

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PEDRO HENRIQUE SALGADO

**COLORAÇÕES DE ARESTAS DISTINGUIDORAS
EM POTÊNCIAS DE CAMINHOS**

PONTA GROSSA

2022

PEDRO HENRIQUE SALGADO

**COLORAÇÕES DE ARESTAS DISTINGUIDORAS
EM POTÊNCIAS DE CAMINHOS**

Distinguishing edge colorings on powers of paths

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas do Curso de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Sheila Morais de Almeida

PONTA GROSSA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

PEDRO HENRIQUE SALGADO

**COLORAÇÕES DE ARESTAS DISTINGUIDORAS
EM POTÊNCIAS DE CAMINHOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas do Curso de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 30 de novembro de 2022

Prof. Me. Aleffer Rocha
Câmpus Telêmaco Borba
Instituto Federal do Paraná

Prof. Dr. Leandro Miranda Zatesko
Câmpus Curitiba
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof^a. Dr^a. Sheila Morais de Almeida
Câmpus Ponta Grossa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**PONTA GROSSA
2022**

AGRADECIMENTOS

Peço desculpas àqueles que não estão presentes entre essas palavras, mas eles podem estar certos que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida, sem você não estaria conseguindo completar essa etapa da minha vida.

Agradeço muito também a Mayara Omai que me ajudou muito quando estava iniciando os meus estudos em grafos e acreditou que eu era capaz.

Agradeço também a minha noiva pela compreensão pela ausência em muitos finais de semana.

Agradeço ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo suporte dado a este trabalho, através do vínculo com projetos dos editais Universais (428941/2016-8 e 420079/2021-1).

RESUMO

Uma coloração de arestas própria para um grafo G é uma atribuição de cores para as arestas de G tal que arestas que incidem no mesmo vértice recebem cores distintas. Dado um grafo com uma coloração de arestas, o conjunto de cores de um vértice v é o conjunto das cores das arestas incidentes em v . Uma coloração de arestas própria é distinguidora de vértices adjacentes quando, para quaisquer dois vértices adjacentes, seus conjuntos de cores são distintos; e é distinguidora de vértices quando, para quaisquer dois vértices (não necessariamente adjacentes), seus conjuntos de cores são distintos. O Problema da Coloração de Arestas Distinguidora de Vértices Adjacentes é determinar o menor número de cores para realizar uma coloração de arestas distinguidora de vértices adjacentes para um dado um grafo G . Tal número é chamado de índice cromático distinguidor de vértices adjacentes. Similarmente, o Problema da Coloração de Arestas Distinguidora de Vértices é determinar o menor número de cores para realizar uma coloração de arestas distinguidora de vértices para um dado um grafo G . Tal número é chamado de índice cromático distinguidor de vértices. A k -ésima potência de um caminho com n vértices é o grafo obtido a partir do caminho com n vértices pela adição de arestas entre quaisquer dois vértices que estejam a uma distância de no máximo k no caminho. Omai et al. determinaram o índice cromático distinguidor de vértices adjacentes das potências de caminhos. Para tanto, o problema foi dividido em casos e utilizaram-se diversas técnicas de coloração de arestas. Neste trabalho, apresentamos uma nova técnica para a coloração de arestas distinguidora de vértices adjacentes em potências de caminhos que têm vértice universal. Esta nova técnica une casos que antes eram tratados separadamente, sendo uma prova mais simples. Além disso, esta técnica permite determinar o índice cromático distinguidor de vértices de um subconjunto das potências de caminho com vértice universal.

Palavras-chave: teoria dos grafos; otimização combinatória; complexidade computacional.

ABSTRACT

A proper edge coloring of a graph G is an assignment of colors to the edges of G such that edges that share a common vertex receive distinct colors. Given a graph with an edge coloring, the set of colors of a vertex v is the set of the colors of the edges incident with v . A proper edge coloring is an adjacent-vertex-distinguishing edge coloring if, for any two adjacent vertices, their sets of colors are distinct; and it is a vertex-distinguishing edge coloring when, for any two (not necessarily adjacent) vertices, their sets of colors are distinct. The Adjacent-Vertex-Distinguishing Edge Coloring Problem is to determine the minimum number of colors for an adjacent-vertex-distinguishing edge coloring of a given graph G . This number is called the adjacent-vertex-distinguishing chromatic index. Similarly, the Vertex-Distinguishing Edge Coloring Problem is to determine the minimum number of colors for a vertex-distinguishing edge coloring of a given graph G . This number is called the vertex-distinguishing chromatic index. The k -th power of a path with n vertices is the graph obtained from the path with n vertices by adding edges between any two vertices at distance at most k . Omai et al. determined the adjacent-vertex-distinguishing chromatic index of the powers of paths. To that end, the problem was divided into cases that used several different edge coloring techniques. We present a new technique to obtain an adjacent-vertex-distinguishing edge coloring of powers of paths which contain universal vertices. This new technique is applicable to cases that were previously treated separately, being a simpler proof. Moreover, this technique allows to determine the vertex-distinguishing chromatic index of a subset of powers of paths with universal vertex.

Keywords: graph theory; combinatorial optimization; computational complexity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Um grafo G .	8
Figura 2 – Uma coloração de arestas e os conjuntos de cores dos vértices.	9
Figura 3 – Uma coloração de arestas DVA.	9
Figura 4 – Grafo P_7^4	11
Figura 5 – Partição L e R do P_9^5	22
Figura 6 – $P_9^5[L]$ e $P_9^5[R]$ coloridos	22
Figura 7 – Bipartido do P_9^5 colorido com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ cores	22
Figura 8 – Bipartido do P_9^5 com o vértice w_0	23
Figura 9 – P_9^5 colorido com $\Delta(P_9^5) + 1$ cores	27

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS LATINAS

\mathbb{Z}	Conjunto dos inteiros
$A(G)$	Multiconjunto de arestas de um grafo G
$C(v)$	Conjunto de cores de um vértice v
C_n	Um ciclo com n vértices
$G[T]$	Subgrafo induzido por T
K_n	Grafo completo com n vértices
P_n^k	k -ésima potência do caminho com n vértices
$V(G)$	Conjunto de vértices de um grafo G

LETRAS GREGAS

β	Ordem indiferença beta
$\chi'(G)$	Índice cromático de um grafo G
$\chi'_a(G)$	Índice cromático distinguidor de vizinhanças de um grafo G
$\chi'_s(G)$	Índice cromático distinguidor de vértices de um grafo G
$\Delta(G)$	Grau máximo de um grafo G

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Estrutura do trabalho	11
2	CONCEITOS E RESULTADOS ANTERIORES	13
2.1	Resultados em Potências de Caminhos	15
3	RESULTADOS	19
4	CONCLUSÃO	28
	REFERÊNCIAS	29
	ÍNDICE REMISSIVO	30

1 INTRODUÇÃO

Um *grafo* G é uma estrutura composta por um conjunto de elementos chamados de *vértices*, $V(G)$, e um multiconjunto de arestas, $A(G)$, onde cada *aresta* é um par não-ordenado de vértices. Um *laço* é uma aresta uv tal que $u = v$. Quando existem mais que um par uv no multiconjunto $A(G)$, dizemos que existem *arestas múltiplas* entre u e v . Um grafo é *simples* se não admite laços nem arestas múltiplas. Note que quando o grafo é simples, $A(G)$ é um conjunto, ou seja, não tem arestas repetidas. Neste trabalho, todos os grafos são simples.

