição dos morfismos, apresentamos aqui uma opção de demonstração original por meio de diagramas. Este recurso de demonstração por diagramas será bastante utilizado no decorrer do texto, assim neste primeiro exemplo de utilização, as duas opções de demonstração serão apresentadas.

Proposição 2.1.39 ([1]). *Sejam $A = (A, m_A, \eta_A)$ e $B = (B, m_B, \eta_B)$ álgebras em uma categoria monoidal estrita trançada $\mathcal{V}$. Então o produto tensorial $A \otimes B$ é também uma álgebra em $\mathcal{V}$ com multiplicação:*

$$m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B) : A \otimes B \otimes A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$$

e unidade

$$\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B : I \longrightarrow A \otimes B.$$

Demonstração. Vamos verificar que os diagramas (2.9) e (2.10) comutam. Como estamos usando a categoria estrita, teremos $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$, por isso escrevemos simplesmente $A \otimes B \otimes C$ sem parênteses. Também teremos $A \otimes I = I \otimes A = A$ para qualquer objeto A da categoria $\mathcal{V}$.

O diagrama a seguir prova que (2.9) é comutativo, pois a comutatividade dos diagramas construídos internamente, levam a comutatividade do diagrama externo, que é exatamente o diagrama (2.9) para este caso. A demonstração por meio da composição de morfismos é dada na sequência, ela também pode auxiliar a ler a demonstração por meio do diagrama, apesar de o diagrama oferecer mais de uma opção de leitura.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[rrrrrrrrr, "A\otimes B\otimes m_{A\otimes B}"] \arrow[ddrrrrr, "A\otimes B\otimes A\otimes \sigma_{B,A}\otimes B"] \arrow[ddddrr, "A\otimes \sigma_{B,A}\otimes B\otimes A\otimes B"] \arrow[dddddddddd, "m_{A\otimes B}\otimes A\otimes B"'] & & & & & & & & & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[ddddll, "A\otimes \sigma_{B,A}\otimes B"] \arrow[dddddddddd, "m_{A\otimes B}"] \\
& & & & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & & \\
& & = & & & A \otimes B \otimes A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[uurrrr, "A\otimes B\otimes m_A\otimes m_B"] \arrow[dll, "A\otimes \sigma_{B,A}\otimes A\otimes B\otimes B"'] \arrow[dddd, "A\otimes \sigma_{B,A\otimes A}\otimes B\otimes B"] & & & & \\
& & & A \otimes A \otimes B \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[dddrr, "A\otimes A\otimes \sigma_{B,A}\otimes B\otimes B"] & \circlearrowright \text{ por } (2.18) & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & & \\
& & A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[ur, "A\otimes A\otimes B\otimes \sigma_{B,A}\otimes B"] \arrow[ddrrr, "A\otimes A\otimes \sigma_{B\otimes B,A}\otimes B"] \arrow[ddddddll, "m_A\otimes m_B\otimes A\otimes B"] & \circlearrowright \text{ por } (2.19) & & & & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[ddddddrr, "m_A\otimes m_B"] & & \\
& \circlearrowright \text{ por definição} & & & & & & & \circlearrowright \text{ por definição} & \\
& & & & & A \otimes A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[uurr, "A\otimes m_A\otimes B\otimes m_B"] \arrow[dd, "m_A\otimes A\otimes m_B\otimes B"] & & & & \\
& & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & & \circlearrowright \text{ por } (2.9) & & & \\
& & & & & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[ddrrrr, "m_A\otimes m_B"] & & & & \\
& & & & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & & \\
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[uurrrrr, "A\otimes \sigma_{B,A}\otimes B"] \arrow[rrrrrrrrr, "m_{A\otimes B}"'] & & & & & & & & & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

Agora faremos o mesmo cálculo dado pelo diagrama, porém escrevendo a composição dos morfismos. Iniciamos pela composição das setas superior e à direita do diagrama anterior:

$$
\begin{aligned}
& m_{A\otimes B} \circ (A \otimes B \otimes m_{A\otimes B}) = \qquad \text{(por definição)} \\
= \;& (m_A \otimes m_B) \circ \underbrace{(A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B) \circ (A \otimes B \otimes m_A \otimes m_B)}_{(2.17)} \circ (A \otimes B \otimes A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B) \\
= \;& \underbrace{(m_A \otimes m_B) \circ (A \otimes m_A \otimes B \otimes m_B)}_{(2.9)} \circ (A \otimes \sigma_{B,A\otimes A} \otimes B \otimes B) \circ (A \otimes B \otimes A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B) \\
= \;& (m_A \otimes m_B) \circ (m_A \otimes A \otimes m_B \otimes B) \circ \underbrace{(A \otimes \sigma_{B,A\otimes A} \otimes B \otimes B)}_{(2.18)} \circ (A \otimes B \otimes A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B) \\
= \;& (m_A \otimes m_B) \circ (m_A \otimes A \otimes m_B \otimes B) \circ (A \otimes A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B \otimes B) \circ (A \otimes \sigma_{B,A} \otimes A \otimes B \otimes B) \circ \\
& (A \otimes B \otimes A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B) \\
= \;& (m_A \otimes m_B) \circ (m_A \otimes A \otimes m_B \otimes B) \circ \underbrace{(A \otimes A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B \otimes B) \circ (A \otimes A \otimes B \otimes \sigma_{B,A} \otimes B)}_{(2.19)} \circ \\
& (A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B \otimes A \otimes B) \\
= \;& (m_A \otimes m_B) \circ \underbrace{(m_A \otimes A \otimes m_B \otimes B) \circ (A \otimes A \otimes \sigma_{B\otimes B,A} \otimes B)}_{(2.17)} \circ (A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B \otimes A \otimes B) \\
= \;& (m_A \otimes m_B) \circ (A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B) \circ (m_A \otimes m_B \otimes A \otimes B) \circ (A \otimes \sigma_{B,A} \otimes B \otimes A \otimes B) \\
= \;& m_{A\otimes B} \circ (m_{A\otimes B} \otimes A \otimes B)
\end{aligned}
$$

assim obtemos a composição das setas inferior e à esquerda do diagrama e mostramos que o diagrama (2.9) comuta.

Agora verifiquemos (2.10). O diagrama que deve ser mostrado novamente está posicionado na parte exterior do diagrama a seguir, assim basta notar que todos os diagramas internos comutam.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[dddd, "m_{A\otimes B}"'] \arrow[ddrr, "A\otimes\sigma_{B,A}\otimes B"] & & & & \\
& & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \\
& \circlearrowright \text{ por definição} & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[ddll, "m_A\otimes m_B"] & A \otimes I \otimes B \otimes I \arrow[l, "A\otimes\eta_A\otimes B\otimes\eta_B"'] \arrow[ddlll, "="] & A \otimes B \otimes I \arrow[l, "A\otimes\sigma_{B,I}\otimes I"'] \arrow[uullll, "A\otimes B\otimes\eta_{A\otimes B}=A\otimes B\otimes\eta_A\otimes\eta_B"'] \arrow[ddllll, "="] \\
& & \circlearrowright \text{ por } (2.10) & = \text{ por } (2.24) & \\
A \otimes B & & & &
\end{tikzcd}$$

Escrevendo o que fizemos acima através da composição dos morfismos, temos:

$$\begin{aligned} m_{A\otimes B}\circ(A\otimes B\otimes\eta_{A\otimes B}) &= (m_A\otimes m_B)\circ\underbrace{(A\otimes\sigma_{B,A}\otimes B)\circ(A\otimes B\otimes\eta_A\otimes\eta_B)}_{(2.17)} \\ &= \underbrace{(m_A\otimes m_B)\circ(A\otimes\eta_A\otimes B\otimes\eta_B)}_{(2.10)}\circ(A\otimes\underbrace{\sigma_{B,I}}_{(2.24)}\otimes I) \\ &= A\otimes B \end{aligned}$$

O diagrama da unidade à esquerda é análogo. Portanto, $A\otimes B$ é álgebra em $\mathcal{V}$. □

Um poduto tensorial de duas coálgebras também pode ser uma coálgebra, que é o que veremos a seguir. Os cálculos são análogos aos de álgebra e portanto, faremos a demonstração usando apenas os diagramas.

Proposição 2.1.40 ([1]). *Sejam $C=(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ e $D=(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$ coálgebras em uma categoria monoidal estrita trançada $\mathcal{V}$. Então o produto tensorial $C\otimes D$ é também uma coálgebra em $\mathcal{V}$ com comultiplicação:*

$$\Delta_{C\otimes D}=(C\otimes\sigma_{C,D}\otimes D)\circ(\Delta_C\otimes\Delta_D):C\otimes D\longrightarrow C\otimes D\otimes C\otimes D$$

e counidade

$$\varepsilon_{C\otimes D}=\varepsilon_C\otimes\varepsilon_D:C\otimes D\longrightarrow I.$$

Demonstração. Vamos verificar que os diagramas (2.11) e (2.12) comutam usando diagramas. Começamos pelo diagrama da counidade, parte à direita (à esquerda é análogo):

$$\begin{tikzcd}
C\otimes D \arrow[dddd, "\Delta_{C\otimes D}"'] \arrow[ddrr, "\Delta_C\otimes\Delta_D"] \arrow[ddrrr, "="] \arrow[ddrrrr, "="] & & & & \\
& & \circlearrowright\text{ por (2.12)} & =\text{ por (2.24)} & \\
& \circlearrowright\text{ por definição} & C\otimes C\otimes D\otimes D \arrow[r, "C\otimes\varepsilon_C\otimes D\otimes\varepsilon_D"'] \arrow[ddll, "C\otimes\sigma_{C,D}\otimes D"] & C\otimes I\otimes D\otimes I \arrow[r, "C\otimes\sigma_{I,D}\otimes I"'] & C\otimes D\otimes I \\
& & & \circlearrowright\text{ por (2.17)} & \\
C\otimes D\otimes C\otimes D \arrow[uurrrr, "C\otimes D\otimes\varepsilon_{C\otimes D}=C\otimes D\otimes\varepsilon_C\otimes\varepsilon_D"] & & & &
\end{tikzcd}$$

O diagrama da coassociatividade também comuta:

$$\begin{tikzcd}
C \otimes D \arrow[rrrrrrrrrr, "\Delta_{C\otimes D}"] \arrow[ddrrrr, "\Delta_C\otimes\Delta_D"] \arrow[ddddddrr, "\Delta_C\otimes\Delta_D"] \arrow[dddddddddddd, "\Delta_{C\otimes D}"'] & & & & & & & & & & C \otimes D \otimes C \otimes D \arrow[ddddddll, "C\otimes D\otimes\Delta_C\otimes\Delta_D"'] \arrow[dddddddddddd, "C\otimes D\otimes\Delta_{C\otimes D}"] \\
& & & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & & & & \\
& & & & C \otimes C \otimes D \otimes D \arrow[uurrrrrr, "C\otimes\sigma_{C,D}\otimes D"] \arrow[dd, "C\otimes\Delta_C\otimes D\otimes\Delta_D"] & & & & & & \\
& & \circlearrowright \text{ por } (2.11) & & & & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & & \\
& & & & C \otimes C \otimes C \otimes D \otimes D \otimes D \arrow[ddrrrr, "C\otimes\sigma_{C\otimes C,D}\otimes D\otimes D"] \arrow[ddddrr, "C\otimes C\otimes\sigma_{C,D}\otimes D\otimes D"] \arrow[dddddd, "C\otimes C\otimes\sigma_{C,D\otimes D}\otimes D"] & & & & & & \\
& \circlearrowright \text{ por definição} & & & & & & & & \circlearrowright \text{ por definição} & \\
& & C \otimes C \otimes D \otimes D \arrow[uurr, "\Delta_C\otimes C\otimes\Delta_D\otimes D"] \arrow[ddddddll, "C\otimes\sigma_{C,D}\otimes D"] & & & & \circlearrowright \text{ por } (2.19) & & C \otimes D \otimes C \otimes C \otimes D \otimes D \arrow[ddddddrr, "C\otimes D\otimes C\otimes\sigma_{C,D}\otimes D"] & & \\
& & & & & \circlearrowright \text{ por } (2.18) & & & & & \\
& & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & & C \otimes C \otimes D \otimes C \otimes D \otimes D \arrow[uurr, "C\otimes\sigma_{C,D}\otimes C\otimes D\otimes D"] \arrow[ddll, "C\otimes C\otimes D\otimes\sigma_{C,D}\otimes D"] & & & & \\
& & & & & & & & & & \\
& & & & C \otimes C \otimes D \otimes D \otimes C \otimes D \arrow[ddrrrrrr, "C\otimes\sigma_{C,D}\otimes D\otimes C\otimes D"] & & & & = & & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & & & & \\
C \otimes D \otimes C \otimes D \arrow[uurrrr, "\Delta_C\otimes\Delta_D\otimes C\otimes D"] \arrow[rrrrrrrrrr, "\Delta_{C\otimes D}\otimes C\otimes D"'] & & & & & & & & & & C \otimes D \otimes C \otimes D \otimes C \otimes D
\end{tikzcd}$$

Portanto, $C \otimes D$ é uma coálgebra em $\mathcal{V}$. □

Veremos a seguir um exemplo de uma categoria monoidal, construída a partir de uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$, que será de grande importância para definirmos uma categoria de Hopf posteriormente.

Proposição 2.1.41 ([5])**.** *Seja $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada e considere $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ a categoria cujos objetos são as coálgebras em $\mathcal{V}$ e os morfismos são os morfismos de coálgebras em $\mathcal{V}$. Então $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ é uma categoria monoidal.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ é subcategoria da categoria original $\mathcal{V}$, com mesma composição e identidade. Vejamos que com o mesmo produto tensorial e unidade da categoria monoidal $\mathcal{V}$, $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ é uma categoria monoidal. Pela Proposição 2.1.40 temos que o produto tensorial de coálgebras é uma coálgebra. Se tomarmos $f : C \to D$ e $g : E \to F$ morfismos de coálgebras, então $f \otimes g : C \otimes E \to D \otimes F$ é morfismo de coálgebras em $\mathcal{V}$. De fato, isso pode ser observado pelos diagramas a seguir:

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes E \arrow[rr, "f\otimes g"] \arrow[dd, "\Delta_C\otimes\Delta_E"'] \arrow[ddddl, "\Delta_{C\otimes E}"'] & & D \otimes F \arrow[dd, "\Delta_D\otimes\Delta_F"'] \arrow[ddddr, "\Delta_{D\otimes F}"] & \\
 & & \circlearrowright \text{ por } (2.15) & & \\
\circlearrowright \text{ por definição} & C\otimes C\otimes E\otimes E \arrow[rr, "f\otimes f\otimes g\otimes g"] \arrow[ddl, "C\otimes\sigma_{C,E}\otimes E"] & & D\otimes D\otimes F\otimes F \arrow[ddr, "D\otimes\sigma_{D,F}\otimes F"'] & \circlearrowright \text{ por definição} \\
 & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \\
C \otimes E \otimes C \otimes E \arrow[rrrr, "f\otimes g\otimes f\otimes g"'] & & & & D \otimes F \otimes D \otimes F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \otimes E \arrow[rr, "f\otimes g"] \arrow[dd, "\varepsilon_{C\otimes E}=\varepsilon_C\otimes\varepsilon_E"'] & & D \otimes F \arrow[ddll, "\varepsilon_{D\otimes F}=\varepsilon_D\otimes\varepsilon_F"] \\
 & \circlearrowright \text{ por } (2.16) & \\
I & &
\end{tikzcd}$$

Por fim, o objeto unidade I de $\mathcal{V}$ é uma coálgebra conforme Exemplo 2.1.23. Portanto, $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ é uma categoria monoidal. □

De forma análoga à proposição anterior, pode-se obter a partir de uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$, uma nova categoria $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$ das álgebras e morfismos de álgebras em $\mathcal{V}$. Esta categoria monoidal $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$ terá um papel importante posteriormente quando definirmos uma categoria de Hopf dual.

Proposição 2.1.42. *Seja $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada e considere $\underline{A}(\mathcal{V})$ a categoria cujos objetos são as álgebras em $\mathcal{V}$ e os morfismos são os morfismos de álgebras em $\mathcal{V}$. Então $\underline{A}(\mathcal{V})$ é uma categoria monoidal.*

Agora voltamos a um objetivo mais imediato, pois com as proposições 2.1.39 e 2.1.40 temos o necessário para definirmos uma biálgebra em uma categoria $\mathcal{V}$.

Definição 2.1.43 ([1])**.** *Seja $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ uma categoria monoidal trançada. Uma **biálgebra** em $\mathcal{V}$ é uma quíntupla $H = (H, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ tal que (H, m, η) é uma álgebra em $\mathcal{V}$, (H, Δ, ε) é uma coálgebra em $\mathcal{V}$ e Δ e ε são morfismos de álgebras.*

Da mesma forma que ocorre com biálgebras usuais, a condição de que Δ e ε são morfismos de álgebras é equivalente à condição de que m e η sejam morfismos de coálgebras, isso é o que mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.1.44 ([1], [14])**.** *Seja $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ um objeto em $\mathcal{V}$ categoria monoidal estrita trançada, de modo que (H, m, η) seja álgebra e (H, Δ, ε) seja coálgebra. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1) Δ e ε são morfismos de álgebras;

2) m e η são morfismos de coálgebras.

Demonstração. Δ e ε serem morfismos de álgebras implica na comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[r, "\Delta"] & H\otimes H \\
H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"'] & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "m\otimes m"']
\end{tikzcd} \tag{2.27}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] & H\otimes H \\
I \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "\eta\otimes\eta"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.28}$$

$$\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "m"'] & I\otimes I \arrow[d, "="] \\
H \arrow[r, "\varepsilon"'] & I
\end{tikzcd} \tag{2.29}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varepsilon"] & I \\
I \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "="'] &
\end{tikzcd} \tag{2.30}$$

Mas note que os dois diagramas acima à esquerda mostram também que m é um morfismo de coálgebra, enquanto que os dois diagramas à direita mostram que η é morfismo de coálgebra.

Dessa forma é evidente a equivalência entre as duas afirmações.

□

Lema 2.1.45 ([7])**.** *Sejam (A, m, η) uma álgebra e (C, Δ, ε) uma coálgebra em uma categoria monoidal $\mathcal{V}$. Então o conjunto $Hom_{\mathcal{V}}(C, A)$ é um monóide com multiplicação*

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \qquad \text{para } f, g \in Hom_{\mathcal{V}}(C, A)$$

e elemento neutro $\eta \circ \varepsilon$.

Demonstração. Primeiramente, note que $f * g \in Hom_{\mathcal{V}}(C, A)$. Vejamos que a multiplicação definida dessa forma é associativa pelo diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[ddr, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes C"] & (C \otimes C) \otimes C \arrow[r, "(f \otimes g) \otimes h"] \arrow[dd, "a_{C,C,C}"] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "m \otimes A"] \arrow[dd, "a_{A,A,A}"] & A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \\
& \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft \text{ por } (2.11)"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft \text{ por } (2.3)"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft \text{ por } (2.9)"] & & \\
& C \otimes C \arrow[r, "C \otimes \Delta"'] & C \otimes (C \otimes C) \arrow[r, "f \otimes (g \otimes h)"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[uur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

A linha superior do diagrama é o produto $(f * g) * h$, enquanto que o restante do contorno externo representa $f * (g * h)$. Como os diagramas internos comutam e a é isomorfismo natural, concluímos que $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Agora, vejamos que $\eta \circ \varepsilon$ é o elemento neutro para essa operação. Note que $\eta \circ \varepsilon \in Hom_{\mathcal{V}}(C, A)$, então para qualquer $f \in Hom_{\mathcal{V}}(C, A)$ temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[ddddr, dash, "="'] & C \otimes C \arrow[r, "f \otimes (\eta \circ \varepsilon)"] \arrow[dd, "C \otimes \varepsilon"] & A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \arrow[ddddl, dash, "="] \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft \text{ por } (2.12)"] & \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft \text{ por } (2.9)"] & \\
& C \otimes I \arrow[r, "f \otimes k"'] \arrow[dd, "r_C"] & A \otimes I \arrow[uu, "A \otimes \eta"'] \arrow[dd, "r_A"] & \\
& \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft \text{ por } (2.5)"] & & \\
& C \arrow[r, "f"'] & A &
\end{tikzcd}$$

Na primeira linha do diagrama temos $f * (\eta \circ \varepsilon)$, então como os diagramas internos comutam e r é um isomorfismo natural, obtemos que $f * (\eta \circ \varepsilon) = f$. Analogamente, obtem-se $(\eta \circ \varepsilon) * f = f$.

$\square$

Definição 2.1.46. *O produto $*$ dado no lema anterior é chamado* ***produto de convolução****.*

Com isso, podemos definir agora uma álgebra de Hopf em uma categoria $\mathcal{V}$.

Definição 2.1.47 ([7])**.** *Seja $H = (H, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra em uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$. Se o morfismo identidade de H tem uma inversa $\mathcal{S}$ pelo produto convolução em $Hom_{\mathcal{V}}(H, H)$, então $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ é chamada uma* ***álgebra de Hopf*** *e $\mathcal{S}$ é sua* ***antípoda****.*

Assim, em uma álgebra de Hopf o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[d, "\mathcal{S}\otimes H"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\eta\circ\varepsilon"] & H \otimes H \arrow[d, "H\otimes\mathcal{S}"] \\
H \otimes H \arrow[r, "m"'] & H & H \otimes H \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd} \tag{2.31}$$

Vejamos a seguir alguns exemplos de álgebras de Hopf em categorias monoidais trançadas.

Exemplo 2.1.48. *Seja* $\mathcal{V} = (Vec_{\Bbbk}, \otimes, \Bbbk, \tau)$*. Uma álgebra de Hopf em* $\mathcal{V}$ *é uma álgebra de Hopf usual e temos vários exemplos na literatura, como pode ser consultado em [14]. Um exemplo particular de álgebra de Hopf usual que podemos citar é a álgebra de grupo* $\Bbbk G$ *de um grupo* G *em que a multiplicação é induzida pelo grupo, a unidade é o elemento neutro de* G*, a comultiplicação é dada por* $\Delta(g) = g \otimes g$*, a counidade* $\varepsilon(g) = 1_{\Bbbk}$ *e a antípoda* $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ *para todo* $g \in G$*.*

Exemplo 2.1.49 ([7])**.** *Seja* $\mathcal{V} = (\underline{Sets}, \times, \{*\}, \sigma)$*. Uma álgebra de Hopf* H *em* $\mathcal{V}$ *é um grupo. De fato, já vimos em 2.1.21 que uma álgebra em* $\underline{Sets}$ *é um monóide e em 2.1.25 que uma coálgebra em* $\underline{Sets}$ *é um conjunto com* Δ *e* ε *unicamente definidos. É fácil verificar que uma biálgebra em* $\underline{Sets}$ *é um monóide* $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *com* Δ *e* ε *sendo os definidos em 2.1.25, já que basta verificar que* Δ *e* ε *são morfismos de álgebras. Por fim, assumindo que* H *é uma álgebra de Hopf, existe uma antípoda* $\mathcal{S}$*, então devemos ter para todo* $h \in H$*:*

$$\begin{aligned}
(m \circ (\mathcal{S} \times H) \circ \Delta)(h) \; &= (\eta \circ \varepsilon)(h) = \; (m \circ (H \circ \mathcal{S}) \circ \Delta)(h) \\
\mathcal{S}(h)h \quad &= e = \quad h\mathcal{S}(h)
\end{aligned}$$

ou seja, todo $h \in H$ *possui um inverso dado por* $\mathcal{S}(h)$*, portanto* H *é um grupo. Por outro lado, dado um grupo* H *podemos dar a ele estrutura de álgebra de Hopf definindo cada morfismo conforme o esperado.*

Exemplo 2.1.50 ([7])**.** *Em [7] é introduzida a categoria de Turaev e então, mostra-se que uma álgebra de Hopf nessa categoria é uma Hopf* G*-coálgebra, estrutura introduzida por Turaev em [39]. Aqui vamos apresentar as definições e dar uma ideia sobre a forma como isso é feito, para mais informações sobre uma Hopf* G*-coálgebra o livro de Turaev [40] também pode ser consultado.*

Uma categoria de Turaev, denotada por T_k*, é a categoria dada por:*

- *Objetos: são pares* $\underline{M} = (X, M)$ *onde* X *é um conjunto e* $M = (M_x)_{x\in X}$ *é uma família de* k*-módulos indexados por* X*;*

- *Morfismos: um morfismo entre dois objetos* $\underline{M}$ *e* $\underline{N} = (Y, N)$ *é um par* $\underline{\varphi} = (f, \varphi)$ *onde* $f : Y \to X$ *é uma função e* $\varphi : (\varphi_y : M_{f(y)} \to N_y)_{y\in Y}$ *é uma família de aplicações lineares indexadas por* Y*;*

- *Composição: Sejam os morfismos* $\underline{\varphi} : \underline{M} \to \underline{N}$ *e* $\underline{\psi} = (g, \psi) : \underline{N} \to \underline{P} = (Z, P)$*, então a composição é definida por:* $\underline{\psi} \circ \underline{\varphi} = (f \circ g, (\psi_z \circ \varphi_{g(z)})_{z\in Z})$*;*

Essa categoria é ainda uma categoria monoidal simétrica da forma como se esperaria que fosse:

- *Produto tensorial:* $\underline{M} \otimes \underline{N} = \big(X \times Y, (M_x \otimes N_y)_{(x,y)\in X\times Y}\big)$;
- *Unidade:* $I = (\{*\}, k)$;
- *Trança:* $\sigma_{\underline{M},\underline{N}} = (\sigma_{Y,X}, \tau)$, *onde* $\sigma_{Y,X}$ *é a trança da categoria* $\underline{Sets}$ *e* τ *é a família de morfismos twist:* $(\tau_{(y,x)} : M_x \otimes N_y \to N_y \otimes M_x)_{(y,x)\in Y\times X}$.

Uma Hopf G-coálgebra é definida como uma família de k-álgebras $H = (H_g)_{g\in G}$ *indexadas pelo grupo G, juntamente com famílias de aplicações lineares:* $\Delta = (\Delta_{g,h} : H_{gh} \to H_g \otimes H_h)_{g,h\in G}$, $\varepsilon : H_1 \to k$ *e* $\mathcal{S} = (S_g : H_{g^{-1}} \to H_g)_{g\in G}$, *tal que* $\Delta_{g,h}$ *e* ε *são morfismos de álgebras e as seguintes condições são satisfeitas para todo* $g, h, l \in G$:

$$\begin{aligned}(\Delta_{g,h} \otimes H_l) \circ \Delta_{gh,l} &= (H_g \otimes \Delta_{h,l}) \circ \Delta_{g,hl} \\ (H_g \otimes \varepsilon) \circ \Delta_{g,1} = H_g &= (\varepsilon \otimes H_g) \circ \Delta_{1,g} \\ m_g \circ (S_g \otimes H_g) \circ \Delta_{g^{-1},g} = \eta_g \circ \varepsilon &= m_g \circ (H_g \otimes S_g) \circ \Delta_{g,g^{-1}}\end{aligned}$$

onde m_g *e* η_g *são as aplicações de multiplicação e unidade em* H_g.

Pode-se mostar que $\underline{H} = (G, H)$ *é uma álgebra de Hopf em* T_k, *se e somente se, G é um grupo e H é uma Hopf G-coálgebra. Para isso, usa-se o seguinte funtor mondoidal forte trançado:*

$$\begin{aligned}F : T_k &\longrightarrow \underline{Sets}^{op} \\ \underline{M} = (X, M) &\mapsto X\end{aligned} \tag{2.32}$$

Um funtor monoidal leva álgebras em álgebras, um funtor monoidal forte leva coálgebras em coálgebras, enquanto que um funtor monoidal forte trançado, leva biálgebras em biálgebras e álgebras de Hopf em álgebras de Hopf.

Assim, tomando $\underline{H} = (G, H)$ *uma álgebra de Hopf em* T_k, *obtemos através do funtor F que G é uma álgebra de Hopf em* $\underline{Sets}^{op}$, *ou seja, é um grupo. As demais verificações necessárias pra concluir que H é uma Hopf G-coálgebra basta usar as definições dos morfismos envolvidos.*

Para mais detalhes sobre essa construção, o artigo [7] pode ser consultado. Nesse artigo, também é apresentada uma noção dual de Hopf G-coálgebra que é chamada de Hopf G-álgebra, a qual também pode ser vista como sendo uma álgebra de Hopf em uma categoria monoidal adequada, nesse caso na categoria de Zunino.

A seguir veremos algumas propriedades da antípoda, baseadas nas propriedades existentes em uma álgebra de Hopf usual conforme [14], (p. 153) e nas que foram feitas para categorias de Hopf no artigo [5] (p. 1180).

Proposição 2.1.51. *Seja H uma álgebra de Hopf em uma categoria monoidal estrita trançada* $\mathcal{V}$. *Então valem as seguintes igualdades:*

1)

$$\mathcal{S} \circ m = m \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \sigma_{H,H} \tag{2.33}$$

2)

$$\mathcal{S} \circ \eta = \eta \tag{2.34}$$

3)

$$\Delta \circ \mathcal{S} = \sigma_{H,H} \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta \tag{2.35}$$

4)

$$\varepsilon \circ \mathcal{S} = \varepsilon \tag{2.36}$$

Demonstração. 1) Denote $f = m\circ(\mathcal{S}\otimes\mathcal{S})\circ\sigma_{H,H}$ e $g = \mathcal{S}\circ m$. Note que $f, g \in Hom_{\mathcal{V}}(H\otimes H, H)$, onde $H\otimes H$ é coálgebra em $\mathcal{V}$ conforme 2.1.40 e H sendo álgebra de Hopf é álgebra em $\mathcal{V}$, então o Lema 2.1.45 pode ser usado. Vamos mostrar que $f = g$ por meio da composição de morfismos, o mesmo caminho pode ser acompanhado através do diagrama na sequência que também fornece a mesma demonstração.

$$\begin{aligned}
f &= f * (\eta\circ\varepsilon_{H\otimes H}) \qquad \text{por } (2.1.45)\\
&= m\circ(f\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes\eta)\circ\underbrace{(H\otimes H\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon)}_{(2.29)}\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= m\circ(f\otimes H)\circ\underbrace{(H\otimes H\otimes\eta)\circ(H\otimes H\otimes\varepsilon)}_{(2.31)}\circ(H\otimes H\otimes m)\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= m\circ(f\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes m)\circ(H\otimes H\otimes H\otimes\mathcal{S})\circ\underbrace{(H\otimes H\otimes\Delta)\circ(H\otimes H\otimes m)}_{(2.27)}\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= m\circ(f\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes m)\circ\underbrace{(H\otimes H\otimes H\otimes\mathcal{S})\circ(H\otimes H\otimes m\otimes m)}_{\text{por definição}}\circ\\
&\quad\underbrace{(H\otimes H\otimes\Delta_{H\otimes H})\circ\Delta_{H\otimes H}}_{(2.11)}\\
&= \underbrace{m\circ(f\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes m)\circ(H\otimes H\otimes m\otimes H)}\circ(H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes g)\circ\\
&\quad\underbrace{(\Delta_{H\otimes H}\otimes H\otimes H)}\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= m\circ(H\otimes m)\circ\underbrace{(f\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes g)}\circ(H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H\otimes H)\circ\\
&\quad(\Delta\otimes\Delta\otimes H\otimes H)\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= m\circ(H\otimes m)\circ(H\otimes m\otimes g)\circ\underbrace{(f\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H)}\circ(H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H\otimes H)\circ\\
&\quad(\Delta\otimes\Delta\otimes H\otimes H)\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= \underbrace{m\circ(H\otimes m)\circ(H\otimes m\otimes g)}_{(2.9)}\circ(m\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H)\circ(\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H)\circ\\
&\quad\underbrace{(\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H\otimes H)}_{(2.19)}\circ(\Delta\otimes\Delta\otimes H\otimes H)\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= m\circ(H\otimes g)\circ(m\otimes H\otimes H)\circ\underbrace{(m\otimes H\otimes H\otimes H)\circ(m\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H)}_{(2.9)}\circ\\
&\quad\underbrace{(\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H)\circ(\sigma_{H\otimes H,H}\otimes H\otimes H\otimes H)}_{(2.17)}\circ(\Delta\otimes\Delta\otimes H\otimes H)\circ\Delta_{H\otimes H}\\
&= m\circ(H\otimes g)\circ(m\otimes H\otimes H)\circ(m\otimes H\otimes H\otimes H)\circ\\
&\quad\underbrace{(H\otimes m\otimes H\otimes H\otimes H)\circ(\sigma_{H\otimes H,H}\otimes H\otimes H\otimes H)}_{(2.17)}\circ(\mathcal{S}\otimes H\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes H)\circ\\
&\quad(\Delta\otimes\Delta\otimes H\otimes H)\circ\Delta_{H\otimes H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m \circ (H \otimes g) \circ (m \otimes H \otimes H) \circ (m \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (\sigma_{H,H} \otimes H \otimes H \otimes H) \circ \\
&\quad \underbrace{(m \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (\mathcal{S} \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (\Delta \otimes \Delta \otimes H \otimes H)}_{(2.31)} \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= m \circ (H \otimes g) \circ (m \otimes H \otimes H) \circ (m \otimes H \otimes H \otimes H) \circ \\
&\quad \underbrace{(\sigma_{H,H} \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (\eta \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H)}_{(2.17)} \circ (I \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H \otimes H) \circ \\
&\quad (\varepsilon \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= m \circ (H \otimes g) \circ (m \otimes H \otimes H) \circ \underbrace{(m \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes \eta \otimes H \otimes H \otimes H)}_{(2.10)} \circ \\
&\quad \underbrace{(\sigma_{I,H} \otimes H \otimes H \otimes H)}_{(2.24)} (I \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (\varepsilon \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= m \circ (H \otimes g) \circ \underbrace{(\varepsilon \otimes m \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H \otimes H)}_{(2.31)} \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= m \circ (H \otimes g) \circ (\eta \otimes H \otimes H) \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes H \otimes H) \circ \Delta_{H \otimes H} \qquad \text{por (2.1.45)} \\
&= (\eta \circ \varepsilon_{H \otimes H}) * g = g
\end{aligned}$$

Portanto a equação (2.33) é válida. O mesmo caminho pode ser feito através do diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rrrrrrrrrrr, "f"] \arrow[drrrr, "\Delta_{H\otimes H}"] \arrow[ddrr, "\Delta_{H\otimes H}"'] \arrow[ddddddddddd, dash, "="'] & & & & & & \circlearrowright \text{ por } 2.1.45 & & & & & H \arrow[ddddd, dash, "="] \\
& & & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rrrr, "H\otimes H\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[drr, "H\otimes H\otimes m"'] \arrow[dd, "H\otimes H\otimes\Delta_{H\otimes H}"'] & & \circlearrowright \text{ por } (2.29) & & H\otimes H\otimes I \arrow[drr, "H\otimes H\otimes\eta"] & & H\otimes H \arrow[ur, "m"] & \\
& & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[drr, "\Delta_{H\otimes H}\otimes H\otimes H"] \arrow[dd, "\Delta\otimes\Delta\otimes H\otimes H"'] & \circlearrowright \text{ por } (2.11) & & \circlearrowright \text{ por } (2.27) & H\otimes H\otimes H \arrow[urr, "H\otimes H\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "H\otimes H\otimes\Delta"] & & \circlearrowright \text{ por } (2.31) & & H\otimes H\otimes H \arrow[u, "f\otimes H"'] & \\
& & & \circlearrowright \text{ por definição} & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "H\otimes H\otimes m\otimes m"] \arrow[drrrr, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes g"'] \arrow[dddrrrr, "f\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[dd, "\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"] & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "H\otimes H\otimes H\otimes\mathcal{S}"] & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[urr, "H\otimes H\otimes m"'] & & = & \\
& & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[urr, "H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[drr, "\sigma_{H\otimes H,H}\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[dd, "\mathcal{S}\otimes H\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes H"'] & \circlearrowright \text{ por } (2.19) & & & \circlearrowright \text{ por definição} & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "H\otimes H\otimes m\otimes H"'] \arrow[d, "f\otimes m\otimes H"'] & & & \\
& & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[d, "\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"] & & \circlearrowright \text{ por definição} & = & H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "H\otimes m"] & & H\otimes H \arrow[r, "m"] & H \arrow[dddddd, dash, "="] \\
& & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "\sigma_{H\otimes H,H}\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[d, "m\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"'] & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rrrr, "m\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[d, "H\otimes m\otimes H\otimes H\otimes H"] & & & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "H\otimes m\otimes g"'] \arrow[dd, "m\otimes H\otimes H\otimes H"'] & & & \\
& \circlearrowright \text{ por } (2.31) & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H\otimes H"'] & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[drrrr, "m\otimes H\otimes H\otimes H"] & & \circlearrowright \text{ por } (2.9) & & & & & \\
& & I\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "\eta\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[drr, "\sigma_{I,H}\otimes H\otimes H\otimes H"] & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \circlearrowright \text{ por } (2.10) & & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dd, "m\otimes H\otimes H"'] & & \circlearrowright \text{ por } (2.9) & \\
& & I\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "I\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes H"] & & I\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[uu, "H\otimes\eta\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[urrrr, "\sim"] & & \circlearrowright \text{ por } (2.31) & & & & & \\
& & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "\varepsilon\otimes\Delta\otimes H\otimes H"] \arrow[rr, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes H\otimes H"] & & I\otimes H\otimes H \arrow[rrrr, "\eta\otimes H\otimes H"] & & \circlearrowright \text{ por } 2.1.45 & & H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "H\otimes g"] & & H\otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \otimes H \arrow[urr, "\Delta_{H\otimes H}"] \arrow[rrrrrrrrrrr, "g"'] & & & & & & & & & & & H
\end{tikzcd}$$

2) Para ver que $\eta = \mathcal{S} \circ \eta$ basta usar o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rrr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[ddr, "\eta\otimes\eta"'] \arrow[dddd, dash, "="'] & & & H \arrow[dddd, dash, "="] \\
 & H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & I \arrow[ur, "\eta"] & \\
 & H\otimes H \arrow[r, "\mathcal{S}\otimes H"] & H\otimes H \arrow[uur, "m"] & \\
 & & H\otimes I \arrow[u, "H\otimes\eta"] & \\
I \arrow[r, "\eta"] & H \arrow[r, "\mathcal{S}"] & H \arrow[u, "="] \arrow[r, "="] & H
\arrow[from=1-2, to=2-3, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.30)}"]
\arrow[from=2-1, to=3-2, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.28)}"]
\arrow[from=2-2, to=3-3, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.31)}"]
\arrow[from=3-3, to=3-4, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.10)}"]
\end{tikzcd}$$

4) Vejamos que $\varepsilon = \varepsilon \circ \mathcal{S}$ através do diagrama seguinte:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rrr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[ddr, "\Delta"'] \arrow[dddd, dash, "="'] & & & I \arrow[dddd, dash, "="] \\
 & I \arrow[r, "\eta"] & H \arrow[ur, "\varepsilon"] & \\
 & H\otimes H \arrow[r, "H\otimes\mathcal{S}"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes H"] & H\otimes H \arrow[u, "m"] \arrow[uur, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & \\
 & I\otimes H \arrow[d, "="] & & \\
H \arrow[r, "="] & H \arrow[r, "\mathcal{S}"] & H \arrow[r, "\varepsilon"] & I
\arrow[from=1-2, to=2-3, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.30)}"]
\arrow[from=2-3, to=2-4, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.29)}"]
\arrow[from=2-2, to=3-3, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.31)}"]
\arrow[from=3-1, to=3-2, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.12)}"]
\end{tikzcd}$$

3) De modo análogo ao que foi feito no item 1), definimos $h = \Delta \circ \mathcal{S}$ e $j = \sigma_{H,H} \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta$. Nesse caso, $h, j \in Hom_{\mathcal{V}}(H, H \otimes H)$, onde H sendo álgebra de Hopf é coálgebra em $\mathcal{V}$ e $H \otimes H$ é álgebra em $\mathcal{V}$ conforme 2.1.39, então o Lema 2.1.45 pode ser usado. Mostramos com o diagrama seguinte que $h = j$.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rrrrrrrrr, "j"] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[ddddd, dash, "="'] & & & & \circlearrowright \text{ por } 2.1.45 & & & & & H \otimes H \arrow[ddddddddddd, dash, "="] \\
& H \otimes H \arrow[d, "H\otimes j"] & I \otimes H \otimes H \arrow[rrrr, "\eta\otimes\eta\otimes H\otimes H"] \arrow[drr, "\eta\otimes H"] & & \circlearrowright \text{ por } (2.28) & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[urrr, "m_{H\otimes H}"] & & & \\
& H\otimes H\otimes H \arrow[ur, "\varepsilon\otimes H\otimes H"] \arrow[dr, "\Delta\otimes H\otimes H"] & \circlearrowright \text{ por } (2.31) & & H \otimes H \otimes H \arrow[urr, "\Delta\otimes H\otimes H"] & \circlearrowright \text{ por } (2.27) & & \circlearrowright \text{ por } (2.9) & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[uur, "m_{H\otimes H}"] & \\
& = & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[d, "H\otimes\Delta\otimes H\otimes H"] & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "m\otimes H\otimes H"] \arrow[rr, "\Delta\otimes\Delta\otimes H\otimes H"] & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[uu, "m_{H\otimes H}\otimes H\otimes H"] \arrow[urr, "H\otimes H\otimes m_{H\otimes H}"] \arrow[drr, "H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] & \circlearrowright \text{ por definição} & & \\
& & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[urrrr, "h\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"] & \circlearrowright \text{ por definição} & & & & \circlearrowright \text{ por } (2.19) & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[uu, "H\otimes H\otimes m\otimes m"] & \\
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dddddd, dash, "="] & H \otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes H"] & H \otimes H \otimes H \arrow[u, "H\otimes\Delta\otimes j"] \arrow[d, "h\otimes\Delta\otimes H"] & = & \circlearrowright \text{ por definição} & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[uu, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}"] \arrow[urr, "H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H\otimes H,H}"] & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \\
& & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[uuurrrr, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes j"] \arrow[rrrr, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\Delta"] & & & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \otimes H \arrow[u, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}"] \arrow[rr, "H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H\otimes H,H}"] & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[uu, "H\otimes H\otimes H\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes\mathcal{S}"] & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por } (2.11) & & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "H\otimes H\otimes H\otimes\Delta\otimes H"] \arrow[rr, "H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}"'] \arrow[dd, "H\otimes H\otimes H\otimes\varepsilon\otimes H"] & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\Delta"] \arrow[d, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\varepsilon"] & \circlearrowright \text{ por } (2.31) \\
& \circlearrowright \text{ por } (2.11) & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[uu, "H\otimes H\otimes H\otimes\Delta"] \arrow[urrrr, "H\otimes H\otimes H\otimes\Delta"] \arrow[drrrr, "\sim"] & & & \circlearrowright \text{ por } (2.12) & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes I \arrow[d, "H\otimes H\otimes H\otimes\mathcal{S}\otimes I"] & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por } (2.31) & & H \otimes H \otimes H \otimes I \otimes H \arrow[urr, "H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{I,H}"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes I \arrow[d, "H\otimes H\otimes m\otimes\eta"] & \\
& H \otimes H \arrow[r, "h\otimes H"] & H \otimes H \otimes H \arrow[uu, "H\otimes H\otimes\Delta"] \arrow[rrrr, "H\otimes H\otimes\varepsilon"] & & & & H \otimes H \otimes I \arrow[rr, "H\otimes H\otimes\eta\otimes\eta"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[dr, "m_{H\otimes H}"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rrrrrrrrr, "h"'] & & & & \circlearrowright \text{ por } 2.1.45 & & & & & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

□

2.2 AÇÕES E COAÇÕES DE ÁLGEBRAS DE HOPF EM CATEGORIAS MONOIDAIS

Dada a importância de ações e coações para este trabalho, vamos refazer nesta seção algumas definições e resultados da seção 1.1, agora no contexto de categorias monoidais. Apesar das generalizações feitas aqui serem bastante óbvias, a maior parte não foi encontrada na literatura.

Vamos fixar nesta seção $\mathcal{V}$ sendo uma categoria monoidal estrita trançada, mas lembre-se que, conforme observado em 2.1.38, não precisamos pedir que a categoria seja estrita. Considerar a categoria monoidal estrita facilita a demonstração dos resultados sem invalidá-los para o caso da categoria ser monoidal.

Definição 2.2.1 ([1]). *Seja H uma álgebra de Hopf em $\mathcal{V}$ (ou uma álgebra). Um H-**módulo à esquerda** em $\mathcal{V}$ é um par (A, α) onde A é um objeto em $\mathcal{V}$ e $\alpha : H \otimes A \longrightarrow A$ é um morfismo em $\mathcal{V}$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes A \arrow[r, "m \otimes A"] \arrow[d, "H \otimes \alpha"'] & H \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\
H \otimes A \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd} \tag{2.37}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes A"] \arrow[dr, "\sim"'] & H \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\
 & A
\end{tikzcd} \tag{2.38}$$

Definição 2.2.2. *Seja H álgebra de Hopf em uma categoria $\mathcal{V}$ (ou uma biálgebra). Dizemos que H **age** em uma álgebra A de $\mathcal{V}$ ou que A é uma H-**módulo álgebra à esquerda** em $\mathcal{V}$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) A é um H-módulo à esquerda em $\mathcal{V}$;

ii) Os diagramas a seguir são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes A \otimes A \arrow[r, "H \otimes m_A"] \arrow[d, "\Delta_H \otimes A \otimes A"'] & H \otimes A \arrow[r, "\alpha"] & A \\
H \otimes H \otimes A \otimes A \arrow[r, "H \otimes \sigma_{H,A} \otimes A"'] & H \otimes A \otimes H \otimes A \arrow[r, "\alpha \otimes \alpha"'] & A \otimes A \arrow[u, "m_A"']
\end{tikzcd} \tag{2.39}$$

$$\begin{tikzcd}
H \otimes I \arrow[rr, "H \otimes \eta_A"] \arrow[d, "\sim"'] & & H \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\
H \arrow[r, "\varepsilon_H"'] & I \arrow[r, "\eta_A"'] & A
\end{tikzcd} \tag{2.40}$$

Com estas definições podemos generalizar a ação adjunta dada em 1.1.4 para uma álgebra de Hopf em $\mathcal{V}$.

Definição 2.2.3. *Seja* $H = (H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ *uma álgebra de Hopf em uma categoria monoidal estrita trançada* $\mathcal{V}$. *A* ***ação adjunta*** *de* H *é dada pela composição de morfismos*

$$\alpha = m \circ (m \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \mathcal{S}) \circ (H \otimes \sigma_{H,H}) \circ (\Delta \otimes H) \tag{2.41}$$

Vejamos a seguir que de fato α definido acima é uma ação de H em si mesma. A demonstração foi feita baseada nos cálculos do Exemplo 1.1.4 para o caso de uma álgebra de Hopf usual, porém foi feita de maneira original com o uso dos diagramas.

Proposição 2.2.4. *Qualquer álgebra de Hopf* H *é uma* H*-módulo álgebra em* $\mathcal{V}$ *pela ação adjunta* α *definida por* (2.41).

Demonstração. Começamos mostrando que α definido por (2.41) faz de H um H-módulo à esquerda em $\mathcal{V}$. A ideia foi situar o que que queremos mostrar na parte externa do diagrama, e usando as comutatividades dos diagramas internos, que comutam devido as propriedades indicadas em cada um deles, obter a comutatividade do diagrama desejado.

Começamos mostrando que o diagrama (2.38) comuta:

$$\begin{tikzcd}
I \otimes H \arrow[rrrr, "\eta\otimes H"] \arrow[d, "="'] & & & & H \otimes H \arrow[dl, "\Delta\otimes H"] \arrow[ddddd, "\alpha"] \\
I \otimes I \otimes H \arrow[rrr, "\eta\otimes\eta\otimes H"] \arrow[dr, "I\otimes\sigma_{I,H}"] \arrow[dddd, "="'] & & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H\otimes\sigma_{H,H}"] & \\
 & I \otimes H \otimes I \arrow[rr, "\eta\otimes H\otimes\eta"] \arrow[dr, "I\otimes H\otimes\eta"] & & H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H\otimes H\otimes\mathcal{S}"] & \\
 & & I \otimes H \otimes H \arrow[r, "\eta\otimes H\otimes H"] \arrow[dr, "="'] & H \otimes H \otimes H \arrow[d, "m\otimes H"] & \\
 & & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[rrrr, "="] & & & & H
\arrow[from=1-1, to=2-4, phantom, "\circlearrowright\ \text{por (2.28)}"]
\arrow[from=2-1, to=3-4, phantom, "\circlearrowright\ \text{por (2.17)}"]
\arrow[from=3-2, to=4-4, phantom, "\circlearrowright\ \text{por (2.34)}"]
\arrow[from=3-4, to=3-5, phantom, "\circlearrowright\ \text{por definição}"]
\arrow[from=4-3, to=5-4, phantom, "\circlearrowright\ \text{por (2.10)}"]
\arrow[from=5-1, to=5-3, phantom, "\circlearrowright\ \text{por (2.10) e (2.24)}"]
\end{tikzcd}$$

Também o diagrama (2.37) comuta:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes H \arrow[rrrrrr, "m \otimes H"] \arrow[dr, "H \otimes \Delta \otimes H"'] \arrow[drr, "\Delta \otimes \Delta \otimes H"] \arrow[ddddddd, "H \otimes \alpha"'] & & & \circlearrowright \text{ por } (2.27) & & & H \otimes H \arrow[dl, "\Delta \otimes H"'] \arrow[ddddddd, "\alpha"] \\
& H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H \otimes H \otimes \sigma_{H,H}"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H \otimes H"] \arrow[d, "H \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H,H}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.18) \text{ e } (2.19)"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "m \otimes m \otimes H"] \arrow[d, "H \otimes H \otimes \sigma_{H \otimes H,H}"] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & & H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H \otimes \sigma_{H,H}"] & \\
& H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S}"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[dr, "H \otimes \sigma_{H,H \otimes H \otimes H}"] \arrow[dd, "H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S}"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "m \otimes H \otimes m"] \arrow[d, "H \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H,H}"] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.33)"] & & H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H \otimes H \otimes \mathcal{S}"] & \\
& H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[dd, "H \otimes m \otimes H"] \arrow[dr, phantom, "="] & \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H"] \arrow[dr, "H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}"] \arrow[dr, phantom, "="'] & & H \otimes H \otimes H \arrow[d, "m \otimes H"] & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por definição}"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "H \otimes \sigma_{H,H \otimes H \otimes H}"] \arrow[d, "H \otimes H \otimes m \otimes H"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S}"] \arrow[d, "H \otimes m \otimes H \otimes H"] \arrow[dr, phantom, "="] & H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[ur, "m \otimes H \otimes m"] \arrow[d, "H \otimes m \otimes H \otimes H"] & H \otimes H \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por definição}"] \arrow[dddr, "m"] & \\
& H \otimes H \otimes H \arrow[ddl, "H \otimes m"'] & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "H \otimes \sigma_{H,H \otimes H}"] \arrow[d, "H \otimes H \otimes m"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S}"] \arrow[d, "H \otimes m \otimes H"] \arrow[dr, phantom, "="] & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H \otimes m \otimes H"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.9)"] & & \\
& & H \otimes H \otimes H \arrow[r, "H \otimes \sigma_{H,H}"] & H \otimes H \otimes H \arrow[r, "H \otimes H \otimes \mathcal{S}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por definição}"] & H \otimes H \otimes H \arrow[r, "m \otimes H"] & H \otimes H \arrow[dr, "m"'] & \\
H \otimes H \arrow[rrrrrr, "\alpha"'] \arrow[uurr, "\Delta \otimes H"] & & & & & & H
\end{tikzcd}$$

Logo, H é um H-módulo à esquerda com a ação adjunta. Verifiquemos agora que o diagrama (2.40) comuta.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "="] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[ddddd, "\varepsilon"'] & H \otimes I \arrow[rrr, "H\otimes\eta"] & & & H \otimes H \arrow[dl, "\Delta\otimes H"] \arrow[ddddd, "\alpha"] \\
& H \otimes H \arrow[d, "H\otimes\mathcal{S}"] \arrow[rr, phantom, "="] & & H \otimes H \otimes H \arrow[dl, "H\otimes\mathcal{S}\otimes H"'] \arrow[d, "H\otimes\sigma_{H,H}"] & \\
& H \otimes H \arrow[r, "H\otimes H\otimes\eta"] \arrow[d, "H\otimes\sigma_{H,I}"] & H \otimes H \otimes H \arrow[dr, "H\otimes\sigma_{H,H}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.17)}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.17)}"] & H \otimes H \otimes H \arrow[d, "H\otimes H\otimes\mathcal{S}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por definição}"] & \\
& H \otimes H \arrow[rr, "H\otimes\eta\otimes H"] \arrow[drr, "="] & {} \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.10)}"] & H \otimes H \otimes H \arrow[d, "m\otimes H"] & \\
& {} \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.31) e (2.24)}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
I \arrow[rrrr, "\eta"'] & & & & H
\end{tikzcd}$$

E por fim, verifiquemos que o diagrama (2.39) comuta.

$$\begin{tikzcd}
H\otimes H\otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes H\otimes H"] \arrow[ddddddddd, "H\otimes m"'] \arrow[ddddr, "\Delta\otimes H\otimes H"'] & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rrrr, "H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] \arrow[d, "\Delta\otimes H\otimes H\otimes H"] & & & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dl, "\Delta\otimes H\otimes\Delta\otimes H"'] \arrow[ddddddd, "\alpha\otimes\alpha"] \\
 & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] \arrow[drr, "H\otimes H\otimes\Delta\otimes H\otimes H"] & & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[r, "H\otimes H\otimes H\otimes\Delta\otimes H"] \arrow[u, phantom, "="] & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dd, "H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes\sigma_{H,H}"] & \\
\circlearrowright \text{ por } (2.11) & \circlearrowright \text{ por } (2.11) & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[r, "H\otimes\Delta\otimes H\otimes H\otimes H"'] \arrow[d, "H\otimes\sigma_{H\otimes H,H}\otimes H"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[ur, "H\otimes H\otimes\sigma_{H\otimes H,H}\otimes H"'] \arrow[d, "H\otimes\sigma_{H\otimes H\otimes H,H}\otimes H"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & & \circlearrowright \text{ por definição} \\
 & {} \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[r, "H\otimes H\otimes\Delta\otimes H\otimes H"] \arrow[dr, "H\otimes H\otimes\varepsilon\otimes H\otimes H"] & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[r, "H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.31)"] & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[d, "H\otimes H\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H\otimes\mathcal{S}"] & \\
 & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "H\otimes\Delta\otimes H\otimes H"] \arrow[uur, "H\otimes\Delta\otimes H\otimes H"] \arrow[r, "H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] \arrow[dr, "H\otimes\sigma_{H,H\otimes H}"] \arrow[ddr, "H\otimes\mathcal{S}\otimes H\otimes H"'] \arrow[dddd, "H\otimes H\otimes m"] & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "H\otimes H\otimes\Delta\otimes H"] \arrow[r, "="'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.18)"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.12)"] & H\otimes H\otimes I\otimes H\otimes H \arrow[dl, "H\otimes H\otimes I\otimes\sigma_{H,H}"] & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dl, "H\otimes H\otimes m\otimes H\otimes H"'] \arrow[d, "m\otimes H\otimes m\otimes H"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "="] & {} & H\otimes H\otimes I\otimes H\otimes H \arrow[dr, "H\otimes H\otimes I\otimes H\otimes\mathcal{S}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[ddr, "H\otimes m\otimes H\otimes H"] & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[ddr, "m\otimes m"] & \\
 & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[r, "H\otimes\sigma_{H,H\otimes H}"'] \arrow[d, "H\otimes H\otimes m"] & H\otimes H\otimes I\otimes H\otimes H \arrow[u, "H\otimes H\otimes\eta\otimes H\otimes H"] \arrow[dr, "="] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.10)"] & {} & \\
 & {} \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.17)"] & H\otimes H\otimes H \arrow[dr, "H\otimes\sigma_{H,H}"] & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dl, "H\otimes m\otimes H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.9)"] & H\otimes H \arrow[dd, "m"] \\
 & H\otimes H\otimes H \arrow[r, "H\otimes\sigma_{H,H}"] & H\otimes H\otimes H \arrow[r, "H\otimes H\otimes\mathcal{S}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por definição}"] & H\otimes H\otimes H \arrow[r, "m\otimes H"] & H\otimes H \arrow[dr, "m"] & {} \\
H\otimes H \arrow[ur, "\Delta\otimes H"] \arrow[rrrrr, "\alpha"'] & & & {} & & H
\end{tikzcd}$$

Portanto, H é uma H-módulo álgebra em $\mathcal{V}$ com a ação adjunta definida pela igualdade (2.41). $\square$

A seguir redefinimos um produto smash em uma categoria monoidal estrita trançada $\mathcal{V}$.

Definição 2.2.5. *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda em $\mathcal{V}$. Então o* ***produto smash*** *de A e H na categoria $\mathcal{V}$, denotado por $A\#H$, é o objeto $A\#H = A \otimes H$ juntamente com um morfismo $m^{\#}$ dado pela composição de morfismos*

$$\begin{aligned} m^{\#} &: A\#H \otimes A\#H \longrightarrow A\#H \\ m^{\#} &= (m_A \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \end{aligned}$$

Note que a definição dada em 1.1.6 se torna um caso particular deste, quando $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$. Veremos a seguir, outro resultado que também pode ser generalizado para o produto smash.

Proposição 2.2.6. *O produto smash $A\#H$ é uma álgebra em $\mathcal{V}$.*

Demonstração. Por definição, $A\#H = A \otimes H$ é um objeto em $\mathcal{V}$ e $m^{\#}$ é um morfismo em $\mathcal{V}$. Vejamos que o diagrama (2.9) comuta. Neste caso, como a visualização do diagrama ficaria prejudicada devido ao número de componentes dos tensores envolvidos, faremos a demonstração da associatividade usando a composição dos morfismos.

$$\begin{aligned}
m^{\#} \circ (A\#H \otimes m^{\#}) = & \qquad \text{(por definição)} \\
= \; & [(m_A \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes H)] \circ \\
& [A \otimes H \otimes ((m_A \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes H))] \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ \underbrace{(A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes m_A \otimes H)}_{(2.17)} \circ \\
& (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ \underbrace{(A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (A \otimes H \otimes m_A \otimes H \otimes H)}_{(2.39)} \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A \otimes A} \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes \Delta \otimes A \otimes A \otimes m_H) \circ \underbrace{(A \otimes H \otimes \sigma_{H,A \otimes A} \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes \alpha \otimes m_H)}_{(2.17)} \circ \\
& (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H,A \otimes H \otimes A} \otimes m_H) \circ \\
& (A \otimes \Delta \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes A \otimes \underbrace{[\alpha \circ (H \otimes \alpha)]}_{(2.37)} \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H \otimes A \otimes m_H) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H,A \otimes H \otimes A} \otimes m_H) \circ \\
& (A \otimes \Delta \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes A \otimes m_H \otimes A \otimes H) \circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H \otimes A \otimes \underbrace{[m_H \circ (H \otimes m_H)]}_{(2.9)}) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes \underbrace{\sigma_{H,A \otimes H \otimes A}}_{(2.18)} \otimes H \otimes H) \circ \\
& (A \otimes \Delta \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes A \otimes m_H \otimes A \otimes m_H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes m_H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes \underbrace{\sigma_{H,H \otimes A}}_{(2.18)} \otimes H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ \\
& (A \otimes \underbrace{[(\Delta \otimes H) \circ \Delta]}_{(2.11)} \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & \underbrace{(m_A \otimes H) \circ (A \otimes m_A \otimes H)}_{(2.9)} \circ (A \otimes A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes m_H \otimes A \otimes H \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes m_H \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes \underbrace{[(\sigma_{H,A} \otimes H) \circ (H \otimes \sigma_{H,A})]}_{(2.19)} \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes \underbrace{[(\sigma_{H,A} \otimes H) \circ (H \otimes \sigma_{H,A})]}_{(2.19)} \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes \Delta \otimes A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (m_A \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes m_H \otimes A \otimes H \otimes H) \circ \\
& \underbrace{(A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes m_H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H \otimes H,A} \otimes H)}_{(2.17)} \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H \otimes H,A} \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes \Delta \otimes A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H) \circ (m_A \otimes H \otimes A \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes m_H \otimes A \otimes H \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes m_H \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \circ \\
& \underbrace{(A \otimes H \otimes \sigma_{H \otimes H,A} \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \Delta \otimes A \otimes H \otimes A \otimes H)}_{(2.17)} \circ A \otimes \Delta \otimes A \otimes H \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H) \circ (m_A \otimes H \otimes A \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes A \otimes \underbrace{[(m_H \otimes m_H) \circ (H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (\Delta \otimes \Delta)]}_{(2.27)} \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes H \otimes A \otimes H) \\
= \; & (m_A \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes H) \circ \\
& (m_A \otimes m_H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H \otimes A \otimes H) \circ \\
& (A \otimes \Delta \otimes A \otimes H \otimes A \otimes H) \\
= \; & m^{\#} \circ [((m_A \otimes m_H) \circ (A \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes \sigma_{H,A} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta \otimes A \otimes H)) \otimes A \otimes H] \\
= \; & m^{\#} \circ (m^{\#} \otimes A \# H)
\end{aligned}$$

Logo, $m^{\#} \circ (A \# H \otimes m^{\#}) = m^{\#} \circ (m^{\#} \otimes A \# H)$.

Agora, defina o morfismo unidade $\eta^{\#} : I \to A \# H$ como $\eta^{\#} = \eta_A \otimes \eta_H$. Vejamos que o diagrama (2.10) comuta através do diagrama seguinte.

$$\begin{tikzcd}
 & & & A\#H\otimes A\#H \arrow[dl, "A\otimes\Delta\otimes A\otimes H"] \arrow[ddddddd, "m^{\#}"] \arrow[dr, "A\otimes\Delta\otimes A\otimes H"] & & & & \\
I\otimes A\#H \arrow[urrr, "\eta^{\#}\otimes A\#H"] \arrow[d, dash, "="] & \circlearrowright\text{ por definição} & A\otimes H\otimes H\otimes A\otimes H \arrow[dd, "A\otimes H\otimes\sigma_{H\otimes A}\otimes H"] & & A\otimes H\otimes H\otimes A\otimes H \arrow[dd, "A\otimes H\otimes\sigma_{H\otimes A}\otimes H"] & = & \circlearrowright\text{ por definição} & A\#H\otimes I \arrow[ullll, "A\#H\otimes\eta^{\#}"'] \arrow[d, dash, "="] \\
I\otimes I\otimes A\otimes H \arrow[uurrr, "\eta_A\otimes\eta_H\otimes A\otimes H"] \arrow[ddd, dash, "="] & \circlearrowright\text{ por (2.28)} & & \circlearrowright\text{ por definição} & \circlearrowright\text{ por (2.17)} & A\otimes H\otimes H\otimes I\otimes H \arrow[ul, "A\otimes H\otimes H\otimes\eta_A\otimes H"] \arrow[d, "A\otimes H\otimes\sigma_{H,I}\otimes H"] & & A\otimes H\otimes I\otimes I \arrow[uullll, "A\otimes H\otimes\eta_A\otimes\eta_H"'] \arrow[ll, "A\otimes\Delta\otimes I\otimes\eta_H"] \arrow[ddd, dash, "="] \\
 & & A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[dd, "A\otimes\alpha\otimes H\otimes H"] & & A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[dd, "A\otimes\alpha\otimes H\otimes H"] & A\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[l, "A\otimes H\otimes\eta_A\otimes H\otimes H"] \arrow[dd, "A\otimes\varepsilon\otimes H\otimes H"] & \circlearrowright\text{ por (2.24)} & \\
 & \circlearrowright\text{ por (2.17)} & \circlearrowright\text{ por (2.38)} & \circlearrowright\text{ por definição} & \circlearrowright\text{ por (2.40)} & & \circlearrowright\text{ por (2.12)} & \\
I\otimes I\otimes I\otimes A\otimes H \arrow[uuuurr, "\eta_A\otimes\eta_H\otimes\eta_H\otimes A\otimes H"] \arrow[r, "I\otimes I\otimes\sigma_{I,A}\otimes H"'] \arrow[ddrrr, "="'] & I\otimes I\otimes A\otimes I\otimes H \arrow[uur, "\eta_A\otimes\eta_H\otimes A\otimes\eta_H\otimes H"] \arrow[r, "\eta_A\otimes A\otimes\eta_H\otimes H"'] \arrow[ddrr, "="] & A\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[ddr, "m_A\otimes m_H"] & & A\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[ddl, "m_A\otimes m_H"'] & A\otimes I\otimes H\otimes H \arrow[l, "A\otimes\eta_A\otimes H\otimes H"] \arrow[ddll, "A\otimes m_H"'] & & A\otimes H\otimes I \arrow[uull, "A\otimes\Delta\otimes\eta_H"] \arrow[ll, "A\otimes H\otimes\eta_H"] \arrow[ddllll, "="] \\
 & \circlearrowright\text{ por (2.24)} & \circlearrowright\text{ por (2.10)} & & \circlearrowright\text{ por (2.10)} & \circlearrowright\text{ por (2.10)} & & \\
 & & & A\#H & & & &
\end{tikzcd}$$

Portanto, $A\#H$ é uma álgebra na categoria $\mathcal{V}$. $\square$

O próximo resultado nos mostra que o isomorfismo de álgebras visto em 1.1.10 pode ser também considerado nesse contexto de categorias. Para isso, levaremos em conta os seguintes resultados já abordados no capítulo 2: sabemos pela Proposição 2.2.4 que qualquer álgebra de Hopf H é uma H-módulo álgebra em $\mathcal{V}$ pela ação adjunta definida em (2.41) e, dessa forma, $H\#H$ é uma álgebra em $\mathcal{V}$ (Proposição 2.2.6); também sabemos que $H \otimes H$ é uma álgebra (por 2.1.39), assim enunciamos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.7. *Seja H uma álgebra de Hopf em $\mathcal{V}$ e considere H uma H-módulo álgebra pela ação adjunta. Então existe um morfismo de álgebras de $H\#H$ em $H \otimes H$ e este morfismo é um isomorfismo em $\mathcal{V}$.*

Demonstração. Defina $\varphi : H\#H \longrightarrow H \otimes H$ como a composição de morfismos em $\mathcal{V}$:

$$\varphi = (m \otimes H) \circ (H \otimes \Delta)$$

e vejamos que φ é morfismo de álgebras em $\mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}
& \varphi \circ m^{\#} = \\
= \;& (m \otimes H) \circ (H \otimes \Delta) \circ (m \otimes m) \circ (H \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ \\
& (H \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \\
= \;& (m \otimes H) \circ (m \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \underbrace{(\Delta \circ m)}_{(2.27)}) \circ (H \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ \\
& (H \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \\
= \;& (m \otimes H) \circ (m \otimes m \otimes m) \circ (H \otimes H \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \Delta \otimes \Delta) \circ \\
& (H \otimes \alpha \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \\
= \;& (m \otimes H) \circ (m \otimes m \otimes m) \circ (H \otimes m \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes m \otimes H \otimes \Delta \otimes \Delta) \circ \\
& (H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H \otimes H) \circ \\
& (H \otimes \Delta \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \\
= \;& (m \otimes H) \circ (m \otimes m \otimes m) \circ (H \otimes m \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes m \otimes H \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \circ \\
& (H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \underbrace{[(\sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \sigma_{H,H})]}_{(2.19)} \otimes H \otimes H) \circ \\
& (H \otimes \Delta \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H \otimes \Delta) \\
= \;& (\underbrace{[m \circ (m \otimes m) \circ (H \otimes m \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes m \otimes H \otimes H \otimes H)]}_{(2.9)} \otimes m) \circ \\
& (H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \circ \\
& (H \otimes H \otimes \sigma_{H \otimes H,H} \otimes H \otimes H) \circ \underbrace{(H \otimes \Delta \otimes H \otimes H \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H \otimes \Delta)}_{(2.11)} \\
= \;& (m \otimes H) \circ (H \otimes m \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes m \otimes H) \circ (H \otimes m \otimes m \otimes H \otimes m) \circ \\
& (H \otimes H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes \sigma_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes H \otimes H \otimes \Delta \otimes H \otimes H) \circ \\
& \underbrace{(H \otimes H \otimes \sigma_{H \otimes H,H} \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \Delta \otimes H \otimes H \otimes H)}_{(2.17)} \circ (H \otimes \Delta \otimes H \otimes \Delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H\otimes H\otimes m)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes H\otimes[m\circ(\mathcal{S}\otimes H)]\otimes H\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes H\otimes\underbrace{[(H\otimes\Delta)\circ\Delta]}_{(2.11)}\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes\Delta\otimes H\otimes\Delta)\\
&= (m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H\otimes H\otimes m)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes H\otimes\underbrace{[m\circ(\mathcal{S}\otimes H)\circ\Delta]}_{(2.31)}\otimes H\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes H\otimes\Delta\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes\Delta\otimes H\otimes\Delta)\\
&= (m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes\eta\otimes H\otimes m)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes H\otimes\varepsilon\otimes\sigma_{H,H}\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes H\otimes\Delta\otimes H\otimes H)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes\Delta\otimes H\otimes\Delta)\\
&= (m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes\underbrace{[m\circ(\eta\otimes H)]}_{(2.10)}\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes I\otimes H\otimes m)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes H\otimes I\otimes\sigma_{H,H}\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes H\otimes\underbrace{[(\varepsilon\otimes H)\circ\Delta]}_{(2.12)}\otimes H\otimes H)\circ\\
&\quad (H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes\Delta\otimes H\otimes\Delta)\\
&= \underbrace{(m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes m\otimes H\otimes m)}_{(2.9)}\circ\\
&\quad \underbrace{(H\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H\otimes H)}_{(2.18)}\circ(H\otimes\Delta\otimes H\otimes\Delta)\\
&= (m\otimes m)\circ(m\otimes H\otimes H\otimes H)\circ\underbrace{(H\otimes H\otimes m\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes H\otimes\sigma_{H,H\otimes H}\otimes H)}_{(2.17)}\circ\\
&\quad (H\otimes\Delta\otimes H\otimes\Delta)\\
&= (m\otimes m)\circ(H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H)\circ(m\otimes H\otimes m\otimes H)\circ(H\otimes\Delta\otimes H\otimes\Delta)\\
&= m_{H\otimes H}\circ(\varphi\otimes\varphi).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi\circ\eta^{\#} &= (m\otimes H)\circ\underbrace{(H\otimes\Delta)\circ(\eta\otimes\eta)}_{(2.28)}\\
&= \underbrace{(m\otimes H)\circ(\eta\otimes H\otimes H)}_{(2.10)}\circ(I\otimes\eta\otimes\eta)\\
&= \eta\otimes\eta=\eta_{H\otimes H}.
\end{aligned}$$

Logo, φ é morfismo de álgebras em $\mathcal{V}$.
Agora, defina $\psi : H\otimes H\longrightarrow H\#H$ como a composição de morfismos em $\mathcal{V}$:

$$\psi=(m\otimes H)\circ(H\otimes\mathcal{S}\otimes H)\circ(H\otimes\Delta)$$

e vejamos que φ é isomorfismo em $\mathcal{V}$ com morfismo inverso dado por ψ.

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi &= (m \otimes H) \circ (H \otimes \mathcal{S} \otimes H) \circ (H \otimes \Delta) \circ (m \otimes H) \circ (H \otimes \Delta) \\
&= \underbrace{(m \otimes H) \circ (m \otimes H \otimes H)}_{(2.9)} \circ (H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H) \circ \underbrace{(H \otimes H \otimes \Delta) \circ (H \otimes \Delta)}_{(2.11)} \\
&= (m \otimes H) \circ \underbrace{(H \otimes m \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \mathcal{S} \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H)}_{(2.31)} \circ (H \otimes \Delta) \\
&= \underbrace{(m \otimes H) \circ (H \otimes \eta \otimes H)}_{(2.10)} \circ \underbrace{(H \otimes \varepsilon \otimes H) \circ (H \otimes \Delta)}_{(2.12)} \\
&= H \otimes H
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi &= (m \otimes H) \circ (H \otimes \Delta) \circ (m \otimes H) \circ (H \otimes \mathcal{S} \otimes H) \circ (H \otimes \Delta) \\
&= \underbrace{(m \otimes H) \circ (m \otimes H \otimes H)}_{(2.9)} \circ (H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H) \circ \underbrace{(H \otimes H \otimes \Delta) \circ (H \otimes \Delta)}_{(2.11)} \\
&= (m \otimes H) \circ \underbrace{(H \otimes m \otimes H) \circ (H \otimes \mathcal{S} \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes \Delta \otimes H)}_{(2.31)} \circ (H \otimes \Delta) \\
&= \underbrace{(m \otimes H) \circ (H \otimes \eta \otimes H)}_{(2.10)} \circ \underbrace{(H \otimes \varepsilon \otimes H) \circ (H \otimes \Delta)}_{(2.12)} \\
&= H \otimes H.
\end{aligned}$$

Portanto $H \# H$ e $H \otimes H$ são álgebras isomorfas em $\mathcal{V}$. □

Observação 2.2.8. *Na demonstração anterior não mostramos que ψ é morfismo de álgebras, porém isso ocorre como uma consequência do que já foi mostrado. De modo geral, se $\varphi : A \to B$ é um morfismo de álgebras em uma categoria $\mathcal{V}$ e $\psi : B \to A$ é o morfismo inverso de φ, então ψ também é morfismo de álgebras. A demonstração em detalhes sobre esse fato é feita no capítulo 3, em 3.1.12, para $\mathcal{V}$-X-funtores. Para ver que vale nesse caso, basta lembrar que se tivermos uma $\mathcal{V}$-categoria com um único objeto, um $\mathcal{V}$-X-funtor é um morfismo de álgebras.*

Vejamos agora as definições relativas a uma coação de uma álgebra de Hopf em uma categoria $\mathcal{V}$.

Definição 2.2.9 ([1]). *Seja H uma álgebra de Hopf em $\mathcal{V}$ (ou uma coálgebra). Uma* ***H-comódulo à direita*** *em $\mathcal{V}$ é um par (A, ρ) onde A é um objeto em $\mathcal{V}$ e $\rho : A \longrightarrow A \otimes H$ é um morfismo em $\mathcal{V}$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & A \otimes H \arrow[d, "A \otimes \Delta"] \\
A \otimes H \arrow[r, "\rho \otimes H"'] & A \otimes H \otimes H
\end{tikzcd} \tag{2.42}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes H \arrow[d, "A \otimes \varepsilon"] \\
 & A \otimes I
\end{tikzcd} \tag{2.43}$$

Definição 2.2.10. *Seja H álgebra de Hopf em $\mathcal{V}$ (ou uma biálgebra). Dizemos que H* ***coage*** *em uma álgebra A em $\mathcal{V}$ ou que A é uma H-**comódulo álgebra à direita** em $\mathcal{V}$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

- *i) A é um H-comódulo à direita em $\mathcal{V}$;*
- *ii) Os diagramas a seguir são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "\rho\otimes\rho"'] & A \arrow[r, "\rho"] & A \otimes H \\
A \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[rr, "A\otimes\sigma_{H,A}\otimes H"'] & & A \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[u, "m_A\otimes m_H"']
\end{tikzcd} \tag{2.44}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\sim"'] & A \arrow[r, "\rho"] & A \otimes H \\
I \otimes I \arrow[urr, "\eta_A\otimes\eta_H"'] & &
\end{tikzcd} \tag{2.45}$$

Note que os diagramas (2.44) e (2.45) comutarem é equivalente a dizer que ρ é morfismo de álgebras.

O próximo exemplo é generalização do Exemplo 1.1.15.

Exemplo 2.2.11. *Qualquer biálgebra H em $\mathcal{V}$ é uma H-comódulo álgebra à direita (e à esquerda) em $\mathcal{V}$ com $\rho = \Delta$. Isso é imediato visto que os diagramas* (2.42) *e* (2.43) *são os diagramas* (2.11) *e* (2.12) *(um dos lados) respectivamente, quando $\rho = \Delta$. Como Δ é morfismo de álgebras, os diagramas* (2.44) *e* (2.45) *comutam.*

A proposição seguinte é generalização da Proposição 1.1.16.

Proposição 2.2.12. *O produto smash $A\#H$ definido em 2.2.5 é uma H-comódulo álgebra à direita com $\rho = A \otimes \Delta$.*

Demonstração. Já temos da Proposição 2.2.6 que $A\#H$ é álgebra, vejamos que $A\#H$ é um H-comódulo à direita em $\mathcal{V}$. Usando que $\rho = A \otimes \Delta$ os diagramas (2.42) e (2.43) se tornam

$$\begin{tikzcd}
A\#H \arrow[r, "A\otimes\Delta"] \arrow[d, "A\otimes\Delta"'] & A\#H \otimes H \arrow[d, "A\#H\otimes\Delta"] \\
A\#H \otimes H \arrow[r, "A\otimes\Delta\otimes H"'] & A\#H \otimes H \otimes H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\#H \arrow[r, "A\otimes\Delta"] \arrow[dr, "="'] & A\#H \otimes H \arrow[d, "A\#H\otimes\varepsilon"] \\
 & A\#H \otimes I
\end{tikzcd}$$

Como o diagrama da esquerda comuta por (2.11) e o da direita comuta por (2.12), temos que $A\#H$ é H-comódulo à direita em $\mathcal{V}$.

Vejamos agora que o diagrama (2.45) comuta. Usando os dados que temos, o que queremos mostrar é o contorno externo do diagrama a seguir, então basta usar a definição de $\eta^{\#}$ e que Δ é morfimo de álgebras para concluir que o diagrama que queremos comuta.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta^{\#}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & A\#H \arrow[r, "A\otimes\Delta"] & A\#H \otimes H \\
I \arrow[ur, "\eta_A\otimes\eta_H"'] \arrow[d, "="'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.14)"] & & \\
I \otimes I \arrow[uurr, "\eta^{\#}\otimes\eta_H=\eta_A\otimes\eta_H\otimes\eta_H"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por fim, vejamos que o diagrama (2.44) comuta usando diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A\#H \otimes A\#H \arrow[rrrrr, "m^{\#}"] \arrow[dr, "A\otimes\Delta_H\otimes A\otimes H"] \arrow[ddr, "A\otimes\Delta_H\otimes A\otimes\Delta_H"] \arrow[dddd, "\rho\otimes\rho"'] & & & & & A\#H \arrow[dddddddd, "\rho=A\otimes\Delta"] \\
& A\otimes H\otimes H\otimes A\otimes H \arrow[rr, "A\otimes H\otimes\sigma_{H,A}\otimes H"] & & A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[r, "A\otimes\alpha\otimes H\otimes H"] \arrow[d, phantom, "="] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright \text{ por definição}"] & A\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[ur, "m_A\otimes m_H"'] \arrow[dd, "m_A\otimes\Delta_H\otimes\Delta_H"] & \\
& A\otimes H\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[l, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.11)}"] \arrow[r, "A\otimes H\otimes\sigma_{H,A}\otimes H\otimes H"] \arrow[d, "A\otimes H\otimes\Delta_H\otimes A\otimes H\otimes H"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.17)}"] & A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[r, "A\otimes\alpha\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[dd, "A\otimes H\otimes A\otimes\Delta_H\otimes H\otimes H"] & A\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dd, "A\otimes A\otimes\Delta_H\otimes H\otimes H"] \arrow[dr, "m_A\otimes\Delta_H\otimes H\otimes H"] & & \\
& A\otimes H\otimes H\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H \arrow[dr, "A\otimes H\otimes\sigma_{H\otimes H,A}\otimes H\otimes H"] \arrow[dd, "A\otimes H\otimes H\otimes\sigma_{H,A}\otimes H\otimes H"] & & & A\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dd, "A\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] & \\
A\#H\otimes H\otimes A\#H\otimes H \arrow[ur, "A\otimes\Delta_H\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H"] \arrow[dddd, "A\otimes H\otimes\sigma_{H,A\#H}\otimes H"] & & A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dd, "A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] \arrow[r, phantom, "="] & A\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[ddd, "A\otimes A\otimes H\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.13)}"] & \\
& A\otimes H\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dd, "A\otimes H\otimes H\otimes A\otimes\sigma_{H,H}\otimes H"] & & & A\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dddr, "A\otimes m_H\otimes m_H"] & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.18)}"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por (2.19)}"] & A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[dr, "A\otimes\alpha\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H"] & & & \\
& A\otimes H\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[ur, "A\otimes H\otimes\sigma_{H,A}\otimes H\otimes H\otimes H"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por definição}"] & A\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[drr, "m_A\otimes m_H\otimes m_H"] & & \\
A\#H\otimes A\#H\otimes H\otimes H \arrow[ur, "A\otimes\Delta\otimes A\otimes H\otimes H\otimes H"] \arrow[rrrrr, "m^{\#}\otimes m_H"'] & & & & & A\#H\otimes H
\end{tikzcd}$$

Portanto, $A\#H$ é H-comódulo álgebra à direita. $\square$

Capítulo 3

CATEGORIAS DE HOPF

Neste capítulo vamos apresentar nosso principal objeto de interesse que são as categorias de Hopf, há vários resultados que podem ser estendidos para essa estrutura a partir do que sabemos para uma álgebra de Hopf em uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$ que apresentamos no capítulo anterior.

Os conteúdos apresentados aqui tem como origem principalmente a referência [5]. Algumas propriedades foram sendo acrescentadas, visando formar uma base para os resultados que serão apresentados nos capítulos subsequentes.

3.1 CATEGORIAS DE HOPF

Nesta seção mostraremos como são construídas as definições de modo a obter uma generalização da definição de álgebra de Hopf em uma categoria monoidal trançada, chamada de categoria de Hopf. Esta noção foi introduzida por Batista, Caenepeel e Vercruysse em [5], e por isso, esta é a principal referência neste capítulo. Em geral vamos considerar a categoria $\mathcal{V}$ como uma categoria monoidal estrita, com base na observação já feita em 2.1.38.

Definição 3.1.1 ([5]). *Sejam dadas $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ uma categoria monoidal estrita e X uma classe arbitrária, vamos construir uma nova categoria monoidal denotada por $\mathcal{V}(X)$.*

Nesta nova categoria, um objeto M é uma família de objetos em $\mathcal{V}$ indexados por $X \times X$:

$$M = (M_{x,y})_{x,y \in X}.$$

Sendo M e N objetos em $\mathcal{V}(X)$, um morfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ consiste de uma família de morfismos $\varphi_{x,y} : M_{x,y} \longrightarrow N_{x,y}$ em $\mathcal{V}$ indexados por $X \times X$. A composição de morfismos e o morfismo identidade são os esperados.

O produto tensorial é dado por um funtor $\bullet : \mathcal{V}(X) \times \mathcal{V}(X) \to \mathcal{V}(X)$, no qual $M \bullet N$ é definido pela fórmula:

$$(M \bullet N)_{x,y} = M_{x,y} \otimes N_{x,y}.$$

Se $\varphi : M \to M'$ e $\psi : N \to N'$ são morfismos em $\mathcal{V}(X)$, $\varphi \bullet \psi$ é definido por:

$$(\varphi \bullet \psi)_{x,y} = \varphi_{x,y} \otimes \psi_{x,y}$$

e o objeto unidade é $J = (J_{x,y})_{x,y \in X}$, com $J_{x,y} = I$, para todo $x, y \in X$.

Tendo esta categoria monoidal em mente, que será estrita já que é construída sobre uma categoria monoidal estrita, podemos definir uma categoria enriquecida sobre $\mathcal{V}$ ou simplesmente uma $\mathcal{V}$-categoria.

Definição 3.1.2 ([5])**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita. Uma **$\mathcal{V}$-categoria** A consiste de uma classe X e um objeto $A \in \mathcal{V}(X)$ juntamente com duas classes de morfismos em $\mathcal{V}$:*

i) os morfismos multiplicação $m = m_{x,y,z} : A_{x,y} \otimes A_{y,z} \to A_{x,z}$ definidos para cada $x, y, z \in X$;

ii) os morfismos unidade $\eta_x : J_{x,x} = I \to A_{x,x}$ definidos para cada $x \in X$,

tais que as seguintes condições de associatividade e unidade são satisfeitas:

$$m_{x,y,t} \circ (A_{x,y} \otimes m_{y,z,t}) = m_{x,z,t} \circ (m_{x,y,z} \otimes A_{z,t}) = m^2_{x,y,z,t} \tag{3.1}$$

$$m_{x,x,y} \circ (\eta_x \otimes A_{x,y}) = A_{x,y} = m_{x,y,y} \circ (A_{x,y} \otimes \eta_y) \tag{3.2}$$

ou seja, os seguintes diagramas devem comutar, para todo $x, y, z, t \in X$:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes A_{z,t} \arrow[r, "A_{x,y}\otimes m_{y,z,t}"] \arrow[d, "m_{x,y,z}\otimes A_{z,t}"'] & A_{x,y} \otimes A_{y,t} \arrow[d, "m_{x,y,t}"] \\
A_{x,z} \otimes A_{z,t} \arrow[r, "m_{x,z,t}"'] & A_{x,t}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes A_{x,y} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\eta_x\otimes A_{x,y}"'] & A_{x,y} & A_{x,y} \otimes I \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "A_{x,y}\otimes\eta_y"] \\
A_{x,x} \otimes A_{x,y} \arrow[ur, "m_{x,x,y}"'] & & A_{x,y} \otimes A_{y,y} \arrow[ul, "m_{x,y,y}"]
\end{tikzcd}$$

Escrevemos $|A| = X$ para indicar que X é a classe subjacente à $\mathcal{V}$-categoria A.

Observação 3.1.3. *1) Note que se A é uma $\mathcal{V}$-categoria então, cada $A_{x,x}$ é uma álgebra na categoria $\mathcal{V}$ com multiplicação associativa $m_{x,x,x}$ e unidade η_x.*

2) Em particular J, o objeto identidade da categoria $\mathcal{V}(X)$, é uma $\mathcal{V}$-categoria com a multiplicação e unidade sendo morfismos identidade. Isso é apenas uma generalização do Exemplo 2.1.17.

Proposição 3.1.4 ([5])**.** *Se $\mathcal{V} = \underline{Sets}$, então uma $\mathcal{V}$-categoria de classe subjacente X é uma categoria usual.*

Demonstração. De fato, dada uma $\underline{Sets}$-categoria A com $|A| = X$, tomamos a classe X como a classe de objetos da categoria e para $x, y \in X$, o conjunto dos morfismos de x para y é definido por $Hom_A(x, y) = A_{y,x}$. Desse modo, para $f \in Hom_A(x, y) = A_{y,x}$ e $g \in Hom_A(y, z) = A_{z,y}$ definimos a composição $g \circ f$ como a multiplicação $m_{z,y,x}(g, f)$. Como o diagrama (3.1) deve comutar, temos a composição associativa. Por fim, para cada objeto x em X temos um morfismo identidade em $Hom_A(x, x) = A_{x,x}$, basta definir $id_x = \eta_x(*)$, pois o diagrama (3.2) deve comutar.

Por outro lado, dada uma categoria usual e fazendo o caminho inverso, obtemos uma $\underline{Sets}$-categoria. Note que a definição de categoria usada aqui é a que considera Hom como conjunto. □

Um dos casos particulares mais interessantes de $\mathcal{V}$-categoria ocorre quando $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, por isso temos um nome específico para esse caso.

Definição 3.1.5 ([5])**.** *Se $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, ou seja, a categoria monoidal é a dos k-módulos à direita com k anel comutativo. Então uma $\mathcal{V}$-categoria é chamada* ***categoria k-linear****.*

Na próxima proposição obtemos uma nova $\mathcal{V}$-categoria a partir de uma dada, e, apesar desta $\mathcal{V}$-categoria ter sido apresentada em [5], a demonstração por diagramas é original deste trabalho.

Proposição 3.1.6. *Sejam $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada e A uma $\mathcal{V}$-categoria com classe subjacente X e morfismos multiplicação e unidade conforme a Definição 3.1.2. Então a família $A^{op} = (A^{op}_{x,y})_{x,y \in X} = (A_{y,x})_{x,y \in X}$, juntamente com os morfismos:*

$$m^{op}_{x,y,z} = m_{z,y,x} \circ \sigma_{A_{y,x}, A_{z,y}} : A^{op}_{x,y} \otimes A^{op}_{y,z} = A_{y,x} \otimes A_{z,y} \longrightarrow A_{z,x} = A^{op}_{x,z}$$

e $\eta^{op}_x = \eta_x$ é uma $\mathcal{V}$-categoria.

Demonstração. Vamos verificar que $m^{op}_{x,y,z}$ e η^{op}_x satisfazem as equações (3.1) e (3.2) usando diagramas. A estratégia utilizada foi a mesma já usada no capítulo anterior: Construímos o diagrama que queremos mostrar a comutatividade no contorno externo, na parte interna vamos obtendo diagramas que comutam, por meio de propriedades que estão referenciadas em cada um deles. Com isso, podemos concluir que os diagramas desejados comutam.

$$\begin{tikzcd}
A^{op}_{x,y}\otimes A^{op}_{y,z}\otimes A^{op}_{z,t} \arrow[rrrrrr, "A^{op}_{x,y}\otimes m^{op}_{y,z,t}"] \arrow[ddrrr, "A_{y,x}\otimes\sigma_{A_{z,y},A_{t,z}}"] \arrow[ddddrr, "\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}\otimes A_{t,z}}"'] \arrow[dddddddd, "m^{op}_{x,y,z}\otimes A^{op}_{z,t}"'] & & & & & & A^{op}_{x,y}\otimes A^{op}_{y,t} \arrow[ddddll, "\sigma_{A_{y,x},A_{t,y}}"'] \arrow[dddddddd, "m^{op}_{x,y,t}"] \\
& & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & \\
& & & A_{y,x}\otimes A_{t,z}\otimes A_{z,y} \arrow[uurrr, "A_{y,x}\otimes m_{t,z,y}"'] \arrow[dd, "\sigma_{A_{y,x},A_{t,z}\otimes A_{z,y}}"] & & & \\
& & \circlearrowright \text{ por } (2.25) & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \\
& \circlearrowright \text{ por definição} & A_{z,y}\otimes A_{y,x}\otimes A_{t,z} \arrow[r, "\sigma_{A_{z,y}\otimes A_{y,x},A_{t,z}}"] \arrow[ddddll, "m_{z,y,x}\otimes A_{t,z}"] & A_{t,z}\otimes A_{z,y}\otimes A_{y,x} \arrow[r, "m_{t,z,y}\otimes A_{y,x}"] \arrow[dd, "A_{t,z}\otimes m_{z,y,x}"] & A_{t,y}\otimes A_{y,x} \arrow[ddddrr, "m_{t,y,x}"'] & \circlearrowright \text{ por definição} & \\
& & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \circlearrowright \text{ por } (3.1) & & \\
& & & A_{t,z}\otimes A_{z,x} \arrow[ddrrr, "m_{t,z,x}"] & & & \\
& & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & \\
A^{op}_{x,z}\otimes A^{op}_{z,t} \arrow[uurrr, "\sigma_{A_{z,x},A_{t,z}}"] \arrow[rrrrrr, "m^{op}_{x,z,t}"'] & & & & & & A^{op}_{x,t}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & A^{op}_{x,y} & & & & & \\
I \otimes A^{op}_{x,y} \arrow[urrrrr, "="] \arrow[drr, "\sigma_{I,A_{y,x}}"] \arrow[dddrrr, "\eta_x^{op} \otimes A^{op}_{x,y}"'] & \circlearrowright \text{ por } (2.21) & & & & & & & & \circlearrowright \text{ por } (2.20) & A^{op}_{x,y} \otimes I \arrow[ulllll, "="'] \arrow[dll, "\sigma_{A_{y,x},I}"'] \arrow[dddlll, "A^{op}_{x,y} \otimes \eta_y^{op}"] \\
 & & A_{y,x} \otimes I \arrow[uurrr, "="] \arrow[dr, "A_{y,x} \otimes \eta_x"] & \circlearrowright \text{ por } (3.2) & & & & \circlearrowright \text{ por } (3.2) & I \otimes A_{y,x} \arrow[uulll, "="'] \arrow[dl, "\eta_y \otimes A_{y,x}"'] & & \\
 & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & A_{y,x} \otimes A_{x,x} \arrow[uuurr, "m_{y,x,x}"] \arrow[d, "\sigma_{A_{y,x},A_{x,x}}"] & \circlearrowright \text{ por definição} & & \circlearrowright \text{ por definição} & A_{y,y} \otimes A_{y,x} \arrow[uuull, "m_{y,y,x}"'] \arrow[d, "\sigma_{A_{y,y},A_{y,x}}"] & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & \\
 & & & A^{op}_{x,x} \otimes A^{op}_{x,y} \arrow[uuuurr, "m^{op}_{x,x,y}"'] & & & & A^{op}_{x,y} \otimes A^{op}_{y,y} \arrow[uuuull, "m^{op}_{x,y,y}"] & & &
\end{tikzcd}$$

Portanto, A^{op} é uma $\mathcal{V}$-categoria. $\square$

Definição 3.1.7 ([5])**.** *A $\mathcal{V}$-categoria A^{op} dada na proposição anterior é chamada **$\mathcal{V}$-categoria oposta**.*

Observação 3.1.8. *As $\mathcal{V}$-categorias podem ser organizadas em uma 2-categoria ${}_{\mathcal{V}}\underline{\underline{Cat}}$. No artigo* [5] *são dadas as definições que permitem verificar esta afirmação, dentre elas está a definição de $\mathcal{V}$-funtor que será dada na sequência. Aqui neste trabalho faremos uso desta notação apenas para citarmos resultados de [5], para maiores detalhes sobre 2-categorias a referência* [21] *pode ser consultada.*

Daremos a seguir a definição de $\mathcal{V}$-funtor, já que faremos uso posteriormente. De maneira informal, podemos dizer que um $\mathcal{V}$-funtor é um morfismo de $\mathcal{V}$-categorias, pois ele generaliza um morfismo de álgebras.

Definição 3.1.9 ([5])**.** *Sejam A e B duas $\mathcal{V}$-categorias com $|A| = X$ e $|B| = Y$. Um **$\mathcal{V}$-funtor** $f : A \to B$ consiste dos seguintes dados: uma função $f : X \to Y$ e morfismos em $\mathcal{V}$:*

$$f_{x,y} : A_{x,y} \longrightarrow B_{f(x),f(y)}$$

tais que os seguintes diagramas comutam para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \arrow[r, "m_{x,y,z}"] \arrow[d, "f_{x,y}\otimes f_{y,z}"'] & A_{x,z} \arrow[d, "f_{x,z}"] \\
B_{f(x),f(y)} \otimes B_{f(y),f(z)} \arrow[r, "m_{f(x),f(y),f(z)}"'] & B_{f(x),f(z)}
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "\eta_{f(x)}"'] & A_{x,x} \arrow[d, "f_{x,x}"] \\
 & B_{f(x),f(x)}
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Um caso particular de $\mathcal{V}$-funtor é o $\mathcal{V}$-X-funtor, que é quando a classe subjacente X é fixada e f é a identidade nos objetos, conforme a definição a seguir.

Definição 3.1.10 ([5])**.** *Sejam A e B duas $\mathcal{V}$-categorias ambas com classe subjacente X. Um $\mathcal{V}$-funtor $f : A \to B$ é dito um **$\mathcal{V}$-X-funtor** se $f(x) = x$, $\forall\, x \in X$.*

Tendo essa noção de morfismo de $\mathcal{V}$-categorias, podemos também dar uma noção de isomorfismo para $\mathcal{V}$-categorias de classe X.

Definição 3.1.11. *Sejam A e B duas $\mathcal{V}$-categorias de classe subjacente X. Se existe um $\mathcal{V}$-X-funtor $f : A \to B$ tal que $f_{x,y}$ é um isomorfismo em $\mathcal{V}$ para todo $x, y \in X$, então dizemos que as $\mathcal{V}$-categorias A e B são **isomorfas**.*

Se A e B são $\mathcal{V}$-categorias isomorfas, é intuitivo pensar que existe um **$\mathcal{V}$-X funtor inverso** $g : B \to A$. No resultado a seguir, que generaliza a Observação 2.2.8, veremos que isso ocorre de fato.

Proposição 3.1.12. *Sejam A e B duas $\mathcal{V}$-categorias isomorfas conforme a Definição 3.1.11. Então existe um $\mathcal{V}$-X-funtor $g : B \to A$ tal que, para cada $x, y \in X$, $f_{x,y} \circ g_{x,y} = B_{x,y}$ e $g_{x,y} \circ f_{x,y} = A_{x,y}$.*

Demonstração. A definição de $\mathcal{V}$-categorias isomorfas implica na existência de um $\mathcal{V}$-X-funtor $f : A \to B$ tal que cada $f_{x,y}$ é isomorfismo em $\mathcal{V}$, assim essa definição implica também na existência de uma família de morfismos em $\mathcal{V}$:

$$g_{x,y} : B_{x,y} \to A_{x,y}$$

tal que $f_{x,y} \circ g_{x,y} = B_{x,y}$ e $g_{x,y} \circ f_{x,y} = A_{x,y}$ para todo $x, y \in X$. O que precisamos verificar é que $g : B \to A$ definido pela família $(g_{x,y})_{x,y \in X}$ é um $\mathcal{V}$-X-funtor. Note que sendo f um $\mathcal{V}$-X-funtor, os diagramas (3.3) e (3.4) comutam, ou seja, as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned} f_{x,z} \circ m^A_{x,y,z} &= m^B_{x,y,z} \circ (f_{x,y} \otimes f_{y,z}) \\ f_{x,x} \circ \eta^A_x &= \eta^B_x. \end{aligned}$$

As igualdades acima são equivalentes a:

$$\begin{aligned} g_{x,z} \circ f_{x,z} \circ m^A_{x,y,z} &= g_{x,z} \circ m^B_{x,y,z} \circ (f_{x,y} \otimes f_{y,z}) \\ g_{x,x} \circ f_{x,x} \circ \eta^A_x &= g_{x,x} \circ \eta^B_x. \end{aligned}$$

Como $f_{x,y}$ é um isomorfismo em $\mathcal{V}$, com morfismo inverso $g_{x,y}$, para cada $x, y \in X$, as igualdades acima são equivalentes a:

$$\begin{aligned} m^A_{x,y,z} \circ (g_{x,y} \otimes g_{y,z}) &= g_{x,z} \circ m^B_{x,y,z} \circ (f_{x,y} \otimes f_{y,z}) \circ (g_{x,y} \otimes g_{y,z}) \\ \eta^A_x &= g_{x,x} \circ \eta^B_x, \end{aligned}$$

ou seja, as seguintes equações são válidas para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} m^A_{x,y,z} \circ (g_{x,y} \otimes g_{y,z}) &= g_{x,z} \circ m^B_{x,y,z} \\ g_{x,x} \circ \eta^B_x &= \eta^A_x. \end{aligned}$$

Portanto, g é $\mathcal{V}$-X-funtor. □

Agora voltando a pensar na definição de $\mathcal{V}$-categoria, que vimos ser de certo modo, uma generalização de uma álgebra em $\mathcal{V}$, queremos buscar uma noção que generalize uma coálgebra em $\mathcal{V}$. Lembrando que o objetivo é obter uma generalização para uma álgebra de Hopf. Assim, nosso próximo exemplo apresenta uma coálgebra na categoria $\mathcal{V}(X)$.

Exemplo 3.1.13. *Considere a categoria monoidal $\mathcal{V}(X)$ dada no início deste capítulo. Uma coálgebra nesta categoria é uma família $A = (A_{x,y})_{x,y \in X}$, com $A_{x,y}$ objeto em $\mathcal{V}$ para cada $x, y \in X$, juntamente com morfismos $\Delta_{x,y} : A_{x,y} \to A_{x,y} \otimes A_{x,y}$ e $\varepsilon_{x,y} : A_{x,y} \to I$, tal que os diagramas* (2.11) *e* (2.12) *comutam para cada $x, y \in X$, ou seja, $(A_{x,y}, \Delta_{x,y}, \varepsilon_{x,y})$ é coálgebra em $\mathcal{V}$ para cada $x, y \in X$. Assim, uma coálgebra (A, Δ, ε) em $\mathcal{V}(X)$ nada mais é que uma família de coálgebras em $\mathcal{V}$.*

Considerando o exemplo acima, o próximo lema é uma consequência direta da Proposição 2.1.40.

Lema 3.1.14. *Sejam $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita trançada e (A, Δ, ε) uma coálgebra em $\mathcal{V}(X)$. Então $A_{x,y} \otimes A_{y,z}$ é uma coálgebra em $\mathcal{V}$ para todo $x, y, z \in X$ com* *comultiplicação e counidade dadas, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned}\delta_{x,y,z} &= (A_{x,y} \otimes \sigma_{A_{x,y} \otimes A_{y,z}} \otimes A_{y,z}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z}) \\ \varepsilon_{x,y,z} &= \varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{y,z}\end{aligned}$$

Podemos ter uma $\mathcal{V}$-categoria A onde cada $A_{x,y}$ seja uma coálgebra, mas somente isso ainda não é suficiente para generalizar uma biálgebra. Devemos, de algum modo análogo, ter os morfismos $m_{x,y,z}$ e η_x dados na definição de $\mathcal{V}$-categoria como "morfismos de coálgebras". Para isso precisamos da seguinte definição que, para fazer sentido, necessita a estrutura de coálgebra de $A_{x,y} \otimes A_{y,z}$ dada no lema anterior.

Dada $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita trançada, vimos na Proposição 2.1.41 que obtemos uma nova categoria monoidal $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$, então obtemos uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria, com base na Definição 3.1.2:

Definição 3.1.15 ([5]). *Seja $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita trançada. Uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-***categoria*** *A consiste de uma classe $|A| = X$ e uma família de coálgebras $A_{x,y}$ em $\mathcal{V}$ para todo $x, y \in X$, juntamente com morfismos de coálgebras $m_{x,y,z} : A_{x,y} \otimes A_{y,z} \to A_{x,z}$ e $\eta_x : J_{x,x} = I \to A_{x,x}$ satisfazendo as igualdades* (3.1) *e* (3.2).

Em outras palavras, uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria é uma $\mathcal{V}$-categoria A onde os $A_{x,y}$ são coálgebras e os morfismos $m_{x,y,z}$ e η_x são morfismos de coálgebras para todo $x, y, z \in X$. No caso em que a categoria $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_k)$-categoria também pode ser chamada de **categoria semi-Hopf k-linear** ([8]). O termo 'semi-Hopf' pode ser justificado pelas observações e definição seguintes.

Observação 3.1.16. *Note que uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria com um objeto é uma biálgebra em $\mathcal{V}$. Assim, na notação dada acima, $(A_{x,x}, m_{x,x,x}, \eta_x, \Delta_{x,x}, \varepsilon_{x,x})$ é uma biálgebra em $\mathcal{V}$, para todo $x \in X$.*

Vimos em 3.1.6 que podemos obter uma $\mathcal{V}$-categoria oposta a partir de uma $\mathcal{V}$-categoria. Podemos nos perguntar então se a partir de uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria também obtemos uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria oposta de modo análogo. É isso que veremos a seguir.

Proposição 3.1.17. *Sejam $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita simétrica e A uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria de classe subjacente X e morfismos $m_{x,y,z}$ e η_x conforme a Definição 3.1.15. Então a $\mathcal{V}$-categoria oposta A^{op} é uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria.*

Demonstração. Já vimos em 3.1.6 que A^{op} é uma $\mathcal{V}$-categoria. Agora temos, além disso, que $(A^{op}_{x,y}, \Delta_{y,x}, \varepsilon_{y,x})$ é uma coálgebra em $\mathcal{V}$ para cada $x, y \in X$ e que η^{op}_x é morfismo de coálgebras, já que $\eta^{op}_x = \eta_x$. Só precisamos verificar que $m^{op}_{x,y,z}$ é morfismo de coálgebras para todo $x, y, z \in X$. Isso é feito através do diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
A^{op}_{x,y} \otimes A^{op}_{y,z} \arrow[rrrrr, "m^{op}_{x,y,z}"] \arrow[rrrdd, "\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}}"] \arrow[ddddrr, "\Delta_{y,x}\otimes\Delta_{z,y}"] \arrow[ddddddddd, "\Delta_{A^{op}_{x,y}\otimes A^{op}_{y,z}}"'] & & & & & A^{op}_{x,z} \arrow[ddddddddd, "\Delta z{,}x"] \\
& & & & \circlearrowright \text{ por definição} & \\
& & & A_{z,y} \otimes A_{y,x} \arrow[uurr, "m_{z,y,x}"'] \arrow[ddd, "\Delta_{z,y}\otimes\Delta_{y,x}"] & & \\
& & \circlearrowright \text{ por (2.17)} & & & \\
& & A_{y,x} \otimes A_{y,x} \otimes A_{z,y} \otimes A_{z,y} \arrow[dr, "\sigma_{A_{y,x}\otimes A_{y,x},A_{z,y}\otimes A_{z,y}}"] \arrow[dddddll, "A_{y,x}\otimes\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}}\otimes A_{z,y}"'] & & \circlearrowright \text{ por (3.1.15)} & \\
& \circlearrowright \text{ por definição} & & A_{z,y} \otimes A_{z,y} \otimes A_{y,x} \otimes A_{y,x} \arrow[dd, "A_{z,y}\otimes\sigma_{A_{z,y},A_{y,x}}\otimes A_{y,x}"] & & \\
& & \circlearrowright \text{ por } \circledast & & & \\
& & & A_{z,y} \otimes A_{y,x} \otimes A_{z,y} \otimes A_{y,x} \arrow[ddrr, "m_{z,y,x}\otimes m_{z,y,x}"] & & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por definição} & \\
A^{op}_{x,y} \otimes A^{op}_{y,z} \otimes A^{op}_{x,y} \otimes A^{op}_{y,z} \arrow[uurrr, "\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}}\otimes\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}}"] \arrow[rrrrr, "m^{op}_{x,y,z}\otimes m^{op}_{x,y,z}"'] & & & & & A^{op}_{x,z} \otimes A^{op}_{x,z}
\end{tikzcd}$$

Em $\circledast$ usamos o seguinte:

$$\begin{aligned}
& (A_{z,y} \otimes \sigma_{A_{z,y},A_{y,x}} \otimes A_{y,x}) \circ \underbrace{(\sigma_{A_{y,x}\otimes A_{y,x},A_{z,y}\otimes A_{z,y}})}_{(2.18)} = \\
= \; & (A_{z,y} \otimes \sigma_{A_{z,y},A_{y,x}} \otimes A_{y,x}) \circ (A_{z,y} \otimes \underbrace{\sigma_{A_{y,x}\otimes A_{y,x},A_{z,y}}}_{(2.19)}) \circ (\underbrace{\sigma_{A_{y,x}\otimes A_{y,x},A_{z,y}}}_{(2.19)} \otimes A_{z,y}) \\
= \; & (A_{z,y} \otimes \sigma_{A_{z,y},A_{y,x}} \otimes A_{y,x}) \circ (A_{z,y} \otimes [(\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}} \otimes A_{y,x}) \circ (A_{y,x} \otimes \sigma_{A_{y,x},A_{z,y}})]) \circ \\
& ([(\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}} \otimes A_{y,x}) \circ (A_{y,x} \otimes \sigma_{A_{y,x},A_{z,y}})] \otimes A_{z,y}) \\
= \; & \underbrace{(A_{z,y} \otimes \sigma_{A_{z,y},A_{y,x}} \otimes A_{y,x}) \circ (A_{z,y} \otimes \sigma_{A_{y,x},A_{z,y}} \otimes A_{y,x})}_{\mathcal{V} \text{ é categoria monoidal simétrica}} \circ (A_{z,y} \otimes A_{y,x} \otimes \sigma_{A_{y,x},A_{z,y}}) \circ \\
& (\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}} \otimes A_{y,x} \otimes A_{z,y}) \circ (A_{y,x} \otimes \sigma_{A_{y,x},A_{z,y}} \otimes A_{z,y}) \\
= \; & (\sigma_{A_{y,x},A_{z,y}} \otimes \sigma_{A_{y,x},A_{z,y}}) \circ (A_{y,x} \otimes \sigma_{A_{y,x},A_{z,y}} \otimes A_{z,y})
\end{aligned}$$

Portanto, A^{op} é uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria. □

Definição 3.1.18. *A $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria A^{op} da proposição anterior é chamada $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$**-categoria oposta**.*

Observação 3.1.19. *As $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias, assim como as $\mathcal{V}$-categorias, podem ser orga-*

nizadas em uma 2-categoria ${}_{\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})}\underline{\underline{Cat}}$*, e como tal, temos uma definição de* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-funtor.*

Definição 3.1.20 ([5])**.** *Um* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$***-funtor*** *entre duas* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categorias* A *e* B *é um* $\mathcal{V}$*-funtor* $f : A \to B$ *tal que todo* $f_{x,y} : A_{x,y} \to B_{f(x),f(y)}$ *é um morfismo de coálgebras em* $\mathcal{V}$*.*

Assim como no caso de $\mathcal{V}$-X-funtor que já definimos (3.1.10), também podemos definir $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-X-funtor:

Definição 3.1.21 ([5])**.** *Sejam* A *e* B *duas* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categorias ambas com classe subjacente* X*. Um* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-funtor* $f : A \to B$ *é dito* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$***-X-funtor*** *se* $f(x) = x$*, para todo* $x \in X$*.*

Também podemos definir de forma análoga ao que fizemos para $\mathcal{V}$-categorias (Definição 3.1.11), um isomorfismo de $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias:

Definição 3.1.22. *Sejam* A *e* B *duas* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categorias de classe subjacente* X*. Se existe um* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-X-funtor* $f : A \to B$ *tal que* $f_{x,y}$ *é um isomorfismo em* $\mathcal{V}$ *para todo* $x, y \in X$*, então dizemos que as* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categorias* A *e* B *são* ***isomorfas****.*

Já mostramos em 3.1.12 que se A e B são $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias isomorfas conforme a definição acima, então existe um $\mathcal{V}$-X-funtor $g : B \to A$ tal que $f_{x,y} \circ g_{x,y} = B_{x,y}$ e $g_{x,y} \circ f_{x,y} = A_{x,y}$. Mas além disso, nesse caso cada $f_{x,y}$ é morfismo de coálgebras o que implica que $g_{x,y} = f_{x,y}^{-1}$ é também um morfismo de coálgebras. Portanto, a Definição 3.1.22 implica na existência de um $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$**-X-funtor inverso** $g : B \to A$.