Considere um grafo G . Se existe aresta entre dois vértices u e v , dizemos que u e v são *vizinhos* (ou *adjacentes*) em G e que a aresta $uv \in A(G)$ *incide* nos vértices u e v . Na Figura 1, os vértices v_0 e v_1 são adjacentes; a aresta v_0v_2 é incidente nos vértices v_0 e v_2 .

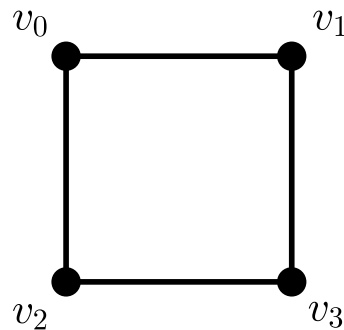


Figura 1 – Um grafo G .

Uma *coloração de arestas* é uma atribuição de cores para as arestas de um grafo. Neste trabalho, as cores são representadas por números naturais. Uma coloração de arestas é *própria* quando arestas que incidem no mesmo vértice recebem cores distintas. Neste trabalho, toda coloração de arestas é própria. O *Problema da Coloração de Arestas* é determinar o menor número de cores possível para se obter uma coloração de arestas de um dado grafo G . Tal número é chamado de *índice cromático* e é denotado por $\chi'(G)$. Uma coloração de arestas de um grafo G que utiliza exatamente $\chi'(G)$ cores é *ótima*.

Dada uma coloração de arestas de um grafo G , o *conjunto de cores de um vértice* v , denotado por $C(v)$, é composto pelas cores das arestas que incidem em v . A Figura 2 apresenta um exemplo de uma coloração de arestas ótima, em que o vértice v_0 possui conjunto de cores $C(v_0) = \{0,1,2\}$.

Uma *coloração de arestas distinguidora de vértices adjacentes* (ou *coloração de arestas DVA*) é uma coloração de arestas de forma que vértices adjacentes tenham conjuntos de cores distintos. Esta coloração foi chamada por Omai (2018) de coloração arestas distinta nos vértices adjacentes. Porém, como nenhuma cor é dada aos vértices, acreditamos que seja mais preciso dizer que é uma coloração de arestas distinguidora de vértices adjacentes. Ressalta-se que o nome desta coloração não está consolidado na literatura. Omai (2018, pag. 18) apresenta um breve histórico sobre os diferentes nomes já adotados anteriormente para esta coloração. O *Problema da Coloração de Arestas Distinguidora de Vértices Adjacentes*, introduzido por Zhang,

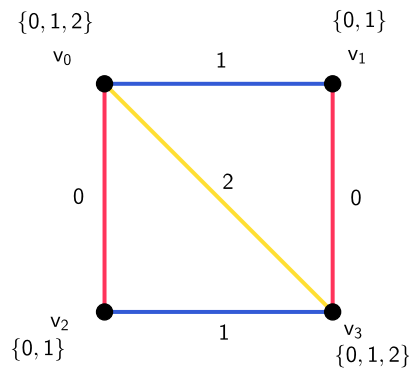


Figura 2 – Uma coloração de arestas e os conjuntos de cores dos vértices.

Liu e Wang (2002), é determinar o menor número de cores para realizar uma coloração de arestas DVA para um dado um grafo G . Tal número é chamado de *índice cromático distinguidor de vértices adjacentes*, ou *índice cromático DVA*, e é denotado por $\chi'_a(G)$. A Figura 3 apresenta um exemplo de coloração de arestas DVA.

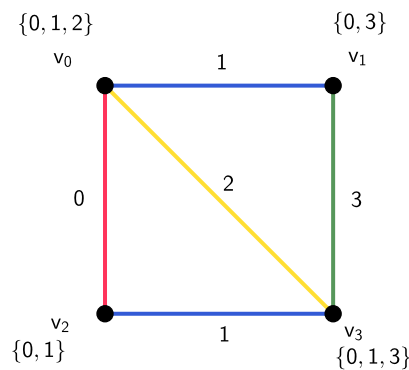


Figura 3 – Uma coloração de arestas DVA.

Note que qualquer coloração de arestas própria em um grafo G necessita de pelo menos tantas cores quanto o maior número de arestas incidentes em um mesmo vértice de G . Esse número é chamado de *grau máximo* de G e é denotado por $\Delta(G)$. O *grau* de um vértice v , denotado por $d(v)$, corresponde à quantidade de arestas que incidem em v . Um vértice v de grau k é chamado de k -*vértice*. Um $(n - 1)$ -vértice é um *vértice universal*. Na Figura 3, $d(v_0) = d(v_3) = 3$, $d(v_1) = d(v_2) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.

Pelas definições, sabe-se que $\chi'_a(G) \geq \chi'(G) \geq \Delta(G)$ para qualquer grafo G . Além disso, quando existem $\Delta(G)$ -vértices adjacentes, $\chi'_a(G) \geq \Delta(G) + 1$, pois com menos que $\Delta(G) + 1$ cores, os conjuntos de cores dos $\Delta(G)$ -vértices adjacentes não são distinguíveis. Esse resultado foi apresentado por Zhang, Liu e Wang (2002) e é formalizado a seguir.

Teorema 1.1. (ZHANG; LIU; WANG, 2002) *Se G é um grafo com $\Delta(G)$ -vértices adjacentes, então $\chi'_a(G) \geq \Delta(G) + 1$.*

□

Vizing (1964) apresentou um limitante superior justo para o índice cromático de qualquer grafo simples G , mostrando que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Mas, para o índice cromático DVA, até onde sabemos, não há um limitante superior justo conhecido. Zhang, Liu e Wang (2002) apresentaram a seguinte conjectura.

Conjectura 1.2. (ZHANG; LIU; WANG, 2002) *Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ e G não é isomorfo ao C_5 , então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Até onde vai nosso conhecimento, essa conjectura permanece em aberto. Bensmail, Hocquard e Lajou (2023) provaram que, para qualquer inteiro $k \geq 3$, decidir se um dado grafo G com grau máximo k tem uma coloração de arestas DVA com $k + 1$ cores é NP-completo, e decidir se G tem uma coloração de arestas DVA com $k + 2$ cores também é NP-completo. Para algumas classes de grafos importantes do ponto de vista computacional, tais como os grafos completos (ZHANG; LIU; WANG, 2002), as potências de caminhos (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2017), e subclasses dos grafos split, como os split completos e split indiferença (RAUCH; ALMEIDA, 2017), existem algoritmos polinomiais que determinam o índice cromático DVA.

Dado um grafo G , uma *coloração de arestas distinguidora de vértices* (coloração de arestas DV) é uma coloração de arestas própria tal que $C(u) \neq C(v)$ para quaisquer dois vértices $u \neq v$ do grafo G . A coloração de arestas DV foi definida por Burris e Schelp (1997). O menor número de cores para uma coloração de arestas DV em um grafo G é chamado de *índice cromático distinguidor de vértices* (índice cromático DV) e denotado por $\chi'_s(G)$. Em inglês, o índice cromático DV é também chamado de *strong chromatic index* e isso explica a notação $\chi'_s(G)$. O *Problema da Coloração de Arestas Distinguidora de Vértices* é determinar o índice cromático DV para um dado grafo G . Pelas definições, $\chi'_s(G) \geq \chi'_a(G)$, para qualquer grafo G . Burris e Schelp (1997) determinaram o índice cromático DV para grafos completos, estrelas, caminhos e ciclos. Além disso, mostraram que se G é uma árvore com pelo menos duas arestas, então $\chi'_s(G) \leq \max\{n_1 + 1, \lceil 6,35\sqrt{n_2} \rceil, 21\}$, onde n_i é o número de vértices com grau igual a i em G . Chartrand e Zhang (2009) provaram que se G é um grafo conexo com k componentes, cada uma delas com pelo menos 3 vértices, então $\chi'_s(G) < |V(G)| + \Delta(G) - k$. Até onde vai nosso conhecimento, não se sabe se este limitante é justo. Burris e Schelp (1997) conjecturam um limitante superior mais justo.

Conjectura 1.3. Burris e Schelp (1997) *Para qualquer grafo G , $\chi'_s(G) \leq |V(G)| + 1$.*

Em relação à complexidade do Problema da Coloração de Arestas DV, até onde vai nosso conhecimento, é um problema em aberto. Apesar disso, ressalta-se que a coloração de arestas DV é uma coloração de arestas DVA com mais restrições e, como já mencionado, o Problema da Coloração de Arestas DVA é conhecidamente NP-completo (BENSMAIL; HOCQUARD; LAJOU, 2023).

Uma potência de caminho, P_n^k , é um grafo com conjunto de vértices $V(P_n^k) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ em que existe uma aresta $v_i v_j$ se, e somente se, $|j - i| \leq k$. Um exemplo de potência de caminho pode ser observado na Figura 4.

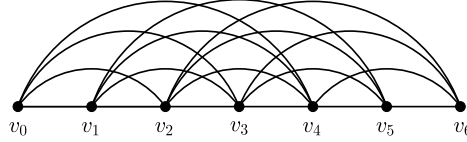


Figura 4 – Grafo P_7^4

Quando a potência de caminho P_n^k tem $n \leq k + 1$, o grafo é *completo*, denotado por K_n . Note que $\chi'_a(K_1) = 0$ e que o grafo K_2 não tem uma coloração de arestas DVA. Para os outros grafos completos, vale o seguinte teorema.

Teorema 1.4. (ZHANG; LIU; WANG, 2002) *Seja K_n um grafo completo com $n > 2$. Se n é ímpar, então $\chi'_a(K_n) = \Delta(K_n) + 1$. Se n é par, então $\chi'_a(K_n) = \Delta(K_n) + 2$.*

□

Para as potências de caminho, Omai, Almeida e Sasaki (2017) definiram o índice cromático DV, dividindo o problema em casos, de acordo com o teorema a seguir.

Teorema 1.5. (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2017; OMAI, 2018) *Se a potência de caminho P_n^k com q vértices de grau máximo não é isomorfa ao K_2 , então*

$$\chi'_a(P_n^k) = \begin{cases} \Delta(P_n^k), & \text{se } n = 2k + 1; \\ \Delta(P_n^k) + 2, & \text{se } k + 1 < n < 2k, n \text{ par, } q > \frac{n}{2} \text{ e } |A(\overline{P_n^k})| < q - \frac{n}{2}; \\ \Delta(P_n^k) + 2, & \text{se } n \leq k + 1 \text{ e } n \text{ par}; \\ \Delta(P_n^k) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observa-se, da demonstração do Teorema 1.5, que foram apresentadas provas com técnicas e argumentos diferentes para subconjuntos de grafos que têm o mesmo índice cromático DVA. Neste trabalho, tratamos o Teorema 1.5, apresentando uma nova técnica de coloração de arestas DVA que pode ser aplicada em casos que antes utilizavam técnicas diferentes, assim simplificando as demonstrações e facilitando a compreensão do problema. Uma consequência desta nova técnica foi a determinação do índice cromático DV para os grafos considerados.

1.1 Estrutura do trabalho

Este documento está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos definições da Teoria dos Grafos e resultados anteriores que são necessários para a compreensão deste Trabalho de Conclusão de Curso. O Capítulo 3 apresenta a contribuição deste trabalho,

uma nova técnica de coloração de arestas DVA que pode ser aplicada para obtenção de uma coloração de arestas DVA ótima em potências de caminhos P_n^k com $k + 1 < n \leq 2k + 1$ que possuem no máximo $\frac{n}{2}$ vértices com grau igual a $\Delta(P_n^k)$, ou seja, com $q \leq \frac{n}{2}$, onde q é o número de vértices com grau máximo. Também mostramos que a mesma técnica pode ser usada para apresentar uma coloração de arestas DVA com $\Delta(P_n^k) + 2$ cores em potências de caminhos em que a maioria dos vértices são universais. Além disso, provamos que as colorações de arestas DVA apresentadas também são coloração de arestas DV ótimas. O Capítulo 4 apresenta uma discussão sobre o impacto deste trabalho e aponta direções para futuras investigações.

2 CONCEITOS E RESULTADOS ANTERIORES

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e resultados anteriores da Teoria dos Grafos que são necessários para a apresentação dos resultados obtidos neste trabalho.