Agora, estamos prontos para apresentar a definição que generaliza uma álgebra de Hopf.

Definição 3.1.23 ([5])**.** *Seja* $\mathcal{V}$ *uma categoria monoidal estrita trançada. Uma* $\mathcal{V}$***-categoria de Hopf*** *é uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categoria* A *com um morfismo* $\mathcal{S} : A \to A^{op}$ *em* $\mathcal{V}(X)$*, tal que as seguintes condições são satisfeitas para todo* $x, y \in X$*:*

$$m_{x,y,x} \circ (A_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y} = \eta_x \circ \varepsilon_{x,y} : A_{x,y} \to A_{x,x}; \tag{3.5}$$

$$m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes A_{x,y}) \circ \Delta_{x,y} = \eta_y \circ \varepsilon_{x,y} : A_{x,y} \to A_{y,y}, \tag{3.6}$$

Isso significa que os seguintes diagramas comutam para todo $x, y \in X$*:*

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{x,y} \arrow[d, "\mathcal{S}_{x,y}\otimes A_{x,y}"'] & A_{x,y} \arrow[l, "\Delta_{x,y}"'] \arrow[dr, "\varepsilon_{x,y}"] & & A_{x,y} \arrow[r, "\Delta_{x,y}"] \arrow[dl, "\varepsilon_{x,y}"'] & A_{x,y} \otimes A_{x,y} \arrow[d, "A_{x,y}\otimes\mathcal{S}_{x,y}"] \\
& & I \arrow[dl, "\eta_y"'] \arrow[dr, "\eta_x"] & & \\
A_{y,x} \otimes A_{x,y} \arrow[r, "m_{y,x,y}"'] & A_{y,y} & & A_{x,x} & A_{x,y} \otimes A_{y,x} \arrow[l, "m_{x,y,x}"]
\end{tikzcd}$$

Observação 3.1.24. *1) Note que esta é uma generalização de uma álgebra de Hopf, pois uma* $\mathcal{V}$*-categoria de Hopf com um objeto é uma álgebra de Hopf em* $\mathcal{V}$*.*

2) No caso de $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ *chamamos a* $\mathcal{M}_k$*-categoria de Hopf de* ***categoria de Hopf k-linear****. Aqui justifica-se o nome categoria semi-Hopf k-linear dado a uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_k)$*-categoria, já que é como se tivéssemos 'quase' uma categoria de Hopf.*

3) As $\mathcal{V}$-categorias de Hopf também podem ser vistas como uma 2-categoria ${}_{\mathcal{V}}\underline{\underline{HopfCat}}$, onde ${}_{\mathcal{V}}\underline{\underline{HopfCat}}$ é uma 2-subcategoria plena de ${}_{\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})}\underline{\underline{Cat}}$.

Um exemplo de $\mathcal{V}$-categoria de Hopf é dado na proposição a seguir.

Proposição 3.1.25 ([5]). *Em $\mathcal{V} = \underline{Sets}$, uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf é o mesmo que um grupóide (uma categoria em que todo morfismo é um isomorfismo).*

Demonstração. Vejamos que uma $\underline{Sets}$-categoria de Hopf é um grupóide. Na Proposição 3.1.4 vimos que uma $\underline{Sets}$-categoria A com classe subjacente X é uma categoria usual, sendo X a classe dos objetos da categoria, o conjunto $A_{x,y} = Hom_A(y,x)$, $m_{x,y,z}(a,b) = a \circ b$ para $a \in A_{x,y}$ e $b \in A_{y,z}$ e $\eta_x(*) = id_x$. Além disso, no Exemplo 2.1.25 vimos que uma coálgebra em $\underline{Sets}$ é um conjunto C com duas funções definidas por $\Delta(c) = (c,c)$ e $\varepsilon(c) = *$, para todo $c \in C$. Logo uma $\underline{\mathcal{C}}(\underline{Sets})$-categoria é uma categoria usual com funções $\Delta_{x,y}$ e $\varepsilon_{x,y}$ definidas de forma única, conforme dado acima, para cada $A_{x,y}$.

Falta investigarmos o morfismo $\mathcal{S} : A \to A^{op}$ dado na definição de $\mathcal{V}$-categoria de Hopf. Para todo $x, y \in X$, $\mathcal{S}_{x,y} : A_{x,y} \to A_{y,x}$ deve satisfazer as equações (3.5) e (3.6), então seja $a \in A_{x,y} = Hom_A(y,x)$, temos:

$$\begin{aligned} (m_{x,y,x} \circ (A_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y})(a) &= (\eta_x \circ \varepsilon_{x,y})(a) \\ (m_{x,y,x} \circ (A_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}))(a,a) &= \eta_x(*) \\ a \circ \mathcal{S}_{x,y}(a) &= id_x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes A_{x,y}) \circ \Delta_{x,y})(a) &= (\eta_y \circ \varepsilon_{x,y})(a) \\ (m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes A_{x,y}))(a,a) &= \eta_y(*) \\ \mathcal{S}_{x,y}(a) \circ a &= id_y. \end{aligned}$$

Ou seja, todo morfismo a é isomorfismo sendo $\mathcal{S}_{x,y}(a)$ seu morfismo inverso. Portanto, A é um grupóide.

Agora dado um grupóide G, temos uma classe de objetos X e conjuntos de morfismos $Hom_G(y,x)$ para objetos x, y em X, que podemos denotar por $G_{x,y}$. Para cada $g \in G_{x,y}$ existe $g^{-1} \in G_{y,x}$ tal que $g \circ g^{-1} = id_x$ e $g^{-1} \circ g = id_y$. Assim, define-se $\mathcal{S}_{x,y} : G_{x,y} \to G_{y,x}$ por $\mathcal{S}_{x,y}(g) = g^{-1}$ e já temos as propriedades (3.5) e (3.6) satisfeitas. Além disso, já havíamos visto na Proposição 3.1.4 que uma categoria usual é $\underline{Sets}$-categoria. Acrescentando as funções $\Delta_{x,y}$ e $\varepsilon_{x,y}$ que são as únicas possíveis de serem definidas conforme o Exemplo 2.1.25, temos que uma categoria usual é uma $\underline{\mathcal{C}}(\underline{Sets})$-categoria.

Portanto um grupóide é uma $\underline{Sets}$-categoria de Hopf.

□

Em [5] temos um resultado (Proposição 3.11) que nos garante que um funtor monoidal forte $F : \mathcal{V} \to W$, induz um bifuntor $F : {}_{\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})}\underline{\underline{Cat}} \longrightarrow {}_{\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{W})}\underline{\underline{Cat}}$ e também um bifuntor $F : {}_{\mathcal{V}}\underline{\underline{HopfCat}} \longrightarrow {}_{\mathcal{W}}\underline{\underline{HopfCat}}$. Assim, usando este resultado, podemos obter outro exemplo de categoria de Hopf.

Exemplo 3.1.26 ([5]). *Sabe-se que o funtor linearização $L : \underline{Sets} \to \mathcal{M}_k$ é um funtor monoidal forte que leva um conjunto Y em um k-módulo livre de base Y. Assim, usando* *a Proposição 3.11 de [5] temos que grupóides, que são categorias de Hopf em Sets pela Proposição 3.1.25, são levados pelo bifuntor L em categorias de Hopf k-lineares.*

Mais precisamente, seja G um grupóide e $G_{x,y}$ o conjunto de morfismos de y em x, então $L(G) = A$ com cada $A_{x,y} = kG_{x,y}$, ou seja, A é uma família de k-módulos com cada $A_{x,y}$ sendo um k-módulo livre de base $G_{x,y}$. Os morfismos multiplicação e unidade são os de G estendidos linearmente. Para cada $x, y \in X$, $kG_{x,y}$ é coálgebra com $\Delta_{x,y}(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon_{x,y}(g) = 1$ para $g \in G_{x,y}$. E por fim, a antípoda é dada por $\mathcal{S}_{x,y}(g) = g^{-1} \in G_{y,x}$.

Apresentamos na Proposição 2.1.51 várias propriedades da antípoda de uma álgebra de Hopf em uma categoria $\mathcal{V}$. Queremos agora expandir essas propriedades para um morfismo $\mathcal{S}$ de uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf. É claro que as seguintes equações já são válidas:

$$\mathcal{S}_{x,x} \circ m_{x,x,x} = m_{x,x,x} \circ (\mathcal{S}_{x,x} \otimes \mathcal{S}_{x,x}) \circ \sigma_{A_{x,x},A_{x,x}} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{S}_{x,x} \circ \eta_x = \eta_x \tag{3.8}$$

$$\Delta_{x,x} \circ \mathcal{S}_{x,x} = \sigma_{A_{x,x},A_{x,x}} \circ (\mathcal{S}_{x,x} \otimes \mathcal{S}_{x,x}) \circ \Delta_{x,x} \tag{3.9}$$

$$\varepsilon_{x,x} \circ \mathcal{S}_{x,x} = \varepsilon_{x,x} \tag{3.10}$$

já que $(A_{x,x}, m_{x,x,x}, \eta_x, \Delta_{x,x}, \varepsilon_{x,x}, \mathcal{S}_{x,x})$ é uma álgebra de Hopf em $\mathcal{V}$, quando consideramos a $\mathcal{V}$-categoria com um único objeto. No próximo lema veremos que as equações (3.7) e (3.9) valem para uma variedade maior de índices.

Proposição 3.1.27 ([5])**.** *Seja A uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf. Então as seguintes afirmações valem para todo $x, y, z \in X$:*

$$\mathcal{S}_{x,z} \circ m_{x,y,z} = m_{z,y,x} \circ (\mathcal{S}_{y,z} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \sigma_{A_{x,y},A_{y,z}} \tag{3.11}$$

$$\Delta_{y,x} \circ \mathcal{S}_{x,y} = \sigma_{A_{y,x},A_{y,x}} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y} \tag{3.12}$$

Demonstração. Vamos mostrar aqui a igualdade (3.11), já que a demonstração de (3.12) é análoga e pode ser consultada em [5].

Mesmo a demonstração de (3.11) é análoga a que fizemos para mostrar (2.33), mas agora deve-se tomar cuidado com os índices que são usados.

Assim, denote por $f = m_{z,y,x} \circ (\mathcal{S}_{y,z} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \sigma_{A_{x,y},A_{y,z}}$ e por $g = \mathcal{S}_{x,z} \circ m_{x,y,z}$ e vejamos que $f = g$. De fato, para todo $x, y, z \in X$ temos:

$$\begin{aligned}
f &\overset{(3.1.14)}{=} f \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes \varepsilon_{x,y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
&\overset{(3.2)}{=} m_{z,x,x} \circ (A_{z,x} \otimes \eta_x) \circ f \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes \varepsilon_{x,y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
&= m_{z,x,x} \circ (f \otimes \eta_x) \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes \underbrace{\varepsilon_{x,y,z})}_{(3.1.15)} \circ \delta_{x,y,z} \\
&= m_{z,x,x} \circ (f \otimes \eta_x) \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes (\varepsilon_{x,z} \circ m_{x,y,z})) \circ \delta_{x,y,z} \\
&= m_{z,x,x} \circ (f \otimes A_{x,x}) \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes \underbrace{(\eta_x \circ \varepsilon_{x,z})}_{(3.5)}) \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
&= m_{z,x,x} \circ (f \otimes A_{x,x}) \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes m_{x,z,x}) \circ (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,z} \otimes \mathcal{S}_{x,z}) \circ \\
&\quad (A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes \underbrace{(\Delta_{x,z} \circ m_{x,y,z})}_{(3.1.15)}) \circ \delta_{x,y,z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & m_{z,x,x}\circ(f\otimes A_{x,x})\circ(A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes m_{x,z,x})\circ(A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes m_{x,y,z}\otimes\underbrace{(\mathcal{S}_{x,z}\circ m_{x,y,z})}_{=g})\circ \\
& \underbrace{(A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes\delta_{x,y,z})\circ\delta_{x,y,z}}_{(3.1.14)} \\
= \; & m_{z,x,x}\circ(f\otimes A_{x,x})\circ(A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes m_{x,z,x})\circ(A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes m_{x,y,z}\otimes A_{z,x})\circ \\
& (A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes g)\circ(\underbrace{\delta_{x,y,z}}_{(3.1.14)}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ\delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,x,x}\circ(A_{z,x}\otimes m_{x,z,x})\circ\underbrace{(f\otimes m_{x,y,z}\otimes A_{z,x})\circ(A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes g)}_{\star}\circ \\
& (A_{x,y}\otimes\sigma_{A_{x,y},A_{y,z}}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ\delta_{x,y,z}=\divideontimes.
\end{aligned}$$

Note que, usando a definição de f, $\star$ pode ser escrito como:

$$((m_{z,y,x}\circ(\mathcal{S}_{y,z}\otimes\mathcal{S}_{x,y})\circ\sigma_{A_{x,y},A_{y,z}})\otimes m_{x,y,z}\otimes g).$$

Então separando a trança desta composição, a igualdade acima se torna:

$$\begin{aligned}
\divideontimes \; = \; & m_{z,x,x}\circ(A_{z,x}\otimes m_{x,z,x})\circ((m_{z,y,x}\circ(\mathcal{S}_{y,z}\otimes\mathcal{S}_{x,y}))\otimes m_{x,y,z}\otimes g)\circ \\
& \underbrace{(\sigma_{A_{x,y},A_{y,z}}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ(A_{x,y}\otimes\sigma_{A_{x,y},A_{y,z}}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})}_{(2.19)}\circ \\
& (\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ\delta_{x,y,z}.
\end{aligned}$$

Agora propriedade (2.19) nos diz que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
& A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y} \arrow[dr, "\sigma_{A_{x,y},A_{y,z}}\otimes A_{x,y}"] & \\
A_{x,y}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z} \arrow[ur, "A_{x,y}\otimes\sigma_{A_{x,y},A_{y,z}}"] \arrow[rr, "\sigma_{A_{x,y}\otimes A_{x,y},A_{y,z}}"'] & & A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{x,y}
\end{tikzcd}$$

então podemos escrever $\divideontimes$ como:

$$\begin{aligned}
= \; & \underbrace{m_{z,x,x}\circ(A_{z,x}\otimes m_{x,z,x})\circ(A_{z,x}\otimes m_{x,y,z}\otimes g)}_{(3.1)}\circ(m_{z,y,x}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ \\
& \underbrace{(\mathcal{S}_{y,z}\otimes\mathcal{S}_{x,y}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ(\sigma_{A_{x,y}\otimes A_{x,y},A_{y,z}}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})}_{(2.17)}\circ \\
& (\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ\delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,z,x}\circ(m_{z,y,z}\otimes g)\circ\underbrace{(m_{z,x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})\circ(m_{z,y,x}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z})}_{(3.1)}\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{A_{y,x}\otimes A_{x,y},A_{z,y}} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes A_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{y,z} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \\
& (\Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,z,x} \circ (A_{z,z} \otimes g) \circ (m_{z,y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (m_{z,y,y} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \\
& \underbrace{(A_{z,y} \otimes m_{y,x,y} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\sigma_{A_{y,x}\otimes A_{x,y},A_{z,y}} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z})}_{(2.17)} \circ \\
& (\mathcal{S}_{x,y} \otimes A_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{y,z} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,z,x} \circ (A_{z,z} \otimes g) \circ (m_{z,y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (m_{z,y,y} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \\
& (\sigma_{A_{y,y},A_{z,y}} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \\
& (\underbrace{(m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes A_{x,y}) \circ \Delta_{x,y})}_{(3.6)} \otimes \mathcal{S}_{y,z} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (A_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,z,x} \circ (A_{z,z} \otimes g) \circ (m_{z,y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (m_{z,y,y} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \\
& \underbrace{(\sigma_{A_{y,y},A_{z,y}} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\eta_y \otimes A_{z,y} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z})}_{(2.17)} \circ \\
& (I \otimes \mathcal{S}_{y,z} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\varepsilon_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,z,x} \circ (A_{z,z} \otimes g) \circ (m_{z,y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\underbrace{(m_{z,y,y} \circ (A_{z,y} \otimes \eta_y))}_{(3.2)} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \\
& (\underbrace{\sigma_{I,A_{z,y}}}_{(2.24)} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (I \otimes \mathcal{S}_{y,z} \otimes A_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\varepsilon_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,z,x} \circ (A_{z,z} \otimes g) \circ (\varepsilon_{x,y} \otimes \underbrace{(m_{z,y,z} \circ (\mathcal{S}_{y,z} \otimes A_{y,z}) \circ \Delta_{y,z})}_{(3.6)} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
= \; & m_{z,z,x} \circ (A_{z,z} \otimes g) \circ (\eta_z \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ (\varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z} \\
= \; & \underbrace{m_{z,z,x} \circ (\eta_z \otimes A_{z,x})}_{(3.2)} \circ (I \otimes g) \circ \underbrace{(\varepsilon_{x,y,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z}) \circ \delta_{x,y,z}}_{(3.1.14)} \\
= \; & g.
\end{aligned}$$

□

A noção de $\mathcal{V}$-categoria de Hopf pode ser dualizada. Para isso precisamos dualizar também a noção de $\mathcal{V}$-categoria.

Definição 3.1.28 ([5]). *Seja $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita. Uma* ***$\mathcal{V}$-categoria dual*** *C consiste de uma classe $|C| = X$ e um objeto $C \in \mathcal{V}(X)$, juntamente com duas classes de morfismos em $\mathcal{V}$:*

$$\Delta_{x,y,z} : C_{x,z} \longrightarrow C_{x,y} \otimes C_{y,z} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x : C_{x,x} \longrightarrow I$$

definidos para cada $x, y, z \in X$, tais que as seguintes condições de coassociatividade e counidade são satisfeitas:

$$(\Delta_{x,y,z} \otimes C_{z,u}) \circ \Delta_{x,z,u} = (C_{x,y} \otimes \Delta_{y,z,u}) \circ \Delta_{x,y,u} \tag{3.13}$$

$$(\varepsilon_x \otimes C_{x,y}) \circ \Delta_{x,x,y} = C_{x,y} = (C_{x,y} \otimes \varepsilon_y) \circ \Delta_{x,y,y} \tag{3.14}$$

ou seja, os seguintes diagramas devem comutar, para todo $x, y, z, u \in X$:

$$\begin{tikzcd}
C_{x,u} \arrow[r, "\Delta_{x,z,u}"] \arrow[d, "\Delta_{x,y,u}"'] & C_{x,z} \otimes C_{z,u} \arrow[d, "\Delta_{x,y,z} \otimes C_{z,u}"] \\
C_{x,y} \otimes C_{y,u} \arrow[r, "C_{x,y} \otimes \Delta_{y,z,u}"'] & C_{x,y} \otimes C_{y,z} \otimes C_{z,u}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_{x,x} \otimes C_{x,y} \arrow[d, "\varepsilon_x \otimes C_{x,y}"'] & C_{x,y} \arrow[l, "\Delta_{x,x,y}"'] \arrow[r, "\Delta_{x,y,y}"] \arrow[dl, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & C_{x,y} \otimes C_{y,y} \arrow[d, "C_{x,y} \otimes \varepsilon_y"] \\
I \otimes C_{x,y} & & C_{x,y} \otimes I
\end{tikzcd}$$

Observação 3.1.29. *1) Note que se C é uma $\mathcal{V}$-categoria dual, então cada $C_{x,x}$ é uma coálgebra na categoria $\mathcal{V}$ com comultiplicação $\Delta_{x,x,x}$ e counidade ε_x.*

2) Assim como as $\mathcal{V}$-categorias, as $\mathcal{V}$-categorias duais também podem ser organizadas em uma 2-categoria ${}^{\mathcal{V}}\underline{\underline{Cat}}$.

A seguir vamos mostrar que podemos obter uma $\mathcal{V}$-categoria dual a partir de uma dada.

Proposição 3.1.30. *Sejam $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada e C uma $\mathcal{V}$-categoria dual com classe subjacente X e morfismos $\Delta_{x,y,z}$ e ε_x conforme Definição 3.1.28. Então $C^{op} = (C^{op}_{x,y})_{x,y \in X} = (C_{y,x})_{x,y \in X}$, juntamente com os morfismos:*

$$\Delta^{op}_{x,y,z} = \sigma_{C_{z,y}, C_{y,x}} \circ \Delta_{z,y,x} : C^{op}_{x,z} = C_{z,x} \longrightarrow C^{op}_{x,y} \otimes C^{op}_{y,z} = C_{y,x} \otimes C_{z,y}$$

e $\varepsilon^{op}_x = \varepsilon_x$ é uma $\mathcal{V}$-categoria dual.

Demonstração. Vamos verificar que $\Delta^{op}_{x,y,z}$ e ε^{op}_x satisfazem as equações (3.13) e (3.14) usando diagramas.

$$\begin{tikzcd}
C^{op}_{x,u} \arrow[rrrrrr, "\Delta^{op}_{x,z,u}"] \arrow[ddrrr, "\Delta_{u,z,x}"] \arrow[ddddrr, "\Delta_{u,y,x}"'] \arrow[dddddddd, "\Delta^{op}_{x,y,u}"'] & & & & & & C^{op}_{x,z} \otimes C^{op}_{z,u} \arrow[ddddll, "\Delta_{z,y,x} \otimes C_{u,z}"'] \arrow[dddddddd, "\Delta^{op}_{x,y,z} \otimes C^{op}_{z,u}"] \\
& & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & \\
& & & C_{u,z} \otimes C_{z,x} \arrow[uurrr, "\sigma_{C_{u,z},C_{z,x}}"] \arrow[dd, "C_{u,z} \otimes \Delta_{z,y,x}"] & & & \\
& & \circlearrowright \text{ por (3.13)} & & \circlearrowright \text{ por (2.17)} & & \\
& \circlearrowright \text{ por definição} & C_{u,y} \otimes C_{y,x} \arrow[r, "\Delta_{u,z,y} \otimes C_{y,x}"] \arrow[ddddll, "\sigma_{C_{u,y},C_{y,x}}"] & C_{u,z} \otimes C_{z,y} \otimes C_{y,x} \arrow[r, "\sigma_{C_{u,z},C_{z,y} \otimes C_{y,x}}"] \arrow[dd, "\sigma_{C_{u,z} \otimes C_{z,y},C_{y,x}}"] & C_{z,y} \otimes C_{y,x} \otimes C_{u,z} \arrow[ddddrr, "\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}} \otimes C_{u,z}"] & \circlearrowright \text{ por definição} & \\
& & \circlearrowright \text{ por (2.17)} & & \circlearrowright \text{ por (2.26)} & & \\
& & & C_{y,x} \otimes C_{u,z} \otimes C_{z,y} \arrow[ddrrr, "C_{y,x} \otimes \sigma_{C_{u,z},C_{z,y}}"] & & & \\
& & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & \\
C^{op}_{x,y} \otimes C^{op}_{y,u} \arrow[uurrr, "C_{y,x} \otimes \Delta_{u,z,y}"] \arrow[rrrrrr, "C^{op}_{x,y} \otimes \Delta^{op}_{y,z,u}"'] & & & & & & C^{op}_{x,y} \otimes C^{op}_{y,z} \otimes C^{op}_{z,u}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & C^{op}_{x,y} \arrow[dlllll, "\Delta^{op}_{x,x,y}"'] \arrow[drrrrr, "\Delta^{op}_{x,y,y}"] \arrow[ddllll, "\Delta_{y,x,x}"] \arrow[ddrrrr, "\Delta_{y,y,x}"'] \arrow[dddll, "="] \arrow[dddrr, "="'] \arrow[ddddll, "="] \arrow[ddddrr, "="'] & & & & & \\
C^{op}_{x,x} \otimes C^{op}_{x,y} \arrow[dddrrr, "\varepsilon^{op}_x \otimes C^{op}_{x,y}"'] & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & & & & \circlearrowright \text{ por definição} & & C^{op}_{x,y} \otimes C^{op}_{y,y} \arrow[dddlll, "C^{op}_{x,y} \otimes \varepsilon^{op}_y"] \\
 & C_{y,x} \otimes C_{x,x} \arrow[ul, "\sigma_{C_{y,x},C_{x,x}}"] \arrow[drr, "C_{y,x} \otimes \varepsilon_x"'] & & \circlearrowright \text{ por } (3.14) & & & & \circlearrowright \text{ por } (3.14) & & C_{y,y} \otimes C_{y,x} \arrow[ur, "\sigma_{C_{y,y},C_{y,x}}"'] \arrow[dll, "\varepsilon_y \otimes C_{y,x}"] & \\
 & & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & C_{y,x} \otimes I \arrow[d, "\sigma_{C_{y,x},I}"] & \circlearrowright \text{ por } (2.20) & & \circlearrowright \text{ por } (2.21) & I \otimes C_{y,x} \arrow[d, "\sigma_{I,C_{y,x}}"] & \circlearrowright \text{ por } (2.17) & & \\
 & & & I \otimes C^{op}_{x,y} & & & & C^{op}_{x,y} \otimes I & & &
\end{tikzcd}$$

Portanto, C^{op} é uma $\mathcal{V}$-categoria dual.

$\square$

Definição 3.1.31. *A $\mathcal{V}$-categoria dual C^{op} dada na proposição anterior será chamada* ***$\mathcal{V}$-categoria dual oposta****.*

Observação 3.1.32. *Note que, apesar dos diagramas na demonstração anterior serem bastante semelhantes aos que foram feitos em 3.1.6, e os morfismos definidos lembrarem a definição de coálgebra cooposta dada em [5], o que fizemos agui é diferente, visto que parte de uma $\mathcal{V}$-categoria dual.*

Agora dada $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita trançada, a categoria $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$ é uma categoria monoidal conforme Proposição 2.1.42. É, na verdade, uma subcategoria de $\mathcal{V}$ onde os objetos são álgebras em $\mathcal{V}$ e os morfismos são morfismos de álgebras. Assim podemos obter uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual, com base na Definição 3.1.28:

Definição 3.1.33. *Seja $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita trançada. Uma* ***$\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual*** *$C$ consiste de uma classe $|C| = X$ e uma família de álgebras $(C_{x,y}, m_{x,y}, \eta_{x,y})$ em $\mathcal{V}$ para todo $x, y \in X$, juntamente com morfismos de álgebras $\Delta_{x,y,z} : C_{x,z} \longrightarrow C_{x,y} \otimes C_{y,z}$ e $\varepsilon_x : C_{x,x} \longrightarrow I$ satisfazendo as igualdades* (3.13) *e* (3.14)*.*

Em outras palavras, uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual é uma $\mathcal{V}$-categoria dual C onde os $C_{x,y}$ são álgebras e os morfismos $\Delta_{x,y,z}$ e ε_x são morfismos de álgebras para todo $x, y, z \in X$. No caso em que a categoria $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{M}_k)$-categoria dual é também chamada de **categoria semi-Hopf k-linear dual** ([8]).

Observação 3.1.34. *Note que uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual com um objeto é uma biálgebra em $\mathcal{V}$, ou seja, para cada $x \in X$, $(C_{x,x}, m_{x,x}, \eta_{x,x}, \Delta_{x,x,x}, \varepsilon_x)$ é uma biálgebra em $\mathcal{V}$.*

Vejamos a seguir um resultado relacionado à Proposição 3.1.30, esta proposição estabelece que a partir de uma $\mathcal{V}$-categoria dual podemos construir uma $\mathcal{V}$-categoria dual oposta, mas agora temos a definição de $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual, então a questão que surge é: Podemos construir uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual oposta a partir de uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual? E a resposta é sim, de forma análoga ao que foi feito para $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria oposta em 3.1.17.

Proposição 3.1.35. *Sejam $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita simétrica e C uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual com classe subjacente X e morfismos $\Delta_{x,y,z}$ e ε_x conforme a Definição 3.1.33. Então a $\mathcal{V}$-categoria dual oposta C^{op} é uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual.*

Demonstração. Já temos do Lema 3.1.30 que C^{op} é uma $\mathcal{V}$-categoria dual, também temos, para cada $x, y \in X$, que $(C^{op}_{x,y}, m_{y,x}, \eta_{y,x})$ é uma álgebra em $\mathcal{V}$. Assim basta verificar que $\Delta^{op}_{x,y,z}$ é morfismo de álgebras para todo $x, y, z \in X$. É isso que faremos a seguir por meio de diagramas:

$$\begin{tikzcd}
C^{op}_{x,z}\otimes C^{op}_{x,z} \arrow[rrrrrr, "\Delta^{op}_{x,y,z}\otimes\Delta^{op}_{x,y,z}"] \arrow[rrdd, "\Delta_{z,y,x}\otimes\Delta_{z,y,x}"] \arrow[ddddddddd, "m_{z,x}"'] & & & & & & C^{op}_{x,y}\otimes C^{op}_{y,z}\otimes C^{op}_{x,y}\otimes C^{op}_{y,z} \arrow[dddddllll, "C_{y,x}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes C_{z,y}"] \arrow[ddddddddd, "m_{C^{op}_{x,y}\otimes C^{op}_{y,z}}"] \\
& & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & \\
& & C_{z,y}\otimes C_{y,x}\otimes C_{z,y}\otimes C_{y,x} \arrow[uurrrr, "\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}"] \arrow[dd, "C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{y,x},C_{z,y}}\otimes C_{y,x}"] & & & & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por } \circledast & & \\
& & C_{z,y}\otimes C_{z,y}\otimes C_{y,x}\otimes C_{y,x} \arrow[drr, "\sigma_{C_{z,y}\otimes C_{z,y},C_{y,x}\otimes C_{y,x}}"] \arrow[ddd, "m_{z,y}\otimes m_{y,x}"] & & & \circlearrowright \text{ por definição} & \\
& \circlearrowright \text{ por } 3.1.33 & & & C_{y,x}\otimes C_{y,x}\otimes C_{z,y}\otimes C_{z,y} \arrow[ddddrr, "m_{y,x}\otimes m_{z,y}"] & & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por } 2.17 & & \\
& & C_{z,y}\otimes C_{y,x} \arrow[ddrrrr, "\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}"] & & & & \\
& & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & \\
C^{op}_{x,z} \arrow[uurr, "\Delta_{z,y,x}"] \arrow[rrrrrr, "\Delta^{op}_{x,y,z}"'] & & & & & & C^{op}_{x,y}\otimes C^{op}_{y,z}
\end{tikzcd}$$

Em $\circledast$ usamos o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(\sigma_{C_{z,y}\otimes C_{z,y},C_{y,x}\otimes C_{y,x})}_{(2.18)}\circ(C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{y,x},C_{z,y}}\otimes C_{y,x}) = \\
= \;& (C_{y,x}\otimes\underbrace{\sigma_{C_{z,y}\otimes C_{z,y},C_{y,x}})}_{(2.19)}\circ(\underbrace{\sigma_{C_{z,y}\otimes C_{z,y},C_{y,x}}}_{(2.19)}\otimes C_{y,x})\circ(C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{y,x},C_{z,y}}\otimes C_{y,x}) \\
= \;& (C_{y,x}\otimes[(\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes C_{z,y})\circ(C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}})])\circ([(\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes C_{z,y})\circ(C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}})] \\
& \otimes C_{y,x})\circ(C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{y,x},C_{z,y}}\otimes C_{y,x}) \\
= \;& (C_{y,x}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes C_{z,y})\circ(C_{y,x}\otimes C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}})\circ(\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes C_{z,y}\otimes C_{y,x})\circ \\
& \underbrace{(C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes C_{y,x})\circ(C_{z,y}\otimes\sigma_{C_{y,x},C_{z,y}}\otimes C_{y,x})}_{\mathcal{V}\text{ é categoria monoidal simétrica}} \\
= \;& (C_{y,x}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes C_{z,y})\circ(\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}\otimes\sigma_{C_{z,y},C_{y,x}}).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que C^{op} é uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual. $\square$

Definição 3.1.36. *A $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual C^{op} da proposição anterior é chamada* ***$\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual oposta****.*

Na próxima definição dualizamos a definição de $\mathcal{V}$-categoria de Hopf, conforme apresentada em [5], com uma pequena correção: faz-se necessário que C seja $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual, não somente $\mathcal{V}$-categoria como dado.

Definição 3.1.37 ([5])**.** *Seja C uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual. Então C é uma **$\mathcal{V}$-categoria de Hopf dual** se existem morfismos $\mathcal{S}_{x,y} : C_{y,x} \to C_{x,y}$ em $\mathcal{V}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas para todo $x, y \in X$:*

$$m_{x,y} \circ (C_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y,x} = \eta_{x,y} \circ \varepsilon_x \tag{3.15}$$

$$m_{y,x} \circ (\mathcal{S}_{y,x} \otimes C_{y,x}) \circ \Delta_{x,y,x} = \eta_{y,x} \circ \varepsilon_x \tag{3.16}$$

Ou seja, os seguintes diagramas comutam para todo $x, y \in X$:

$$\begin{tikzcd}
C_{x,y} \otimes C_{y,x} \arrow[dd, "\mathcal{S}_{y,x} \otimes C_{y,x}"'] & C_{x,x} \arrow[l, "\Delta_{x,y,x}"'] \arrow[dr, "\varepsilon_x"] & & C_{x,x} \arrow[r, "\Delta_{x,y,x}"] \arrow[dl, "\varepsilon_x"'] & C_{x,y} \otimes C_{y,x} \arrow[dd, "C_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}"] \\
& & I \arrow[dl, "\eta_{y,x}"] \arrow[dr, "\eta_{x,y}"'] & & \\
C_{y,x} \otimes C_{y,x} \arrow[r, "m_{y,x}"'] & C_{y,x} & & C_{x,y} & C_{x,y} \otimes C_{x,y} \arrow[l, "m_{x,y}"]
\end{tikzcd}$$

Observação 3.1.38. *Note que, assim como uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf, uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf dual também é uma generalização de uma álgebra de Hopf, pois uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf dual com um objeto é uma álgebra de Hopf em $\mathcal{V}$.*

3.2 CORRESPONDÊNCIA ENTRE CATEGORIAS DE HOPF E CATEGORIAS DE HOPF DUAIS

Nesta seção veremos que existe uma correspondência entre categorias de Hopf e categorias de Hopf duais, ao menos no caso particular em que $\mathcal{V}$ é a categoria dos k-módulos projetivos finitamente gerados. Esta correspondência foi descrita na seção 5.2 de [5] que é a principal referência aqui.

Veremos também que podemos usar essa correspondência para criar uma nova, juntando os opostos definidos na seção anterior.

Começamos essa seção fixando a categoria $\mathcal{V} = (\mathcal{M}_k^f, \otimes, k)$, a categoria dos módulos projetivos finitamente gerados sobre um anel comutativo k. Esse tipo de categoria nos permite assumir algumas propriedades, entre elas a existência de uma base projetiva para cada um dos seus objetos, isso pode ser estabelecido através do resultado a seguir:

Proposição 3.2.1 ([35])**.** *Um k-módulo M é projetivo se, e somente se, existem famílias $\{m_i : i \in I\}$ de elementos de M e $\{f_i : M \to k : i \in I\}$ de aplicações k-lineares tais que:*

1) para cada $m \in M$ quase todos $f_i(m) = 0$;

2) para cada $m \in M$, $m = \sum_{i \in I} f_i(m) m_i$.

Nesse caso, M é gerado por $\{m_i; i \in I\}$ e se o conjunto de índices I for finito, então M é um **k-módulo projetivo finitamente gerado**.

Além disso, há um funtor covariante $(\_)^* : \mathcal{M}_k^f \to \mathcal{M}_k^{fop}$ que leva um módulo M em seu dual $M^* = Hom_k(M,k)$ e um morfismo k-linear $f : M \to N$ no seu transposto $f^* : N^* \to M^*$ definido por $f^*(g) = g \circ f$ para $g \in N^*$. Assim, dado M um k-módulo projetivo finitamente gerado, M^* é também um k-módulo projetivo finitamente gerado, e conforme a proposição acima, temos uma **base dual finita de M** dada pela família de elementos $\{(m_i, f_i) \in M \times M^*\}_{\{i=1,\ldots,n\}}$ satisfazendo:

$$\sum_i m_i \langle f_i, m\rangle = m \qquad \text{e} \qquad \sum_i f_i \langle f, m_i\rangle = f \tag{3.17}$$

para todo $m \in M$ e $f \in M^*$ ([8]).

Note que usamos a notação $\langle\ ,\ \rangle$ para indicar que uma função de M^* está sendo aplicada em um elemento de M, ou seja, para qualquer $f \in M^*$ e $m \in M$, vamos escrever $\langle f, m\rangle$ ao invés de $f(m)$. Essa notação será utilizada a partir daqui para facilitar a visualização.

Sendo M^* também um k-módulo projetivo finitamente gerado, temos definido $M^{**} = Hom_k(M^*, k)$, que podemos mostrar ser isomorfo a M, assim como no caso de espaços vetoriais de dimensão finita ([19]). Apesar deste ser um resultado bastante conhecido, não encontramos uma demonstração na literatura especificamente para o caso de k-módulos projetivos finitamente gerados, assim vejamos a seguir:

Proposição 3.2.2. *Seja M um k-módulo projetivo finitamente gerado. Então existe um isomorfismo linear entre M e M^{**}*

Demonstração. Defina:

$$\begin{aligned} \psi\ :\ M &\longrightarrow M^{**} \\ m &\longmapsto \psi(m) : M^* \to k \\ &\qquad\qquad g \mapsto \langle g, m\rangle \end{aligned}$$

Para todo $m, n \in M$, $\lambda \in k$ e para todo $g \in M^*$ temos:

$$\begin{aligned} \langle \psi(\lambda m + n), g\rangle &= \langle g, \lambda m + n\rangle = \lambda\langle g, m\rangle + \langle g, n\rangle = \lambda\langle \psi(m), g\rangle + \langle \psi(n), g\rangle \\ &= \langle \lambda\psi(m) + \psi(n), g\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\psi(\lambda m + n) = \lambda\psi(m) + \psi(n)$, para todo $m, n \in M$, $\lambda \in k$, o que mostra que ψ é k-linear.

Considere agora a família de elementos $\{(m_i, f_i) \in M \times M^*\}_{i=1,\ldots,n}$ base dual finita de M e vejamos que ψ é um isomorfismo.

Suponha que $\psi(m) = 0$, então para todo $g \in M^*$, $\langle \psi(m), g\rangle = \langle g, m\rangle = 0$. Em particular, isso deve valer para todo f_i então $f_i(m) = 0$ e usando (3.17) temos: $m = \sum_i m_i\langle f_i, m\rangle = 0$, o que mostra que ψ é injetor.

Vejamos que ψ é sobrejetor. Seja $\varphi \in M^{**}$, então para todo $g \in M^*$ temos:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, g\rangle &= \langle \varphi, \sum_i f_i\langle g, m_i\rangle\rangle \quad \text{por (3.17)} \\ &= \sum_i \langle \varphi, f_i\rangle\langle g, m_i\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \langle \varphi, f_i \rangle \langle \psi(m_i), g \rangle \\
&= \sum_i \langle \psi(\langle \varphi, f_i \rangle \; m_i), g \rangle \\
&= \langle \psi \left(\sum_i \langle \varphi, f_i \rangle \; m_i \right), g \rangle .
\end{aligned}
$$

Isso mostra que para todo $\varphi \in M^{**}$ existe um elemento $\sum_i \langle \varphi, f_i \rangle \; m_i$ em M tal que $\varphi = \psi \left(\sum_i \langle \varphi, f_i \rangle \; m_i \right)$, ou seja, ψ é sobrejetor.

Portanto, ψ é um isomorfismo k-linear. $\square$

Agora voltamos ao funtor $(\_)^*$ que comentamos antes da proposição. De acordo com [5], esse funtor é uma equivalência de categorias e faz parte do seguinte funtor monoidal forte:

$$((\_)^*, \varphi_0, \varphi_2) : (\mathcal{M}_k^f, \otimes, k) \longrightarrow (\mathcal{M}_k^{f\,op}, \otimes^{op}, k).$$

Vejamos como são definidos φ_0 e φ_2. $\varphi_0 : k \longrightarrow k^*$ deve ser um isomorfismo em $\mathcal{M}_k^{f\,op}$, ou seja, é um isomorfismo $\varphi_0 : k^* \to k$ em $\mathcal{M}_k^f$, então definimos $\varphi_0(f) = f(1_k)$ para todo $f \in k^*$.

Já o isomorfismo natural $\varphi_2 : \otimes^{op} \circ ((\_)^*, (\_)^*) \Longrightarrow (\_)^* \circ \otimes$, deve ser um isomorfismo em $\mathcal{M}_k^{f\,op}$: $\varphi_2(M, N) : M^* \otimes^{op} N^* \longrightarrow (M \otimes N)^*$ para cada M, N k-módulos projetivos finitamente gerados, ou equivalentemente, um isomorfismo em $\mathcal{M}_k^f$:

$$\varphi_2(M, N) : (M \otimes N)^* \longrightarrow N^* \otimes M^*$$

para cada M, N k-módulos projetivos finitamente gerados. Assim, definimos $\varphi_2(M, N) = \iota^{-1}$ onde ι é a seguinte aplicação já conhecida:

$$
\begin{aligned}
\iota \;:\; & N^* \otimes M^* \longrightarrow (M \otimes N)^* \\
& \langle \iota(n^* \otimes m^*), m \otimes n \rangle = \langle n^*, n \rangle \langle m^*, m \rangle
\end{aligned}
$$

e sua inversa é dada por:

$$\iota^{-1}(u) = \sum_{i,j} \langle u, m_i \otimes n_j \rangle n_j^* \otimes m_i^*$$

com $\{(m_i, m_i^*) \in M \times M^*\}$ e $\{(n_j, n_j^*) \in N \times N^*\}$ as bases duais finitas de M e N, respectivamente.

Note que, apesar das bases duais de M e N não serem únicas, a inversa de uma aplicação k-linear é, e portanto, a definição de φ_2 independe das bases duais finitas usadas.

Em [5] (Teorema 5.3) usa-se o funtor monoidal forte $((\_)^*, \varphi_0, \varphi_2)$ para induzir uma 2-equivalência entre as 2-categorias: ${}_{\mathcal{M}_k^f}\underline{\underline{\underline{Cat}}}$ e ${}^{\mathcal{M}_k^f}\underline{\underline{\underline{Cat}}}$. Mais ainda, se partirmos do funtor $(\_)^*$ trocando $\mathcal{M}_k^f$ por $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_k^f)$ obtemos uma 2-equivalência entre as 2-categorias: ${}_{\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_k^f)}\underline{\underline{\underline{Cat}}}$ e ${}^{\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{M}_k^f)}\underline{\underline{\underline{Cat}}}$ (Teorema 5.5, [5]). Essa 2-equivalência pode ser completada com a antípoda de modo a gerar uma correspondência entre as $\mathcal{M}_k^f$-categorias de Hopf e as $\mathcal{M}_k^f$-categorias de Hopf duais (Teorema 5.6, [5]). A seguir apresentamos o principal resultado decorrente dessas ideias.

Teorema 3.2.3 ([5])**.** *Seja $\mathcal{M}_k^f$ a categoria dos k-módulos projetivos finitamente gerados, com k um anel comutativo. Temos uma 2-equivalência:*

$${}_{\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_k^f)}\underline{\underline{Cat}} \longrightarrow {}^{\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{M}_k^f)}\,\underline{\underline{Cat}}$$

Mais ainda, com essa 2-equivalência, $\mathcal{M}_k^f$-categorias de Hopf correspondem a $\mathcal{M}_k^f$-categorias de Hopf duais.

Demonstração. Daremos aqui uma descrição explícita dessa 2-equivalência a nível dos objetos.

Dada A uma $\mathcal{M}_k^f$-categoria de Hopf, então temos $A = (A_{x,y})_{x,y\in X}$ uma família de k-módulos projetivos finitamente gerados, em que para cada $x, y \in X$, $(A_{x,y}, \Delta_{x,y}, \varepsilon_{x,y})$ é coálgebra. Temos também os morfismos k-lineares, que também são morfismos de coálgebra:

$$\begin{aligned} m_{x,y,z} &: A_{x,y} \otimes A_{y,z} \to A_{x,z} \\ \eta_x &: k \to A_{x,x} \end{aligned}$$

satisfazendo os diagramas (3.1) e (3.2) para todo $x, y, z \in X$. E ainda, temos os morfismos k-lineares

$$\mathcal{S}_{x,y} : A_{x,y} \to A_{y,x}$$

tal que as condições (3.5) e (3.6) são satisfeitas para todo $x, y \in X$.

A $\mathcal{M}_k^f$-categoria de Hopf dual correspondente é: $C = (C_{x,y})_{x,y\in X}$, com $C_{x,y} = A^*_{y,x}$. Para cada $x, y \in X$, $C_{x,y}$ é uma k-álgebra com:

- multiplicação: $m^C_{x,y} = \Delta^*_{y,x} \circ \iota$, que em elementos é dada pela convolução oposta:

$$\langle cd, a\rangle \;=\; \langle c, a_{(2)}\rangle\langle d, a_{(1)}\rangle, \text{ para todo } c, d \in C_{x,y}, a \in A_{y,x}$$

- unidade dada por $1_{x,y} = \varepsilon_{y,x}$

A comultiplicação é dada pela família de morfismos $\Delta_{x,y,z} : C_{x,z} \to C_{x,y} \otimes C_{y,z}$ definida por $\Delta_{x,y,z} = \varphi_2 \circ m^*_{z,y,x}$. Assim, denotando para $c \in C_{x,z}$, $\Delta_{x,y,z}(c) = c_{(1,x,y)} \otimes c_{(2,y,z)}$, podemos caracterizar essa aplicação por

$$\langle c_{(1,x,y)}, b\rangle\langle c_{(2,y,z)}, a\rangle = \langle c, ab\rangle, \text{ para todo } c \in C_{x,z}, a \in A_{z,y}, b \in A_{y,x}.$$

As aplicações counidade $\varepsilon_x : C_{x,x} \to k$ são dadas por $\varepsilon_x(c) = \langle c, 1_{x,x}\rangle$ e a antípoda $T_{x,y} : C_{y,x} \to C_{x,y}$ é dada por $T_{x,y} = \mathcal{S}^*_{y,x}$.

Por outro lado, se começarmos com C uma $\mathcal{M}_k^f$-categoria de Hopf dual, então a $\mathcal{M}_k^f$-categoria de Hopf correspondente é $A = (A_{x,y})_{x,y\in X}$, com $A_{x,y} = C^*_{y,x}$. Cada $A_{x,y}$ é uma k-coálgebra com:

- comultiplicação: $\Delta^A_{x,y} = \varphi_2 \circ m^*_{y,x}$, ou seja, para $a \in A_{x,y}$ temos:

$$\Delta^A_{x,y}(a) = \sum_{i,j}\langle a, c_i c_j\rangle a_j \otimes a_i,$$

  onde $\{(c_i, a_i) \in C_{y,x} \times A_{x,y}\}_{\{i=1,\ldots,n\}}$ é uma base dual finita do k-módulo projetivo $C_{y,x}$.

- counidade $\varepsilon_{x,y}(a) = \langle a, 1_{y,x}\rangle$.

A multiplicação é dada pela família de morfismos: $m^A_{x,y,z} : A_{x,y} \otimes A_{y,z} \to A_{x,z}$ definida por: $m^A_{x,y,z} = \Delta^*_{z,y,x} \circ \iota$, que em elementos significa que

$$\langle ab, c\rangle = \langle a, c_{(2,y,x)}\rangle\langle b, c_{1,z,y}\rangle$$

para todo $a \in A_{x,y}, b \in A_{y,z}$ e $c \in C_{z,x}$.

A unidade é dada por $\eta_x(1_k) = 1_{x,x} = \varepsilon_x$.

Por fim, a antípoda $\mathcal{S}_{x,y} : A_{x,y} \to A_{y,x}$, é dada por $\mathcal{S}_{x,y} = T^*_{y,x}$, com $T_{y,x} : C_{x,y} \to C_{y,x}$ sendo a antípoda na $\mathcal{M}^f_k$-categoria de Hopf dual C.

□

No teorema anterior descrevemos explicitamente como, no caso de $\mathcal{V} = \mathcal{M}^f_k$, podemos levar uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf em uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf dual, e vice-versa, mas note que também podemos fazer esssa correspondência entre $\mathcal{V}$-categorias e $\mathcal{V}$-categorias duais, ou entre $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias e $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categorias duais, apenas restringindo aos sujeitos adequados de cada definição. Independente de qual for o caso, para nos referenciarmos a essa correspondência vamos utilizar uma notação especial: $\star$.

Definição 3.2.4 (NOTAÇÃO). *Se A é uma $\mathcal{M}^f_k$-categoria de Hopf, $A^\star$ é a $\mathcal{M}^f_k$-categoria de Hopf dual correspondente pela 2-equivalência do Teorema 3.2.3. Do mesmo modo, se C é uma $\mathcal{M}^f_k$-categoria de Hopf dual então $C^\star$ é a $\mathcal{M}^f_k$-categoria de Hopf correspondente por 3.2.3.*

Vimos na seção anterior que podemos ter uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria oposta (Proposição 3.1.17) e também uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual oposta (Proposição 3.1.35), veremos a seguir que ainda temos uma correspondência entre as estruturas se tomarmos os opostos de ambas. A seguir vamos proceder com dois lemas em que, basicamente, vamos juntar as informações sobre categorias opostas com a correspondência anterior. Apesar destes dois lemas serem bastante imediatos, vamos detalhar as estruturas envolvidas, de modo a serem facilmente consultadas no teorema subsequente.

Lema 3.2.5. *Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}^f_k$ e A uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria de classe subjacente X. Então $A^{\star op}$ é uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual.*

Demonstração. Seja A uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}^f_k)$-categoria de classe X, então temos:

- $A = (A_{x,y})_{x,y\in X}$;
- $(A_{x,y}, \Delta_{x,y}, \varepsilon_{x,y})$ é coálgebra em $\mathcal{M}^f_k$;
- $m_{x,y,z} : A_{x,y} \otimes A_{y,z} \to A_{x,z}$ e $\eta_x : k \to A_{x,x}$ são morfismos de coálgebras satisfazendo (3.1) e (3.2).

Conforme notação dada acima, $A^\star$ é a $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual correspondente por 3.2.3, então:

- $A^\star = (A^*_{y,x})_{x,y\in X}$;
- cada $A^*_{y,x}$ é álgebra em $\mathcal{M}^f_k$ com multiplicação: $\Delta^*_{y,x} \circ \iota$ e unidade: $1^{A^\star}_{x,y} = \varepsilon_{y,x}$;

- $\Delta^{A^\star}_{x,y,z} = \varphi_2 \circ m^*_{z,y,x}$ e $\langle \varepsilon^{A^\star}_x, e\rangle = \langle e, 1_{x,x}\rangle$ para $e \in A^*_{x,x}$.