Considere um grafo G . Um *subgrafo* de G é um grafo H com conjunto de vértices $V(H) \subseteq V(G)$ e conjunto de arestas $A(H) \subseteq A(G)$. Dado um subconjunto $S \subseteq V(G)$, o *subgrafo de G induzido por S* é o grafo $G[S]$ com conjunto de vértices S , tal que para quaisquer dois vértices u e v em S , temos $uv \in A(G[S])$ se e somente se $uv \in A(G)$. Similarmente, dado um conjunto de arestas $T \subseteq A(G)$, o subgrafo de G induzido por T , denotado por $G[T]$, é o grafo com conjunto de arestas T e com conjunto de vértices formado por todo vértice de $V(G)$ no qual incide alguma aresta de T .

Uma *clique* é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Um grafo é *completo* se e somente se seu conjunto de vértices é uma clique. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

Um grafo G é *sobrecarregado* quando $|A(G)| > \Delta(G) \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$. Neste caso, qualquer coloração de arestas própria do grafo precisa de pelo menos $\Delta(G) + 1$ cores. Considere uma coloração de arestas de G , dizemos que uma cor c *sobra* em um vértice v se $c \notin C(v)$.

Alguns resultados da Teoria dos Grafos são ditos folclóricos. São resultados amplamente conhecidos, largamente usados, mas que não se sabe quem é o autor. Um desses casos, até onde vai o nosso conhecimento, é o da coloração de arestas de grafos completos.

Teorema 2.1. (Autor desconhecido) *Um grafo completo K_n tem $\chi'(K_n) = \Delta(K_n)$ se n é par, e $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) + 1$ se n é ímpar.*

Demonstração. Primeiro, suponha que n é ímpar. Observe que, neste caso, os grafos completos K_n são sobrecarregados, pois $|A(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} > \frac{(n-1)^2}{2} = \Delta(K_n) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Portanto, $\chi'(K_n) \geq \Delta(K_n) + 1$. Então, é suficiente apresentar uma coloração de arestas com $\Delta(K_n) + 1$ cores para esses casos. Rotule os vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . Atribua a cor $(i + j) \bmod n$ para cada aresta $v_i v_j$ tal que $0 \leq i, j \leq n - 1$.

Para cada valor de i no intervalo $[0, n - 1]$, os valores de $(i + j) \bmod n$ diferem ao considerar valores distintos de j pertencentes ao intervalo $[0, n - 1]$. Portanto, esta é uma coloração de arestas própria.

Para colorir as arestas de qualquer grafo completo K_n com n par, é suficiente rotular seus vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , colorir as arestas do subgrafo completo $K_n[v_0, v_1, \dots, v_{n-2}]$ com $n - 1$ cores, usando a técnica apresentada para coloração de arestas de grafos completos com número de vértices ímpar. E, por fim, utilizar a cor que sobra em cada vértice v_i para colorir as arestas $v_i v_{n-1}$, para $0 \leq i \leq n - 2$. Para detalhar esta técnica, vamos apresentar a construção desta coloração. Atribua a cor $(i + j) \bmod (n - 1)$ para cada aresta $v_i v_j$ tal que $0 \leq i, j \leq n - 2$:

Observe que a cor $2i \bmod (n - 1)$ está sobrando no vértice v_i , quando $0 \leq i \leq n - 2$, já que não há laços. Além disso, quando $i < \frac{n}{2}$, tem-se $2i < (n - 1)$. Então, $2i \bmod (n - 1) = 2i$,

que é par. Quando $i \geq \frac{n}{2}$, tem-se $2i \geq n$. Como $i < n$, então $2i \bmod (n-1) = 2i - (n-1) = 2i - n + 1$. Como $2i$ é par e n é par, tem-se que $2i - n + 1$ é ímpar. Então, para quaisquer valores $i \in [0, \frac{n}{2})$ e $j \in [\frac{n}{2}, n-2]$, as cores $2i \bmod (n-1)$ e $2j \bmod (n-1)$ se distinguem pela sua paridade. Se i e j são ambos menores que $\frac{n}{2}$, então $2i \bmod (n-1) = 2i \neq 2j = 2j \bmod (n-1)$, para quaisquer valores de i e j tais que $i \neq j$. Similarmente, se i e j são ambos maiores que $\frac{n}{2}$, então $2i \bmod (n-1) = 2i - (n-1)$ e $2j \bmod (n-1) = 2j - (n-1)$. Como $i \neq j$, tem-se $2i - (n-1) \neq 2j - (n-1)$ e, portanto, $2i \bmod (n-1) \neq 2j \bmod (n-1)$. Portanto, para quaisquer valores de i e j distintos no intervalo $[0, n-2]$, as cores que sobram em v_i e v_j são distintas.

Como as cores $2i \bmod (n-1)$ e $2j \bmod (n-1)$ são distintas para quaisquer i e j tais que $i \neq j$, pode-se atribuir a cor $2i \bmod (n-1)$ para colorir a aresta $v_i v_{n-1}$, para todo i , de maneira que as cores incidentes em v_{n-1} são todas distintas. Assim os grafos completos com n par têm uma coloração de arestas com $n-1 = \Delta(K_n)$ cores. Como $\chi'(K_n) \geq \Delta(K_n)$, conclui-se que quando n é par, $\chi'(K_n) = \Delta(K_n)$. \square

Um *quadrado latino* de ordem n é uma matriz $M_{n \times n}$ cujos valores das células estão no intervalo $[0, n-1]$, não se repetem na mesma linha, e não se repetem na mesma coluna de $M_{n \times n}$. Quadrados latinos são bastante utilizados na solução de problemas de coloração de arestas (CHEN; FU; KO, 1995). Nestes casos, o valor em cada célula do quadrado latino é chamado de cor. Note que a matriz $M_{n \times n}$ em que cada célula $m_{i,j}$ tem valor $(i+j) \bmod n$ é um quadrado latino. Nesse caso, em especial, pelos argumentos apresentados na prova do Teorema 2.1 e pela observação de que a célula $m_{i,i}$ têm valor $2i \bmod n$, pode-se obter a seguinte propriedade.

Propriedade 2.2. *Seja $M_{n \times n}$ um quadrado latino de ordem ímpar tal que cada célula $m_{i,j}$ tem valor $(i+j) \bmod n$. Os elementos da diagonal principal de $M_{n \times n}$ são dois a dois distintos.*

Dado um grafo G , com conjunto de vértices $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, uma *ordem indiferença* de $V(G)$ é uma ordem linear $\beta = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ tal que para qualquer i e j tal que $i < j$, tem-se: se $v_i v_j \in A(G)$, então $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$ é uma clique em G . Um grafo é *indiferença* se e somente se seu conjunto de vértices admite uma ordem indiferença.