Por fim, $A^{\star op}$ é a $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual oposta de acordo com 3.1.35 com:

- $A^{\star op} = (A^*_{x,y})_{x,y \in X}$;
- cada $A^*_{x,y}$ é álgebra em $\mathcal{M}^f_k$ com multiplicação: $\Delta^*_{x,y} \circ \iota$ e unidade: $\varepsilon_{x,y}$;
- $\Delta^{A^{\star op}}_{x,y,z} = \sigma_{A^*_{y,z},A^*_{x,y}} \circ \Delta^{A^\star}_{z,y,x} = \sigma_{A^*_{y,z},A^*_{x,y}} \circ \varphi_2 \circ m^*_{x,y,z}$ e $\varepsilon^{A^{\star op}}_x = \varepsilon^{A^\star}_x$.

□

Lema 3.2.6. *Sejam* $\mathcal{V} = \mathcal{M}^f_k$ *e* C *uma* $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$*-categoria dual de classe subjacente* X*. Então* $C^{\star op}$ *é uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categoria.*

Demonstração. Seja C uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{M}^f_k)$-categoria dual de classe X, então temos:

- $C = (C_{x,y})_{x,y \in X}$;
- $(C_{x,y}, m_{x,y}, \eta_{x,y})$ é álgebra em $\mathcal{M}^f_k$;
- $\Delta_{x,y,z} : C_{x,z} \to C_{x,y} \otimes C_{y,z}$ e $\varepsilon_x = C_{x,x} \to k$ são morfismos de álgebras satisfazendo (3.13) e (3.14).

Agora, $C^\star$ é a $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria correspondente por 3.2.3, então:

- $C^\star = (C^*_{y,x})_{x,y \in X}$;
- cada $C^*_{y,x}$ é uma coálgebra em $\mathcal{M}^f_k$, com comultiplicação: $\varphi_2 \circ {m_{y,x}}^*$ e counidade: $\langle \varepsilon^{C^\star}_{x,y}, f\rangle = \langle f, 1^C_{y,x}\rangle$ para $f \in C^*_{y,x}$;
- $m^{C^\star}_{x,y,z} = {\Delta_{z,y,x}}^* \circ \iota$ e $\eta^{C^\star}_x(1_k) = \varepsilon_x$.

Por fim, $C^{\star op}$ é a $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria oposta de acordo com 3.1.17 com:

- $C^{\star op} = (C^*_{x,y})_{x,y \in X}$;
- cada $C^*_{x,y}$ é uma coálgebra em $\mathcal{M}^f_k$, com comultiplicação: $\varphi_2 \circ {m_{x,y}}^*$ e counidade: $\langle \varepsilon^{C^\star}_{y,x}, f\rangle = \langle f, 1^C_{x,y}\rangle$ para $f \in C^*_{x,y}$;
- $m^{C^{\star op}}_{x,y,z} = m^{C^\star}_{z,y,x} \circ \sigma_{C^*_{x,y},C^*_{y,z}} = {\Delta_{x,y,z}}^* \circ \iota \circ \sigma_{C^*_{x,y},C^*_{y,z}}$ e $\eta^{C^{\star op}}_x = \eta^{C^\star}_x$.

□

Os dois lemas anteriores constroem uma nova $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual, e uma nova $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria, respectivamente; tomando o objeto correspondente pelo Teorema 3.2.3 e em seguida o oposto. Isso nos leva a seguinte pergunta: há alguma diferença no objeto final, se tomarmos primeiramente o oposto e em seguida o objeto correspondente por 3.2.3? É o que respondemos no resultado a seguir.

Proposição 3.2.7. *Seja* $\mathcal{V} = \mathcal{M}^f_k$*.*

1) Se A *é uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categoria, então* $A^{op\star}$ *é a* $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$*-categoria dual* $A^{\star op}$*;*

2) Se C *é uma* $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$*-categoria dual, então* $C^{op\star}$ *é a* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categoria* $C^{\star op}$*.*

Demonstração. 1) Primeiramente note que podemos obter uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual $A^{op\star}$, considerando a $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria oposta A^{op} conforme 3.1.17 e em seguida considerando a $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual correspondente por 3.2.3. É fácil ver que $A^{op\star} = (A^*_{x,y})_{x,y\in X}$, onde cada $A^*_{x,y}$ é álgebra em $\mathcal{M}^f_k$ com mesma multiplicação e mesma unidade de $A^{\star op}$; também $\varepsilon^{A^{op\star}}_x = \varepsilon^{A^{\star op}}_x$. O que dá um pouco de trabalho e que vamos detalhar aqui é a verificação de que $\Delta^{A^{op\star}}_{x,y,z} = \Delta^{A^{\star op}}_{x,y,z}$. De fato, seja $f \in A^*_{x,z}$ temos por um lado:

$$\begin{aligned}
\Delta^{A^{op\star}}_{x,y,z}(f) &= (\varphi_2 \circ (m^{op}_{z,y,x})^*)(f) = \varphi_2 \underbrace{(m_{x,y,z} \circ \sigma_{A_{y,z},A_{x,y}})^*(f)}_{\in (A_{y,z}\otimes A_{x,y})^*} \\
&= \sum_{i,j} \langle (m_{x,y,z} \circ \sigma_{A_{y,z},A_{x,y}})^*(f), a^{y,z}_i \otimes a^{x,y}_j\rangle f^{x,y}_j \otimes f^{y,z}_i \\
&= \sum_{i,j} \langle f, (m_{x,y,z} \circ \sigma_{A_{y,z},A_{x,y}})(a^{y,z}_i \otimes a^{x,y}_j)\rangle f^{x,y}_j \otimes f^{y,z}_i \\
&= \sum_{i,j} \langle f, a^{x,y}_j a^{y,z}_i\rangle f^{x,y}_j \otimes f^{y,z}_i
\end{aligned}$$

onde $\{(a^{y,z}_i, f^{y,z}_i) \in A_{y,z} \times A^*_{y,z}\}$ e $\{(a^{x,y}_j, f^{x,y}_j) \in A_{x,y} \times A^*_{x,y}\}$ são bases duais finitas de $A_{y,z}$ e $A_{x,y}$, respectivamente.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Delta^{A^{\star op}}_{x,y,z}(f) &= (\sigma_{A^*_{y,x},A^*_{x,y}} \circ \varphi_2 \circ m^*_{x,y,z})(f) \\
&= \sigma_{A^*_{y,x},A^*_{x,y}}(\varphi_2 \underbrace{(m^*_{x,y,z}(f))}_{\in (A_{x,y}\otimes A_{y,z})^*}) \\
&= \sigma_{A^*_{y,x},A^*_{x,y}} \left(\sum_{i,j} \langle m^*_{x,y,z}(f), a^{x,y}_j \otimes a^{y,z}_i\rangle f^{y,z}_i \otimes f^{x,y}_j \right) \\
&= \sum_{i,j} \langle f, a^{x,y}_j a^{y,z}_i\rangle f^{x,y}_j \otimes f^{y,z}_i.
\end{aligned}$$

Portanto, as $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categorias duais $A^{op\star}$ e $A^{\star op}$ são as mesmas.

2) De forma análoga.

□

Os lemas 3.2.5 e 3.2.6 nos dão uma outra forma de correspondência entre $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias e $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categorias, quando $\mathcal{V} = \mathcal{M}^f_k$. No primeiro, partimos de uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria e obtemos uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria, e no segundo temos uma forma de fazer o caminho inverso. Assim, a pergunta natural que surge é, se aplicarmos na sequência os dois lemas anteriores, obteremos uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria isomorfa a original?

Teorema 3.2.8. *Seja A uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria com $\mathcal{V} = \mathcal{M}^f_k$. Considere C a $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual $A^{\star op}$ e B a $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria $C^{\star op}$. Então A e B são $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias isomorfas.*

Demonstração. Como A e B são $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias, vamos mostrar que existe um $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-funtor $\zeta : A \to B$ e que para cada $x, y \in X$, $\zeta_{x,y} : A_{x,y} \to B_{x,y}$ é um isomorfismo em $\mathcal{M}^f_k$, de acordo com a Definição 3.1.22.

Mas note que pelos lemas 3.2.5 e 3.2.6 acima, para cada $x, y \in X$ temos:

$$B_{x,y} = C^*_{x,y} = A^{**}_{x,y}$$

e, além disso, cada $A_{x,y}$ é k-módulo projetivo finitamente gerado, então já temos um isomorfismo k-linear $\zeta_{x,y} : A_{x,y} \to A^{**}_{x,y}$ de acordo com 3.2.2, dado por:

$$\langle \zeta_{x,y}(a), g\rangle = \langle g, a\rangle$$

para todo $a \in A_{x,y}$, $g \in A^*_{x,y}$.

Vejamos que $\zeta_{x,y}$ é morfismo de coálgebras, ou seja, que $\Delta^B_{x,y} \circ \zeta_{x,y} = (\zeta_{x,y} \otimes \zeta_{x,y}) \circ \Delta^A_{x,y}$ e que $\varepsilon^B_{x,y} \circ \zeta_{x,y} = \varepsilon^A_{x,y}$. Para $a \in A_{x,y}$, usando as descrições dos morfismos dados nos lemas 3.2.5 e 3.2.6 temos para todo $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}
(\Delta^B_{x,y} \circ \zeta_{x,y})(a) &= (\varphi_2 \circ {m^C_{x,y}}^* \circ \zeta_{x,y})(a) \\
&= (\varphi_2 \circ (\Delta^*_{x,y} \circ \iota)^* \circ \zeta_{x,y})(a) \\
&= \varphi_2(\underbrace{(\Delta^*_{x,y} \circ \iota)^*(\zeta_{x,y}(a))}_{\in (A^*_{x,y} \otimes A^*_{x,y})^*}).
\end{aligned}$$

Considere então $\{(f^{x,y}_i, \phi^{x,y}_i) \in A^*_{x,y} \times A^{**}_{x,y}\}$ base dual finita de $A^*_{x,y}$, temos:

$$\begin{aligned}
(\Delta^B_{x,y} \circ \zeta_{x,y})(a) &= \varphi_2((\Delta^*_{x,y} \circ \iota)^*(\zeta_{x,y}(a))) \\
&= \sum_{i,j} \langle (\Delta^*_{x,y} \circ \iota)^*(\zeta_{x,y}(a)), f^{x,y}_i \otimes f^{x,y}_j\rangle \; \phi^{x,y}_j \otimes \phi^{x,y}_i \\
&= \sum_{i,j} \langle \zeta_{x,y}(a), \underbrace{(\Delta^*_{x,y} \circ \iota)(f^{x,y}_i \otimes f^{x,y}_j)}_{\in A^*_{x,y}}\rangle \; \phi^{x,y}_j \otimes \phi^{x,y}_i \\
&= \sum_{i,j} \langle (\Delta^*_{x,y} \circ \iota)(f^{x,y}_i \otimes f^{x,y}_j), a\rangle \; \phi^{x,y}_j \otimes \phi^{x,y}_i \\
&= \sum_{i,j} \langle \iota(f^{x,y}_i \otimes f^{x,y}_j), \Delta_{x,y}(a)\rangle \; \phi^{x,y}_j \otimes \phi^{x,y}_i \\
&= \sum_{i,j} \langle f^{x,y}_i, a_2\rangle \langle f^{x,y}_j, a_1\rangle \; \phi^{x,y}_j \otimes \phi^{x,y}_i \\
&= \sum_{j} \langle f^{x,y}_j, a_1\rangle \; \phi^{x,y}_j \otimes \sum_{i} \langle f^{x,y}_i, a_2\rangle \; \phi^{x,y}_i \\
&= \sum_{j} \langle \zeta_{x,y}(a_1), f^{x,y}_j\rangle \; \phi^{x,y}_j \otimes \sum_{i} (\zeta_{x,y}(h_2))(f^{x,y}_i) \; \phi^{x,y}_i \qquad \text{por (3.17)} \\
&= \zeta_{x,y}(a_1) \otimes \zeta_{x,y}(a_2) \\
&= [(\zeta_{x,y} \otimes \zeta_{x,y}) \circ \Delta^A_{x,y}](a).
\end{aligned}$$

Também temos, para todo $a \in A_{x,y}$:

$$(\varepsilon^B_{x,y} \circ \zeta_{x,y})(a) = \langle \zeta_{x,y}(a), 1^C_{x,y}\rangle = \langle \zeta_{x,y}(a), \varepsilon_{x,y}\rangle = \langle \varepsilon^A_{x,y}, a\rangle.$$

Logo, temos que $\zeta_{x,y}$ é morfismo de coálgebras para todo $x, y \in X$.

Vejamos que $\zeta : A \to B$ é de fato um $\mathcal{V}$-funtor, ou seja, que $\zeta_{x,z} \circ m^A_{x,y,z} = m^B_{x,y,z} \circ (\zeta_{x,y} \otimes \zeta_{y,z})$ e $\zeta_{x,x} \circ \eta^A_x = \eta^B_x$ para todo $x, y, z \in X$. Sejam $a \in A_{x,y}$, $b \in A_{y,z}$ e

$g \in A^*_{x,z}$, então:

$$\begin{aligned} & \langle (m^B_{x,y,z} \circ (\zeta_{x,y} \otimes \zeta_{y,z}))(a \otimes b), g \rangle \\ = \; & \langle ({\Delta^C_{x,y,z}}^* \circ \iota)(\sigma_{C^*_{x,y},C^*_{y,z}}(\zeta_{x,y}(a) \otimes \zeta_{y,z}(b))), g \rangle \\ = \; & \langle (((\sigma_{A^*_{y,z},A^*_{x,y}} \circ \varphi_2 \circ m^*_{x,y,z})^* \circ \iota)(\zeta_{y,z}(b) \otimes \zeta_{x,y}(a)), g \rangle \\ = \; & \langle ((\sigma_{A^*_{y,z},A^*_{x,y}} \circ \varphi_2 \circ m^*_{x,y,z})^*(\iota(\zeta_{y,z}(b) \otimes \zeta_{x,y}(a))), g \rangle \\ = \; & \langle \iota(\zeta_{y,z}(b) \otimes \zeta_{x,y}(a)), (\sigma_{A^*_{y,z},A^*_{x,y}} \circ \varphi_2 \circ m^*_{x,y,z})(g) \rangle \\ = \; & \langle \iota(\zeta_{y,z}(b) \otimes \zeta_{x,y}(a)), (\sigma_{A^*_{y,z},A^*_{x,y}}(\varphi_2(\underbrace{m^*_{x,y,z}(g)}_{\in (A_{x,y} \otimes A_{y,z})^*}))) \rangle \\ = \; & \langle \iota(\zeta_{y,z}(b) \otimes \zeta_{x,y}(a)), \sigma_{A^*_{y,z},A^*_{x,y}} \left(\sum_{i,j} \langle m^*_{x,y,z}(g), a_i^{x,y} \otimes a_j^{y,z} \rangle f_j^{y,z} \otimes f_i^{x,y} \right) \rangle \end{aligned}$$

com $\{(a_i^{x,y}, f_i^{x,y}) \in A_{x,y} \times A^*_{x,y}\}$ e $\{(a_j^{y,z}, f_j^{y,z}) \in A_{y,z} \times A^*_{y,z}\}$ as bases duais finitas de $A_{x,y}$ e $A_{y,z}$, respectivamente.

$$\begin{aligned} = \; & \langle \iota(\zeta_{y,z}(b) \otimes \zeta_{x,y}(a)), \sum_{i,j} \langle m^*_{x,y,z}(g), a_i^{x,y} \otimes a_j^{y,z} \rangle f_i^{x,y} \otimes f_j^{y,z} \rangle \\ = \; & \sum_{i,j} \langle m^*_{x,y,z}(g), a_i^{x,y} \otimes a_j^{y,z} \rangle \; \langle \iota(\zeta_{y,z}(b) \otimes \zeta_{x,y}(a)), f_i^{x,y} \otimes f_j^{y,z} \rangle \\ = \; & \sum_{i,j} \langle m^*_{x,y,z}(g), a_i^{x,y} \otimes a_j^{y,z} \rangle \langle \zeta_{y,z}(b), f_j^{y,z} \rangle \langle \zeta_{x,y}(a), f_i^{x,y} \rangle \\ = \; & \langle m^*_{x,y,z}(g), \sum_i a_i^{x,y} \langle f_i^{x,y}, a \rangle \otimes \sum_j a_j^{y,z} \langle f_j^{y,z}, b \rangle \rangle \qquad \text{por (3.17)} \\ = \; & \langle m^*_{x,y,z}(g), a \otimes b \rangle \\ = \; & \langle g, m^A_{x,y,z}(a \otimes b) \rangle \\ = \; & \langle \zeta_{x,z}(m^A_{x,y,z}(a \otimes b)), g \rangle \\ = \; & \langle (\zeta_{x,z} \circ m^A_{x,y,z})(a \otimes b), g \rangle. \end{aligned}$$

Por fim, seja $g \in A^*_{x,x}$, então

$$\begin{aligned} \langle \eta^B_x(1_k), g \rangle \; = \; & \langle \eta^{C^\star}_x(1_k), g \rangle = \langle \varepsilon^C_x, g \rangle = \langle \varepsilon^{A^\star}_x, g \rangle = \langle g, 1_{x,x} \rangle = \langle \zeta_{x,x}(1_{x,x}), g \rangle \\ = \; & \langle (\zeta_{x,x} \circ \eta^A_x)(1_k), g \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\zeta : A \to B$ é um $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-funtor e podemos concluir que A e B são $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias isomorfas.

□

Este último teorema pode parecer estranho num primeiro momento, afinal, porque usar opostos em uma correspondência que já estava estabelecida? Porém, veremos na seção 5.1 em que buscamos correspondências entre módulos e comódulos, que este isomorfismo será fundamental.

Capítulo 4

AÇÕES E COAÇÕES DE CATEGORIAS DE HOPF

Neste capítulo temos como objetivo definir ações e coações para $\mathcal{V}$-categorias de Hopf, que sejam de alguma maneira análogas ao que fizemos na seção 2.2 pra álgebras de Hopf em uma categoria monoidal trançada. Vamos analisar as definições já existentes na literatura, principalmente as dadas nos artigos [5] e [8], em que temos definições de módulo e comódulo envolvendo $\mathcal{V}$-categorias. Além disso, temos também um produto smash chamado produto smash cluster e uma definição de extensão de Galois em [8].

4.1 AÇÕES E COAÇÕES DE CATEGORIAS DE HOPF

Vamos dividir essa seção em quatro subseções: na primeira vamos obter uma definição de ação da categoria de Hopf, por meio dessa definição obteremos um produto smash que será o tema da segunda subseção. Já a terceira subseção se limitará à coação de uma categoria de Hopf e com essa definição de coação obter-se-á uma extensão de Galois, tema da quarta subseção.

4.1.1 Ações de categorias de Hopf

Dada uma álgebra de Hopf H, sabe-se que H atua nela mesma por uma ação adjunta, conforme Exemplo 1.1.4 e, de modo mais geral, conforme (2.41). Queremos determinar de forma análoga, uma ação adjunta para uma categoria de Hopf. No artigo [5] temos uma definição de módulo sobre uma $\mathcal{V}$-categoria, porém ela não se mostra adequada para alcançar esse objetivo.

Nessa seção definiremos um módulo diagonal, o que nos permite obter a definição de ação diagonal de uma categoria de Hopf e consequentemente nos fornece uma ação adjunta para uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf análoga àquela dada em (2.41). Também mostraremos de que forma esta ação diagonal se relaciona com outras definições de ações existentes, como no caso da ação de grupóide em conjunto, e da ação de grupóide em álgebra.

Iniciemos com a definição de módulo sobre uma $\mathcal{V}$-categoria dada por [5]:

Definição 4.1.1 ([5]). *Seja A uma $\mathcal{V}$-categoria. Um A-**módulo à esquerda** é um objeto $M \in \mathcal{V}(X)$ juntamente com uma família de morfismos $\psi = \psi_{x,y,z} : A_{x,y} \otimes M_{y,z} \longrightarrow M_{x,z}$*

em $\mathcal{V}$ *tal que as seguintes condições de associatividade e unidade valem para* $x, y, z, u \in X$*:*

$$\psi_{x,y,u} \circ (A_{x,y} \otimes \psi_{y,z,u}) = \psi_{x,z,u} \circ (m_{x,y,z} \otimes M_{z,u}) \tag{4.1}$$

$$\psi_{x,x,y} \circ (\eta_x \otimes M_{x,y}) = M_{x,y} \tag{4.2}$$

ou seja, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes M_{z,u} \arrow[r, "A_{x,y}\otimes\psi_{y,z,u}"] \arrow[d, "m_{x,y,z}\otimes M_{z,u}"'] & A_{x,y} \otimes M_{y,u} \arrow[d, "\psi_{x,y,u}"] \\
A_{x,z} \otimes M_{z,u} \arrow[r, "\psi_{x,z,u}"'] & M_{x,u}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes M_{x,y} \arrow[r, "\eta_x\otimes M_{x,y}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A_{x,x} \otimes M_{x,y} \arrow[d, "\psi_{x,x,y}"] \\
 & M_{x,y}
\end{tikzcd}$$

Vamos começar analisando qual deveria ser a forma da família de morfismos, para que tivéssemos uma ação adjunta em uma categoria de Hopf, e se a Definição 4.1.1 pode ser aproveitada para esse objetivo.

De agora em diante, $\mathcal{H}$ denotará uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf, ou uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria nos casos em que isso é suficiente. Assim, fixemos $\mathcal{H}$ uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf; $\mathcal{H} = (H_{x,y})_{x,y \in X}$ é uma família de objetos da categoria $\mathcal{V}$ indexados por $X \times X$ e uma ação de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ deve ser dada por uma família de morfismos, cuja fonte é, a princípio, um objeto da forma $H_{x,y} \otimes H_{z,w}$, com $x, y, z, w \in X$ (ou $H_{x,y} \otimes H_{y,w}$, se quisermos utilizar a definição conhecida 4.1.1).

Lembre-se que em (2.41), a ação adjunta α foi definida através da composição dos morfismos:

$$\alpha = m \circ (m \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \mathcal{S}) \circ (H \otimes \sigma_{H,H}) \circ (\Delta \otimes H).$$

De modo análogo, podemos aplicar no lugar de Δ, o morfismo $\Delta_{x,y} : H_{x,y} \to H_{x,y} \otimes H_{x,y}$, já que $H_{x,y}$ é coálgebra em uma categoria de Hopf, para todo $x, y \in X$. A trança σ deve ser a trança da categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$ na qual a categoria de Hopf está definida. No lugar da antípoda $\mathcal{S}$ podemos usar o morfismo $\mathcal{S}_{x,y} : H_{x,y} \to H_{y,x}$, e por fim, o morfismo multiplicação $m_{x,y,z} : H_{x,y} \otimes H_{y,z} \to H_{x,z}$, para todo $x, y, z \in X$ ao invés de m. Ou seja, a possível ação adjunta para uma categoria de Hopf seria a família da composição dos morfismos:

$$m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,w} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes H_{z,w} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y} \otimes H_{z,w}}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_{z,w}).$$

Porém, ao utilizar esses morfismos, alguns índices devem ser adequados, como pode ser observado no diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y} \otimes H_{z,w} \arrow[r, "\Delta_{x,y} \otimes H_{z,w}"] & H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{z,w} \arrow[d, "H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y} \otimes H_{z,w}}" description] & \\
& H_{x,y} \otimes H_{z,w} \otimes H_{x,y} \arrow[r, "H_{x,y} \otimes H_{z,w} \otimes \mathcal{S}_{x,y}"] & H_{x,y} \otimes H_{z,w} \otimes H_{y,x} \arrow[d, "m_{x,y,w} \otimes H_{y,x}" description, "\text{se } y = z"'] \\
& & H_{x,w} \otimes H_{y,x} \arrow[d, "m_{x,y,x}" description, "\text{se } w = y"'] \\
& & H_{x,x}
\end{tikzcd}$$

Note que mesmo que partíssemos do objeto fonte da ação $H_{x,y} \otimes H_{y,w}$, como na Definição 4.1.1, ainda assim, obteríamos que $w = y$ e chegaríamos num objeto $H_{x,x}$ ao invés de $H_{x,y}$ como requer essa definição.

Portanto, para generalizar a ação adjunta para uma categoria de Hopf parece ser necessário definir uma família de morfismos de $H_{x,y} \otimes H_{y,y}$ em $H_{x,x}$, o que nos motiva a modificar a definição de A-módulo dada em [5].

Além disso, essa forma dos índices remete a uma ação 'diagonal' nos objetos. Já existem algumas definições na literatura ([8]) que envolvem essa ideia de ser 'diagonal'; essas definições são necessárias, em particular, na seção 4.2 sobre produto smash cluster, mas optamos por apresentá-las aqui para utilizar o que for possível delas na nova definição de ação. Assim, baseadas nas definições de [8] para a categoria $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$, temos:

Definição 4.1.2. *Uma **categoria diagonal**, denotada por $\mathcal{D}(X)$ é a categoria onde os objetos são famílias de objetos em $\mathcal{V}$ indexados por X, ou seja, $M = (M_x)_{x \in X}$ com $M_x \in \mathcal{V}$, é objeto de $\mathcal{D}(X)$. E um morfismo f em $\mathcal{D}(X)$ entre dois objetos M e N é uma família de morfismos $f_x : M_x \to N_x$, indexados por X.*

Se $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ denotamos uma categoria diagonal por $\mathcal{D}_k(X)$ ([8]).

Definição 4.1.3. *Uma **álgebra em** $\mathcal{D}(X)$ é uma família de álgebras $A = (A_x)_{x \in X}$ em $\mathcal{V}$ indexadas por X.*

Observação 4.1.4. *Note que:*

1) *Uma categoria diagonal é uma categoria monoidal, com produto tensorial definido nos objetos por $(M \otimes N)_x = M_x \otimes N_x$ e objeto unidade $J = (J_x)_{x \in X}$, com $J_x = I$ para todo $x \in X$;*

2) *Uma álgebra em $\mathcal{D}(X)$ é uma álgebra na categoria monoidal $\mathcal{D}(X)$ (Definição 2.1.16).*

Definição 4.1.5 ([8])**.** *Se A é uma álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$, A pode ser vista como uma categoria k-linear da seguinte forma: $A_{x,y} = \left\{ \begin{array}{l} A_x, \text{ se } x = y \\ \{0\}, \text{ se } x \neq y \end{array} \right.$. A é dita então uma **categoria k-linear diagonal**.*

Como $\mathcal{D}(X)$ é uma categoria monoidal, podemos definir um módulo nessa categoria, conforme a Definição 2.2.1:

Definição 4.1.6. *Seja A uma álgebra em $\mathcal{D}(X)$. Um **A-módulo à esquerda** é um objeto $N \in \mathcal{D}(X)$ tal que todo N_x é A_x-módulo à esquerda. Em outras palavras, é um A-módulo à esquerda em $\mathcal{D}(X)$.*

Se $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ denota-se por ${}_A\mathcal{D}_k(X)$ a categoria dos A-módulos à esquerda em $\mathcal{D}_k(X)$ e morfismos A-lineares à esquerda ([8]).

A Definição 4.1.6 para o caso $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$ é dada por [8], que chama esses módulos de módulos diagonais. Aqui não vamos chamar esses módulos dessa forma, pois reservamos o termo 'diagonal' para uma nova definição de módulo que apresentaremos a seguir. Nesta nova definição, é uma $\mathcal{V}$-categoria que age em um objeto de $\mathcal{D}(X)$, então dois índices variam nos morfismos.

Definição 4.1.7. *Seja A uma $\mathcal{V}$-categoria. Um **A-módulo diagonal à esquerda** é um objeto M em $\mathcal{D}(X)$, junto com uma família de morfismos em $\mathcal{V}$*

$$\alpha_{x,y} : A_{x,y} \otimes M_y \longrightarrow M_x,$$

tal que as seguintes condições de associatividade e unidade valem para todo $x, y, z \in X$

$$\alpha_{x,y} \circ (A_{x,y} \otimes \alpha_{y,z}) = \alpha_{x,z} \circ (m_{x,y,z} \otimes M_z); \tag{4.3}$$

$$\alpha_{x,x} \circ (\eta_x \otimes M_x) = M_x \tag{4.4}$$

ou seja, os seguintes diagramas comutam para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes M_z \arrow[r, "A_{x,y}\otimes\alpha_{y,z}"] \arrow[d, "m_{x,y,z}\otimes M_z"'] & A_{x,y} \otimes M_y \arrow[d, "\alpha_{x,y}"] \\
A_{x,z} \otimes M_z \arrow[r, "\alpha_{x,z}"'] & M_x
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes M_x \arrow[r, "\eta_x\otimes M_x"] \arrow[dr, "\sim"'] & A_{x,x} \otimes M_x \arrow[d, "\alpha_{x,x}"] \\
 & M_x
\end{tikzcd}$$

Também podemos definir morfismos entre A-módulos diagonais:

Definição 4.1.8. *Sejam M e N dois A-módulos diagonais à esquerda. Então um morfismo $f : M \to N$ em $\mathcal{D}(X)$ é dito um **morfismo de A-módulos diagonais à esquerda** se o seguinte diagrama comuta para todo $x, y \in X$:*

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes M_y \arrow[r, "\alpha^M_{x,y}"] \arrow[d, "A_{x,y}\otimes f_y"'] & M_x \arrow[d, "f_x"] \\
A_{x,y} \otimes N_y \arrow[r, "\alpha^N_{x,y}"'] & N_x
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

As duas definições acima nos permitem definir uma nova categoria:

Definição 4.1.9. *Seja A uma $\mathcal{V}$-categoria de classe subjacente X. A **categoria dos A-módulos diagonais à esquerda** é a categoria na qual os objetos são A-módulos* *diagonais à esquerda e os morfismos são dados pelos morfismos de A-módulos diagonais à esquerda. Denotaremos essa categoria por ${}_A\mathcal{D}Mod(X)$.*

De modo análogo, podemos definir a categoria dos A-módulos diagonais à direita, usando como objetos a versão de A-módulos diagonais à direita:

Definição 4.1.10. *Seja A uma $\mathcal{V}$-categoria. Um A-**módulo diagonal à direita** é um objeto $M \in \mathcal{D}(X)$, junto com uma família de morfismos em $\mathcal{V}$*

$$\alpha_{x,y} : M_x \otimes A_{x,y} \to M_y$$

tal que os seguintes diagramas comutam para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{tikzcd}
M_x \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z} \arrow[r, "\alpha_{x,y}\otimes A_{y,z}"] \arrow[d, "M_x\otimes m_{x,y,z}"'] & M_y \otimes A_{y,z} \arrow[d, "\alpha_{y,z}"] \\
M_x \otimes A_{x,z} \arrow[r, "\alpha_{x,z}"'] & M_z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M_x \otimes I \arrow[r, "M_x\otimes\eta_x"] \arrow[dr, "\sim"'] & M_x \otimes A_{x,x} \arrow[d, "\alpha_{x,x}"] \\
 & M_x
\end{tikzcd}$$

Neste trabalho usaremos A-módulos diagonais à esquerda, asim, quando citarmos apenas um A-módulo diagonal, é a versão à esquerda que se refere.

Um caso particular da Definição 4.1.7 são os $\mathcal{C}$-módulos quando $\mathcal{C}$ é uma k-categoria. As k-categorias foram inicialmente estudadas por Mitchell em [27] e [28] e são casos particulares de $\mathcal{V}$-categorias. Cibils e Solotar em [12] também usam $\Bbbk$-categorias em uma versão que se assemelha mais a nossa definição de $\mathcal{V}$-categoria, porém considera $\Bbbk$ corpo. Assim, se $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$ com $\Bbbk$ corpo, uma $\mathcal{V}$-categoria é uma $\Bbbk$-categoria e a definição de A-módulo diagonal se torna a definição de $\mathcal{C}$-módulo dada inicialmente em [28].

O mesmo pode ser feito, com pequenas adaptações, ao considerarmos $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ com k anel comutativo, ou seja uma categoria k-linear (definição dada em 3.1.5). Vejamos a seguir com mais detalhes:

Definição 4.1.11 ([27], [12])**.** *Seja k um anel comutativo. Uma k-**categoria** é uma categoria $\mathcal{C}$ com uma classe de objetos $\mathcal{C}_0$ e cada conjunto de morfismos $\mathcal{C}_{y,x}$ de um objeto x para um objeto y é um k-módulo à direita. Além disso, a composição de aplicações de $\mathcal{C}$ é k-bilinear e cada conjunto de endomorfismos $\mathcal{C}_{x,x}$ é uma k-álgebra associativa.*

Em [27] é afirmado que uma k-categoria é uma categoria enriquecida sobre a categoria de k-módulos. A seguir veremos a demonstração dessa afirmação.

Proposição 4.1.12 ([27])**.** *Uma categoria k-linear é uma k-categoria.*

Demonstração. Dada A uma categoria k-linear, ou seja, A é uma $\mathcal{M}_k$-categoria com classe subjacente X, podemos proceder como na Proposição 3.1.4, então vemos A como uma categoria sendo X sua classe de objetos. Para cada par x, y de objetos, temos um k-módulo à direita $A_{x,y}$ dos morfismos de y em x. A multiplicação $m_{x,y,z}$ que é k-linear define a composição dos morfismos, que por consequência será k-bilinear e η_x será um morfismo k-linear que define o morfismo identidade. Juntando a isso os diagramas (3.1) e (3.2) obtemos que $A_{x,x}$ é k-álgebra associativa. Portanto A é k-categoria.

Por outro lado, tendo uma k-categoria basta fazer o caminho inverso e obtemos uma categoria k-linear. $\square$

Definição 4.1.13 ([28], [12]). *Seja $\mathcal{C}$ uma k-categoria. Um* ***$\mathcal{C}$-módulo à esquerda*** *$\mathcal{M}$ é uma coleção de k-módulos $\{M_x\}_{x\in\mathcal{C}_0}$ munido de uma ação à esquerda dos k-módulos de morfismos de $\mathcal{C}$, dado por aplicações de k-módulos $\mathcal{C}_{y,x} \otimes_k M_x \to M_y$ onde a imagem de $f_{y,x} \otimes m_x$ é denotada por $f_{y,x}\, m_x$, verificando os axiomas usuais:*

$$\begin{aligned} f_{z,y}(g_{y,x}\, m_x) &= (f_{z,y}\, g_{y,x})m_x && (4.6)\\ 1_{x,x}\, m_x &= m_x. && (4.7) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}$ ser uma k-categoria é o mesmo que ser uma categoria k-linear, é evidente que a definição acima é um caso particular de 4.1.7, basta identificar a notação utilizada. Também podemos ver, de acordo com [12], um módulo sobre uma k-categoria $\mathcal{C}$ como um funtor k-linear de $\mathcal{C}$ na categoria dos k-módulos.

No caso de $\mathcal{V} = \underline{Sets}$, sabemos que uma $\underline{Sets}$-categoria é uma categoria usual, conforme Proposição 3.1.4. A seguir buscaremos relacionar a definição dada de A-módulo diagonal, com a definição encontrada na literatura de uma ação de uma categoria em um conjunto.

Definição 4.1.14 ([24]). *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e M um conjunto. Uma* ***ação da categoria $\mathcal{C}$ em M*** *(à esquerda) é determinada por uma função $\rho : M \to \mathcal{C}^0$ e pela aplicação*

$$\begin{aligned} \theta \;:\; & \mathcal{C}_d \times_\rho M \longrightarrow M\\ & (a,m) \longmapsto a\cdot m, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_d \times_\rho M = \{(a,m) \in \mathcal{C} \times M \mid d(a) = \rho(m)\}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \rho(a\cdot m) &= r(a) && (4.8)\\ a\cdot(b\cdot m) &= (ab)\cdot m && (4.9)\\ id_{\rho(m)}\cdot m &= m && (4.10) \end{aligned}$$

para todo a, b morfismos da categoria $\mathcal{C}$ e $m \in M$, desde que a composição e as ações envolvidas existam.

Observação 4.1.15. *Na definição acima, $\mathcal{C}^0$ é a classe de objetos da categoria $\mathcal{C}$, d é a aplicação 'domain' e r é a aplicação 'range', assim dado um morfismo $a : y \to x$, $d(a) = y$ e $r(a) = x$.*

Também temos na literatura a definição de morfismo entre ações de uma categoria num conjunto.

Definição 4.1.16 ([24]). *Sejam $\theta : \mathcal{C}_d \times_\rho M \longrightarrow M$ e $\vartheta : \mathcal{B}_d \times_\rho N \longrightarrow N$ aplicações que definem, juntamente com as funções ρ^M e ρ^N, ações da categoria $\mathcal{C}$ no conjunto M e da categoria $\mathcal{B}$ no conjunto N, respectivamente. Um* ***morfismo de ações de categorias*** *é um par (F, f) dado por um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ e uma função $f : M \to N$ satisfazendo as seguintes condições:*

i) $\rho^N(f(m)) = F(\rho^M(m))$, para todo $m \in M$;

ii) Se $(a,m) \in \mathcal{C}_d \times_\rho M$, então $f(\theta(a,m)) = \vartheta(F(a), f(m))$.

Se $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ e F é o funtor identidade, então podemos trocar o par (F, f) por f e, neste caso, dizemos que f é um ***$\mathcal{C}$-homomorfismo****.*

Definição 4.1.17. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Definimos a* ***categoria das ações da categoria $\mathcal{C}$ num conjunto*** *, como a categoria onde os objetos são ações de $\mathcal{C}$ num conjunto e os morfimos são os $\mathcal{C}$-homomorfismos. Denotamos essa categoria por $_{\mathcal{C}}\underline{Sets}$.*

Proposição 4.1.18. *Se A é uma $\underline{Sets}$-categoria (categoria usual), então a categoria dos A-módulos diagonais é equivalente à categoria das ações da categoria A num conjunto.*

Demonstração. Começamos definindo um funtor $F : {}_A\mathcal{D}Mod(X) \to {}_A\underline{Sets}$ nos objetos.

Suponha que $N = \{N_x\}_{x\in X}$ é uma família de conjuntos que é um A-módulo diagonal, com A uma $\underline{Sets}$-categoria com classe subjacente X.

Defina o conjunto $M_x := \{(n, x); n \in N_x\}$ para cada $x \in X$, isso faz com que $M_x \cap M_y = \emptyset$, se $x \neq y$ e obtemos o conjunto $M := \bigcup\limits_{x\in X} M_x$, uma união disjunta de conjuntos. Defina $F(N) := M$ e vejamos que, deste modo, temos uma ação da categoria A em M.

Pela forma com que M foi construído, $\rho : M \to X$ fica bem definido com $\rho(m) = x$, para cada $m \in M_x$ e ainda, $M_x = \rho^{-1}(x)$, para cada $x \in X$. Para definir θ, tome $(a, m) \in A_d \times_\rho M$ com $a : y \to x$, então devemos ter $y = \rho(m)$, ou seja $m \in M_y$. Logo, $m = (n, y)$ com $n \in N_y$. Como já temos por hipótese uma família $\alpha_{x,y} : A_{x,y} \times N_y \to N_x$, podemos então definir

$$\theta(a, m) := (\alpha_{x,y}(a, n), x)\,,$$

para cada $a \in A_{x,y}$ e $m = (n, y) \in M_y$.

Como $\alpha_{x,y}(a, n) \in N_x$ por definição, então teremos $\theta(a, m) \in M_x$, ou seja $\rho(a \cdot m)) = x = r(a)$. Assim, a equação (4.8) é imediatamente satisfeita.

Para verificar a equação (4.9), tome $a \in A_{x,y}$, $b \in A_{y,z}$, de modo que $ab \in A_{x,z}$, então $m \in M_z$, ou seja, $m = (n, z)$ com $n \in N_z$. Usando a equação (4.3) temos:

$$a \cdot (b \cdot m) = a \cdot (\alpha_{y,z}(b, n), y) = (\alpha_{x,y}(a, \alpha_{y,z}(b, n)), x) = (\alpha_{x,z}(ab, n), x) = (ab) \cdot m$$

Por fim, para verificar (4.10), seja $m \in M_x$, então $m = (n, x)$ com $n \in N_x$ e usando (4.4), temos:

$$id_{\rho(m)} \cdot m = (\alpha_{x,x}(id_x, n), x) = (\alpha_{x,x}(\eta_x(*), n), x) = (n, x) = m.$$

Portanto, temos uma ação da categoria A no conjunto M.

Agora, vejamos como definir F nos morfismos. Seja $\varphi : N \to N'$ um morfismo de A-módulos diagonais, então temos uma família de funções $\varphi_x : N_x \to N'_x$, tal que o diagrama (4.5) comuta para todo $x, y \in X$. Precisamos definir $F(\varphi) : F(N) \to F(N')$ de modo que $F(\varphi)$ seja um A-homomorfismo.

Da primeira parte, já temos que $F(N) = M$ e $F(N') = M'$ onde:

$$M = \bigcup_{x\in X} M_x \ \text{ com } \ M_x = \{(n, x); n \in N_x\}$$
$$M' = \bigcup_{x\in X} M'_x \ \text{ com } \ M'_x = \{(n, x); n \in N'_x\}.$$

Assim, definimos $F(\varphi) := f : M \to M'$ com $f(m) = f(n, x) = (\varphi_x(n), x) \in M'_x$, para todo $m \in M_x$. Vejamos que f é A-homomorfismo. Para todo $m \in M_x$ temos:

$$\rho^{M'}(f(m)) = \rho^{M'}(\varphi_x(n), x) = x = \rho^M(m).$$

Além disso, se $(a, m) \in A_d \times_\rho M$, ou seja se $a \in A_{x,y}$ e $m \in M_y$, com $m = (n, y), n \in N_y$, então:

$$\begin{aligned} f(\theta(a,m)) &= f(\alpha^N_{x,y}(a,n), x) = (\varphi_x(\alpha^N_{x,y}(a,n)), x) \quad \text{por (4.5)} \\ &= (\alpha^{N'}_{x,y} \circ (A_{x,y} \times \varphi_y)(a,n), x) \\ &= (\alpha^{N'}_{x,y}(a, \varphi_y(n)), x) \\ &= \vartheta(a, (\varphi_y(n), y)) \\ &= a \cdot (\varphi_y(n), y) = a \cdot f(n,y) \\ &= a \cdot f(m) = \vartheta(a, f(m)). \end{aligned}$$

Logo, f é um A-homomorfismo. Pode-se verificar também que F preserva composições e identidades das categorias.

Agora, vamos definir um funtor $L : {}_A\underline{Sets} \to {}_A\mathcal{D}Mod(X)$. Suponha que temos uma ação de A em um conjunto M e que $\rho : M \to X$ é uma função. Podemos descrever o conjunto M através de ρ da seguinte forma: defina $M_x = \rho^{-1}(x)$ para $x \in X$, então $M = \bigcup\limits_x M_x$ e essa união é disjunta.

Agora note que a aplicação ação θ é definida no conjunto $A_d \times_\rho M$, assim dado um par $(a, m) \in A_d \times_\rho M$ com o morfismo $a : y \to x$ na categoria A, então $a \in A_{x,y}$ e a condição $d(a) = \rho(m)$ nos dá que $(a, m) \in A_{x,y} \times M_y$. Além disso, usando a condição (4.8) temos $\rho(a \cdot m) = r(a) = x$, para $(a, m) \in A_{x,y} \times M_y$, e portanto, $a \cdot m \in M_x$. Desse modo, definindo $N = \{M_x\}_{x \in X}$ e $\alpha_{x,y} : A_{x,y} \times M_y \to M_x$ por $\alpha_{x,y}(a, m) = a \cdot m$, obtemos a família de funções da Definição 4.1.7. Nos resta apenas verificar que as equações (4.3) e (4.4) são válidas.

Dados a e b morfismos da categoria A e $m \in M$ de modo que a condição (4.9) faça sentido, então conforme visto acima, devemos tomar $a \in A_{x,y}$ e $b \in A_{y,z}$ de modo que $ab \in A_{x,z}$ e $m \in M_z$. Então de (4.9) segue que

$$\begin{aligned} & a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m \\ \iff \quad & \alpha_{x,y}(a, \alpha_{y,z}(b, m)) = \alpha_{x,z}(ab, m) \\ \iff \quad & \alpha_{x,y} \circ (A_{x,y} \times \alpha_{y,z})(a, b, m) = \alpha_{x,z} \circ (m_{x,y,z} \times M_z)(a, b, m) \end{aligned}$$

logo a equação (4.3) é válida. Por fim, a condição (4.10) com $m \in M_x$ nos fornece:

$$id_{\rho(m)} \cdot m = \alpha_{x,x}(id_x, m) = \alpha_{x,x}(\eta_x \times M_x)(*, m) = m$$

logo a equação (4.4) é válida.

Mostramos assim que dada uma ação da categoria A num conjunto $M = \bigcup\limits_x M_x$, então $\{M_x\}_{x \in X}$ é um A-módulo diagonal.

Definamos agora o funtor L nos morfismos. Seja $f : M \to M'$ um A-homomorfismo, precisamos definir $L(f) : L(M) \to L(M')$ de forma que $L(f)$ seja um morfismo de A-módulos diagonais. Como $L(f)$ deve ser morfismo em $\mathcal{D}(X)$, defina para cada $x \in X$, $L(f)_x := \varphi_x : M_x \to M'_x$ como sendo $\varphi_x(m) = f(m)$, para todo $m \in M_x$. Vejamos que φ_x está bem definida, ou seja, que $f(m) \in M'_x$, para todo $m \in M_x$. De fato, como f é

A-homomorfismo, temos

$$\rho^{M'}f(m) = \rho^{M}(m) \quad \forall\, m \in M.$$

Assim, pela construção feita, se $m \in M_x$, $\rho^M(m) = x = \rho^{M'}f(m)$, ou seja $f(m) \in M'_x$.

Falta verificar que o diagrama (4.5) comuta para todo $x, y \in X$. De fato, para todo $a \in A_{x,y}, m \in M_y$ temos:

$$\begin{aligned}\varphi_x \circ \alpha_{x,y}(a,m) &= \varphi_x(\theta(a,m)) = f(\theta(a,m)) \quad \text{item ii) de 4.1.16}\\ &= \vartheta(a, f(m)) = \alpha_{x,y}(a, f(m))\\ &= \alpha_{x,y}(a, \varphi_y(m)) = \alpha_{x,y} \circ (A_{x,y} \times \varphi_y)(a,m).\end{aligned}$$

Logo, $L(f)$ é um morfismo em ${}_A\mathcal{D}Mod(X)$. Também pode-se verificar que L preserva composições e identidades da categoria.

Vejamos agora que existe um isomorfismo natural $\eta : 1_{{}_A\mathcal{D}Mod(X)} \to LF$. Dado um A-módulo diagonal $N = \{N_x\}_{x\in X}$, precisamos definir $\eta^N : N \to LF(N)$ de modo que η^N seja um morfismo de A-módulos diagonais. Conforme vimos acima, $F(N)$ é uma ação da categoria A no conjunto M com $M = \bigcup_{x\in X} M_x$ e $M_x = \{(n,x); n \in N_x\}$ e $L(F(N))$ é o A-módulo diagonal $P = \{M_x\}_{x\in X}$ e $\alpha^P_{x,y}(a,m) = \theta(a,m)$, para todo $a \in A_{x,y}$ e $m \in M_y$. Assim, definimos η^N como a família de funções:

$$\begin{aligned}\eta^N_x \ &: \ N_x \longrightarrow M_x\\ &\qquad n \longmapsto (n,x).\end{aligned}$$

É claro que η^N_x é uma função bijetora, já que para cada $m \in M_x$, $m = (n,x)$ com $n \in N_x$ e então podemos definir $\eta^{N^{-1}}_x : M_x \to N_x$ como sendo $\eta^{N^{-1}}_x(m) = n$.

Vejamos que η^N é morfismo de A-módulos diagonais. Para $a \in A_{x,y}$ e $n \in N_y$, temos:

$$\begin{aligned}\eta^N_x \circ \alpha^N_{x,y}(a,n) &= (\alpha^N_{x,y}(a,n), x)\\ &= \theta(a,m), \qquad (\text{com } m = (n,y))\\ &= \alpha^P_{x,y}(a,m) = \alpha^P_{x,y}(a,(n,y))\\ &= \alpha^P_{x,y}(a, \eta^N_y(n))\\ &= \alpha^P_{x,y} \circ (A_{x,y} \times \eta^N_y)(a,n).\end{aligned}$$

Por fim, para que η seja um isomorfismo natural, falta verificarmos que para cada morfismo de A-módulos diagonais $f : N \to Q$ e para todo $x \in X$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} N_x \arrow[r, "\eta^N_x"] \arrow[d, "f_x"'] & (LFN)_x = M_x \arrow[d, "(LFf)_x"] \\ Q_x \arrow[r, "\eta^Q_x"'] & (LFQ)_x = R_x \end{tikzcd}$$

Vejamos qual é o morfismo dado por $L(F(f))$. Seja f um morfismo de A-módulos diagonais, então temos uma família de funções $f_x : N_x \to Q_x$, e como vimos acima, $F(f) : \bigcup_{x\in X} M_x \to \bigcup_{x\in X} R_x$ é um A-homomorfismo dado por $F(f)(m) = (f_x(n), x)$ para todo $m = (n, x) \in M_x$. Também conforme o que fizemos acima, $L(F(f))$ será um morfismo de A-módulos diagonais, então temos uma família de funções $L(F(f))_x : M_x \to R_x$ dada por $(L(F(f)))_x(m) = F(f)(m) = (f_x(n), x)$ para todo $m = (n, x) \in M_x$.

Assim, dado $n \in N_x$, temos:

$$(LFf)_x \circ \eta_x^N(n) = (LFf)_x(n, x) = (f_x(n), x) = \eta_x^Q(f_x(n)).$$

Portanto, concluímos que η é um isomorfismo natural.

Vejamos agora que existe um isomorfismo natural $\varepsilon : FL \to 1_{{}_A\underline{Sets}}$. Dada uma ação da categoria A num conjunto M, precisamos definir $\varepsilon^M : FL(M) \to M$ de modo que ε^M seja um A-homomorfismo. Conforme vimos nas definições dos funtores F e L, $L(M)$ é um A-módulo diagonal dado pela família $\{M_x\}_{x\in X}$, enquanto que $F(L(M)) = P$ onde P é a união disjunta de P_x, com $P_x = \{(m, x); m \in M_x\}$. Assim, definimos $\varepsilon^M(p) = m$, para cada $p = (m, x) \in P_x$.

É claro que ε^M é uma bijeção, pois ${\varepsilon^M}^{-1} : M \to P$ pode ser definida por ${\varepsilon^M}^{-1}(m) = (m, x)$ para todo $m \in M_x$.

Vejamos que ε^M é um A-homomorfismo. De fato, para todo $p \in P$, $p \in P_x$ para algum $x \in X$, então $p = (m, x)$ com $m \in M_x$ e temos:

$$\rho^M(\varepsilon^M(p)) = \rho^M(m) = x = \rho^P(p).$$

Além disso, se $(a, p) \in A_\rho \times_d P$, ou seja, se $a \in A_{x,y}$ e $p = (m, y) \in P_y$, então

$$\varepsilon^M(\theta(a, p)) = \varepsilon^M(\alpha_{x,y}(a, m), x) = \alpha_{x,y}(a, m) = \alpha_{x,y}(a, \varepsilon^M(p)) = \vartheta(a, \varepsilon^M(p)).$$

Por fim, dado $f : M \to Q$ um A-homomorfismo, vejamos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
P = FL(M) \arrow[r, "\varepsilon^M"] \arrow[d, "FL(f)"'] & M = \bigcup_{x\in X} M_x \arrow[d, "f"] \\
R = FL(Q) \arrow[r, "\varepsilon^Q"'] & Q = \bigcup_{x\in X} Q_x
\end{tikzcd}$$

Da forma com que definimos os funtores F e L, sabemos que para um A - homomorfismo f dado, $L(f)$ é uma família de funções $L(f)_x : M_x \to Q_x$ com $L(f)_x(m) = f(m)$ para todo $m \in M_x$. Enquanto que $F(L(f)) : P \to R$ é um A-homomorfismo, onde $P = \bigcup_{x\in X} P_x, R = \bigcup_{x\in X} R_x$ com $P_x = \{(m, x); m \in M_x\}$ e $R_x = \{(q, x); q \in Q_x\}$. E ainda, $(F(L(f)))(p) = (F(L(f)))(m, x) = (f(m), x)$, para todo $p = (m, x) \in P_x$.

Assim, para $p \in P$, com $p = (m, x)$, temos:

$$\varepsilon^Q \circ FL(f))(p) = \varepsilon^Q(f(m), x) = f(m) = f(\varepsilon^M(p)).$$

Logo, ε é um isomorfismo natural e concluímos que as categorias ${}_A\mathcal{D}Mod(X)$ e ${}_A\underline{Sets}$ são equivalentes. ☐

Se tomarmos na Definição 4.1.7 uma $\underline{Sets}$-categoria de Hopf, então também podemos relacionar a nossa definição de módulo diagonal com a de ação de um grupóide em um conjunto dada inicialmente por Gilbert em [17]. Vejamos a seguir:

Definição 4.1.19 ([17], [33]). *Uma* ***ação de um grupóide G num conjunto não vazio*** *M é uma coleção γ de subconjuntos $M_g = M_{r(g)}$ de M e bijeções $\gamma_g : M_{g^{-1}} \longrightarrow M_g$, $g \in G$, tal que:*

i) γ_e é a aplicação identidade Id_{M_e} de M_e para todo $e \in G^0$;

ii) $\gamma_g \circ \gamma_h(m) = \gamma_{gh}(m)$, para todo $g, h \in G$ tal que gh existe e para todo $m \in M_{h^{-1}} = M_{(gh)^{-1}}$.

Nesse caso, dizemos que M é ***G-conjunto****.*

Se, além disso, a união dos subconjuntos M_e, com $e \in G^0$, é disjunta e igual a M, então dizemos que M é um ***conjunto G-split****.*

Definição 4.1.20. *Dados dois conjuntos G-split M e N. Um* ***morfismo de conjuntos G-split*** *consiste de uma função $f : M \to N$ satisfazendo as seguintes condições:*

i) $f(M_g) \subset N_g$ para todo $g \in G$;

ii) $f(\gamma_g^M(m)) = \gamma_g^N(f(m))$, para todo $m \in M_{g^{-1}}$.

A seguir, usando as definições anteriores, definimos a categoria dos conjuntos G-split. Essa categoria segue a mesma ideia da categoria dos conjuntos G-split finitos definida em [33], porém no nosso caso o conjunto não precisa ser finito.

Definição 4.1.21. *Seja G um grupóide. Definimos a* ***categoria dos conjuntos G-split*** *como a categoria onde os objetos são os conjuntos G-split e os morfismos são os morfismos entre conjuntos G-split. Denotamos essa categoria por ${}_G\underline{Sets}$.*

A notação usada para denotar a categoria acima é a mesma da que usamos na Definição 4.1.17 se considerarmos a categoria $\mathcal{C}$ sendo um grupóide. Fazemos isso intencionalmente, pois mostraremos a seguir que estas categorias são isomorfas.

A próxima proposição nos mostra de que forma os G-conjuntos e os conjuntos G-splits estão relacionados à definição de módulo diagonal, no caso em que G é uma $\underline{Sets}$-categoria de Hopf (4.1.7). Veremos que podemos obter uma correspondência biunívoca de G-conjuntos com módulos diagonais. Já no caso G-split é possível obter uma equivalência de categorias, isso ocorre porque a ação de categoria em conjunto dada por Lawson, considerando a categoria $\mathcal{C}$ um grupóide G (4.1.14), e a ação de G em um conjunto dada por Paques e Tamusianas quando o conjunto é G-split (4.1.19), são objetos de categorias isomorfas.

Proposição 4.1.22. *Se G é uma $\underline{Sets}$-categoria de Hopf de classe subjacente X, então:*

i) Existe uma correspondência biunívoca entre a ação do grupóide G num conjunto $M = \bigcup_{g\in G} M_g$ e G-módulos diagonais.

ii) Existe uma equivalência entre as categorias ${}_G\mathcal{D}Mod(X)$ e ${}_G\underline{Sets}$.

Demonstração. i) Suponha que temos um G-módulo diagonal dado pela família de conjuntos $\{M_x\}_{x\in X}$ e pelas funções $\alpha_{x,y} : G_{x,y} \times M_y \longrightarrow M_x$. Sabemos de 3.1.25 que uma $\underline{Sets}$-categoria de Hopf de classe subjacente X é um grupóide, com X sendo sua classe de objetos. Vejamos que temos uma ação de G em M com $M = \bigcup_{x\in X} M_x$.

De fato, tomando M desta forma, cada M_x é um subconjunto de M e podemos considerar $M_x = M_{r(g)} = M_g$ conforme a Definição 4.1.19. Além disso, defina $\gamma_g : M_{g^{-1}} \longrightarrow M_g$ como sendo $\gamma_g(m) = \alpha_{r(g),r(g^{-1})}(g,m)$, para todo $m \in M_{g^{-1}}$. Deste modo, as funções γ_g estão bem definidas.

Agora, a cada objeto x de X temos um morfismo identidade id_x associado, que na Definição 4.1.19 foi denotado por e, assim temos que $\gamma_e : M_e \longrightarrow M_e$ é dada por $\gamma_e(m) = \alpha_{x,x}(e,m) = \alpha_{x,x}(id_x,m) = m$, por (4.4). Segue que γ_e é a aplicação identidade de M_e para todo $e \in G^0$.

Sejam agora, $g \in G_{x,y}$, $h \in G_{y,z}$ e $m \in M_z$, então por (4.3) temos:

$$\alpha_{x,y} \circ (G_{x,y} \times \alpha_{y,z})(g,h,m) = \alpha_{x,z} \circ (m_{x,y,z} \times M_z)(g,h,m)$$

e segue que

$$\gamma_g \circ \gamma_h(m) = \gamma_{gh}(m),$$

para todo $m \in M_{h^{-1}}$.

Falta verificarmos que γ_g é bijeção para todo $g \in G$. Sabemos que para todo $g \in G$, existe g^{-1} já que G é grupóide, assim, vejamos que $\gamma_{g^{-1}}$ é a função inversa de γ_g, para todo $g \in G$. Seja $m \in M_{g^{-1}}$,

$$\begin{aligned} \gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_g(m) &= \gamma_{g^{-1}g}(m) \quad \text{por ii) de 4.1.19} \\ &= \gamma_e(m) \quad \text{por i) de 4.1.19} \\ &= m. \end{aligned}$$

Analogamente, tomando $m \in M_g$, $\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}}(m) = \gamma_{gg^{-1}}(m) = \gamma_e(m) = m$. Logo, γ_g são bijeções.

Portanto, se tivermos um G-módulo diagonal dado por $\{M_x\}_{x \in X}$ e $\alpha_{x,y} : G_{x,y} \times M_y \to M_x$ então obtemos uma ação do grupóide G em $M = \bigcup_{x \in X} M_x$ considerando a coleção de subconjuntos de M sendo $M_x = M_g = M_{r(g)}$ e as bijeções $\gamma_g(m) = \alpha_{r(g),r(g^{-1})}(g,m)$, para todo $m \in M_{g^{-1}}$.

Agora suponha que temos uma ação do grupóide G em um conjunto M não vazio, então temos uma coleção de subconjuntos $M_g = M_{r(g)}$ e bijeções γ_g para cada $g \in G$. Então defina $\alpha_{x,y}(g,m) = \gamma_g(m)$, desse modo, a família $\{M_g\}_{g \in G}$ é um G-módulo diagonal à esquerda, já que os itens 4.3 e 4.4 seguem de forma imediata.

Note que se partimos de um G-módulo diagonal dado por uma família $\{M_x\}_{x \in X}$, podemos encontrar uma ação de G em M onde M é a união dos conjuntos dessa família. Então, se na sequência aplicamos a segunda parte da correspondência acima, obtemos o mesmo módulo diagonal inicial.

Por outro lado, se começamos com uma ação de G em $M = \bigcup_{g \in G} M_g$ de modo que temos uma coleção de subconjuntos $\{M_g\}$ de M e bijeções γ_g, então a família $\{M_g\}$ é G-módulo diagonal, assim aplicando a correspondência a essa família obtemos uma ação de G no conjunto M inicial. Portanto, há uma correspondência biunívoca entre as duas definições.

ii) Já vimos na Proposição 4.1.18, que se A é $\underline{Sets}$-categoria, então as categorias ${}_A\mathcal{D}Mod(X)$ e ${}_A\underline{Sets}$ são equivalentes. Vejamos que a categoria dos conjuntos G-split denotada por ${}_G\underline{Sets}$ é isomorfa a categoria ${}_A\underline{Sets}$ quando A é o grupóide G.

Começamos mostrando o isomorfismo nos objetos destas categorias. Seja G um grupóide e M um conjunto de modo que temos uma ação de G em M dada por ρ e θ conforme a Definição 4.1.14, então usando ρ obtemos que $M = \bigcup_{x\in X} M_x$ com $M_x = \rho^{-1}(x)$ para todo $x \in X = G^0$. Além disso, usando θ definimos γ_g como $\gamma_g(m) = \theta(g, m)$ para todo $g \in Hom(y, x)$ e $m \in M_{g^{-1}} = M_y$. Assim, as condições i) e ii) da Definição 4.1.19 seguem das condições (4.10) e (4.9) de 4.1.19, respectivamente. Que os γ_g's são bijeções, segue da mesma forma que fizemos na parte i) dessa demonstração. Portanto M é conjunto G-split.

Para a volta, considere M um conjunto G-split, então $M = \bigcup_{x\in X} M_x$ e essa união é disjunta. Com isso definimos a aplicação ρ como na 'ida'. Também definine-se $\theta(g, m)$ como $\gamma_g(m)$, o que leva às propriedades (4.8), (4.9) e (4.10). Portanto, temos uma ação de G em M.

Vejamos ainda que os morfismos nestas categorias são isomorfos. Seja $f : M \to N$ um G-homomorfismo, então $\rho^N f(m) = \rho^M(m)$ para todo $m \in M$. Como $M = \bigcup_{x\in X} M_x$, então $m \in M_x$ para algum $x \in X$, ou seja, $\rho^M(m) = x$. Logo, $\rho^N f(m) = x$, o que nos leva a $f(m) \in N_x$ para todo $m \in M_x$. Também temos a propriedade $f(\theta(g, m)) = \vartheta(g, f(m))$ para $g \in G_{x,y}$ e $m \in M_y$, o que é o mesmo que $f(\gamma_g(m)) = \gamma_g(f(m))$. Assim, f é um morfismo entre conjuntos G-split. Se começarmos com f sendo um morfismo entre conjuntos G-split, da mesma forma, f é um G-homomorfismo.

Portanto, concluimos que a categoria ${}_G\underline{Sets}$ representa a categoria dos conjuntos G-split, assim como a categoria das ações da categoria G num conjunto, quando G é um grupóide.

□

Agora, tendo a Definição 4.1.7, e lembrando do nosso objetivo de obter uma ação adjunta para uma categoria de Hopf, definimos:

Definição 4.1.23. *Sejam $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria e $\mathcal{A} = (A_x)_{x\in X}$ uma álgebra em $\mathcal{D}(X)$. Uma **ação diagonal à esquerda** de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$ é uma família de morfismos*

$$\alpha_{x,y} : H_{x,y} \otimes A_y \longrightarrow A_x,$$

tal que as seguintes condições são satisfeitas:

i) A família de morfismos $\alpha_{x,y}$ define uma estrutura de $\mathcal{H}$-módulo diagonal à esquerda em $\mathcal{A}$;

ii) Os seguintes diagramas são comutativos, para todo $x, y \in X$:

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y} \otimes A_y \otimes A_y \arrow[r, "H_{x,y}\otimes m^{A_y}"] \arrow[d, "\Delta_{x,y}\otimes A_y\otimes A_y"'] & H_{x,y} \otimes A_y \arrow[r, "\alpha_{x,y}"] & A_x \\
H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes A_y \arrow[r, "H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},A_y}\otimes A_y"'] & H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{x,y} \otimes A_y \arrow[r, "\alpha_{x,y}\otimes\alpha_{x,y}"'] & A_x \otimes A_x \arrow[u, "m^{A_x}"']
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y} \otimes I \arrow[rr, "H_{x,y}\otimes\eta^{A_y}"] \arrow[d, "\sim"'] & & H_{x,y} \otimes A_y \arrow[d, "\alpha_{x,y}"] \\
H_{x,y} \arrow[r, "\varepsilon_{x,y}"'] & I \arrow[r, "\eta^{A_x}"'] & A_x
\end{tikzcd} \tag{4.12}$$

onde m^{A_y} *e* η^{A_y} *representam a multiplicação e a unidade, respectivamente, na álgebra* A_y*, para cada* $y \in X$*.*

Podemos definir uma ação diagonal à direita de modo análogo, usando a definição de $\mathcal{H}$-módulo diagonal à direita, porém neste trabalho usaremos a versão à esquerda de ação diagonal.

Antes de apresentarmos um exemplo, faremos algumas observações.

Observação 4.1.24.

1) *Sendo* $\mathcal{H}$ *uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categoria, é claro que é também uma* $\mathcal{V}$*-categoria.*
2) *Poderíamos pedir* $\mathcal{H}$ *uma* $\mathcal{V}$*-categoria de Hopf na definição acima, porém, como não foram utilizadas as aplicações* $\mathcal{S}_{x,y}$ *da definição de* $\mathcal{V}$*-categoria de Hopf, isso não é necessário.*
3) *Note que se* $\mathcal{H}$ *é uma* $\mathcal{V}$*-categoria, e considerarmos* $\mathcal{A} = (H_{x,x})_{x\in X} = (H_x)_{x\in X}$*, então temos uma família de álgebras com multiplicação* $m_{x,x,x}$ *e unidade* η_x *para cada* $x \in X$*.*

Do mesmo modo que buscamos anteriormente relacionar a definição de módulo diagonal dada com as definições já existentes na literatura, também buscaremos relacionar a definição de ação diagonal dada com definições de ação já existentes. É claro que no caso de X ser um conjunto com um único objeto, a definição de ação diagonal 4.1.23 coincide com a definição de módulo álgebra dada em 2.2.2. Vejamos a seguir de que forma podemos relacionar a definição de ação diagonal com a de ação de grupóide em uma álgebra, para isso precisaremos definir uma categoria de ações diagonais.

Definição 4.1.25. *Seja* $\mathcal{H}$ *uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categoria e duas ações diagonais: de* $\mathcal{H}$ *em* $\mathcal{A} = (A_x)_{x\in X}$ *e de* $\mathcal{H}$ *em* $\mathcal{B} = (B_x)_{x\in X}$*. Definimos um* ***morfismo diagonal*** $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *como um morfismo de* $\mathcal{H}$*-módulos diagonais, tal que* $f_x : A_x \to B_x$ *é morfismo de álgebras em* $\mathcal{V}$*, para cada* $x \in X$*.*

Definição 4.1.26. *A* ***categoria das ações diagonais de*** $\mathcal{H}$ *é a categoria cujos objetos são ações diagonais de* $\mathcal{H}$ *e os morfismos são os morfismos diagonais.*

Denotamos essa categoria por ${}_{\mathcal{H}}\mathcal{D}Alg(X)$*.*

Note que a categoria das ações diagonais é uma subcategoria da categoria dos $\mathcal{H}$-módulos diagonais (4.1.9).

A seguir apresentamos a definição de ação de um grupóide em uma álgebra:

Definição 4.1.27 ([3], [33])**.** *Uma* ***ação de um grupóide*** G ***em uma k-álgebra*** A *é uma coleção* β *de ideais* $A_g = A_{r(g)}$ *de* A *e isomorfismos k-lineares que preservam o produto* $\beta_g : A_{g^{-1}} \longrightarrow A_g$*,* $g \in G$*, tal que* A *é um* G*-conjunto via* β*.*

Definição 4.1.28. *Sejam duas ações de um grupóide G: em uma k-álgebra A dada pela coleção $(\{A_g\}_{g\in G}, \{\beta_g^A\}_{g\in G})$ e em uma k-álgebra B dada pela coleção $(\{B_g\}_{g\in G}, \{\beta_g^B\}_{g\in G})$. Então definimos um* ***morfismo de ações de grupóide em álgebras*** *como sendo um morfismo de álgebras $f : A \to B$, satisfazendo as seguintes condições:*

i) $f(A_g) \subset B_g$, *para todo* $g \in G$;

ii) $f(\beta_g^A(a)) = \beta_g^B(f(a))$, *para todo* $a \in A_{g^{-1}}$.

Definição 4.1.29. *Seja G um grupóide. Definimos a* ***categoria das ações de um grupóide G em uma k-álgebra****, como a categoria cujos objetos são ações de G em uma k-álgebra e cujos morfismos são os morfismos de ações de grupóide em álgebras.*

Denotamos essa categoria por ${}_GAlg$.

Podemos considerar uma subcategoria de ${}_GAlg$:

Definição 4.1.30. *Seja G um grupóide. Definimos a* ***categoria das ações unitais de*** *G, como a categoria onde os objetos são as ações de G em uma k-álgebra A dados pelas famílias $(\{A_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$, em que cada ideal A_g é unital com elemento identidade 1_g^A e cada β_g é isomorfismo de álgebras, chamaremos esses objetos como* ***ações unitais de*** *G. Os morfismos são os morfismos de ações de grupóide em álgebras com uma condição a mais a ser satisfeita: $f(1_g^A) = 1_g^B$ para todo $g \in G$.*

Denotaremos essa categoria por ${}_GAlgUnit$.

Também podemos considerar uma subcategoria de ${}_GAlgUnit$:

Definição 4.1.31. *Seja G um grupóide. Definimos a* ***categoria das ações de G num produto de álgebras****, como a categoria em que os objetos são as ações unitais de G em uma k-álgebra A dados pelas famílias $(\{A_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$, em que $A = \prod_{g\in G} A_g$. Os morfismos são os morfismos da categoria ${}_GAlgUnit$, restritos a estes objetos.*

Denotamos essa categoria por ${}_GAlgProd$.

O próximo resultado relaciona as categorias definidas acima com a categoria das ações diagonais.

Proposição 4.1.32. *Seja G um grupóide e kG a categoria de Hopf k-linear dada por 3.1.26. Então:*

i) Existe um funtor F da categoria ${}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)$ na categoria ${}_GAlg$.

ii) Existe um funtor L da categoria ${}_GAlgUnit$ em ${}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)$.

iii) Se $G^0 = X$ é finito, existe um isomorfismo entre as categorias ${}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)$ e ${}_GAlgProd$.

Demonstração. i) Começamos definindo o funtor F nos objetos. Suponha que temos uma ação diagonal à esquerda de kG em $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x\in X}$, então temos uma família de aplicações k-lineares dadas por:

$$\alpha_{x,y} : kG_{x,y} \otimes A_y \longrightarrow A_x.$$

Considere $A = \prod_{x\in X} A_x$, então A é uma k-álgebra e cada A_i pode ser considerado um ideal bilateral de A por meio da injeção canônica:

$$\begin{aligned} A_i &\longrightarrow \prod_{x\in X} A_x \\ a &\longmapsto (a_x)_{x\in X}, \text{ com } \left\{ \begin{array}{l} a_x = a, \text{ se } x = i \\ a_x = 0, \text{ se } x \neq i \end{array} \right. \end{aligned}$$

Assim, considerando a aplicação acima, temos uma coleção de ideais: $A_x = A_g = A_{r(g)}$ de A. Para cada $g \in G_{x,y}$, defina $\beta_g : A_{g^{-1}} \longrightarrow A_g$ como:

$$\beta_g(a) = \alpha_{x,y}(g \otimes a), \text{ para todo } a \in A_{g^{-1}},$$

dessa forma temos que $A = \prod_{x\in X} A_x$ é um G-conjunto de modo análogo à Proposição 4.1.22 i).

Para vermos que a coleção $(\{A_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ nos dá uma ação do grupóide G na k-álgebra A, falta verificarmos que β_g preserva produto, para todo $g \in G$. De fato, sejam $g \in G_{x,y}$ e $a, b \in A_{g^{-1}} = A_y$ então:

$$\begin{aligned} \beta_g(ab) &= \alpha_{x,y}(g \otimes ab) \\ &= \alpha_{x,y} \circ (kG_{x,y} \otimes m^{A_y})(g \otimes a \otimes b) \qquad \text{por (4.11)} \\ &= m^{A_x} \circ (\alpha_{x,y} \otimes \alpha_{x,y}) \circ (kG_{x,y} \otimes \sigma_{kG_{x,y},A_y} \otimes A_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes A_y)(g \otimes a \otimes b) \\ &= m^{A_x} \circ (\alpha_{x,y}(g \otimes a) \otimes \alpha_{x,y}(g \otimes b)) \\ &= \beta_g(a)\beta_g(b). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Portanto, obtemos uma ação do grupóide G na k-álgebra A. Mas note que, além disso, como cada A_x é uma k-álgebra, também teremos que β_g perserva unidade:

$$\begin{aligned} \beta_g(1_{A_y}) &= \alpha_{x,y}(g \otimes 1_{A_y}) \\ &= \alpha_{x,y} \circ (kG_{x,y} \otimes \eta^{A_y})(g \otimes 1_k) \qquad \text{por (4.12)} \\ &= \varepsilon_{x,y}(g)\eta^{A_x}(1_k) \\ &= 1_k 1_{A_x} = 1_{A_x}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Agora, definamos o funtor F nos morfismos. Dadas duas ações diagonais de $\mathcal{H}$, uma em $\mathcal{A} = (A_x)_{x\in X}$ e outra em $\mathcal{B} = (B_x)_{x\in X}$, de modo que $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ seja um morfismo diagonal. Precisamos definir $F(\varphi) : A \to B$, onde $A = \prod_{x\in X} A_x$ e $B = \prod_{x\in X} B_x$, de modo que $F(\varphi)$ seja um morfismo de ações de grupóide em álgebras.

Defina $F(\varphi) = f$ como $f((a_x)_{x\in X}) = (\varphi_x(a_x))_{x\in X}$, assim f fica bem definido já que $\varphi_x(a_x) \in B_x$ para cada $x \in X$. Pela forma das álgebras A e B e pelo fato de que cada φ_x é um morfismo de álgebras, também teremos que f é um morfismo de álgebras.

Além disso, vendo A_g e B_g como ideais de A e de B, respectivamente, é claro que $f(A_g) \subset B_g$, para todo $g \in G$.

Por fim, para todo $g \in G_{x,y}$ e $a \in A_{g^{-1}} = A_y$,

$$f(\beta_g^A(a)) \;=\; f(\alpha_{x,y}^A(g \otimes a)) = \varphi_g(\alpha_{x,y}^A(g \otimes a))$$

já que $\alpha^A_{x,y}(g \otimes a) \in A_g$ (e, usando a identificação entre os ideais A_g e os ideais de A dada anteriormente). Usando (4.5) temos:

$$\begin{aligned} \varphi_g(\alpha^A_{x,y}(g \otimes a)) &= \alpha^B_{x,y} \circ (kG_{x,y} \otimes \varphi_{g^{-1}})(g \otimes a) \\ &= \alpha^B_{x,y}(g \otimes \varphi_{g^{-1}}(a)) \\ &= \beta^B_g(\varphi_{g^{-1}}(a)) = \beta^B_g(f(a)). \end{aligned}$$

Logo, $f(\beta^A_g(a)) = \beta^B_g(f(a)$, para todo $a \in A_{g^{-1}}$, $g \in G$. Com isso, concluímos que o funtor F está bem definido nos morfismos. Pode-se verificar também que F preserva composições e identidades das categorias envolvidas.

ii) Começamos definindo o funtor L nos objetos. Suponha que temos uma ação unital do grupóide G na k-álgebra A, então temos uma coleção de ideais unitais $A_g = A_{r(g)}$ de A, o que nos dá uma família de k-álgebras $\{A_g\}_{g \in G}$.

Também temos isomorfismos de álgebras $\beta_g : A_{g^{-1}} \longrightarrow A_g$, para cada $g \in G$. Defina então $\alpha_{x,y}(g \otimes a) = \beta_g(a)$, para todo $g \in G_{x,y}$ e $a \in A_y = A_{g^{-1}}$, e estenda linearmente para $kG_{x,y}$. Dessa forma, $\alpha_{x,y}$ é k-linear e segue de A ser um G-conjunto via β que $\{A_g\}_{g \in G}$ é kG-módulo diagonal à esquerda.

Como β_g é morfismo de álgebras, para todo $g \in G$, e os A_g são unitais, temos que $\beta_g(ab) = \beta_g(a)\beta_g(b)$ para todo $a, b \in A_{g^{-1}}$ e $\beta_g(1^A_{g^{-1}}) = 1^A_g$, então igualando os extremos nas equações (4.13) e (4.14), obtemos que os diagramas (4.11) e (4.12), comutam respectivamente. Portanto, temos uma ação diagonal de kG em $\{A_g\}_{g \in G}$.

Agora, vamos definir o funtor L nos morfismos. Seja f um morfismo na categoria ${}_G AlgUnit$, então $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras e temos as ações do grupóide G em A e em B dadas pelas famílias $(\{A_g\}_{g \in G}, \{\beta^A_g\}_{g \in G})$ e $(\{B_g\}_{g \in G}, \{\beta^B_g\}_{g \in G})$, respectivamente. Precisamos definir $L(f) : L(A) \to L(B)$, de modo que $L(f)$ seja um morfismo diagonal.

Defina $L(f) = \varphi$ como a família $\varphi_x : A_x \to B_x$ definida por $\varphi_x(a) = f(a)$, para todo $a \in A_x$. Como $A_x \subset A$ para todo $x \in X$, já que é ideal de A, e f satisfaz a condição $f(A_x) \subset B_x$ para todo $x \in X$, φ_x fica bem definido.

Como f é morfismo de álgebras, é claro que φ_x é k-linear e preserva a multiplicação, para todo $x \in X$. Para garantir que φ_x preserva a unidade precisamos da condição $f(1^A_g) = 1^B_g$ dada para morfismos da categoria ${}_G AlgUnit$.

Por fim, para concluirmos que φ é um morfismo diagonal, precisamos verificar que o diagrama (4.5) comuta. De fato, para todo $x, y \in X$, $g \in G_{x,y}$ e $a \in A_y$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi_x \circ \alpha^A_{x,y}(g \otimes a) &= \varphi_x(\beta^A_g(a)) = f(\beta^A_g(a)) \qquad \text{por ii) 4.1.28} \\ &= \beta^B_g(f(a)) = \alpha^B_{x,y}(g \otimes f(a)) = \alpha^B_{x,y}(g \otimes \varphi_y(a)) \\ &= \alpha^B_{x,y} \circ (kG_{x,y} \otimes \varphi_y)(g \otimes a). \end{aligned}$$

Portanto, φ é morfismo diagonal. Pode-se verificar também que L preserva composições e identidades das categorias envolvidas.

iii) Pelo item i) existe um funtor de ${}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)$ em ${}_G Alg$, então temos um funtor $F : {}_{kG}\mathcal{D}Alg(X) \to {}_G AlgProd$, pois a forma que definimos o funtor F em i) nos dá objetos e morfismos de ${}_G AlgProd$. Do item ii), também já temos um funtor $L : {}_G AlgProd \to {}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)$.

Vejamos que $LF = 1_{{}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)}$ e $FL = 1_{{}_G AlgProd}$.

Considere uma ação diagonal de kG em $\mathcal{A} = (A_x)_{x\in X}$, $F(\mathcal{A})$ nos dá uma ação de G na álgebra $A = \prod_{g\in G} A_g$ conforme definido em i), e $L(F(\mathcal{A}))$ nos retorna a mesma ação de kG em $\mathcal{A}$ que tínhamos inicialmente.

Agora seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um morfismo diagonal, temos uma família de morfismo de álgebras $\varphi_x : A_x \to B_x$, pelo item i), $F(\varphi) : A \to B$ é um morfismo de ações de grupóide em álgebras e além disso, satisfaz a condição $f(1_g^A) = 1_G^B$. Pelo item ii) $L(F(\varphi))$ é uma família de morfismos de álgebras e obteremos que $L(F(\varphi))_x : A_x \to B_x$ é exatamente φ_x. Portanto, $LF = 1_{{}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)}$.

Considere agora uma ação de G na k-álgebra A dada por $(\{A_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ de modo que $A = \prod_{g\in G} A_g$, $FL(A)$ nos dá novamente o mesmo objeto A tomado inicialmente.

Se considerarmos um morfismo em ${}_G AlgProd$, então temos um morfismo $f : A \to B$ onde $A = \prod_{g\in G} A_g$ e $B = \prod_{g\in G} B_g$, então f está definido em uma família $(a_g)_{g\in G}$. Pelo item ii) $L(f)$ é uma família de morfimos de álgebras tal que $L(f)_x(a_x) = f(a_x)$ para todo $a_x \in A_x$. Pelo item i) $F(L(f))$ deve estar definido em uma família $(a_x)_{x\in X}$ e ainda,

$$F(L(f))((a_x)_{x\in X}) = (L(f)_x(a_x))_{x\in X} = (f(a_x))_{x\in X} = f((a_x)_{x\in X}).$$

A última igualdade é válida porque f é k-linear e X é finito. Logo, $FL = 1_{{}_G AlgProd}$.

Portanto, as categorias ${}_{kG}\mathcal{D}Alg(X)$ e ${}_G AlgProd$ são isomorfas.

□

Observação 4.1.33. *Em [32], Flores e Paques estudam ações de grupóides em álgebras e apresentam um teorema de dualidade. Neste artigo encontramos um resultado semelhante ao que provamos no item iii) da Proposição 4.1.32: se G é um grupoide finito então ações de G em k-álgebras correspondem a ações da álgebra de Hopf fraca kG ([[32], Proposição 2.2]).*

Observação 4.1.34. *Em [9] Caenepeel e Fieremans refazem a teoria de Galois de ações parciais de grupóides de Bagio e Paques [4] do ponto de vista da teoria de coanéis.*

O próximo resultado mostra uma ação diagonal de uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf $\mathcal{H}$ nela mesma, generalizando a ação adjunta vista em 1.1.4 para $\Bbbk$-álgebra de Hopf e a versão dada em (2.41) para um álgebra de Hopf em uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$.

Proposição 4.1.35. *Seja $\mathcal{H}$ uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf. Então a família de morfismos $\alpha_{x,y} : H_{x,y} \otimes H_y \to H_x$ dada por:*

$$\alpha_{x,y} = m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y)$$

define uma ação diagonal à esquerda de $\mathcal{H}$ em $(H_x)_{x\in X}$.

Demonstração. É claro que $\alpha_{x,y}$ é uma família de morfismos em $\mathcal{V}$ visto que foi definida como composição de morfismos nesta categoria.

Vejamos que $\alpha_{x,y}$ define uma estrutura de $\mathcal{H}$-módulo diagonal à esquerda em $(H_x)_{x\in X}$. Comecemos verificando (4.3), para cada $x, y, z \in X$ temos:

$$\begin{aligned}
\alpha_{x,z}\circ(m_{x,y,z}\otimes H_z) &= m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes\mathcal{S}_{x,z})\circ(H_{x,z}\otimes\sigma_{H_{x,z},H_z})\circ(\Delta_{x,z}\otimes H_z)\circ(m_{x,y,z}\otimes H_z)\\
&= m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes H_{z,x})\circ(H_{x,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{x,z})\circ(H_{x,z}\otimes\sigma_{H_{x,z},H_z})\circ(\underbrace{(\Delta_{x,z}\circ m_{x,y,z})}_{3.1.15}\otimes H_z)\\
&= m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes H_{z,x})\circ(H_{x,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{x,z})\circ(H_{x,z}\otimes\sigma_{H_{x,z},H_z})\circ\\
&\quad (((m_{x,y,z}\otimes m_{x,y,z})\circ(H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z})\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}))\otimes H_z)\\
&= m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes H_{z,x})\circ(H_{x,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{x,z})\circ(m_{x,y,z}\otimes\underbrace{(\sigma_{H_{x,z},H_z}\circ(m_{x,y,z}\otimes H_z))}_{(2.17)})\circ\\
&\quad (H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes H_z)\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z)\\
&= m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes H_{z,x})\circ(H_{x,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{x,z})\circ(m_{x,y,z}\otimes((H_z\otimes m_{x,y,z})\circ\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{y,z},H_z}))\circ\\
&\quad (H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes H_z)\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z)\\
&= m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes H_{z,x})\circ(m_{x,y,z}\otimes H_z\otimes\underbrace{(\mathcal{S}_{x,z}\circ m_{x,y,z})}_{(3.11)})\circ(H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{y,z},H_z})\circ\\
&\quad (H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes H_z)\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z)\\
&= m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes H_{z,x})\circ(m_{x,y,z}\otimes H_z\otimes(m_{z,y,x}\circ(\mathcal{S}_{y,z}\otimes\mathcal{S}_{x,y})\circ\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}))\circ\\
&\quad (H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{y,z},H_z})\circ(H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes H_z)\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z)\\
&= \underbrace{m_{x,z,x}\circ(m_{x,z,z}\otimes H_{z,x})\circ(m_{x,y,z}\otimes H_z\otimes m_{z,y,x})}_{\star}\circ(H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{y,z}\otimes\mathcal{S}_{x,y})\circ\\
&\quad (H_{x,y}\otimes\underbrace{[(H_{y,z}\otimes H_z\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}})\circ(H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{y,z},H_z})\circ(\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes H_z)]}_{\star\star})\circ\\
&\quad (\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z)\\
&= \divideontimes.
\end{aligned}$$

Aqui faremos uma pausa para explicar melhor o que estamos utilizando. Onde indicamos $\star$, estamos aplicando a equação (3.1) repetidas vezes, isso pode ser observado no diagrama a seguir, onde posicionamos no contorno superior e direito o que temos em $\star$, e o lado esquerdo e contorno inferior é o que vamos utilizar na sequência.

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{z,z}\otimes H_{z,y}\otimes H_{y,x} \arrow[rr, "m_{x,y,z}\otimes H_{z,z}\otimes m_{z,y,x}"] \arrow[dr, "H_{x,y}\otimes m_{y,z,z}\otimes m_{z,y,x}"] \arrow[dd, "H_{x,y}\otimes m_{y,z,z}\otimes H_{z,y}\otimes H_{y,x}"] & & H_{x,z}\otimes H_{z,z}\otimes H_{z,x} \arrow[d, "m_{x,z,z}\otimes H_{z,x}"] \\
= & H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{z,x} \arrow[r, "m_{x,y,z}\otimes H_{z,x}"] \arrow[d, "H_{x,y}\otimes m_{y,z,x}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & H_{x,z}\otimes H_{z,x} \arrow[dd, "m_{x,z,x}"] \\
H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{z,y}\otimes H_{y,x} \arrow[ur, "H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes m_{z,y,x}"] \arrow[d, "H_{x,y}\otimes m_{y,z,y}\otimes H_{y,x}"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & H_{x,y}\otimes H_{y,x} \arrow[dr, "m_{x,y,x}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & \\
H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x} \arrow[ur, "H_{x,y}\otimes m_{y,y,x}"] \arrow[r, "m_{x,y,y}\otimes H_{y,x}"'] & H_{x,y}\otimes H_{y,x} \arrow[r, "m_{x,y,x}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & H_{x,x}
\end{tikzcd}$$

O diagrama seguinte explica o que acontece em $\star\star$, neste caso, utiliza-se as propriedades das tranças (2.18) e (2.19). No diagrama a seguir mostramos que o que temos em $\star\star$, contorno superior e direito do diagrama, pode ser trocado pela composição dada pelo contorno esquerdo e inferior.

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes H_{z,z} \arrow[rr, "\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes H_{z,z}"] \arrow[ddd, "H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{y,z},H_{z,z}}"] & & H_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{z,z} \arrow[dl, "H_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{y,z},H_{z,z}}"'] \arrow[dd, "H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{y,z},H_{z,z}}"] \\
= & H_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes H_{z,z}\otimes H_{y,z} \arrow[dr, "H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{z,z}}\otimes H_{y,z}"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & \\
& \circlearrowright \text{ por } (2.18) & H_{y,z}\otimes H_{z,z}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z} \arrow[d, "H_{y,z}\otimes H_{z,z}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.18)"] \\
H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{z,z}\otimes H_{y,z} \arrow[uur, "\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{z,z}\otimes H_{y,z}"] \arrow[urr, "\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}\otimes H_{z,z}}\otimes H_{y,z}"] \arrow[rr, "\sigma_{H_{x,y},(H_{y,z}\otimes H_{z,z})\otimes H_{y,z}}"'] & & H_{y,z}\otimes H_{z,z}\otimes H_{y,z}\otimes H_{x,y}
\end{tikzcd}$$

Agora usando os dois diagramas acima, prosseguimos:

$$\begin{aligned}
\divideontimes \quad = \quad & m_{x,y,x}\circ(m_{x,y,y}\otimes H_{y,x})\circ(H_{x,y}\otimes m_{y,z,y}\otimes H_{y,x})\circ(H_{x,y}\otimes m_{y,z,z}\otimes H_{z,y}\otimes H_{y,x})\circ \\
& (H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{y,z}\otimes\mathcal{S}_{x,y})\circ \\
& (H_{x,y}\otimes[(\sigma_{H_{x,y},(H_{y,z}\otimes H_z)\otimes H_{y,z}})\circ(H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{y,z},H_z})])\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,z} \otimes H_{z,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_z \otimes H_{z,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(H_{y,z} \otimes H_z \otimes \mathcal{S}_{y,z} \otimes H_{x,y}) \circ (\sigma_{H_{x,y},(H_{y,z}\otimes H_z)\otimes H_{y,z}})]}_{(2.17)}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},H_z}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes H_z) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,z} \otimes H_{z,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
& (H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_z\otimes H_{z,y}\otimes\mathcal{S}_{x,y})\circ(H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},(H_{y,z}\otimes H_z)\otimes H_{z,y}})\circ \\
& (H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{y,z})\circ(H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{y,z},H_z})\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{z,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(m_{y,z,z} \otimes H_{z,y} \otimes H_{x,y}) \circ (\sigma_{H_{x,y},(H_{y,z}\otimes H_z)\otimes H_{z,y}})]}_{(2.17)}) \circ \\
& (H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_z\otimes\mathcal{S}_{y,z})\circ(H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes \sigma_{H_{y,z},H_z})\circ(\Delta_{x,y}\otimes\Delta_{y,z}\otimes H_z) \\
= \;& m_{x,y,x}\circ(m_{x,y,y}\otimes H_{y,x})\circ(H_{x,y}\otimes H_y\otimes\mathcal{S}_{x,y})\circ(H_{x,y}\otimes\underbrace{[(m_{y,z,y}\otimes H_{x,y})\circ(\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}\otimes H_{z,y}})]}_{(2.17)})\circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,z,z} \otimes H_{z,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_z \otimes \mathcal{S}_{y,z}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},H_z}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes H_z) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x})\circ(H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y})\circ (H_{x,y} \otimes [(\sigma_{H_{x,y},H_y})\circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,y})])\circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,z,z} \otimes \mathcal{S}_{y,z})\circ(H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},H_z})\circ(\Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes H_z) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes m_{y,z,z} \otimes \mathcal{S}_{y,z}) \circ (H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},H_z}) \circ (H_{x,y} \otimes \Delta_{y,z} \otimes H_z) \\
= \;& \alpha_{x,y} \circ (H_{x,y} \otimes \alpha_{y,z}).
\end{aligned}$$

Portanto, a equação (4.3) é válida. Além disso,

$$\begin{aligned}
\alpha_{x,x} \circ (\eta_x \otimes H_x) &= m_{x,x,x} \circ (m_{x,x,x} \otimes \mathcal{S}_{x,x}) \circ (H_{x,x} \otimes \sigma_{H_{x,x},H_x}) \circ (\underbrace{(\Delta_{x,x} \circ \eta_x)}_{3.1.15} \otimes H_x) \\
&= m_{x,x,x} \circ (m_{x,x,x} \otimes \mathcal{S}_{x,x}) \circ (H_{x,x} \otimes \sigma_{H_{x,x},H_x}) \circ (\eta_x \otimes \eta_x \otimes H_x) \\
&= m_{x,x,x} \circ (m_{x,x,x} \otimes H_{x,x}) \circ (H_{x,x} \otimes H_x \otimes \mathcal{S}_{x,x}) \circ (\eta_x \otimes H_x \otimes \eta_x) \circ (I \otimes \underbrace{\sigma_{I,H_x})}_{(2.24)} \\
&= m_{x,x,x} \circ (m_{x,x,x} \otimes H_{x,x}) \circ (\eta_x \otimes H_x \otimes \underbrace{(\mathcal{S}_{x,x} \circ \eta_x)}_{(3.8)}) \\
&= m_{x,x,x} \circ \underbrace{(m_{x,x,x} \otimes H_{x,x}) \circ (\eta_x \otimes H_x \otimes \eta_x)}_{(3.2)} \\
&= \underbrace{m_{x,x,x} \circ (H_{x,x} \otimes \eta_x)}_{(3.2)} = H_{x,x} = H_x.
\end{aligned}$$

Logo, a equação (4.4) é válida. Portanto, já temos até aqui que $\mathcal{A} = (H_{x,x})_{x\in X}$ é $\mathcal{H}$-módulo diagonal.

Agora, vejamos que o diagrama (4.11) comuta. Para todo $x, y \in X$, temos:

$$
\begin{aligned}
& m_{x,x,x} \circ (\alpha_{x,y} \otimes \alpha_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) = \\
&\quad = \; m_{x,x,x} \circ ([m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y)] \otimes [m_{x,y,x} \circ \\
&\qquad (m_{x,y,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y)]) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y) \circ \\
&\qquad (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
&\quad = \; m_{x,x,x} \circ (m_{x,y,x} \otimes m_{x,y,x}) \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
&\qquad (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
&\qquad (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[(H_y \otimes \Delta_{x,y}) \circ \sigma_{H_{x,y},H_y}]}_{(2.17)} \otimes H_y) \circ (\underbrace{[(\Delta_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.1.15)} \otimes H_y \otimes H_y) \\
&\quad = \; m_{x,x,x} \circ (m_{x,y,x} \otimes m_{x,y,x}) \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
&\qquad (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
&\qquad (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes [\sigma_{H_{x,y} \otimes H_{x,y},H_y} \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y)] \otimes H_y) \circ ([(H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}] \otimes H_y \otimes H_y) \\
&\quad = \; m_{x,x,x} \circ (m_{x,y,x} \otimes m_{x,y,x}) \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
&\qquad (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
&\qquad (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(\sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y} \otimes H_{x,y},H_y})]}_{(2.19)} \otimes H_y) \circ \\
&\qquad (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.1.15)} \otimes H_y \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) = \circledast.
\end{aligned}
$$

Aqui, devemos dar uma explicação mais detalhada sobre o uso de (2.19), já que esta propriedade precisa ser utilizada repetidas vezes para se obter a próxima etapa da equação. Observe no diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,y} \arrow[rr, "H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},H_{y,y}}"] \arrow[dr, "H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,y}}" description] \arrow[ddr, bend right, "\sigma_{(H_{x,y}\otimes H_{x,y})\otimes H_{x,y},H_{y,y}}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{x,y} \arrow[ddl, bend left, "\sigma_{H_{x,y},H_{y,y}}\otimes H_{x,y}\otimes H_{x,y}"] \\
& H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{x,y} \arrow[ur, "H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,y}}\otimes H_{x,y}" description] \arrow[d, "\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},H_{y,y}}\otimes H_{x,y}" description] \arrow[d, phantom, shift right=14ex, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] \arrow[d, phantom, shift left=14ex, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & \\
& H_{y,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{x,y} &
\end{tikzcd}$$

Com isso, podemos continuar o cálculo em $\circledast$ substituido a composição do contorno superior e direito, pelo morfismo que se encontra do lado esquerdo.

$$
\begin{aligned}
&\circledast = \\
= \;& m_{x,x,x} \circ (m_{x,y,x} \otimes m_{x,y,x}) \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{(H_{x,y}\otimes H_{x,y})\otimes H_{x,y},H_y} \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y)]}_{(2.17)} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \circ \\
& (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,x,x} \circ (m_{x,y,x} \otimes m_{x,y,x}) \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},H_y} \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y)]}_{(2.17)} \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,x,x} \circ (m_{x,y,x} \otimes m_{x,y,x}) \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y) \circ \\
& (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& \underbrace{m_{x,x,x} \circ (m_{x,y,x} \otimes m_{x,y,x}) \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x})}_{(3.1)} \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes [(\mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}] \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) = \circledast\circledast\,.
\end{aligned}
$$

Aqui novamente, vamos usar um diagrama para mostrar de que forma (3.1) está sendo usada.

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x} \arrow[rrrr, "m_{x,y,y}\otimes H_{y,x}\otimes m_{x,y,y}\otimes H_{y,x}"] \arrow[rrd, "H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes m_{y,y,x}"] \arrow[dd, "H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes m_{y,x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x}"'] & & & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & H_{x,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,x} \arrow[ddd, "m_{x,y,x}\otimes m_{x,y,x}"] \\
& \arrow[d, phantom, "="] & H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,x} \arrow[d, "H_{x,y}\otimes m_{y,y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,x}"] \arrow[ddll, "H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes m_{y,x,y}\otimes H_{y,x}"] & & \\
H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x} \arrow[d, "H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,y}\otimes m_{y,y,x}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & H_{x,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,x} \arrow[d, "H_{x,y}\otimes H_{y,x}\otimes m_{x,y,x}"] \arrow[ddll, "H_{x,y}\otimes m_{y,x,y}\otimes H_{y,x}"] & & \\
H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x} \arrow[d, "H_{x,y}\otimes m_{y,y,y}\otimes H_{y,x}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & H_{x,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,x} \arrow[rr, "m_{x,y,x}\otimes H_{x,x}"] \arrow[d, "H_{x,y}\otimes m_{y,x,x}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (3.1)"] & H_{x,x}\otimes H_{x,x} \arrow[d, "m_{x,x,x}"] \\
H_{x,y}\otimes H_{y,y}\otimes H_{y,x} \arrow[rr, "H_{x,y}\otimes m_{y,y,x}"'] & & H_{x,y}\otimes H_{y,x} \arrow[rr, "m_{x,y,x}"'] & & H_{x,x}
\end{tikzcd}$$

Continuando o cálculo acima, usamos a composição do lado esquerdo com a parte inferior do diagrama que acabamos de apresentar:

$$
\begin{aligned}
& \circledast\circledast = \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,y} \otimes H_{y,x})(H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y \otimes m_{y,y,x}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \underbrace{[m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.6)} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y \otimes m_{y,y,x}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes [\eta_y \circ \varepsilon_{x,y}] \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[m_{y,y,y} \circ (H_y \otimes \eta_y)]}_{(3.2)} \otimes m_{y,y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \underbrace{[(\varepsilon_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.1.15)} \otimes H_y) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ \underbrace{(H_{x,y} \otimes m_{y,y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes m_{y,y,x})}_{(3.1)} \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(H_y \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (\sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_y)]}_{(2.18)}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(H_y \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \sigma_{H_{x,y},H_y \otimes H_y}]}_{(2.17)}) \circ \\
& (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& \underbrace{m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,x})}_{(3.1)} \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(m_{y,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ \sigma_{H_{y,x},H_y \otimes H_y}]}_{(2.17)}) \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \circ \\
& (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{y,x},H_y}) \circ (H_{x,y} \otimes H_{y,x} \otimes m_{y,y,y}) \circ \\
& (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_y) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{y,x},H_y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes H_y)]}_{(2.17)}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,y}) \\
= \;& m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,y}) \\
= \;& \alpha_{x,y} \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,y,y}).
\end{aligned}
$$

Logo, o diagrama (4.11) comuta. Por fim, vejamos que o diagrama (4.12) comuta. Para todo $x, y \in X$ temos:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{x,y} \circ (H_{x,y} \otimes \eta_y) &= m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \eta_y) \\
&= m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x}) \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[(H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \sigma_{H_{x,y},H_y}]}_{(2.17)}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y) \circ (H_{x,y} \otimes \eta_y) \\
&= \underbrace{m_{x,y,x} \circ (m_{x,y,y} \otimes H_{y,x})}_{(3.1)} \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{y,x},H_y} \circ (H_{y,x} \otimes \eta_y)]}_{(2.17)}) \circ ([(H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}] \otimes I)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[m_{y,y,x} \circ (\eta_y \otimes H_{y,x})]}_{3.2}) \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{\sigma_{H_{y,x},I}}_{(2.24)}) \circ ([(H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}] \otimes I) \\
&= \underbrace{m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}}_{(3.5)} \\
&= \eta_x \circ \varepsilon_{x,y}.
\end{aligned}$$

Portanto, concluí-se que $\alpha_{x,y}$ define uma ação diagonal à esquerda de $\mathcal{H}$ em $(H_x)_{x \in X}$. □

A proposição anterior nos dá uma ação de categoria de Hopf que 'imita' a ação adjunta de uma álgebra de Hopf, conforme desejado.

Exemplo 4.1.36. *Seja $\mathcal{V}$ = Sets. Então $\mathcal{H}$ ser uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf é o mesmo que ser um grupóide, conforme Proposição 3.1.25. Neste caso, $H_{x,y}$ é o conjunto dos morfismos de y em x para todo x, y objetos da categoria e H_y é o grupo de isotropias do objeto y, então $\alpha_{x,y}$ definida na Proposição 4.1.35 anterior, se torna uma família de funções $\alpha_{x,y} : H_{x,y} \times H_y \longrightarrow H_x$ definida, para $f \in H_{x,y}$ e $g \in H_y$ como:*

$$\alpha_{x,y}(f, g) = f \circ g \circ f^{-1}.$$

Isso define uma ação diagonal à esquerda do grupóide $\mathcal{H}$ em $(H_x)_{x \in X}$ no sentido da Definição 4.1.23.

Além disso, por meio da Proposição 4.1.22 sabemos que há uma equivalência entre a categoria de módulos diagonais e a categoria dos conjuntos G-split, então também podemos ver a ação diagonal acima como uma ação do grupóide G no conjunto $\bigcup_{x \in X} H_x$.

4.1.2 Produto smash e categorias de Hopf

Nesta seção, definimos um produto smash que envolve uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf (ou uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria que já é suficiente), usando morfismos análogos aos da Definição 2.2.5, isso é possível graças a Definição 4.1.23 dada na seção anterior. Na literatura, mais especificamente no artigo [8], encontramos outra definição de produto smash (cluster) envolvendo categorias de Hopf, porém este difere essencialmente do produto smash que apresentamos aqui e será apresentado posteriormente na seção 4.2.

Começamos definindo um novo produto smash, usando as definições da seção anterior e baseando-se no produto smash definido em 2.2.5 por meio da composição de morfismos.

Definição 4.1.37. *Sejam $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{D}(X)$ tal que $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y \in X}$ é uma ação diagonal à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$. O* ***produto smash de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{H}$****, denotado $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$, é um objeto em $\mathcal{V}(X)$ dado por:*

$$(\mathcal{A} \# \mathcal{H})_{x,y} = A_x \otimes H_{x,y}$$

juntamente com uma família de morfismos em $\mathcal{V}$:

$$m^{\#}_{x,y,z} : (\mathcal{A} \# \mathcal{H})_{x,y} \otimes (\mathcal{A} \# \mathcal{H})_{y,z} \longrightarrow (\mathcal{A} \# \mathcal{H})_{x,z}$$

definida pela seguinte composição de morfismos:

$$\begin{aligned} m^{\#}_{x,y,z} &= (m^{A_x} \otimes H_{x,z}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes m_{x,y,z}) \circ \\ &\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

O resultado a seguir é análogo à Proposição 2.2.6 em que mostramos que o produto smash é uma álgebra na categoria monoidal $\mathcal{V}$; nesse caso, o novo produto smash será uma $\mathcal{V}$-categoria.