Dado um conjunto de elementos X , uma *partição* $[A_1, A_2, \dots, A_k]$ de X é tal que $k \geq 2$, qualquer parte A_i é um subconjunto de X , e qualquer elemento de X pertence a exatamente um subconjunto A_i . Neste caso, por um abuso de notação, escrevemos $X = [A_1, A_2, \dots, A_k]$.

Um *conjunto independente* em um grafo G é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes em G . Um grafo é *bipartido* se e somente se seu conjunto de vértices tem uma partição em dois conjuntos independentes. O índice cromático dos grafos bipartidos também é conhecido e trata-se de um teorema amplamente difundido na literatura de Teoria dos Grafos.

Teorema 2.3. (KÖNIG, 1916) *Seja G um grafo bipartido. Então $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

\square

Dado um grafo G , um *emparelhamento* em G é um subconjunto M das arestas de G tal que $\Delta(G[M]) = 1$. Note que em M as arestas não têm vértices em comum.

2.1 Resultados em Potências de Caminhos

Nesta seção são apresentados os resultados de Omai, Almeida e Sasaki (2017) sobre coloração de arestas DVA em potências de caminhos. No referido artigo, as autoras determinaram o índice cromático DVA de todas as potências de caminhos. Estes resultados também foram apresentados na dissertação de mestrado de Omai (2018). Como será visto nesta seção, para chegar nesses resultados, foram necessárias diversas técnicas de coloração de arestas diferentes. Este aspecto é importante, visto que a contribuição deste trabalho de conclusão de curso é simplificar e diminuir o número de técnicas diferentes utilizadas para se obter uma coloração de arestas DVA ótima para potências de caminhos.

Como visto no Teorema 1.1, se um grafo G tem vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi'_a(G) \geq \Delta(G) + 1$. Caso contrário, há chance de que $\chi'_a(G)$ seja igual a $\Delta(G)$. O primeiro resultado de Omai, Almeida e Sasaki (2017) que apresentamos é importante para dar um limitante inferior para o índice cromático DVA das potências de caminhos.

Lema 2.4. (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2017) *Se P_n^k é uma potência de caminho com $1 < n \neq 2k + 1$, então existem vértices adjacentes com grau máximo.*

□

A apresentação da prova do Teorema 1.5 foi dividida em casos provados por lemas, tanto no trabalho de Omai, Almeida e Sasaki (2017) quanto na dissertação de (OMAI, 2018). A seguir, para conforto do leitor, apresentamos, na íntegra, as provas feitas por Omai, Almeida e Sasaki (2017), para os casos em que será dada uma nova técnica como contribuição deste trabalho de conclusão de curso.

Lema 2.5. (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2017) *Se P_n^k é uma potência de caminho com $n = 2k + 1$, então $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k)$.*

Demonstração. Suponha os vértices da potência de caminho rotulados $v_0v_1v_2 \dots v_{n-1}$, de acordo com uma ordem indiferença.

Se $k = 1$, então não existem vértices adjacentes com o mesmo grau. Portanto, qualquer coloração de arestas é uma coloração de arestas DVA e, portanto, $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k)$, já que os conjuntos de cores de vértices adjacentes se distinguem por sua cardinalidade.

Se $k = 2$, então os vértices v_1 e v_3 são vértices adjacentes com mesmo grau. Neste caso, atribua cor 1 para as arestas v_0v_1 e v_2v_3 , cor 2 para as arestas v_2v_4 e v_1v_3 , cor 3 para as arestas v_0v_2 e v_3v_4 e cor 4 para a aresta v_1v_2 .

Se $k \geq 3$, faça uma partição $[L, C, R]$ do conjunto de vértices, onde $L = \{v_0, v_1, \dots, v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\}$, $C = \{v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}, v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}, \dots, v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + k}\}$, e $R = \{v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + k + 1}, v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + k + 2}, \dots, v_{n-1}\}$.

Sejam $G_L = G[L]$, $G_C = G[C]$ e $G_R = G[R]$, subgrafos do P_n^k . Note que G_L , G_C e G_R são subgrafos de K_k , então pelo Teorema 2.1, existe uma coloração de arestas com k cores para cada um desses subgrafos. Faça a coloração de G_L , G_C e G_R usando k cores. Pelo Teorema 2.1, se k é ímpar, então as cores que sobram nos vértices de G_C são duas a duas distintas. Se k é par, a coloração de arestas do subgrafo G_C deve ser feita com mais cuidado. Re-rotule os vértices de G_C tal que $v_{\frac{k}{2}+1+i} = u_{\frac{i}{2}}$ se i é par, e $v_{\frac{k}{2}+1+i} = u_{\frac{k+i-1}{2}}$ se i é ímpar, $0 \leq i < k$. Atribua a cor $(i + j) \bmod k$ para a aresta $u_i u_j$, $0 \leq i < j < k$. Pela re-rotulação dos vértices de G_C , nos vértices $v_{\frac{k}{2}+2i+1}$ e $v_{\frac{k}{2}+2i+2}$ não há aresta com cor $2i$, $0 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$. Portanto, dois vértices pertencentes a G_C têm conjuntos de cores iguais se e somente se, são consecutivos e k é par. Note que o vértice de grau máximo v_k se encontra entre qualquer par de vértices com mesmo grau. Então, vértices com mesmo grau em G_C não são consecutivos. Portanto, quando k é par, em cada par de vértices com mesmo grau do grafo G_C sobram cores distintas pela coloração de arestas do subgrafo G_C . Para quaisquer dois vértices adjacentes u e v que tenham o mesmo grau e pertençam a subgrafos distintos, os conjuntos de cores de u e v neste momento têm cardinalidades diferentes, já que não há arestas entre vértices de G_L e G_R , $|L| \neq |C|$ e $|R| \neq |C|$.

O subgrafo induzido pelo conjunto de arestas ainda não coloridas é um grafo bipartido B com partição do conjunto de vértices $[C, L \cup R]$. Note que não existe aresta $v_i v_j$ tal que $v_i \in L$ e $v_j \in R$, já que existem $k + 1$ vértices entre L e R na ordem indiferença. Observe que cada vértice em $L \cup R$ tem grau até k em B , já que $|C| = k$. Os graus dos vértices de C em B são no máximo $k + 1$, pois são adjacentes a $k - 1$ vértices de C e $\Delta(P_n^k) = 2k$. Portanto, $\Delta(B) = k + 1$. Além disso, v_k é o único vértice de grau máximo em B . Seja c' a cor que sobra em v_k . Renomeie as cores da coloração de G_L , de forma que sobre a cor c' no vértice v_0 . Atribua cor c' para a aresta $v_0 v_k$ e remova essa aresta de B . Note que agora $\Delta(B) = k$. Como B é um grafo bipartido, pelo Teorema 2.3, B possui uma coloração de arestas com k cores. Então, use k novas cores para colorir B .