Proposição 4.1.38. *O produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{V}$-categoria.*

Demonstração. Vejamos primeiramente que a multiplicação definida por (4.15) satisfaz o diagrama (3.1). Para todo $x, y, z, t \in X$ temos:

$$\begin{aligned} & m^{\#}_{x,y,t} \circ ((\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,y} \otimes m^{\#}_{y,z,t}) = \\ = & [(m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes m_{x,y,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,t}) \circ \\ & (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,t})] \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes [(m^{A_y} \otimes H_{y,t}) \circ (A_y \otimes \alpha_{y,z} \otimes H_{y,t}) \circ \\ & (A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes m_{y,z,t}) \circ (A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ (A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t})]) \\ = & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes m_{x,y,t}) \circ \\ & (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{x,y},A_y} \circ (H_{x,y} \otimes m^{A_y})]}_{(2.17)} \otimes H_{y,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes \alpha_{y,z} \otimes H_{y,t}) \circ \\ & (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes m_{y,z,t}) \circ \\ & (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\ = & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \underbrace{[\alpha_{x,y} \circ (H_{x,y} \otimes m^{A_y})]}_{(4.11)} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes A_y \otimes m_{x,y,t}) \circ \\ & (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y \otimes A_y} \otimes H_{y,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes \alpha_{y,z} \otimes H_{y,t}) \circ \\ & (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes m_{y,z,t}) \circ \\ & (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\ = & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes [m^{A_x} \circ (\alpha_{x,y} \otimes \alpha_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes A_y)] \otimes H_{x,t}) \circ \\ & (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes A_y \otimes m_{x,y,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{x,y},A_y \otimes A_y} \circ (H_{x,y} \otimes A_y \otimes \alpha_{y,z})]}_{(2.17)} \otimes m_{y,z,t}) \circ \\ & (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\ = & \circledcirc \end{aligned}$$

onde em (2.17) estamos usando a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z \arrow[r, "\sigma_{H_{x,y},A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z}"] \arrow[d, "H_{x,y} \otimes A_y \otimes \alpha_{y,z}"'] & A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{x,y} \arrow[d, "A_y \otimes \alpha_{y,z} \otimes H_{x,y}"] \\
H_{x,y} \otimes A_y \otimes A_y \arrow[r, "\sigma_{H_{x,y},A_y \otimes A_y}"'] & A_y \otimes A_y \otimes H_{x,y}
\end{tikzcd}$$

Reorganizando os morfismos e usando o diagrama acima, obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \circledcirc = \\
= \ & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes A_x \otimes H_{x,t}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes A_y \otimes H_{x,t}) \circ \\
& (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \alpha_{y,z} \otimes m_{x,y,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_y} \otimes m_{y,z,t}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\
= \ & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes A_x \otimes H_{x,t}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes \underbrace{[\alpha_{x,y} \circ (H_{x,y} \otimes \alpha_{y,z})]}_{(4.3)} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes m_{x,y,t}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y \otimes (H_{y,z} \otimes A_z)} \otimes m_{y,z,t}) \circ \\
& (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\
= \ & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes \alpha_{x,z} \otimes H_{x,t}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes m_{x,y,z} \otimes A_z \otimes m_{x,y,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,z,t}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{\sigma_{H_{x,y},A_y \otimes (H_{y,z} \otimes A_z)}}_{(2.18)} \otimes H_{y,z} \otimes H_{z,t}) \circ \\
& (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\
= \ & (\underbrace{[m^{A_x} \circ (A_x \otimes m^{A_x})]}_{(2.9)} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes \alpha_{x,z} \otimes H_{x,t}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes m_{x,y,z} \otimes A_z \otimes \underbrace{[m_{x,y,t} \circ (H_{x,y} \otimes m_{y,z,t})]}_{(3.1)}) \circ \\
& (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{(\sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_{x,y} \otimes A_y \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z} \otimes A_z} \otimes H_{y,z})}_{\star} \circ \\
& \underbrace{(H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{y,z}) \circ (H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes \sigma_{H_{y,z},A_z})]}_{\star} \otimes H_{z,t}) \circ \\
& (A_x \otimes \underbrace{[(\Delta_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.1.15)} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) = \circledast.
\end{aligned}
$$

O próximo diagrama mostra o que usaremos em $\star$, trocaremos esta composição pela composição do lado esquerdo e inferior do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes A_z \arrow[rr, "H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{y,z},A_z}"] \arrow[dr, "H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},A_y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes A_z"] \arrow[dd, "\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},A_y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes A_z"'] & & H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{y,z} \arrow[dd, "H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},A_y}\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{y,z}"] \\
 & H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes A_z \arrow[dl, "\sigma_{H_{x,y},A_y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes A_z"'] \arrow[dr, "H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{y,z},A_z}"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] \arrow[r, phantom, "="] & \\
A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes A_z \arrow[dddd, "A_y\otimes H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes A_z"'] & & H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{y,z} \arrow[dl, "H_{x,y}\otimes A_y\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes A_z\otimes H_{y,z}"'] \arrow[dd, "H_{x,y}\otimes A_y\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}\otimes A_z}\otimes H_{y,z}"] \\
 & H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes A_z\otimes H_{y,z} \arrow[dr, "H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y},A_z}\otimes H_{y,z}"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.18)"] & \\
 & = & H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z} \arrow[dd, "\sigma_{H_{x,y},A_y}\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}"] \\
 & A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes A_z\otimes H_{y,z} \arrow[dr, "A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y},A_z}\otimes H_{y,z}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & \\
A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes A_z \arrow[ur, "A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{y,z},A_z}"] \arrow[rr, "A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},A_z}"'] & & A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&\circledast = \\
= \;& ([m^{A_x}\circ(m^{A_x}\otimes A_x)]\otimes H_{x,t})\circ(A_x\otimes\alpha_{x,y}\otimes\alpha_{x,z}\otimes H_{x,t})\circ \\
& (A_x\otimes H_{x,y}\otimes A_y\otimes m_{x,y,z}\otimes A_z\otimes m_{x,z,t})\circ(A_x\otimes H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes m_{x,y,z}\otimes H_{z,t})\circ \\
& (A_x\otimes H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{y,z},A_z}\otimes H_{z,t})\circ \\
& (A_x\otimes H_{x,y}\otimes A_y\otimes H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{z,t})\circ \\
& (A_x\otimes H_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},A_y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{z,t})\circ \\
& (A_x\otimes[(H_{x,y}\otimes\Delta_{x,y})\circ\Delta_{x,y}]\otimes A_y\otimes\Delta_{y,z}\otimes A_z\otimes H_{z,t}) \\
= \;& ([m^{A_x}\circ(m^{A_x}\otimes A_x)]\otimes H_{x,t})\circ(A_x\otimes A_x\otimes\alpha_{x,z}\otimes m_{x,z,t})\circ \\
& (A_x\otimes\alpha_{x,y}\otimes m_{x,y,z}\otimes A_z\otimes H_{x,z}\otimes H_{z,t})\circ
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes \underbrace{[(A_z \otimes m_{x,y,z}) \circ \sigma_{H_{x,y}\otimes H_{y,z},A_z}]}_{(2.17)} \otimes H_{z,t}) \circ \\
&(A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ \\
&(A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[(\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},A_y}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes A_y)]}_{(2.17)} \otimes \Delta_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ \\
&(A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\
=&(m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,z} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,z} \otimes A_z \otimes m_{x,z,t}) \circ (m^{A_x} \otimes H_{x,z} \otimes \sigma_{H_{x,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ \\
&(A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes \underbrace{[(m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (\Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z})]}_{3.1.15} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ \\
&(A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\
= \ & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,z} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,z} \otimes A_z \otimes m_{x,z,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,z} \otimes \sigma_{H_{x,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ \\
&(([m^{A_x} \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y})] \otimes [\Delta_{x,z} \circ m_{x,y,z}]) \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ \\
&([(A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z})] \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\
= \ & (m^{A_x} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,z} \otimes H_{x,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,z} \otimes A_z \otimes m_{x,z,t}) \circ (A_x \otimes H_{x,z} \otimes \sigma_{H_{x,z},A_z} \otimes H_{z,t}) \circ \\
&(A_x \otimes \Delta_{x,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ (m^{A_x} \otimes H_{x,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes m_{x,y,z} \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \circ \\
&([(A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z})] \otimes A_z \otimes H_{z,t}) \\
= \ & m^{\#}_{x,z,t} \circ (m^{\#}_{x,y,z} \otimes (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{z,t}).
\end{aligned}
$$

Logo a multiplicação é associativa.

Vejamos agora a unidade de $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$. Devemos ter uma família de morfismos em $\mathcal{V}$:

$$\eta^{\#}_x : I \longrightarrow (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,x}$$

assim, é natural definirmos para cada $x \in X$,

$$\eta^{\#}_x = \eta^{A_x} \otimes \eta_x.$$

Vejamos que a unidade definida dessa forma, satisfaz a equação (3.2). De fato, para todo $x, y \in X$ temos

$$
\begin{aligned}
& m^{\#}_{x,x,y} \circ (\eta^{\#}_x \otimes (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,y}) = \\
& \quad = \ (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes H_{x,x} \otimes A_x \otimes m_{x,x,y}) \circ \\
& \qquad (A_x \otimes H_{x,x} \otimes \sigma_{H_{x,x},A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (\eta^{A_x} \otimes \underbrace{(\Delta_{x,x} \circ \eta_x)}_{3.1.15} \otimes A_x \otimes H_{x,y}) \\
& \quad = \ (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes H_{x,x} \otimes A_x \otimes m_{x,x,y}) \circ \\
& \qquad (\eta^{A_x} \otimes \eta_x \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{x,x},A_x} \circ (\eta_x \otimes A_x)]}_{(2.17)} \otimes H_{x,y}) \\
& \quad = \ (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes H_{x,x} \otimes A_x \otimes m_{x,x,y}) \circ \\
& \qquad (\eta^{A_x} \otimes \eta_x \otimes [(A_x \otimes \eta_x) \circ \underbrace{\sigma_{I,A_x}}_{(2.24)}] \otimes H_{x,y}) \\
& \quad = \ (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (\eta^{A_x} \otimes \underbrace{[\alpha_{x,x} \circ (\eta_x \otimes A_x)]}_{(4.4)} \otimes \underbrace{[m_{x,x,y} \circ (\eta_x \otimes H_{x,y})]}_{(3.2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\underbrace{[m^{A_x} \circ (\eta^{A_x} \otimes A_x)]}_{(2.10)} \otimes H_{x,y}) \\
&= A_x \otimes H_{x,y} = (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,y}.
\end{aligned}
$$

E ainda,

$$
\begin{aligned}
&m^{\#}_{x,y,y} \circ ((\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,y} \otimes \eta^{\#}_{y}) = \\
&= (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes m_{x,y,y}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{x,y},A_y} \circ (H_{x,y} \otimes \eta^{A_y})]}_{(2.17)} \otimes H_{y,y}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes I \otimes \eta_y) \\
&= (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes \underbrace{[\alpha_{x,y} \circ (H_{x,y} \otimes \eta^{A_y})]}_{(4.12)} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes I \otimes m_{x,y,y}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{\sigma_{H_{x,y},I}}_{(2.24)} \otimes H_{y,y}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes I \otimes \eta_y) \\
&= (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes (\eta^{A_x} \circ \varepsilon_{x,y}) \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[m_{x,y,y} \circ (H_{x,y} \otimes \eta_y)]}_{(3.2)}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes I) \\
&= (m^{A_x} \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes (\eta^{A_x} \circ \varepsilon_{x,y}) \otimes H_{x,y}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y}) \\
&= (\underbrace{[m^{A_x} \circ (A_x \otimes \eta^{A_x})]}_{(2.10)} \otimes H_{x,y})(A_x \otimes \underbrace{[(\varepsilon_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.1.15)}) \\
&= A_x \otimes H_{x,y} = (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,y}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{V}$-categoria. □

O próximo resultado traz o isomorfismo visto na Proposição 2.2.7 para o contexto de categorias de Hopf. Para isso, consideremos $\mathcal{H} = (H_{x,y})_{x,y \in X}$ uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf, $\mathcal{A} = (H_x)_{x \in X}$, com $H_x = H_{x,x}$ para cada $x \in X$ e $\alpha_{x,y}$ a ação diagonal à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$ dada pela Proposição 4.1.35, de modo que o produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ está definido (4.1.37) e é uma $\mathcal{V}$-categoria (4.1.38). Além disso, vamos usar que $\mathcal{H} \bullet \mathcal{H}$ é uma $\mathcal{V}$-categoria, conforme [5], com

$$
m^{\bullet}_{x,y,z} = (m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}).
$$

Como se tratam de duas $\mathcal{V}$-categorias, precisamos da definição de isomorfismo dada em 3.1.11.

Proposição 4.1.39. *Seja $\mathcal{H} = (H_{x,y})_{x,y \in X}$ uma $\mathcal{V}$-categoria de Hopf, $\mathcal{A} = (H_x)_{x \in X}$ e $\alpha_{x,y}$ a ação diagonal à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$ dada pela Proposição 4.1.35. Então existe um isomorfismo entre as $\mathcal{V}$-categorias $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ e $\mathcal{H} \bullet \mathcal{H}$.*

Demonstração. Defina $\varphi : \mathcal{A}\#\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \bullet \mathcal{H}$ como os morfismos em $\mathcal{V}$:

$$
\varphi_{x,y} : H_x \otimes H_{x,y} \longrightarrow H_{x,y} \otimes H_{x,y}
$$

definidos para cada $x, y \in X$ pela composição:

$$
\varphi_{x,y} = (m_{x,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y}).
$$

Vejamos que φ é um $\mathcal{V}$-X-funtor.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{x,z} \circ m^{\#}_{x,y,z} = \\
= &(m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,z}) \circ (m_{x,x,x} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z}) \\
= &(m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (m_{x,x,x} \otimes H_{x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes H_x \otimes \underbrace{[\Delta_{x,z} \circ m_{x,y,z}]}_{3.1.15}) \circ \\
&(H_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z}) \\
= &(m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (m_{x,x,x} \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z}) \circ (H_x \otimes \underbrace{\alpha_{x,y}}_{4.1.35} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z}) \\
= &(m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (m_{x,x,x} \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,x} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes \Delta_{x,y} \otimes \Delta_{y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z}) \\
= &(m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (m_{x,x,x} \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,x} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[(\sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y})]}_{(2.19)} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
= &(\underbrace{[m_{x,x,z} \circ (m_{x,x,x} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,x} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,x} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z})]}_{\star} \\
&\otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&(H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y} \otimes H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\underbrace{(H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z})}_{(3.1.15)} \\
= &\circledast.
\end{aligned}$$

Em $\star$ usamos (3.1) repetidas vezes conforme o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
H_x\otimes H_{x,y}\otimes H_y\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z} \arrow[rrrr, "H_x\otimes m_{x,y,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}"] \arrow[dr, "H_x\otimes m_{x,y,y}\otimes H_{y,x}\otimes m_{x,y,z}"] \arrow[dd, "H_x\otimes m_{x,y,y}\otimes m_{y,x,y}\otimes H_{y,z}"'] & & & & H_x\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z} \arrow[d, "H_x\otimes m_{x,y,x}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z}"] \\
& H_x\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,x}\otimes H_{x,z} \arrow[dr, "H_x\otimes m_{x,y,x}\otimes H_{x,z}"] \arrow[dddl, "H_x\otimes H_{x,y}\otimes m_{y,x,z}"'] & = & & H_x \otimes H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \arrow[d, "m_{x,x,x}\otimes m_{x,y,z}"] \\
H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z} \arrow[dd, "H_x\otimes H_{x,y}\otimes m_{y,y,z}"] & \circlearrowright \text{ por } (3.1) & H_x\otimes H_x\otimes H_{x,z} \arrow[d, "m_{x,x,x}\otimes H_{x,z}"] \arrow[ddl, "H_x\otimes m_{x,x,z}"'] & & H_x \otimes H_{x,z} \arrow[dd, "m_{x,x,z}"] \\
& \circlearrowright \text{ por } (3.1) & H_x \otimes H_{x,z} \arrow[drr, "m_{x,x,z}"] & \circlearrowright \text{ por } (3.1) & \\
H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \arrow[r, "H_x\otimes m_{x,y,z}"'] & H_x \otimes H_{x,z} \arrow[rrr, "m_{x,x,z}"'] & & & H_{x,z}
\end{tikzcd}$$

e então, obtemos

$$\begin{aligned}
\circledast &= (m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ \\
&\quad (H_x\otimes m_{x,y,y} \otimes m_{y,x,y} \otimes H_{y,z}\otimes m_{x,y,z})\circ(H_x\otimes H_{x,y}\otimes H_y\otimes \mathcal{S}_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}}\otimes H_{y,z})\circ \\
&\quad (H_x\otimes H_{x,y}\otimes H_y\otimes H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}\otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[\sigma_{H_{x,y}\otimes H_{x,y},H_y} \circ (\Delta_{x,y} \otimes H_y)]}_{(2.17)} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes [m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y})] \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \underbrace{[(H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.1.15)} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes H_y \otimes H_{y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \underbrace{[m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.6)} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x\otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z})\circ(H_x\otimes H_{x,y}\otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z})\circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes \eta_y \otimes H_{y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z})\circ \\
&\quad (H_x\otimes H_{x,y}\otimes H_y \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{y,z}\otimes H_{y,z})\circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[m_{y,y,z} \circ (\eta_y \otimes H_{y,z})]}_{(3.2)} \otimes H_{x,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes I \otimes H_{y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes I \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \underbrace{[(\varepsilon_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.1.15)} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= \underbrace{(m_{x,x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ (H_x \otimes m_{x,y,y} \otimes H_{y,z} \otimes m_{x,y,z})}_{(3.1)} \circ \\
&\quad \underbrace{(H_x \otimes H_{x,y} \otimes H_y \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z})}_{(2.18)} \circ \\
&\quad (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (m_{x,x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad \underbrace{(H_x \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_y \otimes H_{y,z}} \otimes H_{y,z})}_{(2.17)} \circ \\
&\quad (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (m_{x,x,y} \otimes H_{x,y} \otimes m_{y,y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= \; m^{\bullet}_{x,y,z} \circ (\varphi_{x,y} \otimes \varphi_{y,z}).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,x} \circ \eta^{\#}_x &= (m_{x,x,x} \otimes H_x) \circ \underbrace{(H_x \otimes \Delta_{x,x}) \circ (\eta_x \otimes \eta_x)}_{(3.1.15)} \\
&= \underbrace{(m_{x,x,x} \otimes H_x) \circ (\eta_x \otimes H_x \otimes H_x)}_{(3.2)} \circ (I \otimes \eta_x \otimes \eta_x) \\
&= \eta_x \otimes \eta_x = \eta^{\bullet}_x.
\end{aligned}$$

Logo, φ é um $\mathcal{V}$-X-funtor.

Agora, defina para cada $x, y \in X$ o morfismo $\psi_{x,y} : H_{x,y} \otimes H_{x,y} \longrightarrow H_x \otimes H_{x,y}$, dado pela composição de morfismos em $\mathcal{V}$:

$$\psi_{x,y} = (m_{x,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y})$$

e vejamos que $\varphi_{x,y}$ é isomorfismo em $\mathcal{V}$ com $\psi_{x,y}$ seu morfismo inverso para cada $x, y \in X$.

$$\begin{aligned}
\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y} &= (m_{x,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ (m_{x,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \\
&\quad (H_x \otimes \Delta_{x,y}) \\
&= \underbrace{(m_{x,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (m_{x,x,y} \otimes H_{y,x} \otimes H_{x,y})}_{(3.1)} \circ (H_x \otimes H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \\
&\quad \underbrace{(H_x \otimes H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y})}_{(3.1.15)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (m_{x,x,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_x \otimes \underbrace{[m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.5)} \otimes H_{x,y}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y}) \\
&= \underbrace{(m_{x,x,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_x \otimes \eta_x \otimes H_{x,y})}_{(3.2)} \circ \underbrace{(H_x \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y})}_{(3.1.15)} \\
&= H_x \otimes H_{x,y}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,y} \circ \psi_{x,y} &= (m_{x,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_x \otimes \Delta_{x,y}) \circ (m_{x,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \\
&\quad (H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \\
&= \underbrace{(m_{x,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (m_{x,y,x} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y})}_{(3.1)} \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \\
&\quad \underbrace{(H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y})}_{(3.1.15)} \\
&= (m_{x,y,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \underbrace{[m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.6)} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \\
&= \underbrace{(m_{x,y,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \eta_y \otimes H_{x,y})}_{(3.2)} \circ \underbrace{(H_{x,y} \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y})}_{(3.1.15)} \\
&= H_{x,y} \otimes H_{x,y}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ e $\mathcal{H} \bullet \mathcal{H}$ são $\mathcal{V}$-categorias isomorfas. □

Note que $\psi : \mathcal{H} \bullet \mathcal{H} \to \mathcal{A}\#\mathcal{H}$, definido pela família $(\psi_{x,y})_{x,y \in X}$ na demonstração acima, é também $\mathcal{V}$-X-funtor por 3.1.12.

4.1.3 Coações de categorias de Hopf

Nesta seção apresentamos uma definição de coação de uma categoria de Hopf, a qual nos permite mostrar que existe uma coação no produto smash definido na seção anterior. Usaremos isso na próxima seção, para mostrar que este produto smash é uma extensão de Galois no sentido definido por [8].

A definição a seguir é basicamente a definição de H-comódulo (2.2.9) na categoria $\mathcal{V}(X)$, assim, H aqui será uma família de coálgebras.

Definição 4.1.40. *Seja H coálgebra em $\mathcal{V}(X)$. Um H-**comódulo à direita** é um par (A, ρ), onde A é um objeto em $\mathcal{V}(X)$ e ρ é dado pela família de morfismos $\rho_{x,y} : A_{x,y} \longrightarrow A_{x,y} \otimes H_{x,y}$ em $\mathcal{V}$, tal que os seguintes diagramas comutam para todo $x, y \in X$:*

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \arrow[r, "\rho_{x,y}"] \arrow[d, "\rho_{x,y}"'] & A_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[d, "A_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}"] \\
A_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[r, "\rho_{x,y} \otimes H_{x,y}"'] & A_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y}
\end{tikzcd} \tag{4.16}$$

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \arrow[r, "\rho_{x,y}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[d, "A_{x,y} \otimes \varepsilon_{x,y}"] \\
& A_{x,y} \otimes I
\end{tikzcd} \tag{4.17}$$

Assim, A é um H-comódulo à direita se cada $(A_{x,y}, \rho_{x,y})$ é $H_{x,y}$-comódulo à direita em $\mathcal{V}$. Pensando desse modo, definimos morfismo de H-comódulos:

Definição 4.1.41. *Sejam H coálgebra em $\mathcal{V}(X)$ e (A, ρ) e $(B, \widehat{\rho})$ dois H-comódulos à direita. Então um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{V}(X)$ é dito um* ***morfismo de H-comódulos*** *se o seguinte diagrama comuta para todo $x, y \in X$:*

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \arrow[r, "f_{x,y}"] \arrow[d, "\rho_{x,y}"'] & B_{x,y} \arrow[d, "\widehat{\rho}_{x,y}"] \\
A_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[r, "f_{x,y} \otimes H_{x,y}"'] & B_{x,y} \otimes H_{x,y}
\end{tikzcd} \tag{4.18}$$

Definição 4.1.42 (NOTAÇÃO)**.** *Denotamos por $\mathcal{V}(X)^H$ a categoria dos H-comódulos à direita e morfismos de H-comódulos à direita, com H sendo uma coálgebra em $\mathcal{V}(X)$.*

Observação 4.1.43. *Note que, a categoria $\mathcal{V}(X)$ é uma categoria monoidal conforme a definição dada em 3.1.1, e apesar de $\mathcal{V}(X)^H$ ser subcategoria de $\mathcal{V}(X)$, não podemos afirmar que é subcategoria monoidal do mesmo modo que o caso 2.1.11 sugere. O problema ocorre ao tentarmos definir uma família ρ para $A \bullet B$, com (A, ρ^A) e (B, ρ^B) sendo H-comódulos à direita. Seguindo o que temos do Exemplo 2.1.11 deveríamos ter:*

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes B_{x,y} \arrow[r, "\rho^A_{x,y} \otimes \rho^B_{x,y}"] & A_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes B_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[r, "A_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y}, B_{x,y}} \otimes H_{x,y}"] & A_{x,y} \otimes B_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[d, "A_{x,y} \otimes B_{x,y} \otimes m?" description] \\
 & & A_{x,y} \otimes B_{x,y} \otimes H_{x,y}
\end{tikzcd}$$

Mas note que não temos uma multiplicação m que faça sentido em $H_{x,y}$, mesmo se considerarmos H sendo uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria.

Agora, pedindo mais estrutura de H e de A temos a definição de $\mathcal{H}$-comódulo categoria:

Definição 4.1.44. *Sejam $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria e A uma $\mathcal{V}$-categoria. Dizemos que $\mathcal{H}$* ***coage*** *em A, ou que A é uma* ***$\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita****, se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) A é um $\mathcal{H}$-comódulo à direita;

ii) Os diagramas a seguir são comutativos, para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \arrow[r, "m^A_{x,y,z}"] \arrow[d, "\rho_{x,y} \otimes \rho_{y,z}"'] & A_{x,z} \arrow[r, "\rho_{x,z}"] & A_{x,z} \otimes H_{x,z} \\
A_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes H_{y,z} \arrow[rr, "A_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y}, A_{y,z}} \otimes H_{y,z}"'] & & A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \arrow[u, "m^A_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}"']
\end{tikzcd} \tag{4.19}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta_x^A"] \arrow[d, "\sim"'] & A_{x,x} \arrow[r, "\rho_{x,x}"] & A_{x,x} \otimes H_{x,x} \\
I \otimes I \arrow[urr, "\eta_x^A \otimes \eta_x"'] & &
\end{tikzcd} \tag{4.20}$$

Estas definições generalizam a definição de $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita dada em [8] (seção 3.1), pois nesta referência as definições estão restritas à $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$, porém podemos fazê-las considerando $\mathcal{V}$ categoria monoidal trançada qualquer.

Definição 4.1.45. *Sejam $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria, e A e B duas $\mathcal{H}$-comódulo categorias à direita. Então $f : A \to B$ é um* ***morfismo de $\mathcal{H}$-comódulo categorias*** *se f é morfismo de $\mathcal{H}$-comódulos e é um $\mathcal{V}$-X-funtor.*

Definição 4.1.46 (NOTAÇÃO)**.** *Denotamos por $\mathcal{V}(X)^{\mathcal{H}}$ a categoria dos $\mathcal{H}$-comódulo categorias à direita e morfimos de $\mathcal{H}$-comódulo categorias, com $\mathcal{H}$ sendo uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria.*

A noção de categoria de $\mathcal{H}$-comódulo categorias dada acima será usada apenas em um dos resultados do capítulo 5. Por ora, vejamos alguns exemplos.

Veremos a seguir que os resultados de H e $A\#H$ serem H-comódulo álgebras, que vimos em 2.2.11 e 2.2.12, respectivamente, podem ser adequados para famílias de objetos e mofismos aqui neste contexto.

Exemplo 4.1.47. *Seja $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria, é claro que $\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria com $\rho_{x,y} = \Delta_{x,y}$, de modo análogo ao que foi feito em 2.2.11. De fato, cada $H_{x,y}$ é coálgebra em $\mathcal{V}$ com $\Delta_{x,y}$, então $\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-comódulo à direita. Também $m_{x,y,z}$ e η_x deve ser morfismo de coálgebras e isso mostra que os diagramas* (4.19) *e* (4.20) *são satisfeitos.*

Proposição 4.1.48. *O produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ definido em 4.1.37 é uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita com $\rho_{x,y} = A_x \otimes \Delta_{x,y}$.*

Demonstração. Vimos na Proposição 4.1.38 que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{V}$-categoria. Vejamos que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é um $\mathcal{H}$-comódulo à direita com ρ dado pela família de morfismos $\rho_{x,y} = A_x \otimes \Delta_{x,y}$. Os diagramas (4.16) e (4.17) se tornam

$$\begin{tikzcd}
A_x\#H_{x,y} \arrow[r, "A_x\otimes\Delta_{x,y}"] \arrow[d, "A_x\otimes\Delta_{x,y}"'] & A_x\#H_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[d, "A_x\#H_{x,y}\otimes\Delta_{x,y}"] \\
A_x\#H_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[r, "A_x\otimes\Delta_{x,y}\otimes H_{x,y}"'] & A_x\#H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_x\#H_{x,y} \arrow[r, "A_x\otimes\Delta_{x,y}"] \arrow[dr, "="'] & A_x\#H_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[d, "A_x\#H_{x,y}\otimes\varepsilon_{x,y}"] \\
 & A_x\#H_{x,y} \otimes I
\end{tikzcd}$$

Cada $H_{x,y}$ é uma coálgebra em $\mathcal{V}$, então o diagrama da esquerda comuta por (2.11) e o da direita comuta por (2.12). Logo, $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-comódulo à direita.

Vejamos que o diagrama (4.19) comuta. Aqui vamos fazer a composição dos morfismos ao invés do diagrama (como feito em 2.2.12), devido a visualização ficar prejudicada pelo número de componentes dos tensores envolvidos.

$$
\begin{aligned}
\rho_{x,z} \circ m^{\#}_{x,y,z} &= (A_x \otimes \Delta_{x,z}) \circ (m^{A_x} \otimes H_{x,z}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes m_{x,y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z}) \\
&= \underbrace{(A_x \otimes \Delta_{x,z}) \circ (m^{A_x} \otimes m_{x,y,z})}_{3.1.15} \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z}) \\
&= (A_x \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (m^{A_x} \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m^{A_x} \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \underbrace{[(A_y \otimes \Delta_{x,y}) \circ \sigma_{H_{x,y},A_y}]}_{(2.17)} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m^{A_x} \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ \underbrace{(A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y} \otimes H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z})}_{(2.19)} \circ \\
&\quad \underbrace{(A_x \otimes H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z})}_{(3.1.15)} \\
&= (m^{A_x} \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad \underbrace{(A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes \sigma_{H_{x,y},H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z})}_{(2.18)} \circ \\
&\quad (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m^{A_x} \otimes m_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y \otimes H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes \Delta_{y,z}) \\
&= (m^{A_x} \otimes H_{x,z} \otimes H_{x,z}) \circ (A_x \otimes \alpha_{x,y} \otimes m_{x,y,z} \otimes H_{x,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,z}) \circ \\
&\quad (A_x \otimes \Delta_{x,y} \otimes A_y \otimes H_{y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y \otimes H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (\rho_{x,y} \otimes \rho_{y,z}) \\
&= (m^{\#}_{x,y,z} \otimes m_{x,y,z}) \circ (A_x \otimes H_{x,y} \otimes \sigma_{H_{x,y},A_y \otimes H_{y,z}} \otimes H_{y,z}) \circ (\rho_{x,y} \otimes \rho_{y,z}).
\end{aligned}
$$

Vejamos agora que o diagrama (4.20) comuta. Usando os dados que temos, o que queremos mostrar é o contorno externo do diagrama a seguir, então basta usar a definição de $\eta^{\#}_x$ e que η_x é morfimo de coálgebras para concluir que o diagrama que queremos comuta.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta_x^\#"] \arrow[d] & A_x\#H_{x,x} \arrow[r, "A_x\otimes\Delta_{x,x}"] & A_x\#H_{x,x}\otimes H_{x,x} \\
I \arrow[ur, "\eta^{A_x}\otimes\eta_x" description] \arrow[d, "=" left] & \circlearrowright \text{ por } (3.1.15) & \\
I\otimes I \arrow[uurr, "\eta_x^\#\otimes\eta_x=\eta^{A_x}\otimes\eta_x\otimes\eta_x" description] & &
\end{tikzcd}$$

Portanto, $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita. $\square$

4.1.4 Extensões de Galois

Em [8] é apresentada uma definição de extensão de Galois no contexto de categorias de Hopf, ao menos no caso em que $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$. Como exemplo, [8] nos apresenta duas generalizações de casos bem conhecidos que apresentamos na seção 1.2 de extensões de Galois para álgebras de Hopf.

Nesta seção, apresentaremos as definições e exemplos de [8] para $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, na medida do possível, e um novo exemplo, pois veremos que o produto smash definido neste trabalho é uma extensão de Galois.

Fixemos nesta seção $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ e iniciemos com algumas definições:

Definição 4.1.49 ([8])**.** *Seja A uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita. Os* ***coinvariantes*** *de $\mathcal{H}$ em A são dados por $B = A^{co\mathcal{H}} \in \mathcal{D}_k(X)$, com:*

$$B_x = A_{xx}^{coH_{xx}} = \{a \in A_{x,x} \mid \rho_{x,x}(a) = a \otimes 1\}.$$

Ou seja, os coinvariantes de $\mathcal{H}$ em A formam uma família de k-módulos indexados por X, em que a Definição 1.1.14 pode ser aplicada para cada $A_{x,x}$. Por isso mesmo, é fácil ver que cada B_x é uma k-álgebra, de modo que $A^{co\mathcal{H}}$ é álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$.

Definição 4.1.50 ([8])**.** *Sejam $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_k)$-categoria e A uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita. Dizemos que A é* ***$\mathcal{H}$-extensão de Galois*** *de $B = A^{co\mathcal{H}}$ se as aplicações*

$$\begin{aligned} \beta_{x,y}^z : A_{z,x} \otimes_{B_x} A_{x,y} &\longrightarrow A_{z,y} \otimes H_{x,y} \\ a \otimes b &\longmapsto ab_0 \otimes b_1 \end{aligned}$$

são bijetivas para todo $x, y, z \in X$.

Em [8] a definição de extensão de Galois acima está contida em um teorema que contém várias equivalências (Teorema 3.5), aqui vamos usar dessa forma pois é a maneira mais próxima da definição dada para o caso usual.

Observação 4.1.51. *Note que $\beta_{x,y}^z$ poderia ser definido pela composição de morfismos:*

$$(m_{z,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (A_{z,x} \otimes \rho_{x,y})$$

porém até aqui ainda não sabemos como definir os coinvariantes B para uma categoria qualquer $\mathcal{V}$, nem como lidar com o tensor sobre B_x caso não seja um k-módulo.

Vejamos a seguir exemplos de extensão de Galois:

Exemplo 4.1.52 ([8])**.** *Seja $\mathcal{H}$ uma categoria de Hopf k-linear, vimos no Exemplo 4.1.47 que $\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-comódulo categoria. Além disso, os coinvariantes de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ são dados por B com $B_x = k1_{x,x}$ para cada $x \in X$, para verificar basta adaptar o que fizemos em 1.1.15. Assim, para verificar que $\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-extensão de Galois de B precisamos verificar se a aplicação*

$$\beta^z_{x,y} : H_{z,x} \otimes H_{x,y} \longrightarrow H_{z,y} \otimes H_{x,y}$$

dada por: $\beta^z_{x,y} = (m_{z,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \Delta_{x,y})$ é bijetiva para todo $x, y, z \in X$.

Podemos ver, de modo muito semelhante ao que fizemos em 1.2.6, que

$$\alpha^z_{x,y} : H_{z,y} \otimes H_{x,y} \longrightarrow H_{z,x} \otimes H_{x,y}$$

dada por: $\alpha^z_{x,y} = (m_{z,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \Delta_{x,y})$ é inversa de $\beta^z_{x,y}$ para cada $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned}
& \alpha^z_{x,y} \circ \beta^z_{x,y} = \\
= \; & (m_{z,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ (m_{z,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \Delta_{x,y}) \\
= \; & \underbrace{(m_{z,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (m_{z,x,y} \otimes H_{y,x} \otimes H_{x,y})}_{(3.1)} \circ (H_{z,x} \otimes H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \\
& \underbrace{(H_{z,x} \otimes H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \Delta_{x,y})}_{3.1.15} \\
= \; & (m_{z,x,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \underbrace{[m_{x,y,x} \circ (H_{x,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.5)} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \Delta_{x,y}) \\
= \; & \underbrace{(m_{z,x,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \eta_x \otimes H_{x,y})}_{(3.2)} \circ \underbrace{(H_{z,x} \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \Delta_{x,y})}_{3.1.15} \\
= \; & H_{z,x} \otimes H_{x,y},
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
& \beta^z_{x,y} \circ \alpha^z_{x,y} = \\
= \; & (m_{z,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,x} \otimes \Delta_{x,y}) \circ (m_{z,y,x} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \Delta_{x,y}) \\
= \; & \underbrace{(m_{z,x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (m_{z,y,x} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y})}_{(3.1)} \circ (H_{z,y} \otimes \mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \\
& \underbrace{(H_{z,y} \otimes H_{x,y} \otimes \Delta_{x,y})(H_{z,y} \otimes \Delta_{x,y})}_{3.1.15} \\
= \; & (m_{z,y,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \underbrace{[m_{y,x,y} \circ (\mathcal{S}_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ \Delta_{x,y}]}_{(3.6)} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \Delta_{x,y}) \\
= \; & \underbrace{(m_{z,y,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \eta_y \otimes H_{x,y})}_{(3.2)} \circ \underbrace{(H_{z,y} \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes H_{x,y}) \circ (H_{z,y} \otimes \Delta_{x,y})}_{3.1.15} \\
= \; & H_{z,y} \otimes H_{x,y}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\beta^z_{x,y}$ é bijetiva para todo $x, y, z \in X$ e $\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-extensão de Galois de B.

Note que as famílias de morfismos $\beta^z_{x,y}$ e $\alpha^z_{x,y}$ no exemplo acima lembram muito as famílias $\varphi_{x,y}$ e $\psi_{x,y}$, respectivamente, que mostramos serem inversas em 4.1.39, por isso a sequência de propriedades usadas na demonstração é a mesma.

O exemplo anterior é uma das consequências do teorema fundamental para módulos de Hopf dado em [5](Teorema 10.2). Na verdade esse teorema, que apresenta várias equivalências, nos permite enunciar um resultado mais forte: Dada $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_k)$-categoria, então $\mathcal{H}$ é categoria de Hopf se, e somente se, $\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-extensão de Galois de B.

Em [8] (Teorema 8.2) temos outro exemplo de extensão de Galois, que é a generalização do resultado de Ulbrich dado em 1.2.5, para enunciá-lo precisamos antes de algumas definições:

Definição 4.1.53 ([8]). *Seja G um grupóide e A uma categoria $\Bbbk$-linear, ou seja, A é $Vec_{\Bbbk}$-categoria. Dizemos que A é uma* ***categoria $\Bbbk$-linear graduada*** *se*

i) $A_{x,y} = \oplus_{\theta \in G_{x,y}} A_\theta$, $\forall\, x, y \in X$;

ii) $1_x \in A_{e_x}$, $\forall\, x \in X$, *com* e_x *unidade de* G_{xx};

iii) $A_\theta A_\tau \subset A_{\theta\tau}$, $\forall\, x, y, z \in X$, $\theta \in G_{x,y}$, $\tau \in G_{y,z}$.

Se tivermos no item iii)

$$A_\theta A_\tau = A_{\theta\tau}, \forall\, x, y, z \in X,\ \theta \in G_{x,y},\ \tau \in G_{y,z},$$

então dizemos que A é uma ***categoria $\Bbbk$-linear fortemente graduada****.*

Mas, A é uma categoria $\Bbbk$-linear graduada se, e somente se, A é $\Bbbk G$-comódulo categoria à direita, onde $\Bbbk G$ é a categoria de Hopf $\Bbbk$-linear dada em 3.1.26, para $\Bbbk$ um corpo. Isso é mostrado através de um isomorfismo de categorias em [8] (Proposição 8.1), mas é basicamente a generalização do que fizemos no Exemplo 1.1.17. Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 4.1.54 ([8]). *Sejam G um grupóide e A uma categoria $\Bbbk$-linear graduada. Seja também $B = A^{co\Bbbk G}$ a álgebra na categoria diagonal com $B_x = A_{e_x}$ para cada $x \in X$. Então A é uma $\Bbbk G$-extensão de Galois de B se, e somente se, A é fortemente graduada.*

Os dois casos apresentados acima, nos fornecem exemplos de extensões de Galois no contexto de categorias de Hopf e foram dados em [8]. No próximo resultado, apresentaremos um novo exemplo dessa extensão de Galois que foi inspirado pelo caso usual de que o produto smash é uma extensão de Galois (Exemplo 1.2.7). Este exemplo só foi possível trazer para este contexto devido ao produto smash definido nesse trabalho em 4.1.37 e foi um dos nossos objetivos desde o início.

Teorema 4.1.55. *Seja $\mathcal{H}$ uma categoria de Hopf k-linear e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$ tal que $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y \in X}$ é uma ação diagonal de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-extensão de Galois de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Vimos em 4.1.48 que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita com $\rho_{x,y} = A_x \otimes \Delta_{x,y}$, porém ainda precisamos ver quem são os coinvariantes de $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$.

Conforme a definição dada

$$(\mathcal{A}\#\mathcal{H})^{coH_{x,x}}_{x,x} = \{a\#h \in A_x \otimes H_{x,x} \mid \rho_{x,x}(a\#h) = a\#h \otimes 1\}$$

assim, o cálculo é o mesmo de 1.1.16, e obtemos:

$$(\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,x}^{coH_{x,x}} = A_x\#k1_{H_{x,x}}.$$

Já o isomorfismo de k-álgebras $A_x\#k1_{H_{x,x}} \simeq A_x$, que é o análogo ao que é dado em 1.1.16, segue de uma forma um pouco diferente. Da mesma maneira que foi feito em 1.1.9 temos que existe um morfismo φ_x dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_x \ : \ & A_x \longrightarrow A_x \otimes k1_{H_{x,x}} \\ & a \longmapsto a\#1_{H_{x,x}} \end{aligned}$$

que é k-linear, sobrejetor e morfismo de k-álgebras. Já para mostrar a injetividade, defina $\pi_x : A_x \otimes k1_{H_{x,x}} \longrightarrow A_x$ como sendo $\pi_x = \alpha_{x,x} \circ \sigma_{A_x,k1_{H_{x,x}}}$. Então temos $\pi_x \circ \varphi_x(a) = a$ para todo $a \in A_x$ e, portanto, φ_x é injetora para todo $x \in X$.

Assim podemos usar que para cada $x \in X$:

$$(\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,x}^{coH_{x,x}} = A_x\#k1_{H_{x,x}} \simeq A_x.$$

Como esse isomorfismo acima é um isomorfismo de k-álgebras para cada $x \in X$, temos um isomorfismo de álgebras na categoria $\mathcal{D}_k(X)$:

$$(\mathcal{A}\#\mathcal{H})^{coH} \simeq \mathcal{A}.$$

Agora, precisamos verificar que a aplicação seguinte é bijetiva para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} \beta^z_{x,y} : (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{z,x} \otimes_{A_x} (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,y} & \longrightarrow (\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{z,y} \otimes H_{x,y} \\ (a\#h) \otimes_{A_x} (b\#g) & \longmapsto (a\#h)(b\#g)_0 \otimes (b\#g)_1. \end{aligned}$$

Mas note que podemos usar notação de Sweedler aqui, já que os objetos são k-módulos, e de modo semelhante ao que foi feito em 1.2.7, podemos considerar

$$\beta^z_{x,y}\left((a\#h) \otimes (1_{A_x}\#g)\right) = (a\#h)(1_{A_x}\#g_1) \otimes g_2 = a\#hg_1 \otimes g_2,$$

para $a \in A_z$, $h \in H_{z,x}$ e $g \in H_{x,y}$.

Isso pode ser feito porque o módulo é sobre A_x e temos:

- $(\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{z,x} = A_z\#H_{z,x}$ é A_x-módulo à direita via produto smash:

  $$(a\#h) \cdot a' = (a\#h)(a'\#1_{x,x})$$

  e

- $(\mathcal{A}\#\mathcal{H})_{x,y} = A_x\#H_{x,y}$ é A_x-módulo à esquerda também via produto smash:

  $$a' \cdot (a\#h) = (a' \otimes 1_{x,x})(a\#h).$$

Defina para cada $x, y, z \in X$ a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi^z_{x,y} : A_z\#H_{z,y} \otimes H_{x,y} & \longrightarrow A_z\#H_{z,x} \otimes A_x\#H_{x,y} \\ a\#h \otimes g & \longmapsto a\#h\mathcal{S}_{x,y}(g_1) \otimes 1_{A_x}\#g_2 \end{aligned}$$

e verifiquemos que $\varphi^z_{x,y}$ é a inversa de $\beta^z_{x,y}$ para todo $x, y, z \in X$. Sejam $a \in A_z$, $h \in H_{z,x}$ e $g \in H_{x,y}$ temos:

$$\begin{aligned}(\varphi^z_{x,y} \circ \beta^z_{x,y})\left((a\#h) \otimes (1_{A_x}\#g)\right) &= \varphi^z_{x,y}(a\#hg_1 \otimes g_2)\\ &= a\#hg_1\mathcal{S}_{x,y}(g_2) \otimes 1_{A_x}\#g_3 \quad \text{por} \quad (3.5)\\ &= a\#h\varepsilon_{x,y}(g_1) \otimes 1_{A_x}\#g_2\\ &= a\#h \otimes 1_{A_x}\#g\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\beta^z_{x,y} \circ \varphi^z_{x,y})(a\#h \otimes g) &= \beta^z_{x,y}(a\#h\mathcal{S}_{x,y}(g_1) \otimes 1_{A_x}\#g_2)\\ &= a\#h\mathcal{S}_{x,y}(g_1)g_2 \otimes g_3 \quad \text{por} \quad (3.6)\\ &= a\#h\varepsilon_{x,y}(g_1) \otimes g_2\\ &= a\#h \otimes g.\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-extensão de Galois de $\mathcal{A}$. □

4.2 UMA OUTRA VERSÃO DE PRODUTO SMASH

Nesta seção apresentaremos um produto smash já existente na literatura para este contexto de categorias de Hopf, chamado produto smash cluster. Este produto smash usa a noção de $\mathcal{V}$-categoria dual, e por isso, necessita de uma versão de 'ação' diferente da Definição 4.1.23 dada na seção anterior. Além disso, decorre desse produto smash outra definição de extensão de Galois ([8]), que difere da definição apresentada em 4.1.50.

A referência base desta seção foi [8], em especial a seção 6 desse artigo, porém nesta referência todas as definições são dadas sob a categoria $Vec_{\Bbbk}$. Aqui, na medida em que for possível, as definições e resultados serão apresentados considerando $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal estrita trançada arbitrária. Nos casos em que não pudermos tomar $\mathcal{V}$ qualquer, assumiremos $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ a categoria dos k-módulos com k um anel comutativo.

4.2.1 Produto smash cluster

Nesta primeira subseção definiremos o produto smash cluster na sua versão a esquerda, visando principalmente fazer uma comparação com o produto smash criado na seção anterior. Além disso, apresentaremos uma extensão de Galois dual e alguns resultados relacionados a esta noção, dados por [8], os quais parecem terem sido inspirados pelos resultados dados na seção 1.2 para extensões Hopf-Galois.

Começamos esta seção definindo um cluster e algumas definições correlatas.

Definição 4.2.1. *Um* ***cluster*** $\mathcal{A}$ *com classe subjacente* X *consiste de uma classe de* $\mathcal{V}$*-categorias com classe subjacente* X*, indexadas por* X*, isto é, para todo* $x \in X$ *temos uma* $\mathcal{V}$*-categoria* $\mathcal{A}^x$.

No caso de $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$*, dizemos que* $\mathcal{A}$ *é um* ***cluster*** k***-linear*** *[8].*

Definição 4.2.2. *Sejam* $\mathcal{A}$ *um cluster com classe subjacente* X *e* $\mathcal{B}$ *um cluster com classe subjacente* Y*. Então um* ***morfismo de clusters*** $\overline{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$*, é para cada* $x \in X$ *um*

$\mathcal{V}$-funtor $f^x : \mathcal{A}^x \to \mathcal{B}^{f(x)}$. Assim, temos uma função $f : X \to Y$ e morfismos em $\mathcal{V}$:

$$f^x_{y,z} : \mathcal{A}^x_{y,z} \longrightarrow \mathcal{B}^{f(x)}_{f(y),f(z)}$$

que satisfazem os diagramas (3.3) *e* (3.4)*.*

Como para cada $x \in X$ temos um $\mathcal{V}$-funtor na definição acima, podemos definir um isomorfismo de clusters baseando-se na definição de isomorfismo de $\mathcal{V}$-categorias dada em 3.1.11:

Definição 4.2.3. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ clusters de classe subjacente X. Se para cada $x \in X$ temos um $\mathcal{V}$-X-funtor $f^x : \mathcal{A}^x \to \mathcal{B}^x$, tal que $f^x_{y,z} : \mathcal{A}^x_{y,z} \to \mathcal{B}^x_{y,z}$ é um isomorfismo em $\mathcal{V}$ para todo $x, y, z \in X$, então dizemos que $\overline{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um **isomorfismo de clusters**.*

Note que usando 3.1.12, podemos concluir que para cada $x \in X$, existe um $\mathcal{V}$-X-funtor inverso $g^x : \mathcal{B}^x \to \mathcal{A}^x$, isso implica a existência de um **morfismo de clusters inverso** $\overline{g} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

A seguir apresentamos mais algumas definições, que são adaptações daquelas dadas em [8] feitas para clusters $\Bbbk$-lineares na versão à direita.

Definição 4.2.4. *Seja $\mathcal{A}$ um cluster. Então um **$\mathcal{A}$-módulo à esquerda** é um objeto $M \in \mathcal{V}(X)$, junto com morfismos:*

$$\psi_{y,z,x} : \mathcal{A}^x_{y,z} \otimes M_{z,x} \longrightarrow M_{y,x}$$

tais que as seguintes condições de associatividade e unidade são satisfeitas, para todo $x, y, z, u \in X$:

$$\psi_{y,z,x} \circ (\mathcal{A}^x_{y,z} \otimes \psi_{z,u,x}) = \psi_{y,u,x} \circ (m^x_{y,z,u} \otimes M_{u,x}) \tag{4.21}$$

$$\psi_{y,y,x} \circ (\eta^x_y \otimes M_{y,x}) = M_{y,x} \tag{4.22}$$

ou seja, os seguintes diagramas comutam para todo $x, y, z, u \in X$:

$$\begin{tikzcd}
A^x_{y,z} \otimes A^x_{z,u} \otimes M_{u,x} \arrow[r, "A^x_{y,z} \otimes \psi_{z,u,x}"] \arrow[d, "m^x_{y,z,u} \otimes M_{u,x}"'] & A^x_{y,z} \otimes M_{z,x} \arrow[d, "\psi_{y,z,x}"] \\
A^x_{y,u} \otimes M_{u,x} \arrow[r, "\psi_{y,u,x}"'] & M_{y,x}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes M_{y,x} \arrow[r, "\eta^x_y \otimes M_{y,x}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A^x_{y,y} \otimes M_{y,x} \arrow[d, "\psi_{y,y,x}"] \\
 & M_{y,x}
\end{tikzcd}$$

Definição 4.2.5. *Seja $\mathcal{A}$ um cluster e sejam M e N $\mathcal{A}$-módulos à esquerda. Então um **morfismo de $\mathcal{A}$-módulos** $f : M \to N$ é um morfismo em $\mathcal{V}(X)$ que satisfaz a seguinte propriedade*

$$f_{y,x} \circ \psi^M_{y,z,x} = \psi^N_{y,z,x}(\mathcal{A}^x_{y,z} \otimes f_{z,x}). \tag{4.23}$$

Observação 4.2.6. *Denotamos por ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ a categoria dos $\mathcal{A}$-módulos à esquerda e morfismos de $\mathcal{A}$-módulos, com $\mathcal{A}$ um cluster.*

Vejamos agora um exemplo de cluster k-linear.

Exemplo 4.2.7 ([8])**.** *Sejam B uma categoria k-linear diagonal, conforme definição dada em 4.1.5 e $A \in \mathcal{M}_k(X)$ um B-módulo à direita no sentido da Definição 4.1.1, ou seja,* *existe uma família de aplicações k-lineares* $\psi_{x,y,y} : A_{x,y} \otimes B_y \longrightarrow A_{x,y}$ *satisfazendo condições de associatividade e unidade apropriadas.*

Com base nesses dados, vamos introduzir um cluster k-linear que chamaremos de $End_B(A)$. *Para cada* $x \in X$, *devemos definir* $(End_B(A))^x$ *de forma que seja uma* $\mathcal{M}_k$*-categoria, defina então:*

$$(End_B(A))^x_{y,z} = Hom_{B_x}(A_{z,x}, A_{y,x}).$$

Como $A_{z,x}$ *e* $A_{y,x}$ *são* B_x*-módulos à direita para todo* $x, y, z \in X$, *essa definição faz sentido e, além disso,* $Hom_{B_x}(A_{z,x}, A_{y,x})$ *é um k-módulo. Portanto, para cada* $x \in X$ *temos uma família de k-módulos indexados por* $X \times X$.

Agora precisamos definir a família de morfismos que dá a multiplicação para cada $x \in X$:

$$m^x_{y,z,u} : (End_B(A))^x_{y,z} \otimes (End_B(A))^x_{z,u} \longrightarrow (End_B(A))^x_{y,u}.$$

Isto pode ser feito através da composição de morfismos: $m^x_{y,z,u}(f \otimes g) = f \circ g$, *pois se* $f \in Hom_{B_x}(A_{z,x}, A_{y,x})$ *e* $g \in Hom_{B_x}(A_{u,x}, A_{z,x})$, *então existe a composição* $f \circ g$ *e* $f \circ g \in Hom_{B_x}(A_{u,x}, A_{y,x})$. *Dessa forma, é claro que* $m^x_{y,z,u}$ *satisfaz a associatividade* (3.1).

Por fim, definimos a família de morfismos

$$\eta^x_y : k \longrightarrow (End_B(A))^x_{y,y}$$

como sendo o morfismo identidade em $A_{y,x}$. *Isso nos fornece diretamente a igualdade* (3.2).

Portanto, $End_B(A)$ *é um cluster k-linear.*

O cluster $End_B(A)$ apresentado no exemplo anterior, recebe o nome de **endocluster à direita** de A.

Se usarmos um B-módulo à esquerda no exemplo acima, temos o endocluster à esquerda ${}_BEnd(A)$, que é dado conforme exemplo a seguir:

Exemplo 4.2.8 ([8])**.** *Sejam* B *uma categoria k-linear diagonal e* $A \in \mathcal{M}_k(X)$ *um* B*-módulo à esquerda no sentido da Definição 4.1.1. Um* ***endocluster à esquerda*** *de* A, *denotado por* ${}_BEnd(A)$, *é um cluster definido como segue:*

$$({}_BEnd(A))^x_{y,z} = {}_{B_x}Hom(A_{x,y}, A_{x,z}).$$

As aplicações de multiplicação são dadas pela composição oposta:

$$\begin{aligned} m^x_{y,z,u} \ : \ {}_{B_x}Hom(A_{x,y}, A_{x,z}) \otimes {}_{B_x}Hom(A_{x,z}, A_{x,u}) &\longrightarrow {}_{B_x}Hom(A_{x,y}, A_{x,u}) \\ f \ \otimes \ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

e a unidade de $({}_BEnd(A))^x_{y,y}$ *é a identidade* $A_{x,y}$.

Para definir um produto smash, precisamos ter alguma noção de ação entre os objetos envolvidos. No produto smash de $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ definido em 4.1.37, $\mathcal{H}$ era uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria e $\mathcal{A}$ era uma família de álgebras indexadas por X. A noção de ação usada era a dada por 4.1.23, que dependia da definição de módulo diagonal 4.1.7. Aqui veremos que a diferença com esse produto smash já começa nos objetos envolvidos, pois o papel de $\mathcal{H}$

será representado por uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual (lembre-se da Definição 3.1.33) e o papel de $\mathcal{A}$ será substituído por uma $\mathcal{V}$-categoria. A definição a seguir fornece a noção de ação entre estas estruturas, que será usada no produto smash cluster.

Definição 4.2.9. *Seja C uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual. Uma **C-módulo categoria à esquerda** é uma $\mathcal{V}$-categoria A tal que:*

i) $(A_{x,y}, \psi_{x,y})$ é um $C_{x,y}$-módulo à esquerda em $\mathcal{V}$, para todo $x, y \in X$;

ii) Os seguintes diagramas são comutativos, para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{tikzcd}
C_{x,z} \otimes A_{x,y} \otimes A_{y,z} \arrow[r, "C_{x,z}\otimes m_{x,y,z}"] \arrow[d, "\Delta_{x,y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z}"'] & C_{x,z} \otimes A_{x,z} \arrow[r, "\psi_{x,z}"] & A_{x,z} \\
C_{x,y}\otimes C_{y,z}\otimes A_{x,y}\otimes A_{y,z} \arrow[r, "C_{x,y}\otimes\sigma_{C_{y,z},A_{x,y}}\otimes A_{y,z}"'] & C_{x,y}\otimes A_{x,y}\otimes C_{y,z}\otimes A_{y,z} \arrow[r, "\psi_{x,y}\otimes\psi_{y,z}"'] & A_{x,y}\otimes A_{y,z} \arrow[u, "m_{x,y,z}"']
\end{tikzcd} \tag{4.24}$$

$$\begin{tikzcd}
C_{y,y} \otimes I \arrow[rr, "C_{y,y}\otimes\eta_y"] \arrow[d, "\sim"'] & & C_{y,y} \otimes A_{y,y} \arrow[d, "\psi_{y,y}"] \\
C_{y,y} \arrow[r, "\varepsilon_y"'] & I \arrow[r, "\eta_y"'] & A_{y,y}
\end{tikzcd} \tag{4.25}$$

Algumas observações sobre a definição acima se fazem necessárias:

Observação 4.2.10. *1) A Definição 4.2.9 é mais geral do que a dada em* [8]*, já que consideramos a categoria $\mathcal{V}$ qualquer. Desse modo, as propriedades foram dadas em termos de composição de morfismos, em* [8] *é fixado $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$ e então elas podem ser vistas em termos de elementos.*

2) A propriedade (4.25) *foi acrescentada à definição. Essa correção foi realizada baseada nas outras definições dadas de 'ação', como a 4.1.23, e devido aos resultados que virão na sequência que necessitam de* (4.25) *em suas demonstrações.*

3) Optamos por dar a definição de C-módulo categoria à esquerda, ao invés de à direita, porque dessa forma teremos o produto smash cluster de A e C, facilitando a comparação com a definição de produto smash dada anteriormente. No artigo [8] *as versões à direita destas definições são as mais detalhadas. Vamos expor brevemente as versões à direita na seção subsequente.*

Tendo a definição de 'ação' acima, podemos apresentar a definição de produto smash cluster de uma forma mais abrangente do que aquela apresentada em [8]:

Definição 4.2.11. *Sejam C uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual e A uma C-módulo categoria à esquerda. O **produto smash cluster de A e C**, denotado $A\#C$ é para cada $x \in X$ um objeto $(A\#C)^x$ em $\mathcal{V}(X)$ dado por:*

$$(A\#C)^x_{y,z} = A_{y,z} \otimes C_{z,x}$$

juntamente com uma família de morfismos em $\mathcal{V}$, para cada $x \in X$:

$$m^x_{y,z,u} : (A\#C)^x_{y,z} \otimes (A\#C)^x_{z,u} \longrightarrow (A\#C)^x_{y,u}$$

definida pela seguinte composição de morfismos:

$$\begin{aligned} m^x_{y,z,u} \;=\;& (m_{y,z,u} \otimes C_{u,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes m_{u,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \sigma_{C_{u,x},A_{z,u}} \otimes C_{u,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,x}). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Note que $m_{y,z,u}$ (com três índices) indica a multiplicação na $\mathcal{V}$-categoria A e $m_{u,x}$ (com dois índices) indica a multiplicação na álgebra $C_{u,x}$.

A proposição a seguir confirma o que o nome produto smash cluster já sugere.

Proposição 4.2.12. *O produto smash cluster $A\#C$ é um cluster.*

Demonstração. Vamos mostrar que para cada $x \in X$, $(A\#C)^x$ é uma $\mathcal{V}$-categoria. Começamos mostrando que a composição de morfismos dada em (4.26) para x fixado, satisfaz (3.1) para todo $y, z, u, t \in X$. O cálculo a seguir é análogo ao que foi feito na demonstração da Proposição 4.1.38, basta fazer algumas adaptações considerando os morfismos e índices que temos para esse caso.

$$\begin{aligned} & m^x_{y,z,t} \circ ((A\#C)^x_{y,z} \otimes m^x_{z,u,t}) = \\ = \;& (m_{y,z,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,t} \otimes m_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{z,t}} \otimes C_{t,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,t,x} \otimes A_{z,t} \otimes C_{t,x}) \circ [A_{y,z} \otimes C_{z,x} \otimes [(m_{z,u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{z,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ \\ & (A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x})]] \\ = \;& (m_{y,z,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,t} \otimes m_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes \underbrace{[\sigma_{C_{t,x},A_{z,t}} \circ (C_{t,x} \otimes m_{z,u,t})]}_{(2.17)} \otimes C_{t,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \\ = \;& (m_{y,z,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \underbrace{[\psi_{z,t} \circ (C_{z,t} \otimes m_{z,u,t})]}_{(4.24)} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes A_{z,u} \otimes A_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{z,u} \otimes A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \\ = \;& (m_{y,z,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes [m_{z,u,t} \circ (\psi_{z,u} \otimes \psi_{u,t}) \circ (C_{z,u} \otimes \sigma_{C_{u,t},A_{z,u}} \otimes A_{u,t})] \otimes C_{t,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,t} \otimes A_{z,u} \otimes A_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes \underbrace{[\sigma_{C_{t,x},A_{z,u} \otimes A_{u,t}} \circ (C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \psi_{u,t})]}_{(2.17)} \otimes m_{t,x}) \circ \\ & (A_{y,z} \otimes C_{z,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \\ = \;& \circledcirc, \end{aligned}$$

onde em (2.17) estamos usando naturalidade da trança para comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes A_{u,t} \arrow[r, "\sigma_{C_{t,x},A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}}"] \arrow[d, "C_{t,x}\otimes A_{z,u}\otimes \psi_{u,t}"'] & A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x} \arrow[d, "A_{z,u}\otimes \psi_{u,t}\otimes C_{t,x}"] \\
C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes A_{u,t} \arrow[r, "\sigma_{C_{t,x},A_{z,u}\otimes A_{u,t}}"'] & A_{z,u} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}
\end{tikzcd}$$

$$\circledcirc =$$

$$= \ (m_{y,z,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes m_{z,u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes A_{z,u} \otimes \underbrace{[\psi_{u,t} \circ (C_{u,t} \otimes \psi_{u,t})]}_{(2.37)} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \sigma_{C_{u,t},A_{z,u}} \otimes C_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}} \otimes m_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x})$$

$$= \ (m_{y,z,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes m_{z,u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes A_{z,u} \otimes m_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \sigma_{C_{u,t},A_{z,u}} \otimes C_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x} \otimes m_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \underbrace{\sigma_{C_{t,x},A_{z,u}\otimes(C_{u,t}\otimes A_{u,t})}}_{(2.18)} \otimes C_{t,x} \otimes C_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,t,x} \otimes A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x})$$

$$= \ (\underbrace{[m_{y,z,t} \circ (A_{y,z} \otimes m_{z,u,t})]}_{(3.1)} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes A_{z,u} \otimes m_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes \underbrace{[m_{t,x} \circ (C_{t,x} \otimes m_{t,x})]}_{(3.1.33)}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \underbrace{[(\sigma_{C_{u,t},A_{z,u}} \otimes C_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x} \otimes C_{t,x}) \circ (C_{u,t} \otimes A_{z,u} \otimes \sigma_{C_{t,x},C_{u,t}\otimes A_{u,t}} \otimes C_{t,x})}_{\star} \circ$$

$$\underbrace{(C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{z,u}} \otimes C_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (C_{u,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}})]}_{\star} \otimes C_{t,x}) \circ$$

$$(A_{y,z} \otimes \underbrace{[(\Delta_{z,u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \Delta_{z,t,x}]}_{(3.13)} \otimes A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) = \circledast.$$

O próximo diagrama mostra o que usamos em $\star$ de maneira análoga ao que foi feito na Proposição 4.1.38.

$$\begin{tikzcd}
C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t} \arrow[rr, "C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}}"] \arrow[dr, "C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x},A_{z,u}}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t}"] \arrow[dd, "\sigma_{C_{u,t}\otimes C_{t,x},A_{z,u}}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t}"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)" right] & & C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x} \arrow[dd, "C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x},A_{z,u}}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x}"] \arrow[dl, phantom, "="] \\
& C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes C_{t,x}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t} \arrow[dl, "\sigma_{C_{u,t},A_{z,u}}\otimes C_{t,x}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t}"] \arrow[dr, "C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes C_{t,x}\otimes C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}}"] & \\
A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t} \arrow[dddd, "A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x},C_{u,t}}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t}"'] & & C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes C_{t,x}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x} \arrow[dl, "C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes \sigma_{C_{t,x},C_{u,t}}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x}"'] \arrow[dd, "C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes \sigma_{C_{t,x},C_{u,t}\otimes A_{u,t}}\otimes C_{t,x}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.18)" left] \\
& C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x} \arrow[dr, "C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}}\otimes C_{t,x}"] & \\
& = & C_{u,t}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes C_{t,x} \arrow[dd, "\sigma_{C_{u,t},A_{z,u}}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes C_{t,x}"] \\
& A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x} \arrow[dr, "A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}}\otimes C_{t,x}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright \text{ por } (2.19)"] & \\
A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes C_{t,x}\otimes A_{u,t} \arrow[ur, "A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes \sigma_{C_{t,x},A_{u,t}}"] \arrow[rr, "A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x}\otimes C_{t,x},A_{u,t}}"'] & & A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes C_{t,x}\otimes C_{t,x}
\end{tikzcd}$$

Assim, no lugar de $\star$ que é a composição dos morfismos do contorno superior e direito do diagrama, substituimos pela composição dos morfismos do lado esquerdo e inferior e obtemos:

$$\begin{aligned}
&\circledast = \\
= \ & ([m_{y,u,t} \circ (m_{y,z,u} \otimes A_{u,t})] \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z}\otimes C_{z,u}\otimes A_{z,u}\otimes m_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes m_{t,x})\circ(A_{y,z}\otimes C_{z,u}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes A_{u,t}\otimes m_{t,x}\otimes C_{t,x})\circ \\
& (A_{y,z}\otimes C_{z,u}\otimes A_{z,u}\otimes C_{u,t}\otimes C_{u,t}\otimes \sigma_{C_{t,x}\otimes C_{t,x},A_{u,t}} \otimes C_{t,x})\circ \\
& (A_{y,z}\otimes C_{z,u}\otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x},C_{u,t}} \otimes C_{t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z}\otimes C_{z,u}\otimes \sigma_{C_{u,t}\otimes C_{t,x},A_{z,u}} \otimes C_{u,t} \otimes C_{t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes [(C_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x}) \circ \Delta_{z,u,x}] \otimes A_{z,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & ([m_{y,u,t} \circ (m_{y,z,u} \otimes A_{u,t})] \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes A_{z,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes m_{u,t} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes C_{u,t} \otimes \underbrace{[(A_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (\sigma_{C_{t,x} \otimes C_{t,x}, A_{u,t}})]}_{(2.17)} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x}, C_{u,t}} \otimes C_{t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \underbrace{[(\sigma_{C_{u,t} \otimes C_{t,x}, A_{z,u}}) \circ (\Delta_{u,t,x} \otimes A_{z,u})]}_{(2.17)} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \\
= \quad & (m_{y,u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (m_{y,z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x}, A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes \underbrace{[(m_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x}, C_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ (\Delta_{u,t,x} \otimes \Delta_{u,t,x})]}_{(3.1.33)} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \sigma_{C_{u,x}, A_{z,u}} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \\
= \quad & (m_{y,u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x}, A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& ([m_{y,z,u} \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u})] \otimes [\Delta_{u,t,x} \circ m_{u,x}] \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \sigma_{C_{u,x}, A_{z,u}} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \\
= \quad & (m_{y,u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,u} \otimes \psi_{u,t} \otimes m_{t,x}) \circ (A_{z,u} \otimes C_{u,t} \otimes \sigma_{C_{t,x}, A_{u,t}} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,u} \otimes \Delta_{u,t,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (m_{y,z,u} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,u} \otimes m_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ \\
& (A_{y,z} \otimes C_{z,u} \otimes \sigma_{C_{u,x}, A_{z,u}} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,u,x} \otimes A_{z,u} \otimes C_{u,x} \otimes A_{u,t} \otimes C_{t,x}) \\
= \quad & m^x_{y,u,t} \circ (m^x_{y,z,u} \otimes (A\#C)^x_{u,t}).
\end{aligned}$$

Logo $m^x_{y,z,u}$ satisfaz a equação (3.1).

Agora, para a unidade de $(A\#C)^x$, devemos ter para cada x fixado, uma família de morfismos em $\mathcal{V}$:

$$\eta^x_y : I \longrightarrow (A\#C)^x_{y,y}.$$

Definimos então, de maneira natural, $\eta^x_y = \eta_y \otimes \eta_{y,x}$, para todo $y \in X$, onde η_y é a unidade na $\mathcal{V}$-categoria A e $\eta_{y,x}$ é a unidade na álgebra $C_{y,x}$. Vejamos que desa forma, η^x_y satisfaz a equação (3.2).

$$\begin{aligned}
& m^x_{y,y,z} \circ (\eta^x_y \otimes (A\#C)^x_{y,z}) = \\
& \quad = \quad (m_{y,y,z} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,y} \otimes \psi_{y,z} \otimes m_{z,x}) \circ (A_{y,y} \otimes C_{y,z} \otimes \sigma_{C_{z,x}, A_{y,z}} \otimes C_{z,x}) \circ \\
& \quad (\eta_y \otimes \underbrace{(\Delta_{y,z,x} \circ \eta_{y,x})}_{(3.1.33)} \otimes A_{y,z} \otimes C_{z,x}) \\
& \quad = \quad (m_{y,y,z} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,y} \otimes \psi_{y,z} \otimes m_{z,x}) \circ (\eta_y \otimes \eta_{y,z} \otimes [(A_{y,z} \otimes \eta_{z,x}) \circ \underbrace{\sigma_{I, A_{y,z}}}_{(2.24)}] \otimes C_{z,x}) \\
& \quad = \quad (m_{y,y,z} \otimes C_{z,x}) \circ (\eta_y \otimes \underbrace{[\psi_{y,z} \circ (\eta_{y,z} \otimes A_{y,z})]}_{(2.38)} \otimes \underbrace{[m_{z,x} \circ (\eta_{z,x} \otimes C_{z,x})]}_{(3.1.33)}) \\
& \quad = \quad (\underbrace{[m_{y,y,z} \circ (\eta_y \otimes A_{y,z})]}_{(3.2)} \otimes C_{z,x}) \\
& \quad = \quad A_{y,z} \otimes C_{z,x} = (A\#C)^x_{y,z}.
\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{m^x_{y,z,z} \circ ((A\#C)^x_{y,z} \otimes \eta^x_z) =} \\
= & (m_{y,z,z} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \psi_{z,z} \otimes m_{z,x}) \circ \\
 & (A_{y,z} \otimes C_{z,z} \otimes \underbrace{[\sigma_{C_{z,x},A_{z,z}} \circ (C_{z,x} \otimes \eta_z)]}_{(2.17)} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,z,x} \otimes I \otimes \eta_{z,x}) \\
= & (m_{y,z,z} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \underbrace{[\psi_{z,z} \circ (C_{z,z} \otimes \eta_z)]}_{(4.25)} \otimes m_{z,x}) \circ \\
 & (A_{y,z} \otimes C_{z,z} \otimes \underbrace{\sigma_{C_{z,x},I}}_{(2.24)} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,z,x} \otimes I \otimes \eta_{z,x}) \\
= & (m_{y,z,z} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,z} \otimes [\eta_z \circ \varepsilon_z] \otimes \underbrace{[m_{z,x} \circ (C_{z,x} \otimes \eta_{z,x})]}_{(3.1.33)}) \circ (A_{y,z} \otimes \Delta_{z,z,x} \otimes I) \\
= & (\underbrace{[m_{y,z,z} \circ (A_{y,z} \otimes \eta_z)]}_{(3.2)} \otimes C_{z,x}) \circ (A_{y,z} \otimes \underbrace{[(\varepsilon_z \otimes C_{z,x}) \circ \Delta_{z,z,x}]}_{(3.14)}) \\
= & A_{y,z} \otimes C_{z,x} = (A\#C)^x_{y,z}.
\end{array}$$

Portanto, $(A\#C)^x$ é uma $\mathcal{V}$-categoria para todo $x \in X$.

□

A partir daqui consideraremos $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$.

Definição 4.2.13 ([8])**.** *Sejam C uma categoria semi-Hopf k-linear dual e A uma C-módulo categoria à esquerda. Então definimos a* ***álgebra diagonal*** *$B = A^C$ como sendo uma família de k-módulos indexados por X, $B = (B_x)_{x \in X}$, onde cada B_x é dado por:*

$$B_x = \{a \in A_{x,x} \mid c \cdot a = \langle \varepsilon_x, c \rangle \, a, \ \forall \, c \in C_{x,x}\}. \tag{4.27}$$

Note que para cada x esta definição é a mesma dada em 1.1.3 para os invariantes de $C_{x,x}$ em $A_{x,x}$. Vejamos a seguir que de fato B é uma álgebra.

Proposição 4.2.14. *A álgebra diagonal é uma álgebra na categoria $\mathcal{D}_k(X)$.*

Demonstração. Vejamos que para cada $x \in X$, B_x é uma k-álgebra. Como $B_x \subseteq A_{x,x}$ e $(A_{x,x}, m_{x,x,x}, \eta_x)$ é uma k-álgebra, basta vermos que $m_{x,x,x}(a \otimes b) \in B_x$ para todo $a, b \in B_x$ e que $\eta_x(1_k) = 1_x \in B_x$.

De fato, sejam $a, b \in B_x$, para todo $c \in C_{x,x}$ temos:

$$\begin{array}{rcl}
c \cdot (ab) & = & (\psi_{x,x} \circ (C_{x,x} \otimes m_{x,x,x}))(c \otimes a \otimes b) \qquad \text{por (4.24)} \\
 & = & (c_{(1,x,x)} \cdot a)(c_{(2,x,x)} \cdot b) \qquad \text{por (4.27)} \\
 & = & \langle \varepsilon_x, c_{(1,x,x)} \rangle a \, \langle \varepsilon_x, c_{(2,x,x)} \rangle b \\
 & = & \langle \varepsilon_x, c_{(1,x,x)} \langle \varepsilon_x, c_{(2,x,x)} \rangle \rangle \, ab \qquad \text{por (3.14)} \\
 & = & \langle \varepsilon_x, c \rangle \, ab.
\end{array}$$

Também, para todo $c \in C_{x,x}$,

$$\begin{array}{rcl}
c \cdot 1_x = c \cdot (\eta_x(1_k)) & = & \psi_{x,x} \circ (C_{x,x} \otimes \eta_x)(c \otimes 1_k) \qquad \text{por (4.25)} \\
 & = & \langle \varepsilon_x, c \rangle \eta_x(1_k) = \langle \varepsilon_x, c \rangle 1_x.
\end{array}$$

Portanto, B é uma álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$. □

Como a álgebra diagonal $B = A^C$ é uma álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$, então B é uma categoria k-linear diagonal conforme 4.1.5. Além disso, sendo A uma $\mathcal{M}_k$-categoria, A pode ser vista como B-módulo à direita com $\psi_{x,y,y} = m_{x,y,y}$, então temos um cluster k-linear $End_B(A)$ conforme 4.2.7.

Juntando a isso a Proposição 4.2.12, faz sentido definirmos o morfismo a seguir.

Definição 4.2.15 ([8]). *Sejam C uma categoria semi-Hopf k-linear dual, A uma C-módulo categoria à esquerda e $B = A^C$ a álgebra diagonal. Então temos um* ***morfismo canônico de clusters***

$$\varphi : A\#C \longrightarrow End_B(A)$$

dado pelas fórmulas

$$\begin{aligned} \varphi^x_{y,z} : A_{y,z} \otimes C_{z,x} &\longrightarrow Hom_{B_x}(A_{z,x}, A_{y,x}) \\ \varphi^x_{y,z}(a \otimes c)(a') &= a(c \cdot a'). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Proposição 4.2.16. *O morfismo φ definido por* (4.28) *é um morfismo de clusters.*

Demonstração. Note primeiramente que a classe subjacente dos dois clusters envolvidos é X e que, pela forma como φ foi definido, ele atua nos elementos de X como identidade. Assim, de acordo com 4.2.2, precisamos ver que para cada $x \in X$, $\varphi^x : (A\#C)^x \to (End_B(A))^x$ é um $\mathcal{M}_k$-X-funtor.

Vejamos que $\varphi^x_{y,z}$ está bem definido. Para todo $a \in A_{y,z}$, $c \in C_{z,x}$ temos que $\varphi^x_{y,z}(a \otimes c)$ é uma aplicação k-linear de $A_{z,x}$ em $A_{y,x}$, já que as aplicações envolvidas são k-lineares. Também $\varphi^x_{y,z}$ é k-linear pois é linear em cada entrada do tensor. Falta vermos somente que $\varphi^x_{y,z}(a \otimes c)$ é morfismo de B_x-módulos à direita. Sejam $a' \in A_{z,x}$ e $b \in B_x$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi^x_{y,z}(a \otimes c)(a'b) &= a(c \cdot (a'b)) \quad \text{por (4.24)} \\ &= a(c_{(1,z,x)} \cdot a')(c_{(2,x,x)} \cdot b) \quad \text{por (4.27)} \\ &= a(c_{(1,z,x)} \cdot a')(\langle \varepsilon_x, c_{(2,x,x)} \rangle b) \\ &= a([c_{(1,z,x)} \langle \varepsilon_x, c_{(2,x,x)} \rangle] \cdot a')b \quad \text{por (3.14)} \\ &= a(c \cdot a')b \\ &= (\varphi^x_{y,z}(a \otimes c)(a'))b. \end{aligned}$$

Verificaremos agora que o diagrama (3.3) comuta, o que nesse caso, significa mostrar que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} (A\#C)^x_{yz} \otimes (A\#C)^x_{zu} \arrow[r, "m^x_{y,z,u}"] \arrow[d, "\varphi^x_{y,z} \otimes \varphi^x_{z,u}"'] & (A\#C)^x_{y,u} \arrow[d, "\varphi^x_{y,u}"] \\ (End_B(A))^x_{y,z} \otimes (End_B(A))^x_{z,u} \arrow[r, "m^x_{y,z,u}"'] & (End_B(A))^x_{y,u} \end{tikzcd}$$

Note que a multiplicação na seta superior do diagrama é a multiplicação definida em (4.26), enquanto que a multiplicação na seta inferior do diagrama é a composição de morfismos que foi definida no Exemplo 4.2.7.

Sejam $a \in A_{y,z}$, $c \in C_{z,x}$, $a' \in A_{z,u}$, $c' \in C_{u,x}$ e $b \in A_{u,x}$, temos então

$$\begin{aligned}
((\varphi^x_{y,u} \circ m^x_{y,z,u})(a \otimes c \otimes a' \otimes c'))(b) &= (\varphi^x_{y,u}(a(c_{(1,z,u)} \cdot a') \otimes c_{(2,u,x)}c'))(b) \\
&= (a(c_{(1,z,u)} \cdot a'))((c_{(2,u,x)}c') \cdot b) \quad \text{por 4.2.9 i)} \\
&= (a(c_{(1,z,u)} \cdot a'))(c_{(2,u,x)} \cdot (c' \cdot b)) \quad \text{por (3.1)} \\
&= a((c_{(1,z,u)} \cdot a')(c_{(2,u,x)} \cdot (c' \cdot b))) \quad \text{por (4.24)} \\
&= a(c \cdot (a'(c' \cdot b))) \\
&= \varphi^x_{y,z}(a \otimes c)(a'(c' \cdot b)) \\
&= \varphi^x_{y,z}(a \otimes c)[(\varphi^x_{z,u}(a' \otimes c'))(b)] \\
&= ((m^x_{y,z,u} \circ (\varphi^x_{y,z} \otimes \varphi^x_{z,u}))(a \otimes c \otimes a' \otimes c'))(b).
\end{aligned}$$

Por fim, verificaremos o diagrama (3.4). Lembre-se que a unidade em $(A\#C)^x_{yy}$ é dada por $\eta^x_{y,y} = \eta_y \otimes \eta_{y,x}$, com $\eta_y(1_k) = 1_y$ sendo a unidade em $A_{y,y}$ e $\eta_{y,x}(1_k) = 1_{y,x}$ a unidade na álgebra $C_{y,x}$. A unidade em $(End_B(A))^x_{y,y}$, conforme visto em 4.2.7, é o morfismo identidade em $A_{y,x}$. Temos então para $a' \in A_{y,x}$:

$$\begin{aligned}
(\varphi^x_{y,y} \circ (1_y \otimes 1_{y,x}))(a') &= 1_y(1_{y,x} \cdot a') \quad \text{por 4.2.9 i)} \\
&= 1_y a' \quad \text{por (3.2)} \\
&= a'.
\end{aligned}$$

Logo $\varphi^x_{y,y} \circ (1_y \otimes 1_{y,x})$ é o morfismo identidade em $A_{y,x}$. Com isso concluímos que φ é morfismo de clusters. □

A seguir definimos uma extensão de Galois dual, na qual a definição dada em 4.2.3 se faz necessária:

Definição 4.2.17 ([8]). *Se φ definido por* (4.28) *é um isomorfismo de clusters, então dizemos que A é uma* ***extensão C-Galois dual (à esquerda) de*** *$B = A^C$.*

Os resultados a seguir são obtidos no artigo [8] (Proposição 6.2) como uma aplicação do produto smash cluster. Assim, consideraremos aqui $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$, a categoria dos $\Bbbk$-espaços vetoriais.

Proposição 4.2.18 ([8]). *Sejam C uma categoria semi-Hopf $\Bbbk$-linear dual, A uma C-módulo categoria à esquerda de modo que, $A\#C$ seja o produto smash cluster de A e C e $B = A^C$ seja a álgebra diagonal. Então, temos um par adjunto de funtores (F_2, G_2) entre as categorias ${}_B\mathcal{D}_k(X)$ e ${}_{A\#C}\mathcal{M}$.*

Demonstração. Lembre-se de 4.1.6 que ${}_B\mathcal{D}_k(X)$ é a categoria dos B-módulos à esquerda em $\mathcal{D}_k(X)$, e de 4.2.6 que ${}_{A\#C}\mathcal{M}$ é a categoria dos $A\#C$-módulos à esquerda. Daremos aqui apenas os passos principais da demonstração.

Começamos definindo o funtor $F_2 : {}_B\mathcal{D}_k(X) \to {}_{A\#C}\mathcal{M}$ nos objetos. Para cada $N \in {}_B\mathcal{D}_k(X)$ definimos $F_2(N)_{x,y} = A_{x,y} \otimes_{B_y} N_y$, então $F_2(N)$ é um $A\#C$-módulo à esquerda com

$$\psi_{y,z,x} : (A\#C)^x_{y,z} \otimes F_2(N)_{z,x} \longrightarrow F_2(N)_{y,x}$$

dado por:

$$\psi_{y,z,x}((a \otimes c) \otimes (a' \otimes n)) = a(c \cdot a') \otimes n$$

para todo $a \in A_{y,z}$, $c \in C_{z,x}$, $a' \in A_{z,x}$ e $n \in N_x$.

Agora consideremos o funtor $G_2 : {}_{A\#C}\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{D}_k(X)$. Seja $M \in {}_{A\#C}\mathcal{M}$, definimos $G_2(M)$ do seguinte modo:

$$G_2(M)_x = \{m \in M_{x,x} \mid (1_x \otimes c) \cdot m = \langle \varepsilon_x, c \rangle m, \ \forall\, c \in C_{x,x}\} = M_{x,x}^{C_{x,x}}$$

Precisamos que $G_2(M)_x$ seja um B_x-módulo à esquerda. Para ver isso, primeiro note que M sendo $A\#C$-módulo à esquerda, então M é A-módulo à esquerda via restrição de escalares:

$$\psi_{y,z,x} : A_{y,z} \otimes M_{z,x} \to M_{y,x}$$

$$a \cdot m = (a \otimes 1_{z,x}) \cdot m$$

onde $1_{z,x}$ é a unidade de $C_{z,x}$. Como $B_x \subseteq A_{x,x}$, tomando $a \in B_x$, $m \in M_{x,x}$, a ação acima nos dá que $M_{x,x}$ é um B_x-módulo à esquerda. Assim, para concluir que $G_2(M)_x \subseteq M_{x,x}$ é B_x-módulo à esquerda, basta mostrar que: Se $b \in B_x$ e $m \in G_2(M)_x$, então $b \cdot m \in G_2(M)_x$, ou seja, que $G_2(M)_x$ é B_x-submódulo de $M_{x,x}$.

Agora daremos uma breve descrição da unidade e a counidade da adjunção. Para $M \in {}_{A\#C}\mathcal{M}$, $\varepsilon^M : F_2G_2(M) \to M$ é um morfismo em ${}_{A\#C}\mathcal{M}$ dado por:

$$\varepsilon^M_{x,y} : A_{x,y} \otimes_{B_y} M_{y,y}^{C_{y,y}} \to M_{x,y}$$

$$\varepsilon^M_{x,y}(a \otimes_{B_y} m) = a \cdot m$$

Para $N \in {}_B\mathcal{D}_k(X)$, $\eta^N : N \to G_2F_2(N)$ é um morfismo em ${}_B\mathcal{D}_k(X)$ definido por:

$$\eta^N_x : N_x \to (A_{x,x} \otimes_{B_x} N_x)^{C_{x,x}}, \qquad \eta^N_x(n) = 1_x \otimes_{B_x} n.$$

□

Proposição 4.2.19 ([8]). *Considere os dados da proposição anterior e o morfismo* φ *dado em* (4.28). *Se as seguintes condições valem:*

1) *A é uma extensão C-Galois dual (à esquerda) de* $B = A^C$*;*

2) $A_{x,y}$ *é projetivo finitamente gerado como um* B_x*-módulo à direita, para todo* $x, y \in X$*;*

3) $A_{x,x}$ *é* B_x*-módulo à direita fielmente plano para todo* $x \in X$*,*

então (F_2, G_2) *é uma equivalência adjunta.*

Demonstração. A demonstração deste resultado utiliza em grande parte, dados do Teorema 5.4 de [8], então daremos aqui apenas uma ideia geral da prova.

O funtor F_2 é uma composição de funtores $R \circ F_1$ onde $F_1 : {}_B\mathcal{D}_k(X) \to {}_{End_B(A)}\mathcal{M}$ é definido nos objetos por: Dado $N \in {}_B\mathcal{D}_k(X)$, então $F_1(N)_{x,y} = A_{x,y} \otimes_{B_y} N_y$, será um ${}_{End_B(A)}\mathcal{M}$-módulo à esquerda por:

$$f \cdot (a \otimes n) = f(a) \otimes_{B_x} n$$

para $f \in Hom_{B_x}(A_{z,x}, A_{y,x})$, $a \in A_{z,x}$ e $n \in N_x$.

O funtor $R : {}_{End_B(A)}\mathcal{M} \to {}_{A\#C}\mathcal{M}$ é o funtor restrição de escalares via φ, ou seja, se $M \in {}_{End_B(A)}\mathcal{M}$, então $R(M) = M$ que se torna $A\#C$-módulo à esquerda com:

$$(a\#c) \cdot m = \varphi^x_{y,z}(a \otimes c) \cdot m$$

para $a \in A_{y,z}$, $c \in C_{z,x}$ e $m \in M_{z,x}$.

A condição 1) nos diz que φ é um isomorfismo de clusters, e com isso o funtor R é isomorfismo de categorias.

As condições 2) e 3) nos fornecem através do Teorema 5.4 de [8], que a counidade e a unidade da adjunção (F_1, G_1), são isomorfismos, onde $G_1 = G_2 \circ R$.

Portanto, (F_2, G_2) é uma equivalência adjunta. □

Esta proposição parece generalizar a implicação (I) ⇒ (II) da equivalência citada na Observação 1.2.13, basta para isso pensar C como H^*.

Observe que a definição de extensão C-Galois dual foi inspirada pelo isomorfismo que aparece em (I) a).

4.2.2 Uma breve apresentação das definições à direita

Nesta seção apresentaremos as versões à direita de algumas das definições dadas na seção anterior e que levam à versão do produto smash à direita, por isso a principal referência é também [8]. Será uma seção breve, visto que tanto definições como os resultados, são análogos aos da seção anterior. Porém, veremos que estas versões são fundamentais no principal resultado do capítulo 5, por isso merecem uma seção à parte.

Começamos apresentando a versão à direita da definição de uma C-módulo categoria:

Definição 4.2.20. *Seja C uma $\underline{A}(\mathcal{V})$-categoria dual. Uma* ***C-módulo categoria à direita*** *é uma $\mathcal{V}$-categoria A tal que:*

i) $(A_{x,y}, \psi_{x,y})$ é um $C_{x,y}$-módulo à direita em $\mathcal{V}$, para todo $x, y \in X$;

ii) Os seguintes diagramas são comutativos, para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes C_{x,z} \arrow[r, "m_{x,y,z} \otimes C_{x,z}"] \arrow[d, "A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes \Delta_{x,y,z}"'] & A_{x,z} \otimes C_{x,z} \arrow[r, "\psi_{x,z}"] & A_{x,z} \\
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes C_{x,y} \otimes C_{y,z} \arrow[r, "A_{x,y} \otimes \sigma_{A_{y,z},C_{x,y}} \otimes C_{y,z}"'] & A_{x,y} \otimes C_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes C_{y,z} \arrow[r, "\psi_{x,y} \otimes \psi_{y,z}"'] & A_{x,y} \otimes A_{y,z} \arrow[u, "m_{x,y,z}"']
\end{tikzcd} \tag{4.29}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes C_{y,y} \arrow[rr, "\eta_y \otimes C_{y,y}"] \arrow[d, "\sim"'] & & A_{y,y} \otimes C_{y,y} \arrow[d, "\psi_{y,y}"] \\
C_{y,y} \arrow[r, "\varepsilon_y"'] & I \arrow[r, "\eta_y"'] & A_{y,y}
\end{tikzcd} \tag{4.30}$$

Esta noção de 'ação' nos fornece outra versão do produto smash cluster:

Definição 4.2.21. *Sejam C uma $\underline{A}(\mathcal{V})$-categoria dual e A uma C-módulo categoria à direita. O* ***produto smash cluster de C e A****, denotado $C\#A$ é para cada $x \in X$ um objeto $(C\#A)^x$ em $\mathcal{V}(X)$ dado por:*

$$(C\#A)^x_{y,z} = C_{x,y} \otimes A_{y,z}$$

juntamente com uma família de morfismos em $\mathcal{V}$, para cada $x \in X$:

$$m^x_{y,z,u} : (C\#A)^x_{y,z} \otimes (C\#A)^x_{z,u} \longrightarrow (C\#A)^x_{y,u}$$

definida pela seguinte composição de morfismos:

$$\begin{aligned} m^x_{y,z,u} \;=\; & (C_{x,y} \otimes m_{y,z,u}) \circ (m_{x,y} \otimes \psi_{y,z} \otimes A_{z,u}) \circ \\ & (C_{x,y} \otimes \sigma_{A_{y,z},C_{x,y}} \otimes C_{y,z} \otimes A_{z,u}) \circ (C_{x,y} \otimes A_{y,z} \otimes \Delta_{x,y,z} \otimes A_{z,u}). \end{aligned} \tag{4.31}$$

A verificação de que $C\#A$ é cluster é análoga à que foi feita em 4.2.12 e envolve mostrar que a multiplicação (4.31) é associativa e que a unidade para cada $x \in X$ é dada pela família $\eta^x_y = \eta_{x,y} \otimes \eta_y$.

A partir daqui considerando $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, podemos definir uma álgebra diagonal de maneira análoga à Definição 4.2.13, usando agora a versão de módulo categoria à direita.

Definição 4.2.22 ([8])**.** *Sejam C uma categoria semi-Hopf k-linear dual e A uma C-módulo categoria à direita. Então definimos a* ***álgebra diagonal*** *$B = A^C$ como sendo uma família de k-módulos indexados por X, $B = (B_x)_{x \in X}$, onde cada B_x é dado por:*

$$B_x = \{a \in A_{x,x} \mid a \cdot c = \langle \varepsilon_x, c \rangle\, a,\ \forall\, c \in C_{x,x}\}. \tag{4.32}$$

Sendo B uma álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$ (verificado de forma análoga à 4.2.14) podemos ver B como uma categoria k-linear diagonal e então a $\mathcal{M}_k$-categoria A é um B-módulo à esquerda com ação dada pela própria multiplicação de A. Com isso, o endocluster à esquerda ${}_B End(A)$ definido no Exemplo 4.2.8, pode ser considerado com B sendo a álgebra diagonal definida acima e podemos definir o seguinte morfismo:

Definição 4.2.23 ([8])**.** *Sejam C uma categoria semi-Hopf k-linear dual, A uma C-módulo categoria à direita e $B = A^C$ a álgebra diagonal. Então temos um* ***morfismo canônico de clusters***

$$\varphi : C\#A \longrightarrow {}_B End(A)$$

dado pelas fórmulas

$$\begin{aligned} \varphi^x_{y,z} : C_{x,y} \otimes A_{y,z} & \longrightarrow {}_{B_x} Hom(A_{x,y}, A_{x,z}) \\ \varphi^x_{y,z}(c \otimes a)(a') & \;=\; (a' \cdot c)\, a. \end{aligned} \tag{4.33}$$

De forma análoga ao que foi feito na Proposição 4.2.16, mostra-se que φ dado acima é de fato morfismo de clusters.

Por fim, concluímos esta seção com a seguinte definição:

Definição 4.2.24 ([8])**.** *Se φ definido por (4.33) é um isomorfismo de clusters. Então dizemos que A é uma* ***extensão C-Galois dual (à direita) de*** *$B = A^C$.*

Capítulo 5

UM TEOREMA DE DUALIDADE PARA CATEGORIAS DE HOPF

Neste capítulo temos como objetivo responder a seguinte pergunta: É possível enunciar um teorema, análogo ao teorema de dualidade para álgebras de Hopf, nesse contexto de categorias de Hopf?

Vimos em 1.2.9, que se H é uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita e A é uma H-módulo álgebra, então a álgebra $A\#H$ é H^*-módulo álgebra e existe um isomorfismo entre as álgebras $(A\#H)\#H^*$ e $End_A(A\#H)$. Este resultado é conhecido como teorema de dualidade de Blattner-Montgomery. Neste capítulo começamos pensando em quais elementos são necessários para criar um resultado análogo neste contexto. Para termos definido o produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ conforme 4.1.37, tomamos $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{D}(X)$ tal que $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y\in X}$ é uma ação diagonal à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$. Devemos então nos perguntar se existe uma 'ação' de $\mathcal{H}^*$ em $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ à esquerda. Mas que ação seria essa e o que seria $\mathcal{H}^*$ neste contexto? É o que precisamos elucidar antes de qualquer coisa.

Primeiramente $\mathcal{H}^*$ remete a noção de dual, neste contexto de categoria de Hopf temos uma noção dual através da Definição 3.1.37 de categoria de Hopf dual. Tomando $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k^f$ a categoria dos k-módulos projetivos finitamente gerados, com k um anel comutativo, existe uma correspondência entre $\mathcal{V}$-categorias de Hopf e $\mathcal{V}$-categorias de Hopf duais bem estabelecida, conforme Teorema 3.2.3. Assim, fixamos $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k^f$, e sendo $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria, parece ser um bom palpite a princípio, supor que $\mathcal{H}^*$ seja dado por $\mathcal{H}^\star$ conforme notação 3.2.4, que é a $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual correspondente por 3.2.3.

Agora, vimos que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{V}$-categoria por 4.1.38, e temos que $\mathcal{H}^\star$ é uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual, então parece ser um bom palpite também pensar que a ação de $\mathcal{H}^\star$ em $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ seja a dada pela Definição 4.2.9, ou seja, precisamos mostrar que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{H}^\star$-módulo categoria à esquerda.

Tendo isso em mente e lembrando que já mostramos que o produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita na Proposição 4.1.48, parece ser bastante interessante procurar relacionar $\mathcal{H}$-comódulo categorias à direita com $\mathcal{H}^*$-módulo categorias à esquerda, o que generalizaria o resultado 1.1.19. Assim, dividimos este capítulo em duas seções, na primeira vamos verificar se existe uma relação mais geral entre módulos e comódulos, enquanto que na segunda seção, voltaremos ao nosso raciocínio referente ao teorema de dualidade.

5.1 MÓDULOS E COMÓDULOS

Inspirados pela busca de um teorema de dualidade para categorias de Hopf, conforme descrevemos acima, nesta seção vamos procurar relacionar uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita (Definição 4.1.44) à uma C-módulo categoria à esquerda (ou à direita) (Definição 4.2.9 ou 4.2.20), ao menos no caso especial em que C é a $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual $\mathcal{H}^\star$, ou algo parecido.

Começamos esta seção explicando nosso raciocínio de maneira informal. Considere L uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita, então temos uma família de morfismos:

$$\rho_{x,y} : L_{x,y} \longrightarrow L_{x,y} \otimes H_{x,y}$$

e denotamos: $\rho_{x,y}(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$ para $a \in L_{x,y}$.

Para termos uma C-módulo categoria à esquerda, onde C a princípio é $\mathcal{H}^\star$, precisamos definir: $\psi_{x,y} : C_{x,y} \otimes L_{x,y} \to L_{x,y}$. Do que temos para o caso usual (Proposição 1.1.19), o mais natural é definir $\psi(f \otimes a) = \langle f, a_{[1]} \rangle a_{[0]}$, que para fazer sentido, $a \in L_{x,y}$ e $f \in H^*_{x,y} = C_{y,x} = C^{op}_{x,y}$. Assim a forma correta para o ψ é: $\psi_{x,y} : H^*_{x,y} \otimes L_{x,y} \to L_{x,y}$, o que sugere uma troca nos índices em quem faz o papel de 'escalares', pois $H^*_{x,y} = C_{y,x}$ e não $C_{x,y}$ como pensado inicialmente. Voltaremos a comentar este detalhe a seguir.

Definida a forma de ψ, precisamos mostrar que $L_{x,y}$ é $H^*_{x,y}$-módulo à esquerda para todo $x, y \in X$, porém já na demonstração do primeiro diagrama da definição vemos que isso não é possível. A convolução oposta como multiplicação na correspondência de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{H}^*$ parece ser a responsável por este problema. Dessa forma, o que parece funcionar, e é o que vamos demonstrar a seguir, é relacionar $\mathcal{H}$-comódulo categorias à direita com $\mathcal{H}^*$-módulo categorias à **direita** (Definição 4.2.20).

Voltando à forma com que $\psi_{x,y}$ teve que ser definida, a troca nos índices dos escalares sugere o uso de $\mathcal{H}^*$ como o oposto do correspondente dual de $\mathcal{H}$, ou seja, $\mathcal{H}^{\star op}$; que mostramos em 3.2.5 que também é uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual. Usar os escalares desta forma se torna imprescindível ao demonstrar que o diagrama (4.29) comuta. Poderíamos nos perguntar se usar $\mathcal{H}^*$ sendo $\mathcal{H}^{op\star}$ faria alguma diferença no resultado, porém vimos na Proposição 3.2.7 que $\mathcal{H}^{op\star} = \mathcal{H}^{\star op}$.

A seguir vamos mostrar a relação existente entre comódulo categoria e módulo categoria com detalhes, juntando todas as informações expostas acima e que tornam isso possível.

Proposição 5.1.1. *Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria com $H_{x,y}$ um k-módulo projetivo finitamente gerado para cada $x, y \in X$, e L uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita. Então L é uma $\mathcal{H}^{\star op}$-módulo categoria à direita.*

Demonstração. Seja L uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita, temos uma família de morfismos:

$$\rho_{x,y} : L_{x,y} \longrightarrow L_{x,y} \otimes H_{x,y}$$

e denotamos: $\rho_{x,y}(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$ para $a \in L_{x,y}$.

Vejamos que L é $\mathcal{H}^{\star op}$-módulo categoria à direita com $\psi_{x,y} : L_{x,y} \otimes H^*_{x,y} \longrightarrow L_{x,y}$ definido por:

$$\psi_{x,y}(a \otimes h^*) = a \cdot h^* = \langle h^*, a_{[1]} \rangle a_{[0]}.$$

Note que, $\mathcal{H}^{\star op}$ é uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual conforme visto em 3.2.5, e iremos usar aqui as notações e morfismos já estabelecidos.

Começamos mostrando que $L_{x,y}$ é $H^*_{x,y}$-módulo à direita para todo $x, y \in X$. Sejam $a \in L_{x,y}$, $g^*, h^* \in H^*_{x,y}$ então temos:

$$\begin{array}{rcll}
[\psi_{x,y} \circ (\psi_{x,y} \otimes H^*_{x,y})](a \otimes g^* \otimes h^*) & = & (a \cdot g^*) \cdot h^* & \\
 & = & (\langle g^*, a_{[1]}\rangle a_{[0]}) \cdot h^* & \\
 & = & \langle g^*, a_{[1]}\rangle \langle h^*, {a_{[0]}}_{[1]}\rangle {a_{[0]}}_{[0]} & \text{por (4.16)} \\
 & = & \langle g^*, {a_{[1]}}_2\rangle \langle h^*, {a_{[1]}}_1\rangle a_{[0]} & \\
 & = & \langle \iota(g^* \otimes h^*), {a_{[1]}}_1 \otimes {a_{[1]}}_2\rangle a_{[0]} & \\
 & = & \langle \iota(g^* \otimes h^*), \Delta_{x,y}(a_{[1]})\rangle a_{[0]} & \\
 & = & \langle (\Delta^*_{x,y} \circ \iota)(g^* \otimes h^*), a_{[1]}\rangle a_{[0]} & \text{por 3.2.5} \\
 & = & \langle g^* h^*, a_{[1]}\rangle a_{[0]} & \\
 & = & a \cdot (g^* h^*) & \\
 & = & [\psi_{x,y} \circ (L_{x,y} \otimes m^{H^{\star op}}_{x,y})](a \otimes g^* \otimes h^*) &
\end{array}$$

e ainda, usando que a unidade em $H^*_{x,y}$ é $\varepsilon_{x,y}$ (pelo Lema 3.2.5) e usando (4.17), obtemos

$$\psi_{x,y} \circ (L_{x,y} \otimes \eta_{x,y})(a \otimes 1_k) = a \cdot 1^*_{x,y} = a \cdot \varepsilon_{x,y} = \langle \varepsilon_{x,y}, a_{[1]}\rangle a_{[0]} = a.$$

Logo, temos que $L_{x,y}$ é $H^*_{x,y}$-módulo à direita para todo $x, y \in X$.

Vamos verificar que o diagrama seguinte, que é o diagrama (4.29) para esse caso, comuta:

$$\begin{tikzcd}
L_{x,y} \otimes L_{y,z} \otimes H^*_{x,z} \arrow[r, "m_{x,y,z} \otimes H^*_{x,z}"] \arrow[d, "L_{x,y} \otimes L_{y,z} \otimes \Delta^{H^{\star op}}_{x,y,z}"'] & L_{x,z} \otimes H^*_{x,z} \arrow[r, "\psi_{x,z}"] & L_{x,z} \\
L_{x,y} \otimes L_{y,z} \otimes H^*_{x,y} \otimes H^*_{y,z} \arrow[r, "L_{x,y} \otimes \sigma_{L_{y,z}, H^*_{x,y}} \otimes H^*_{y,z}"'] & L_{x,y} \otimes H^*_{x,y} \otimes L_{y,z} \otimes H^*_{y,z} \arrow[r, "\psi_{x,y} \otimes \psi_{y,z}"'] & L_{x,y} \otimes L_{y,z} \arrow[u, "m_{x,y,z}"']
\end{tikzcd}$$

De fato, sejam $a \in L_{x,y}$, $b \in L_{y,z}$, $g^* \in H^*_{x,z}$ então temos:

$$\begin{array}{rll}
 & [\psi_{x,z} \circ (m_{x,y,z} \otimes H^*_{x,z})](a \otimes b \otimes g^*) = & \\
= & (ab) \cdot g^* & \\
= & \langle g^*, (ab)_{[1]}\rangle (ab)_{[0]} & \text{por (4.19)} \\
= & \langle g^*, a_{[1]} b_{[1]}\rangle a_{[0]} b_{[0]} & \\
= & \langle g^*, m_{x,y,z}(a_{[1]} \otimes b_{[1]})\rangle a_{[0]} b_{[0]} & \\
= & \langle m^*_{x,y,z}(g^*), a_{[1]} \otimes b_{[1]}\rangle a_{[0]} b_{[0]} & \text{por 3.2.5} \\
= & \langle (\iota \circ \Delta^{H^\star}_{z,y,x})(g^*), a_{[1]} \otimes b_{[1]}\rangle a_{[0]} b_{[0]} & \\
= & \langle \iota\, \underbrace{(g^*_{(1,z,y)} \otimes g^*_{(2,y,x)})}_{\in H^*_{y,z} \otimes H^*_{x,y}}, a_{[1]} \otimes b_{[1]}\rangle a_{[0]} b_{[0]} & \\
= & \langle g^*_{(1,z,y)}, b_{[1]}\rangle \langle g^*_{(2,y,x)}, a_{[1]}\rangle a_{[0]} b_{[0]} &
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle g^*_{(2,y,x)}, a_{[1]}\rangle a_{[0]}\langle g^*_{(1,z,y)}, b_{[1]}\rangle b_{[0]} \\
&= (a \cdot g^*_{(2,y,x)})(b \cdot g^*_{(1,z,y)}) \\
&= [m_{x,y,z} \circ (\psi_{x,y} \otimes \psi_{y,z})](a \otimes g^*_{(2,y,x)} \otimes b \otimes g^*_{(1,z,y)}) \\
&= [m_{x,y,z} \circ (\psi_{x,y} \otimes \psi_{y,z}) \circ (L_{x,y} \otimes \sigma_{L_{y,z},H^*_{x,y}} \otimes H^*_{y,z})](a \otimes b \otimes g^*_{(2,y,x)} \otimes g^*_{(1,z,y)}) \\
&= [m_{x,y,z} \circ (\psi_{x,y} \otimes \psi_{y,z}) \circ (L_{x,y} \otimes \sigma_{L_{y,z},H^*_{x,y}} \otimes H^*_{y,z})](a \otimes b \otimes (\sigma_{H^*_{y,z},H^*_{x,y}} \circ \Delta^{H^\star}_{z,y,x})(g^*)) \\
&= [m_{x,y,z} \circ (\psi_{x,y} \otimes \psi_{y,z}) \circ (L_{x,y} \otimes \sigma_{L_{y,z},H^*_{x,y}} \otimes H^*_{y,z}) \circ (L_{x,y} \otimes L_{y,z} \otimes \Delta^{H^{\star op}}_{x,y,z})](a \otimes b \otimes g^*).
\end{aligned}
$$

Veremos agora que o diagrama (4.30) comuta, seja $g^* \in H^*_{y,y}$

$$
\begin{aligned}
[\psi_{y,y} \circ (\eta_y \otimes H^*_{y,y})](1_k \otimes g^*) &= 1_{A_{y,y}} \cdot g^* = \langle g^*, 1_{[1]}\rangle 1_{[0]} \quad \text{por } (4.20) \\
&= \langle g^*, 1_{H_{y,y}}\rangle 1_{L_{y,y}} \quad \text{por } 3.2.5 \\
&= \langle \varepsilon^{H^{\star op}}_y, g^*\rangle 1_{L_{y,y}} \\
&= \eta^L_y(1_k)\langle \varepsilon^{H^{\star op}}_y, g^*\rangle \\
&= \eta^L_y(\langle \varepsilon^{H^{\star op}}_y, g^*\rangle).
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que L é uma $H^{\star op}$-módulo categoria à direita.

□

No resultado acima obtemos uma forma de ir de uma comódulo categoria à direita para uma módulo categoria à direita; isso nos leva a pensar se vale a volta, ou seja, se podemos levar uma módulo categoria à direita para uma comódulo categoria à direita, afinal no resultado existente para $\Bbbk$-álgebras de Hopf de dimensão finita (Proposição 1.1.19), apesar de trocar direita para esquerda, ocorre um se e somente se.

Veremos a seguir, baseado no que já foi deduzido na Proposição 5.1.1 e no que existe para o caso usual (Proposição 1.1.19), que dada uma C-módulo categoria à direita com C uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual, então obteremos uma $C^{\star op}$-comódulo categoria à direita, onde $C^{\star op}$ é a $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria dada no Lema 3.2.6. Lembre-se que podemos usar $C^{\star op}$ ou $C^{op\star}$ já que a Proposição 3.2.7 nos diz que são as mesmas $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias.

Proposição 5.1.2. *Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, C uma $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual com $C_{x,y}$ um k-módulo projetivo finitamente gerado para cada $x, y \in X$, e L uma C-módulo categoria à direita. Então L é uma $C^{\star op}$-comódulo categoria à direita.*

Demonstração. Seja L uma C-módulo categoria à direita, então L é uma $\mathcal{V}$-categoria e existe para cada $x, y \in X$,

$$\psi_{x,y} : L_{x,y} \otimes C_{x,y} \longrightarrow L_{x,y}$$

com $\psi_{x,y}(a \otimes c) = a \cdot c$ para $a \in L_{x,y}$ e $c \in C_{x,y}$.

Como cada $C_{x,y}$ é um k-módulo projetivo finitamente gerado, existe uma base dual finita de $C_{x,y}$:

$$\{(c^{x,y}_i, \phi^{x,y}_i) \in C_{x,y} \times C^*_{x,y}\}$$

para cada $x, y \in X$.