O conjunto de cores de quaisquer dois vértices em L (e da mesma forma R) são dois a dois distintos, por sua cardinalidade. Os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices em G_C se distinguem pela coloração de arestas de G_C . O conjunto de cores dos vértices de $L \cup R$ são menores que o conjunto de cores dos vértices de C . Então, esta é uma coloração de arestas DVA do grafo P_n^k com $2k$ cores. Portanto, neste caso $\chi'_a(P_n^k) = 2k = \Delta(P_n^k)$. \square

As potências de caminhos P_n^k com $n = 2k + 1$ têm um único vértice universal e, como visto no Lema 2.5, têm $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k)$. Para todas os outros casos, vale o Lema 2.6, a seguir, que em conjunção com o Teorema 1.1 garante que $\chi'_a(P_n^k) \geq \Delta(P_n^k) + 1$.

Lema 2.6. (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2017) *Se P_n^k é uma potência de caminho com $1 < n \neq 2k + 1$, então existem vértices adjacentes com grau máximo.*

\square

Os Lemas 2.7 e 2.8 apresentam $\chi'_a(P_n^k)$ para os casos em que $k + 1 < n \leq 2k$.

Lema 2.7. (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2017) Se P_n^k é uma potência de caminho com $k + 1 < n < 2k$ e n é ímpar, então $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 1$.

Demonstração. Considere uma potência de caminho P_n^k com $k + 1 < n < 2k$ e n ímpar. Rotule os vértices do P_n^k , v_0, v_1, \dots, v_{n-1} de forma que $d(v_0) \geq d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_{n-1})$ e os vértices com índices ímpares sejam uma clique.

Considere um quadrado latino $M_{n \times n}$ cujas células $m_{i,j}$ têm valor $(i + j) \bmod n$. Atribua a cor $m_{i,j}$ para a aresta $v_i v_j$, $0 \leq i, j < n$.

Quando i é ímpar, $\overline{C(v_i)}$ é definido por

$$\{m_{i,i}\} \cup \{m_{i,2d(v_i)-n+2h+1} : 1 \leq h < n - d(v_i)\}, \text{ onde } h \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Quando i é par, $\overline{C(v_i)}$ é definido por

$$\{m_{i,i}\} \cup \{m_{i,2d(v_i)-n+2h} : 1 \leq h < n - d(v_i)\}, \text{ onde } h \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Se $|\overline{C(v_i)}| = |\overline{C(v_j)}| = 1$, as cores de $\overline{C(v_i)}$ e $\overline{C(v_j)}$ pertencem a diagonal principal de $M_{n \times n}$. Como $M_{n \times n}$ é um quadrado latino de ordem ímpar, então $M_{n \times n}$ satisfaz a Propriedade 2.2 e $\overline{C(v_i)} \neq \overline{C(v_j)}$ para todo par de vértices v_i e v_j . Se $|\overline{C(v_i)}| = |\overline{C(v_j)}| \geq 2$, então $j = i + 1$ pela rotulação dos vértices.

Como i é ímpar, $j = i + 1$ e $d(v_i) = d(v_j)$, então as cores do conjunto definido em (1) são as cores da linha i entre as colunas $2d(v_i) - n + 3$ e $n - 1$. E as cores do conjunto definido em (2) são as cores da linha $i + 1$ entre as colunas $2d(v_i) - n + 2$ e $n - 2$. Como $m_{i,j} = m_{i,j-1}$, tem-se $\overline{C(v_i)} - m_{i,i} = \overline{C(v_{i+1})} - m_{i+1,i+1}$. Além disso, $m_{i,i} \neq m_{i+1,i+1}$, uma vez que $M_{n \times n}$ satisfaz a Propriedade 2.2. Então, esta é uma coloração de arestas DVA do P_n^k . Portanto, $\chi'_a(P_n^k) \leq n = \Delta(P_n^k) + 1$. Como há $\Delta(P_n^k)$ -vértices adjacentes, $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 1$. \square

Quando n é par, Omai, Almeida e Sasaki (2017) provaram que existem potências de caminhos com vértice universal que têm $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 2$. Nesses casos, o índice cromático DVA depende do número de vértices universais existentes no grafo. No Lema 2.8, Omai, Almeida e Sasaki (2017) determinaram o índice cromático DVA quando no máximo metade dos vértices da potência de caminho são universais e, para os outros casos (com n par e vértice universal), ela apresenta um limitante superior.

Lema 2.8. (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2017) Se uma potência de caminho P_n^k tem q vértices universais, n par e $k + 1 < n \leq 2k$, então $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 1$ quando $q \leq \frac{n}{2}$, caso contrário $\chi'_a(P_n^k) \leq \Delta(P_n^k) + 2$.

Demonstração. Considere uma potência de caminho P_n^k com $k + 1 < n \leq 2k$, n par e q vértices universais. Rotule os vértices do P_n^k , v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , de forma que $d(v_0) \geq d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_{n-1})$ e tal que o conjunto dos vértices com índice ímpar seja uma clique.

Se $q \leq \frac{n}{2}$, use um quadrado latino $M_{n \times n}$ cujas valores das células são dados por $(i + j) \bmod n$. Atribua a cor $m_{i,j}$ para a aresta $v_i v_j$, $0 \leq i, j < n$.

Pela construção de $M_{n \times n}$, quando i é ímpar, $\overline{C(v_i)}$ é definido por

$$\{m_{i,i}\} \cup \{m_{i,2d(v_i)-n+2h} : 1 \leq h < n - d(v_i)\}, \text{ onde } h \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

E quando i é par, $\overline{C(v_i)}$ é definido por

$$\{m_{i,i}\} \cup \{m_{i,2d(v_i)-n+2h+1} : 1 \leq h < n - d(v_i)\}, \text{ onde } h \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Se $|\overline{C(v_i)}| = |\overline{C(v_{i+1})}| \geq 2$, então i é par e, por argumentos similares aos apresentados no Lema 2.7, $\overline{C(v_i)} - m_{i,i} = \overline{C(v_{i+1})} - m_{i+1,i+1}$. Por construção, $m_{i,i} \neq m_{i+1,i+1}$ e então, $\overline{C(v_i)} \neq \overline{C(v_{i+1})}$. Se $|\overline{C(v_i)}| = |\overline{C(v_j)}| = 1$, então v_i e v_j são vértices universais e como $q \leq \frac{n}{2}$, pode-se concluir que $0 \leq i, j < \frac{n}{2}$. Como n é par, as cores das primeiras $\frac{n}{2}$ células na diagonal principal de $M_{n \times n}$ são duas a duas distintas. Então, se $|\overline{C(v_i)}| = |\overline{C(v_j)}| = 1$, sabemos que $\overline{C(v_i)} \neq \overline{C(v_j)}$. Portanto, $\chi'_a(P_n^k) \leq \Delta(P_n^k) + 1$ e, como há $\Delta(P_n^k)$ -vértices adjacentes, $\chi'_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 1$.

Se $q > \frac{n}{2}$, use um quadrado latino $M_{n+1 \times n+1}$ cujas células $m_{i,j}$ têm valor $(i + j) \bmod (n + 1)$. Atribua a cor $m_{i,j}$ para a aresta $v_i v_j$, $0 \leq i, j < n$.

Quando i é ímpar $\overline{C(v_i)}$ é definido por

$$\{m_{i,i}, m_{i,n}\} \cup \{m_{i,2d(v_i) - n + 2h} : 1 \leq h < n - d(v_i)\}, \text{ onde } h \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

E quando i é par $\overline{C(v_i)}$ é definido por

$$\{m_{i,i}, m_{i,n}\} \cup \{m_{i,2d(v_i) - n + 2h + 1} : 1 \leq h < n - d(v_i)\}, \text{ onde } h \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Note que $|\overline{C(v_i)}| \geq 2$, para $0 \leq i < n$. Se $|\overline{C(v_i)}| = |\overline{C(v_j)}| > 2$, então $\overline{C(v_i)} \neq \overline{C(v_j)}$ como no caso anterior. Então, considere $|\overline{C(v_i)}| = |\overline{C(v_j)}| = 2$. Se $\overline{C(v_i)} \neq \overline{C(v_j)}$, então está pronto. Caso contrário, é possível ajustar a coloração trocando as cores $\frac{2n-7}{3}$ e $\frac{2n-4}{3}$ de um caminho que começa em $v_{\frac{2n-1}{3}} v_{n-1} v_{\frac{2n+2}{3}} v_{n-2} v_{\frac{2n+5}{3}} v_{n-3} \dots$ e termina em um vértice onde uma dessas cores está sobrando. Portanto, $\chi'_a(P_n^k) \leq n + 1 = \Delta(P_n^k) + 2$. \square

3 RESULTADOS

Este capítulo apresenta uma nova técnica de coloração de arestas DVA ótima para as potências de caminhos P_n^k que têm vértice universal ($n \leq 2k + 1$), não são grafos completos ($n > k + 1$), e satisfazem uma das seguintes condições: ou têm número de vértices ímpar, ou no máximo metade dos vértices têm grau máximo. Quando existe vértice universal, n é par, e mais da metade dos vértices têm grau máximo, apresentamos, usando a mesma técnica, uma coloração de arestas DVA com $\Delta(P_n^k) + 2$ cores.

Antes de apresentar a técnica que será utilizada, são necessárias algumas propriedades sobre a coloração de arestas dos grafos completos. Pela prova do Teorema 2.1, há uma propriedade interessante sobre a cor que sobra em cada vértice v_i na coloração de arestas de grafos completos de ordem ímpar: usando a fórmula $(i + j) \bmod n$, as cores $2i \bmod n$ e $2j \bmod n$ são distintas para quaisquer valores distintos de i e j , ou seja, em quaisquer dois vértices distintos v_i e v_j sobram cores distintas. Chen, Fu e Ko (1995) afirmam que, quando n é par, não existe coloração de arestas para o grafo completo K_n , utilizando n cores tal que as cores que sobram em quaisquer dois vértices sejam distintas. No próximo lema, vamos mostrar que usando a fórmula $(i + j) \bmod n$, quando n é par, apenas cores pares sobram nos vértices do grafo K_n e cada cor sobra em exatamente dois vértices.

Lema 3.1. *Considere um grafo completo K_n com n par e vértices rotulados v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . Na coloração de arestas do K_n que atribui a cor $(i + j) \bmod n$ para cada aresta $v_i v_j$, as cores que sobram nos vértices do grafo são pares e cada cor sobra em exatamente dois vértices.*

Demonstração. Considere dois vértices v_i e v_j com $i \neq j$. Então, ao atribuir para cada aresta $v_i v_j$ a cor $(i + j) \bmod n$, a cor que sobra em v_i é $2i \bmod n$ e a cor que sobra em v_j é $2j \bmod n$. Se i e j são ambos menores que $\frac{n}{2}$, então $2i \bmod n < n$ e $2j \bmod n < n$. Logo, $2i \bmod n = 2i$ e $2j \bmod n = 2j$. Como $i \neq j$, tem-se $2i \neq 2j$. Se i e j são ambos maiores ou iguais a $\frac{n}{2}$, então $2i \bmod n \geq n$ e $2j \bmod n \geq n$. Como $i < n$ e $j < n$, tem-se $2i \bmod n = 2i - n$ e $2j \bmod n = 2j - n$. Como $i \neq j$, tem-se $2i - n \neq 2j - n$. Então, suponha sem perda de generalidade, que $i < \frac{n}{2}$ e $j \geq \frac{n}{2}$. Pelos mesmos argumentos já apresentados, $2i \bmod n = 2i$ e $2j \bmod n = 2j - n$. Assim, as cores $2i \bmod n$ e $2j \bmod n$ são iguais se e somente se $2i = 2j - n$. Neste caso, $n = 2j - 2i$, ou seja, $\frac{n}{2} = j - i$ e conclui-se que $j = i + \frac{n}{2}$. Então para todo i tal que $0 \leq i < \frac{n}{2}$, a cor $2i$ sobra em exatamente dois vértices: v_i e $v_{i+\frac{n}{2}}$. Então, a cor que sobra em qualquer vértice é par. \square

Das provas do Teorema 2.1 e do Lema 3.1, conclui-se o Lema 3.2.

Lema 3.2. *Considere um grafo completo K_n com vértices rotulados v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . Na coloração de arestas do K_n que atribui a cor $(i + j) \bmod n$ para cada aresta $v_i v_j$, as cores que sobram nos vértices satisfazem as seguintes propriedades:*

1. Se n é ímpar, as cores que sobram em quaisquer dois vértices são distintas. Além disso, a cor que sobra em v_i é par quando $i < \frac{n}{2}$ e é ímpar caso contrário.
2. Se n é par, as cores que sobram nos vértices do grafo são todas pares. Além disso, a cor $2i$ sobra exatamente nos vértices v_i e $v_{i+\frac{n}{2}}$, para $0 \leq i < \frac{n}{2}$.

□

Em alguns casos, a nova técnica apresentada para a coloração de arestas de potências de caminhos faz a coloração de subgrafos que são isomorfos a grafos completos utilizando uma equação diferente para a atribuição de cores das arestas. Considere um grafo completo K_n com vértices rotulados $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Atribua para cada aresta $v_i v_j$ a cor $(i + j + 1) \bmod n$.