Vejamos que L é $C^{\star op}$-comódulo categoria à direita com

$$\rho_{x,y} : L_{x,y} \longrightarrow L_{x,y} \otimes C^*_{x,y}$$

definido por:

$$\rho_{x,y}(a) = \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \phi_i^{x,y}.$$

Comecemos por mostrar que L é $C^{\star op}$-comódulo à direita com ρ como definido acima. Seja $a \in L_{x,y}$, temos:

$$\begin{aligned}
[(L_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}^{C^{\star op}}) \circ \rho_{x,y}](a) &= (L_{x,y} \otimes \Delta_{x,y}^{C^{\star op}}) \left(\sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \phi_i^{x,y} \right) \\
&= \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \underbrace{\Delta_{x,y}^{C^{\star op}}(\phi_i^{x,y})}_{3.2.6} \\
&= \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes (\varphi_2 \circ m_{x,y}^*)(\phi_i^{x,y}) \\
&= \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \left(\sum_{j,k} \langle m_{x,y}^*(\phi_i^{x,y}), c_j^{x,y} \otimes c_k^{x,y} \rangle \phi_k^{x,y} \otimes \phi_j^{x,y} \right) \\
&= \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \left(\sum_{j,k} \langle \phi_i^{x,y}, c_j^{x,y} c_k^{x,y} \rangle \phi_k^{x,y} \otimes \phi_j^{x,y} \right) \\
&= \sum_{i,j,k} a \cdot (\langle \phi_i^{x,y}, c_j^{x,y} c_k^{x,y} \rangle c_i^{x,y}) \otimes \phi_k^{x,y} \otimes \phi_j^{x,y} \\
&= \sum_{j,k} a \cdot \underbrace{\left(\sum_i \langle \phi_i^{x,y}, c_j^{x,y} c_k^{x,y} \rangle c_i^{x,y} \right)}_{(3.17)} \otimes \phi_k^{x,y} \otimes \phi_j^{x,y} \\
&= \sum_{j,k} \underbrace{a \cdot (c_j^{x,y} c_k^{x,y})}_{4.2.20} \otimes \phi_k^{x,y} \otimes \phi_j^{x,y} \\
&= \sum_{j,k} (a \cdot c_j^{x,y}) \cdot c_k^{x,y} \otimes \phi_k^{x,y} \otimes \phi_j^{x,y} \\
&= \sum_j \left(\sum_k (a \cdot c_j^{x,y}) \cdot c_k^{x,y} \otimes \phi_k^{x,y} \right) \otimes \phi_j^{x,y} \\
&= \sum_j \rho_{x,y}(a \cdot c_j^{x,y}) \otimes \phi_j^{x,y} \\
&= (\rho_{x,y} \otimes C_{x,y}^*) \left(\sum_j a \cdot c_j^{x,y} \otimes \phi_j^{x,y} \right) \\
&= [(\rho_{x,y} \otimes C_{x,y}^*) \circ \rho_{x,y}](a)
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
[(L_{x,y} \otimes \varepsilon_{x,y}^{H^{\star op}}) \circ \rho_{x,y}](a) &= (L_{x,y} \otimes \varepsilon_{x,y}^{H^{\star op}}) \left(\sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \phi_i^{x,y} \right) \\
&= \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \underbrace{\langle \varepsilon_{x,y}^{H^{\star op}}, \phi_i^{x,y} \rangle}_{3.2.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \langle \phi_i^{x,y}, 1_{C_{x,y}} \rangle \\
&= a \cdot \left(\underbrace{\sum_i \langle \phi_i^{x,y}, 1_{C_{x,y}} \rangle c_i^{x,y}}_{(3.17)} \right) \otimes 1_k \\
&= \underbrace{a \cdot 1_{C_{x,y}}}_{4.2.20} \otimes 1_k \\
&= a \otimes 1_k \simeq a
\end{aligned}$$

Logo, os diagramas (4.16) e (4.17) comutam e L é $C^{\star op}$-comódulo à direita. Vejamos agora que a propriedade (4.19) é satisfeita. Sejam $a \in L_{x,y}$, $b \in L_{y,z}$, por um lado temos:

$$(\rho_{x,z} \circ m^L_{x,y,z})(a \otimes b) = \rho_{x,z}(ab) = \sum_i (ab) \cdot c_i^{x,z} \otimes \phi_i^{x,z} \tag{5.1}$$

enquanto que, por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
&(m^L_{x,y,z} \otimes m^{C^{\star op}}_{x,y,z}) \circ (L_{x,y} \otimes \sigma_{C^*_{x,y}, L_{y,z}} \otimes C^*_{y,z}) \circ (\rho_{x,y} \otimes \rho_{y,z})(a \otimes b) = \\
&= (m^L_{x,y,z} \otimes m^{C^{\star op}}_{x,y,z}) \circ (L_{x,y} \otimes \sigma_{C^*_{x,y}, L_{y,z}} \otimes C^*_{y,z}) \left(\left(\sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \phi_i^{x,y} \right) \otimes \left(\sum_j b \cdot c_j^{y,z} \otimes \phi_j^{y,z} \right) \right) \\
&= (m^L_{x,y,z} \otimes m^{C^{\star op}}_{x,y,z}) \left(\sum_{i,j} a \cdot c_i^{x,y} \otimes b \cdot c_j^{y,z} \otimes \phi_i^{x,y} \otimes \phi_j^{y,z} \right) \\
&= \sum_{i,j} (a \cdot c_i^{x,y})(b \cdot c_j^{y,z}) \otimes \underbrace{m^{C^{\star op}}_{x,y,z}(\phi_i^{x,y} \otimes \phi_j^{y,z})}_{3.2.6} \\
&= \sum_{i,j} (a \cdot c_i^{x,y})(b \cdot c_j^{y,z}) \otimes [\Delta^*_{x,y,z} \circ \iota \circ \sigma_{C^*_{x,y}, C^*_{y,z}}](\phi_i^{x,y} \otimes \phi_j^{y,z}) \\
&= \sum_{i,j} (a \cdot c_i^{x,y})(b \cdot c_j^{y,z}) \otimes [\Delta^*_{x,y,z} \circ \iota](\phi_j^{y,z} \otimes \phi_i^{x,y}).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Queremos mostrar que (5.1) é igual a (5.2), porém apesar de ambos os lados serem elementos em $L_{x,z} \otimes C^*_{x,z}$, ainda não é possível determinar a igualdade. Desse modo, consideraremos o seguinte resultado, já conhecido:

Dados V um k-módulo e M um k-módulo projetivo finitamente gerado, então a aplicação:

$$\begin{aligned}
&\psi \;:\; V \otimes M^* \longrightarrow Hom_k(M, V) \\
&\psi\;(v \otimes f)(m) = v\langle f, m \rangle \quad \forall \;\; f \in M^*, v \in V, m \in M
\end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Como para cada $x, z \in X$, $L_{x,z}$ é um k-módulo e $C_{x,z}$ é um k-módulo projetivo finitamente gerado, vamos usar o resultado citado acima para avaliar a imagem de ψ por (5.1) e (5.2). Seja $c \in C_{x,z}$, então obtemos em (5.1):

$$\begin{aligned}
\psi\left(\sum_i (ab)\cdot c_i^{x,z}\otimes\phi_i^{x,z}\right)(c) &= \sum_i \left((ab)\cdot c_i^{x,z}\right)\langle\phi_i^{x,z},c\rangle \\
&= (ab)\cdot\left(\underbrace{\sum_i c_i^{x,z}\langle\phi_i^{x,z},c\rangle}_{(3.17)}\right) \\
&= \underbrace{(ab)\cdot c}_{(4.29)} \\
&= (a\cdot c_{(1,x,y)})(b\cdot c_{(2,y,z)}). \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Agora avaliando ψ em (5.2), para $c\in C_{x,z}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\sum_{i,j}(a\cdot c_i^{x,y})(b\cdot c_j^{y,z})\otimes[\Delta^*_{x,y,z}\circ\iota](\phi_j^{y,z}\otimes\phi_i^{x,y})\right)(c) \\
=\ & \sum_{i,j}(a\cdot c_i^{x,y})(b\cdot c_j^{y,z})\langle[\Delta^*_{x,y,z}\circ\iota](\phi_j^{y,z}\otimes\phi_i^{x,y}),c\rangle \\
=\ & \sum_{i,j}(a\cdot c_i^{x,y})(b\cdot c_j^{y,z})\langle\iota(\phi_j^{y,z}\otimes\phi_i^{x,y}),\Delta_{x,y,z}(c)\rangle \\
=\ & \sum_{i,j}(a\cdot c_i^{x,y})(b\cdot c_j^{y,z})\langle\phi_i^{x,y},c_{(1,x,y)}\rangle\langle\phi_j^{y,z},c_{(2,y,z)}\rangle \\
=\ & (a\cdot\left(\underbrace{\sum_i c_i^{x,y}\langle\phi_i^{x,y},c_{(1,x,y)}\rangle}_{(3.17)}\right))(b\cdot\left(\underbrace{\sum_j c_j^{y,z}\langle\phi_j^{y,z},c_{(2,y,z)}\rangle}_{(3.17)}\right)) \\
=\ & (a\cdot c_{(1,x,y)})(b\cdot c_{(2,y,z)}). \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Logo, (5.3) e (5.4) são iguais para todo $c\in C_{x,z}$, ou seja, a imagem de ψ por (5.1) e (5.2) são iguais. Como ψ é um isomorfismo, concluímos que o diagrama (4.19) comuta.

Por fim, vejamos que o diagrama (4.20) comuta:

$$\begin{aligned}
(\rho_{x,x}\circ\eta_x^L)(1_k)=\rho_{x,x}(1_{L_{x,x}}) &= \sum_i \underbrace{1_{L_{x,x}}\cdot c_i^{x,x}}_{(4.30)}\otimes\phi_i^{x,x} \\
&= \sum_i\langle\varepsilon_x,c_i^{x,x}\rangle 1_{L_{x,x}}\otimes\phi_i^{x,x} \\
&= 1_{L_{x,x}}\otimes\left(\underbrace{\sum_i\langle\varepsilon_x,c_i^{x,x}\rangle\phi_i^{x,x}}_{(3.17)}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1_{L_{x,x}} \otimes \underbrace{\varepsilon_x}_{3.2.6} \\
&= 1_{L_{x,x}} \otimes \eta_x^{C^\star}(1_k) \\
&= (\eta_x^L \otimes \eta_x^{C^{\star op}})(1_k \otimes 1_k).
\end{aligned}
$$

Portanto, L é uma $C^{\star op}$-comódulo categoria à direita. □

Podemos juntar os dois resultados anteriores no seguinte corolário:

Corolário 5.1.3. *Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria com cada $H_{x,y}$ um k-módulo projetivo finitamente gerado, e (L, ρ) uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita. Então $(L, \widehat{\rho})$ é $\mathcal{H}^{\star op \star op}$-comódulo categoria à direita, onde $\widehat{\rho}_{x,y} = (L_{x,y} \otimes \zeta_{x,y}) \circ \rho_{x,y}$ e $\zeta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\star op \star op}$ é o $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-funtor dado por 3.2.8.*

Demonstração. Seja L uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita com a família de morfismos:

$$
\begin{aligned}
\rho_{x,y} \ : \ L_{x,y} &\longrightarrow L_{x,y} \otimes H_{x,y} \\
a &\longmapsto a_{[0]} \otimes a_{[1]}.
\end{aligned}
$$

Então L é uma $\mathcal{H}^{\star op}$-módulo categoria à direita pela Proposição 5.1.1, com:

$$
\begin{aligned}
\psi_{x,y} \ : \ L_{x,y} \otimes H^*_{x,y} &\longrightarrow L_{x,y} \\
a \otimes h^* &\longmapsto a \cdot h^* = \langle h^*, a_{[1]} \rangle a_{[0]}.
\end{aligned}
$$

Mas, L é também $C^{\star op}$-comódulo categoria à direita pela Proposição 5.1.2, onde $C = \mathcal{H}^{\star op}$, com a família de morfismos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\rho}_{x,y} \ : \ L_{x,y} &\longrightarrow L_{x,y} \otimes H^{**}_{x,y} \\
a &\longmapsto \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \phi_i^{x,y}
\end{aligned}
$$

onde $\{(c_i^{x,y}, \phi_i^{x,y}) \in C_{x,y} \times C^*_{x,y}\}$ é uma base dual finita de $C_{x,y} = H^*_{x,y}$.

Vejamos que $\widehat{\rho}_{x,y} = (L_{x,y} \otimes \zeta_{x,y}) \circ \rho_{x,y}$, para todo $a \in L_{x,y}$ temos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\rho}_{x,y}(a) &= \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \phi_i^{x,y} \\
&= \sum_i \langle c_i^{x,y}, a_{[1]} \rangle a_{[0]} \otimes \phi_i^{x,y} \\
&= a_{[0]} \otimes \sum_i \underbrace{\langle c_i^{x,y}, a_{[1]} \rangle}_{3.2.8} \phi_i^{x,y} \\
&= a_{[0]} \otimes \underbrace{\sum_i \langle \zeta_{x,y}(a_{[1]}), c_i^{x,y} \rangle \ \phi_i^{x,y}}_{(3.17)} \\
&= a_{[0]} \otimes \zeta_{x,y}(a_{[1]}) \\
&= (L_{x,y} \otimes \zeta_{x,y})\rho_{x,y}(a).
\end{aligned}
$$

Ou seja, se L é $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita pela família de morfismos ρ, então L é também $\mathcal{H}^{\star op \star op}$-comódulo categoria pela família $\widehat{\rho}$. □

O corolário acima faz parte, na verdade, de um resultado mais geral:

Proposição 5.1.4. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ duas $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias com classe subjacente X e $f : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ um $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-funtor. Então existe um funtor $F : \mathcal{V}(X)^{\mathcal{H}} \to \mathcal{V}(X)^{\mathcal{G}}$.*

Demonstração. Lembre-se de 4.1.46 que $\mathcal{V}(X)^{\mathcal{H}}$ é a categoria dos $\mathcal{H}$-comódulo categorias à direita. Suponha que (L, ρ) seja uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita, vamos mostrar que $(L, \widehat{\rho})$ é uma $\mathcal{G}$-comódulo categoria à direita com $\widehat{\rho}$ definido pela família de morfismos $\widehat{\rho}_{x,y} : L_{x,y} \to L_{x,y} \otimes G_{x,y}$, com $\widehat{\rho}_{x,y} = (L_{x,y} \otimes f_{x,y}) \circ \rho_{x,y}$. Observe a seguir que todos os diagramas da definição de comódulo categoria comutam para esse caso:

$$\begin{tikzcd}
L_{x,y} \arrow[rrrrrrr, "\widehat{\rho}_{x,y}"] \arrow[drrrrr, "\rho_{x,y}"] \arrow[dddrr, "\rho_{x,y}"] \arrow[ddddddd, "\widehat{\rho}_{x,y}"'] & & & & & & & L_{x,y} \otimes G_{x,y} \arrow[ddddddd, "L_{x,y} \otimes \Delta^{G}_{x,y}"] \\
& & & & \circlearrowright \text{ por definição} & L_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[urr, "L_{x,y} \otimes f_{x,y}"] \arrow[dd, "L_{x,y} \otimes \Delta^{H}_{x,y}"] & & \\
& & & \circlearrowright \text{ por (4.16)} & & & \circlearrowright \text{ por 3.1.20} & \\
& \circlearrowright \text{ por definição} & L_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[rrr, "\rho_{x,y} \otimes H_{x,y}"] \arrow[ddddll, "L_{x,y} \otimes f_{x,y}"] & & & L_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[ddddrr, "L_{x,y} \otimes f_{x,y} \otimes f_{x,y}"] & & \\
& & & & = & & & \\
& & & & L_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes G_{x,y} \arrow[ddrrr, "L_{x,y} \otimes f_{x,y} \otimes G_{x,y}"] & & & \\
& & & & \circlearrowright \text{ por definição} & & & \\
L_{x,y} \otimes G_{x,y} \arrow[uurrrr, "\rho_{x,y} \otimes G_{x,y}"] \arrow[rrrrrrr, "\widehat{\rho}_{x,y} \otimes G_{x,y}"'] & & & & & & & L_{x,y} \otimes G_{x,y} \otimes G_{x,y}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
L_{x,y} \arrow[rr, "\widehat{\rho}_{x,y}"] \arrow[dr, "\rho_{x,y}"] \arrow[ddrr, "\sim"'] & \circlearrowright \text{ por definição} & L_{x,y} \otimes G_{x,y} \arrow[dd, "L_{x,y} \otimes \varepsilon^G_{x,y}"] \\
 & L_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[ur, "L_{x,y} \otimes f_{x,y}"] \arrow[dr, "L_{x,y} \otimes \varepsilon^H_{x,y}"] & \circlearrowright \text{ por } 3.1.20 \\
 & \circlearrowright \text{ por } (4.17) & L_{x,y} \otimes I
\end{tikzcd}$$

Logo $(L, \widehat{\rho})$ é $\mathcal{G}$-comódulo à direita.

Vejamos agora que o diagrama (4.20) comuta para $(L, \widehat{\rho})$:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta^L_x"] \arrow[dd, "\sim"'] & L_{x,x} \arrow[r, "\widehat{\rho}_{x,x}"] \arrow[d, "\rho_{x,x}"] & L_{x,x} \otimes G_{x,x} \\
\circlearrowright \text{ por } (4.20) & L_{x,x} \otimes H_{x,x} \arrow[ur, "L_{x,x} \otimes f_{x,x}"] & \circlearrowright \text{ por definição} \\
I \otimes I \arrow[ur, "\eta^L_x \otimes \eta^H_x"] \arrow[uurr, "\eta^L_x \otimes \eta^G_x"'] & \circlearrowright \text{ por } 3.1.20 &
\end{tikzcd}$$

Por fim, vejamos que o diagrama (4.19) comuta para $(L, \widehat{\rho})$:

$$\begin{tikzcd}
L_{x,y}\otimes L_{y,z} \arrow[rr, "m^L_{x,y,z}"] \arrow[dddd, "\widehat{\rho}_{x,y}\otimes\widehat{\rho}_{y,z}"'] \arrow[ddr, "\rho_{x,y}\otimes\rho_{y,z}"] & & L_{x,z} \arrow[rr, "\widehat{\rho}_{x,z}"] \arrow[dr, "\rho_{x,z}"'] & \circlearrowright \text{ por definição} & L_{x,z}\otimes G_{x,z} \\
 & & \circlearrowright \text{ por (4.20)} & L_{x,z}\otimes H_{x,z} \arrow[ur, "L_{x,z}\otimes f_{x,z}"'] & \\
\circlearrowright \text{ por definição} & L_{x,y}\otimes H_{x,y}\otimes L_{y,z}\otimes H_{y,z} \arrow[ddl, "L_{x,y}\otimes f_{x,y}\otimes L_{y,z}\otimes f_{y,z}"'] \arrow[dr, "L_{x,y}\otimes\sigma_{H_{x,y},L_{y,z}}\otimes H_{y,z}"] & & \circlearrowright \text{ por 3.1.20} & \\
 & \circlearrowright \text{ por (2.17)} & L_{x,y}\otimes L_{y,z}\otimes H_{x,y}\otimes H_{y,z} \arrow[uur, "m^L_{x,y,z}\otimes m^H_{x,y,z}"] \arrow[drr, "L_{x,y}\otimes L_{y,z}\otimes f_{x,y}\otimes f_{y,z}"] & & \\
L_{x,y}\otimes G_{x,y}\otimes L_{y,z}\otimes G_{y,z} \arrow[rrrr, "L_{x,y}\otimes\sigma_{G_{x,y},L_{y,z}}\otimes G_{y,z}"'] & & & & L_{x,y}\otimes L_{y,z}\otimes G_{x,y}\otimes G_{y,z} \arrow[uuuu, "m^L_{x,y,z}\otimes m^G_{x,y,z}"']
\end{tikzcd}$$

Logo, L é $\mathcal{G}$-comódulo categoria à direita.

Agora, sejam (L, ρ^L) e (M, ρ^M) duas $\mathcal{H}$-comódulo categorias à direita e $g : L \to M$ um morfismo de $\mathcal{H}$-comódulo categorias à direita, vejamos que $g : (L, \widehat{\rho}^L) \to (M, \widehat{\rho}^M)$ é um morfismo de $\mathcal{G}$-comódulo categorias à direita. Note que como o funtor muda apenas a coação relativa ao comódulo, só precisamos verificar que o diagrama (4.18) comuta. Vejamos por meio do diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
L_{x,y} \arrow[rrrrrr, "g_{x,y}"] \arrow[drr, "\rho^L_{x,y}"] \arrow[ddd, "\widehat{\rho}^L_{x,y}"'] & & & \circlearrowleft \text{ por } (4.18) & & & M_{x,y} \arrow[dll, "\rho^M_{x,y}"'] \arrow[ddd, "\widehat{\rho}^M_{x,y}"] \\
& \circlearrowleft \text{ por definição} & L_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[rr, "g_{x,y} \otimes H_{x,y}"] \arrow[ddll, "L_{x,y} \otimes f_{x,y}"'] & & M_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[ddrr, "M_{x,y} \otimes f_{x,y}"] & \circlearrowleft \text{ por definição} & \\
& & & = & & & \\
L_{x,y} \otimes G_{x,y} \arrow[rrrrrr, "g_{x,y} \otimes G_{x,y}"'] & & & & & & M_{x,y} \otimes G_{x,y}
\end{tikzcd}$$

Portanto, existe um funtor $F : \mathcal{V}(X)^{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{V}(X)^{\mathcal{G}}$. ☐

No caso particular em que $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{\star op \star op}$ e o $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-funtor é ζ dado em 3.2.8, temos a nível de objetos o que foi apresentado no Corolário 5.1.3, que é então parte do funtor dado no resultado acima. Além disso, como ζ nos dá um isomorfismo de $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias, podemos afirmar algo a mais sobre o funtor obtido, vejamos a seguir:

Corolário 5.1.5. *Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ e $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria com cada $H_{x,y}$ um k-módulo projetivo finitamente gerado. Então as categorias $\mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}^{\star op \star op}}$ são equivalentes.*

Demonstração. Considerando o $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-funtor $\zeta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\star op \star op}$ dado em 3.2.8, podemos usar a Proposição 5.1.4 que garante a existência de um funtor $F : \mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}^{\star op \star op}}$.

Além disso, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^{\star op \star op}$ são $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categorias isomorfas por ζ, isso implica na existência de um $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-funtor inverso $\zeta^{-1} : \mathcal{H}^{\star op \star op} \longrightarrow \mathcal{H}$, conforme observação feita após a Definição 3.1.22. Assim a Proposição 5.1.4 pode ser novamente utilizada para obter um funtor $G : \mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}^{\star op \star op}} \longrightarrow \mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}}$.

Por fim, é fácil ver que $FG = 1_{\mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}^{\star op \star op}}}$ e $GF = 1_{\mathcal{M}_k(X)^{\mathcal{H}}}$. ☐

O corolário acima nos mostra que as construções dadas nas proposições 5.1.1 e 5.1.2 são na verdade inversas. Assim como no caso usual (Proposição 1.1.19), podemos enunciar os resultados 5.1.1 e 5.1.2 em um único resultado usando um se, e somente se:

Proposição 5.1.6. *Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ e $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria com $H_{x,y}$ um k-módulo projetivo finitamente gerado para cada $x, y \in X$. Então L é uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita se, e somente se, L é uma $\mathcal{H}^{\star op}$-módulo categoria à direita.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) é a Proposição 5.1.1;

($\Leftarrow$) usa-se a Proposição 5.1.2 juntamente com o Corolário 5.1.5. De fato, se L é $\mathcal{H}^{\star op}$-módulo categoria à direita com $\psi_{x,y} : L_{x,y} \otimes H^*_{x,y} \to L_{x,y}$ dado por $\psi_{x,y}(a \otimes c) = a \cdot c$, então vimos em 5.1.2 que L é $\mathcal{H}^{\star op \star op}$-comódulo à direita com $\widehat{\rho}_{x,y}(a) = \sum_i a \cdot c_i^{x,y} \otimes \phi_i^{x,y}$, onde $\{(c_i^{x,y}, \phi_i^{x,y}) \in H^*_{x,y} \times H^{**}_{x,y}\}$ é uma base dual finita de $H^*_{x,y}$. Pelo Corolário 5.1.5 então L é $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita com $\rho_{x,y} = (L_{x,y} \otimes \zeta^{-1}_{x,y}) \circ \widehat{\rho}_{x,y}$. □

5.2 TEOREMA DE DUALIDADE

Nesta seção apresentamos o teorema de dualidade para categorias de Hopf. Utilizamos como base o teorema de dualidade para álgebras de Hopf, já existente na literatura e apresentado no Teorema 1.2.9, e obtivemos um raciocínio análogo com os elementos desenvolvidos neste trabalho no contexto de categorias de Hopf.

Voltemos ao raciocínio feito no início deste capítulo, dados $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{D}(X)$ tal que $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y \in X}$ é uma ação diagonal à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$, temos o produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ conforme Definição 4.1.37. Sabemos que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita com $\rho_{x,y} = A_x \otimes \Delta_{x,y}$ pela Proposição 4.1.48. Pela Proposição 5.1.1, considerando $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ e pedindo ainda que cada $H_{x,y}$ seja um k-módulo projetivo finitamente gerado, podemos afirmar que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é também $\mathcal{H}^{\star op}$-módulo categoria à direita com $\psi_{x,y} : A_x \otimes H_{x,y} \otimes H^*_{x,y} \to A_x \otimes H_{x,y}$ definido por:

$$\psi_{x,y}(a\#h \otimes h^*) = \langle h^*, h_2 \rangle a\#h_1 = a\#\langle h^*, h_2 \rangle h_1.$$

Note que esta 'ação' é análoga àquela usada no teorema de dualidade para álgebras de Hopf de dimensão finita (1.6), com a diferença de ser uma ação à direita ao invés de à esquerda. O que obtemos com isso?

Tendo uma $\mathcal{V}$-categoria $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ que é uma $\mathcal{H}^{\star op}$-módulo categoria à direita, então obtemos um produto smash cluster: $\mathcal{H}^{\star op}\#(\mathcal{A}\#\mathcal{H})$ conforme Definição 4.2.21. Esse produto smash é de fato um cluster (demonstração análoga à dada em 4.2.12), e além disso, definimos a álgebra diagonal $B = (\mathcal{A}\#\mathcal{H})^{\mathcal{H}^{\star op}}$ em 4.2.22, onde para cada $x \in X$ temos:

$$B_x = \{a\#h \in A_x\#H_{x,x} \mid (a\#h) \cdot h^* = \langle \varepsilon_x^{\mathcal{H}^{\star op}}, h^* \rangle (a\#h), \ \forall \ h^* \in H^*_{x,x}\},$$

mas usando a ação $\psi_{x,x}$ que obtivemos acima e a counidade de $\mathcal{H}^{\star op}$ dada em 3.2.5, podemos escrever B_x como:

$$B_x = \{a\#h \in A_x\#H_{x,x} \mid a\#\langle h^*, h_2 \rangle h_1 = a\#\langle h^*, 1_{x,x} \rangle h, \ \forall \ h^* \in H^*_{x,x}\}.$$

Note que todo elemento da forma $a\#1_{x,x}$ com $a \in A_x$ pertence à B_x, já que $\eta_x^{\mathcal{H}}$ é morfismo de coálgebras.

Outro sujeito precisa ser trazido a este raciocínio: o endocluster à esquerda de $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$. Sendo B a álgebra diagonal definida acima, $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é um B-módulo à esquerda no sentido da Definição 4.1.1, então temos um cluster ${}_B End(\mathcal{A}\#\mathcal{H})$ conforme Exemplo 4.2.8.

Com isso, temos o morfismo canônico de clusters dado por (4.33):

$$\varphi : \mathcal{H}^{\star op}\#(\mathcal{A}\#\mathcal{H}) \longrightarrow {}_B End(\mathcal{A}\#\mathcal{H}) \tag{5.5}$$

definido pelas fórmulas:

$$\varphi^x_{y,z} : H^*_{x,y}\#(A_y\#H_{y,z}) \longrightarrow {}_{B_x}Hom(A_x\#H_{x,y}, A_x\#H_{x,z})$$
$$\varphi^x_{y,z}(h^*\#(a\#h))(a'\#g) = ((a'\#g)\cdot h^*)(a\#h).$$

Logo usando a definição de ação, obtemos:

$$\begin{aligned}\varphi^x_{y,z}(h^*\#(a\#h))(a'\#g) &= ((a'\#g)\cdot h^*)(a\#h)\\ &= (a'\#\langle h^*, g_2\rangle g_1)(a\#h)\\ &= \langle h^*, g_2\rangle \underbrace{(a'\#g_1)(a\#h)}_{4.1.37}\\ &= \langle h^*, g_3\rangle\, a'(g_1\cdot a)\otimes g_2 h,\end{aligned}$$

onde $g_1\cdot a = \alpha_{x,y}(g_1\otimes a)$.

Se φ é um isomorfismo de clusters, a Definição 4.2.24 nos diz que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma extensão $\mathcal{H}^{\star op}$-Galois dual de B. Mas, se isso ocorer, então φ também forneceria um teorema de dualidade para este contexto, análogo ao do caso usual (Teorema 1.2.9). Assim, nosso próximo passo será buscar condições para que φ seja um isomorfismo de clusters.

Usando a Definição 4.2.3, precisamos definir $\Omega^x_{y,z}$ de forma que seja inverso de $\varphi^x_{y,z}$, para todo $x, y, z \in X$.

$$\Omega^x_{y,z} : {}_{B_x}Hom(A_x\#H_{x,y}, A_x\#H_{x,z}) \longrightarrow H^*_{x,y}\#(A_y\#H_{y,z}).$$

Pensando no caso usual, é razoável pedir que $\mathcal{H}$ seja uma categoria de Hopf, para que exista uma antípoda $\mathcal{S}$ dada pela família de aplicações k-lineares: $\mathcal{S}_{x,y} : H_{x,y} \longrightarrow H_{y,x}$. Podemos usar também que para cada $x, y \in X$ temos uma base dual finita de $H_{x,y}$: $\{(h^{x,y}_i, f^{x,y}_i) \in H_{x,y}\times H^*_{x,y}\}$, já que cada $H_{x,y}$ é um k-módulo projetivo finitamente gerado. Veremos que pedir isso, que não é nada muito além do esperado, é o suficiente para provar o que nos propomos nesse capítulo.

Enunciamos e provamos a seguir o principal teorema dessa seção: um teorema de dualidade no contexto de categorias de Hopf. A demonstração de um teorema de dualidade para álgebras de Hopf fracas, dado em [31], foi a inspiração para a demonstração dada aqui.

Teorema 5.2.1. *Seja $\mathcal{H}$ uma $\mathcal{M}^f_k$-categoria de Hopf e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$ tal que $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y\in X}$ define uma ação diagonal de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$ à esquerda. Então existe um isomorfismo de clusters entre $\mathcal{H}^{\star op}\#(\mathcal{A}\#\mathcal{H})$ e ${}_B End(\mathcal{A}\#\mathcal{H})$ onde $B = (\mathcal{A}\#\mathcal{H})^{\mathcal{H}^{\star op}}$ é a álgebra diagonal.*

Demonstração. De acordo com o raciocínio desenvolvido neste capítulo, obtivemos φ definido em (5.5) que é um morfismo de clusters. Vejamos então que para todo x, y, z, $\varphi^x_{y,z}$ é um isomorfismo k-linear.

Defina para todo $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned}\Omega^x_{y,z} : {}_{B_x}Hom(A_x\#H_{x,y}, A_x\#H_{x,z}) &\longrightarrow H^*_{x,y}\#(A_y\#H_{y,z})\\ T &\longmapsto \Omega^x_{y,z}(T)\end{aligned}$$
$$\Omega^x_{y,z}(T) = \sum_i \sum_{h_i} f^{x,y}_i \#(1_y\#\mathcal{S}_{x,y}({h^{x,y}_i}_1))T(1_x\#{h^{x,y}_i}_2).$$

Tomando $h^*\#(a\#h) \in H^*_{x,y}\#(A_y\#H_{y,z})$ temos:

$$
\begin{aligned}
& (\Omega^x_{y,z}\circ\varphi^x_{y,z})(h^*\#(a\#h)) \\
= \;& \Omega^x_{y,z}(\varphi^x_{y,z}(h^*\#(a\#h))) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#(1_y\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1))\varphi^x_{y,z}(h^*\#(a\#h))(1_x\#h_i^{x,y}{}_2) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#(1_y\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1))((1_x\#h_i^{x,y}{}_2)\cdot h^*)(a\#h) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#(1_y\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1))\,\underbrace{(1_x\#h_i^{x,y}{}_2)(a\#h)}_{4.1.37}\langle h^*, h_i^{x,y}{}_3\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#\,\underbrace{(1_y\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1))(h_i^{x,y}{}_2\cdot a\;\#h_i^{x,y}{}_3\;h)}_{4.1.37}\langle h^*, h_i^{x,y}{}_4\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#\left(\underbrace{\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1)_1\cdot(h_i^{x,y}{}_2\cdot a)\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1)_2h_i^{x,y}{}_3\;h}_{3.12}\right)\langle h^*, h_i^{x,y}{}_4\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#\left(\underbrace{\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_2)\cdot(h_i^{x,y}{}_3\cdot a)}_{(4.3)}\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1)h_i^{x,y}{}_4\;h\right)\langle h^*, h_i^{x,y}{}_5\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#\left(\underbrace{\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_2)h_i^{x,y}{}_3)}_{(3.6)}\cdot a\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1)h_i^{x,y}{}_4\;h\right)\langle h^*, h_i^{x,y}{}_5\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#\left(\langle\varepsilon_{x,y}, h_i^{x,y}{}_2\rangle\,\underbrace{1_{y,y}\cdot a}_{(4.4)}\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1)h_i^{x,y}{}_3\;h\right)\langle h^*, h_i^{x,y}{}_4\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#(a\#\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1)\,\underbrace{\langle\varepsilon_{x,y}, h_i^{x,y}{}_2\rangle h_i^{x,y}{}_3}\;\;h)\langle h^*, h_i^{x,y}{}_4\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#(a\#\,\underbrace{\mathcal{S}_{x,y}(h_i^{x,y}{}_1)h_i^{x,y}{}_2}_{(3.6)}\;\;h)\langle h^*, h_i^{x,y}{}_3\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#(a\#\langle\varepsilon_{x,y}, h_i^{x,y}{}_1\rangle 1_{y,y}\;h)\langle h^*, h_i^{x,y}{}_2\rangle \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\langle h^*, \langle\varepsilon_{x,y}, h_i^{x,y}{}_1\rangle h_i^{x,y}{}_2\rangle\#(a\#h) \\
= \;& \underbrace{\sum_i f_i^{x,y}\langle h^*, h_i^{x,y}\rangle}_{(3.17)}\#(a\#h) \\
= \;& h^*\#(a\#h).
\end{aligned}
$$

Logo $\Omega^x_{y,z}\circ\varphi^x_{y,z} = H^*_{x,y}\#(A_y\#H_{y,z})$.
Também temos para $T \in {}_{B_x}Hom(A_x\#H_{x,y}, A_x\#H_{x,z})$ e $a'\#g \in A_x\#H_{x,y}$:

$$\begin{aligned}
& (\varphi^x_{y,z}\circ\Omega^x_{y,z})(T)(a'\#g) = \\
= \;& \varphi^x_{y,z}(\Omega^x_{y,z}(T))(a'\#g) \\
= \;& \varphi^x_{y,z}\left(\sum_i\sum_{h_i} f_i^{x,y}\#(1_y\#\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2)\right)(a'\#g) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i}((a'\#g)\cdot f_i^{x,y})\,((1_y\#\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2)) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i}\sum_g\langle f_i^{x,y},g_2\rangle\,\underbrace{(a'\#g_1)(1_y\#\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))}_{4.1.37}\,T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i}\sum_g\langle f_i^{x,y},g_3\rangle(a'\,\underbrace{(g_1\cdot 1_y)}_{(4.12)}\#\; g_2\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i}\sum_g\langle f_i^{x,y},g_3\rangle(a'\langle\varepsilon_{x,y},g_1\rangle 1_x\#\; g_2\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i}\sum_g\langle f_i^{x,y},g_3\rangle(a'\#\;\langle\varepsilon_{x,y},g_1\rangle g_2\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i}\sum_g\langle f_i^{x,y},g_2\rangle\,\underbrace{(a'\#\; g_1\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))}\,T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2) \\
= \;& \sum_i\sum_{h_i}\sum_g\langle f_i^{x,y},g_2\rangle(a'\#1_{x,x})(1_x\#g_1\mathcal{S}_{x,y}({h_i^{x,y}}_1))T(1_x\#{h_i^{x,y}}_2) \\
= \;& \circledast.
\end{aligned}$$

Podemos escrever: $g_2=\sum_i h_i^{x,y}\langle f_i^{x,y},g_2\rangle$ por (3.17) e usando a notação de Sweedler e a fórmula acima obtemos:

$$\Delta_{x,y}(g_2)=\sum_g g_2\otimes g_3=\sum_i\sum_{h_i}\langle f_i^{x,y},g_2\rangle {h_i^{x,y}}_1\otimes {h_i^{x,y}}_2.$$

Assim, a equação acima se torna:

$$\begin{aligned}
\circledast \;=\;& \sum_g(a'\#1_{x,x})(1_x\#\,\underbrace{g_1\mathcal{S}_{x,y}(g_2)}_{(3.5)})T(1_x\#g_3) \\
=\;& \sum_g(a'\#1_{x,x})(1_x\#1_{x,x}\langle\varepsilon_{x,y},g_1\rangle)T(1_x\#g_2) \\
=\;& (a'\#1_{x,x})(1_x\#1_{x,x})T(1_x\#\sum_g\langle\varepsilon_{x,y},g_1\rangle g_2) \\
=\;& \underbrace{(a'\#1_{x,x})}_{\in B_x}\,T(1_x\#g) \\
=\;& T((a'\#1_{x,x})(1_x\#g)) \\
=\;& T(a'\#g).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi^x_{y,z}\circ\Omega^x_{y,z}={}_{B_x}Hom(A_x\#H_{x,y},A_x\#H_{x,z})$. Portanto $\varphi^x_{y,z}$ é um isomorfismo k-linear para todo $x,y,z\in X$.

Assim, mostramos que φ é um isomorfismo de clusters, conforme Definição 4.2.3.

$\square$

Como consequência do teorema anterior temos:

Corolário 5.2.2. *Seja $\mathcal{H}$ uma $\mathcal{M}_k^f$-categoria de Hopf e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{D}_k(X)$ tal que $\alpha = (\alpha_{x,y})_{x,y\in X}$ define uma ação diagonal de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{A}$ à esquerda. Então $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é uma extensão $\mathcal{H}^{\star op}$-Galois dual (à direita) de $B = (\mathcal{A}\#\mathcal{H})^{\mathcal{H}^{\star op}}$.*

Note que a discussão deste capítulo nos dá uma relação entre as duas noções de extensão de Galois, àquela dada pela Definição 4.1.50 e a dual dada pela Definição 4.2.24 (ou 4.2.17 se for à esquerda), ambas definidas em [8]. De fato, já tínhamos do Teorema 4.1.55 que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é $\mathcal{H}$-extensão de Galois dos seus coinvariantes, ao menos no caso em que $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$ e $\mathcal{H}$ é categoria de Hopf. Nesta seção, pedindo que $\mathcal{H}$ seja $\mathcal{M}_k^f$-categoria de Hopf, obtivemos que $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ é também $\mathcal{H}^{\star op}$-extensão de Galois dual à direita da sua álgebra diagonal B.

Na seção 7 de [8], há uma discussão sobre como conectar as duas noções de extensão de Galois, passando por outra noção de produto smash chamada de Koppinen. Ao final, essa discussão fornece um resultado (Teorema 7.6, [8]) com várias equivalências e que parece, a princípio, poder nos dar o terema da dualidade 5.2.1 de forma direta, porém não é bem assim que ocorre.

Vejamos a seguir resumidamente o que foi feito em [8] e que tem relação direta com o que fizemos aqui. Um dos resultados (Proposição 7.4, [8]) lembra a nossa Proposição 5.1.1, em que obtivemos uma forma de obter uma módulo categoria a partir de uma comódulo categoria dada. Em [8], isso também é obtido mas de uma forma um pouco diferente, vejamos a seguir:

Proposição 5.2.3 ([8]). *Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_k$, $\mathcal{H}$ uma $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$-categoria com $H_{x,y}$ um k-módulo projetivo finitamente gerado para cada $x, y \in X$, e A uma $\mathcal{H}$-comódulo categoria à direita. Então A^{op} é uma K^{op}-módulo categoria à esquerda com*

$$g \cdot a = \langle g, a_{[1]}\rangle a_{[0]}$$

para todo $g \in K_{x,y}$, $a \in A^{op}_{x,y} = A_{y,x}$.

Na proposição acima, A^{op} é a $\mathcal{V}$-categoria oposta como definido em 3.1.6, no entanto, K^{op} é diferente de tudo o que definimos neste trabalho, pois $K = H^\star$ visto na correspondência 3.2.3, mas o *op* aqui significa apenas que a multiplicação é composta com a trança, do mesmo modo que em A^{op}. Assim, este K^{op} não é a $\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V})$-categoria dual oposta vista no Lema 3.2.5 e que foi usada na Proposição 5.1.1. Note também que, diferente da Proposição 5.1.1 em que obtivemos uma módulo categoria à direita, nesse caso, troca-se o lado da ação e obtem-se uma módulo categoria à esquerda.

Se tivermos A^{op} uma K^{op}-módulo categoria à esquerda, então pela Definição 4.2.11, temos um produto smash cluster associado $A^{op}\#K^{op}$. Também temos a álgebra diagonal $B = A^{op K^{op}}$ e um morfismo canônico de clusters: $\varphi : A^{op}\#K^{op} \to End_B(A^{op})$ conforme as definições 4.2.13 e (4.28), respectivamente. Além disso, considerando a categoria $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$ como em [8], então obtemos que a álgebra diagonal $B = A^{op K^{op}}$ é igual, como espaço vetorial, aos coinvariantes de $\mathcal{H}$ em A, dado por $\overline{B} = A^{co\mathcal{H}}$, e conseguimos que $End_B(A^{op}) = {}_{\overline{B}}End(A)^{op}$. Estabelecendo estas relações, [8] (Proposição 7.5) obtem um isomorfismo de clusters entre o produto smash cluster $A^{op}\#K^{op}$ e o de Koppinen, possibilitando o resultado (Teorema 7.6) que conecta as noções de extensão de Galois. Vejamos a seguir a parte que nos interessa deste resultado:

Teorema 5.2.4 ([8]). *Sejam* $\mathcal{V} = Vec_{\Bbbk}$ *e* $\mathcal{H}$ *uma* $\underline{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$*-categoria com cada* $H_{x,y}$ *um* $\Bbbk$*-espaço vetorial de dimensão finita. Se* A *é* $\mathcal{H}$*-extensão de Galois de* $\overline{B} = A^{co\mathcal{H}}$*, então* A^{op} *é extensão* K^{op}*-Galois dual à esquerda de* $B = A^{op K^{op}}$*, isto é, temos um isomorfismo de clusters* $\varphi : A^{op} \# K^{op} \rightarrow End_B(A^{op})$ *definido por* (4.28).

Se A *é uma* $\mathcal{H}$*-comódulo categoria à direita, onde cada* $A_{x,y}$ *é um* $\overline{B}_x$*-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado, então vale a volta dessa afirmação.*

Note que o Teorema 5.2.4 fornece outra relação entre a extensão de Galois e extensão de Galois dual, diferente da que obtivemos. Por meio dele, podemos afirmar que o oposto do produto smash $\mathcal{A}\#\mathcal{H}$ definido aqui neste trabalho $(\mathcal{A}\#\mathcal{H})^{op}$, é uma K^{op}-extensão de Galois dual à esquerda de B.

As seguintes observações acerca desse resultado merecem atenção aqui:

Observação 5.2.5. *1) Em [8] a hipótese de que cada* $A_{x,y}$ *seja um* $\overline{B}_x$*-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado é omitida, porém isso parece ser necessário na demonstração de parte do resultado.*

2) O teorema em [8] assume que $A^{co\mathcal{H}} = A^{op K^{op}}$*. Temos duas observações quanto a isso: A primeira é que, isso é verdade no caso em que* $H_{x,y}$ *é* $\Bbbk$*-espaço vetorial de dimensão finita, se pensarmos em cada* B_x *somente com a estrutura de* $\Bbbk$*-espaço vetorial. Como subálgebra,* $\overline{B}_x$ *é subálgebra de* $A_{x,x}$ *e* B_x *é subálgebra de* $A^{op}_{x,x}$ *então a multiplicação é a oposta. A segunda observação, é que mantivemos a categoria* $\mathcal{V}$ *sendo a dos* $\Bbbk$*-espaços vetoriais como em [8], pois para o caso de um k-módulo projetivo finitamente gerado, não conseguimos ver como a igualdade poderia ser válida.*

CONCLUSÃO

Com este trabalho foi possível o desenvolvimento de uma teoria de ações para categorias de Hopf. Com isso, complementamos o que já havia sido desenvolvido por Batista, Caenepeel e Vercruysse em [5] e por Caenepeel e Fieremans em [8].

Como resultados secundários obtivemos as generalizações de diversas definições e demonstrações. Isso ocorreu no capítulo 2 em que desenvolvemos as definições e resultados por meio de diagramas para uma categoria monoidal, ou categoria monoidal trançada (dependendo do caso). Também descrevemos as coações de categorias de Hopf a partir das definições de [8] para uma categoria monoidal trançada $\mathcal{V}$. E ainda, expandimos a teoria de ações para uma categoria de Hopf k-linear dual desenvolvida em [8], nos casos em que foi possível.

Como principais resultados obtidos, podemos citar primeiramente a construção de uma nova teoria de ações de categorias de Hopf, fornecendo um exemplo geral de ação diagonal que estende a ação adjunta de $\Bbbk$-álgebras de Hopf, e incluindo a construção de um produto smash que é uma extensão de Galois como no caso usual. Em segundo lugar, como grupóides são exemplos de categorias de Hopf, conseguimos mostrar uma ligação da definição de ação criada com as definições de ação de grupóides que encontramos na literatura ([4], [32], [33]).

Por fim, mas não menos importante do que os resultados já citados, a obtenção de um teorema de dualidade para categorias de Hopf. Este teorema fecha uma sequência de vários resultados que começaram no capítulo 3 com as definições de categorias opostas e a correspondência entre categorias de Hopf e categorias de Hopf duais, e permeia toda a teoria desenvolvida neste trabalho e nos trabalhos citados. E ainda, o caminho para sua obtenção nos levou a mais resultados sobre as relações existentes entre módulos e comódulos no nível de categorias de Hopf que aprofunda o trabalho previamente desenvolvido em [5].

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, M. M. S.; BATISTA, E. An introduction to Hopf algebras: A categorical approach. *In:* XXIII BRAZILIAN ALGEBRA MEETING, 2014, Maringá. Disponível em: `http://mtm.ufsc.br/~ebatista/2016-1/Maringa.pdf`. Acesso em: 22 mar. 2019.

[2] ANDRADE, G. S. de. **Categorias monoidais e o teorema de Mac Lane para a condição estrita**. 124 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016. Disponível em: `https://ppgmtm.paginas.ufsc.br/files/2017/09/Gabriel_Samuel_de_Andrade.pdf`. Acesso em: 8 out. 2021.

[3] BAGIO, D.; FLÔRES, D.; PAQUES, A. Partial actions of ordered groupoids on rings. **Journal of Algebra and Its Applications**, v. 9, n. 3, p. 501-517, 2010. DOI. 10.1142/S021949881000404X.

[4] BAGIO, D.; PAQUES, A. Partial groupoid actions: Globalization, Morita theory, and Galois theory. **Communications in Algebra**, v. 40, n. 10, p. 3658–3678, 2012.

[5] BATISTA, E.; CAENEPEEL, S.; VERCRUYSSE, J. Hopf categories. **Algebras and representation theory**, v. 19, p. 1173–1216, 2016. DOI. 10.1007/s10468-016-9615-6.

[6] BLATTNER, R. J.; MONTGOMERY, S. A duality theorem for Hopf module algebras. **Journal of Algebra**, v. 95, p. 153-172, 1985.

[7] CAENEPEEL, S.; DE LOMBAERDE, M. A categorical approach to Turaev's Hopf group-coalgebras. **Communications in Algebra**, v. 34, n. 7, p.2631-2657, 2006. DOI. 10.1080/00927870600651430.

[8] CAENEPEEL, S.; FIEREMANS, T. Descent and Galois theory for Hopf categories. **Journal of Algebra and Its Applications**, v. 17, n. 7, p. 1850120(1-39), 2018. DOI. 10.1142/S0219498818501207.

[9] CAENEPEEL, S.; FIEREMANS, T. Galois corings and groupoids acting partially on algebras. **Journal of Algebra and Its Applications**, v. 20, n. 1, p. 2140003(1-19), 2021. DOI. 10.1142/S021949882140003X.

[10] CHASE, S. U.; HARRISON, D. K.; ROSENBERG, A. **Galois theory and cohomology of commutative rings**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1965. (Memoirs, n. 52).

[11] CHASE, S. U.; SWEEDLER M. E. **Hopf algebras and Galois theory**. Berlin: Springer Verlag, 1969. (Lecture Notes in Mathematics, n. 97).

[12] CIBILS, C.; SOLOTAR, A. Galois coverings, Morita equivalence and smash extensions of categories over a field. **Documenta Mathematica**, v. 11, p. 143-159, 2006. DOI. 10.4171/DM/207.

[13] COHEN, M.; FISCHMAN, D.; MONTGOMERY, S. Hopf Galois extensions, smash products, and Morita equivalence. **Journal of Algebra**, v. 133, n. 2, p.351-372, set. 1990.

[14] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf algebras:** An introduction. New York: Marcel Dekker, 2001. (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, n. 235).

[15] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V. **Tensor Categories**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2015. (Mathematical surveys and monographs, v. 205).

[16] FERREIRA, V. de O.; MURAKAMI, L. S. I. **Uma introdução às álgebras de Hopf**. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

[17] GILBERT, N.D. Actions and expansions of ordered groupoids. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 198, p.175-195, 2005.

[18] HEYNEMAN, R. G.; SWEEDLER, M. E. Affine Hopf algebras, I. **Journal of Algebra**, v. 13, n. 2, p. 192-241, out. 1969.

[19] HOFFMAN, K; KUNZE, R. **Álgebra linear**. Tradução: Adalberto Panobianco Bergamasco. São Paulo: Editora Polígono, 1970. Linear Algebra.

[20] JACOBSON, N. **Basic algebra I**. 2. ed. New York: Dover Publications, 2009.

[21] JOHNSON, N.; YAU, D. **2-dimensional categories**. Oxford: Oxford University Press, 2021.

[22] JOYAL, A.; STREET, R. Braided tensor categories. **Advances in Mathematics**, v. 102, n. 1, p. 20–78, 1993.

[23] KREIMER, H. F.; TAKEUCHI, M. Hopf algebras and Galois extensions of an algebra. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 30, n. 5, p. 675-692, 1981.

[24] LAWSON, M. V. **Inverse semigroups**: the theory of partial symmetries. Singapore: World Scientific, 1998.

[25] MAJID, S. Algebras and Hopf algebras in braided categories. *In:* BERGEN, J.; MONTGORMERY, S. (Ed.). **Advances in Hopf algebras**. New York: Marcel Dekker, 1994. (Lecture notes in pure and applied mathematics, v. 158). p. 55-105.

[26] MAJID, S. Braided groups and algebraic quantum field theories. **Letters in Mathematical Physics**, v. 22, p. 167–175, 1991.

[27] MITCHELL, B. Rings with several objects. **Advances in Mathematics**, v. 8, p. 1–161, 1972.

[28] MITCHELL, B. **Separable algebroids**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, set. 1985. (Memoirs, v. 57, n. 333).

[29] MONTGOMERY, S. **Hopf algebras and their actions on rings**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1993. (Conference Board of the Mathematical Sciences, n. 82).

[30] NASTASESCU, C.; VAN OYSTAEYEN, F. **Methods of graded rings**. Berlin: Springer-Verlag, 2004. (Lecture Notes in Mathematics, n. 1836).

[31] NIKSHYCH, D. A duality theorem for quantum groupoids. *In:* ANDRUSKIEWITSCH, N.; SANTOS, W. R. F.; SCHNEIDER, H. J. (Ed.). **New trends in Hopf algebra theory**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2000. (Contemporary Mathematics, v. 267). p. 237-243.

[32] PAQUES, A.; FLÔRES, D. Duality for groupoid (co)actions. **Communications in Algebra**, v. 42, n. 2, p. 637-663, 2014. DOI. 10.1080/00927872.2012.720323.

[33] PAQUES, A.; TAMUSIUNAS, T. A Galois–Grothendieck-type correspondence for groupoid actions. **Algebra and Discrete Mathematics**. v. 17, n. 1, p.80–97, 2014.

[34] RADFORD, D. E. **Hopf algebras**. Singapore: World Scientific Publishing, 2012. (Series on knots and everthing, v. 49).

[35] ROTMAN, J. J. **Advanced modern algebra**. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies em mathematics, v. 114).

[36] SASSAKI, E. M. **Descrição dos objetos Galois sobre uma álgebra de Hopf associada a um conjunto de dados de grupo**. 146 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: `https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/37392`. Acesso em: 28 dez. 2020.

[37] SCHAUENBURG, P. Hopf-Galois and Bi-Galois Extensions. *In:* JANELIDZE, G.; PAREIGIS, B.; THOLEN, W. (Ed.). **Galois theory, Hopf algebras, and semiabelian categories**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004. (Fields Institute Communications, v. 43). p. 469–515.

[38] SCHNEIDER, H. J. Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras. **Israel Journal of Mathematics**, v. 72, p. 167-195, 1990.

[39] TURAEV, V. Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories.[*preprint*]. **Arxiv**, 31 mai 2000. Disponível em: `https://arxiv.org/abs/math/0005291`. Acesso em: 24 jun. 2020.

[40] TURAEV, V. **Homotopy quantum field theory**. Germany: European Mathematical Society, 2010. (Tracts in Mathematics 10).

[41] TURAEV, V.; VIRELIZIER, A. **Monoidal categories and topological field theory**. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. (Progress in Mathematics, v. 322).

[42] VAN DEN BERGH, M. **A duality theorem for Hopf algebras**. *In*: VAN OYSTAEYEN, F. (Ed.). **Methods in ring theory**. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1984. (NATO ASI Series, v. 129). p. 517-522.

ÍNDICE