Neste caso, ainda é possível garantir propriedades análogas às do Lema 3.2, como mostra o Lema 3.3.

Lema 3.3. *Considere um grafo completo K_n com vértices rotulados v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . Na coloração de arestas do K_n que atribui a cor da $(i + j + 1) \bmod n$ para cada aresta $v_i v_j$, as cores que sobram nos vértices satisfazem as seguintes propriedades:*

1. Se n é ímpar, as cores que sobram em quaisquer dois vértices são distintas. Além disso, a cor que sobra em v_i é ímpar quando $i < \frac{n}{2}$ e é par caso contrário.
2. Se n é par, as cores que sobram nos vértices do grafo são todas ímpares. Além disso, a mesma cor $(2i + 1) \bmod n$ sobra exatamente nos vértices v_i e $v_{i+\frac{n}{2}}$.

Demonstração. Considere um grafo completo K_n com vértices rotulados v_0, v_1, \dots, v_{n-1} e com arestas coloridas por $(i + j + 1) \bmod n$. Então, a cor que que sobra em v_i é $(2i + 1) \bmod n$ e a cor que sobra em v_j é $(2j + 1) \bmod n$.

Primeiro, considere o caso em que n é ímpar. Se $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então $2i + 1 < n$, o que implica que $(2i + 1) \bmod n = 2i + 1$. Como $2i + 1$ é ímpar, a cor $(2i + 1) \bmod n$ é ímpar. Quando $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $2i + 1 \geq n$, então $(2i + 1) \bmod n = 2i + 1 - n$. Como $2i$ é par e n é ímpar, tem-se que $2i + 1 - n$ é par. Logo, quando $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, a cor $(2i + 1) \bmod n$ é par. Então, para quaisquer valores distintos $i \in [0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ e $j \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n - 1]$, as cores $(2i + 1) \bmod n$ e $(2j + 1) \bmod n$ se distinguem por suas paridades. Se i e j são ambos menores que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então $(2i + 1) < n$ e $(2j + 1) < n$ e, como $i \neq j$, tem-se $2i + 1 \neq 2j + 1$ e, portanto, $(2i + 1) \bmod n \neq (2j + 1) \bmod n$. Similarmente, se i e j são ambos maiores que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então $(2i + 1) \bmod n = 2i + 1 - n$ e $(2j + 1) \bmod n = 2j + 1 - n$. Como $i \neq j$, tem-se $2i + 1 - n \neq 2j + 1 - n$ e, portanto, $(2i + 1) \bmod n \neq (2j + 1) \bmod n$. Logo, para quaisquer valores de i e j distintos, as cores que sobram nos vértices v_i e v_j são distintas quando n é ímpar.

Agora, suponha n par. Se i e j são ambos menores que $\frac{n}{2}$, então $(2i + 1) \bmod n < n$ e $(2j + 1) \bmod n < n$. Logo, $(2i + 1) \bmod n = 2i + 1$ e $(2j + 1) \bmod n = 2j + 1$. Como $i \neq j$, tem-se $2i + 1 \neq 2j + 1$. Se i e j são ambos maiores ou iguais a $\frac{n}{2}$, então $(2i + 1) \bmod n > n$ e $(2j + 1) \bmod n > n$. Como $i < n$ e $j < n$, tem-se $(2i + 1) \bmod n = 2i + 1 - n$ e

$(2j + 1) \bmod n = 2j + 1 - n$. Como $i \neq j$, tem-se $2i + 1 - n \neq 2j + 1 - n$. Então, suponha sem perda de generalidade, que $i < \frac{n}{2}$ e $j \geq \frac{n}{2}$, então, pelos mesmos argumentos já apresentados, $(2i + 1) \bmod n = 2i + 1$ e $(2j + 1) \bmod n = 2j + 1 - n$. Assim, as cores $(2i + 1) \bmod n$ e $(2j + 1) \bmod n$ são iguais se e somente se $2i + 1 = 2j + 1 - n$. Neste caso, $n = 2j + 1 - 2i - 1 = 2j - 2i = 2(j - i)$, ou seja, $\frac{n}{2} = j - i$. Conclui-se que $j = i + \frac{n}{2}$. Então, cada cor $2i + 1$ sobra em exatamente dois vértices: v_i e $v_{i+\frac{n}{2}}$. Conclui-se que a cor que sobra em qualquer vértice é ímpar. \square

O Teorema 3.4 apresenta a principal contribuição desse trabalho, que é uma nova técnica para se obter uma coloração de arestas DVA ótima em um subconjunto das potências de caminho que possuem vértice universal. A ideia da técnica é particionar os vértices do grafo P_n^k em duas cliques, L e R . Dessa forma, utilizamos as mesmas $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ cores para colorir as arestas dos subgrafos $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$. Além disso, utilizamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ novas cores para colorir o subgrafo bipartido de P_n^k com partição dos vértices $[L, R]$. Mas, em seguida, mostramos que se n é ímpar, é possível remover uma das cores utilizadas no subgrafo bipartido, reaproveitando uma cor já usada na coloração dos subgrafos $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$, garantindo uma coloração DVA com no máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n = \Delta(P_n^k) + 1$ cores. No caso em que n é par e a maioria dos vértices têm grau máximo, não conseguimos apresentar uma coloração de arestas DVA ótima, mas mostramos que existe uma coloração de arestas DVA com $\Delta(P_n^k) + 2$ cores.

Teorema 3.4. *Sejam P_n^k uma potência de caminho com $k + 1 < n \leq 2k + 1$ e q o número de $\Delta(P_n^k)$ -vértices. Então,*

$$\chi'_a(P_n^k) = \begin{cases} \Delta(P_n^k), & \text{se } n = 2k + 1; \\ \Delta(P_n^k) + 1, & \text{se } n < 2k + 1 \text{ e } n \text{ é ímpar ou se } q \leq \Delta(P_n^k) + 2. \end{cases}$$

Além disso, $\chi'_a(P_n^k) \leq \Delta(P_n^k) + 2$ quando n é par e $q > \frac{n}{2}$.

Demonstração. Seja P_n^k uma potência de caminho com $k + 1 < n \leq 2k + 1$.

Como P_n^k é um grafo indiferença, ele admite uma ordem indiferença de seus vértices. Seja $\beta = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ uma ordem indiferença dos vértices de P_n^k . Vamos particionar $V(P_n^k)$ em duas partes L e R tais que $L = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\}$ e $R = \{v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2}, \dots, v_{n-1}\}$. Note que $|L| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $|R| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Veja a Figura 5.

Primeiro vamos provar que $\chi'_a(P_n^k) \leq \Delta(P_n^k) + 1$ quando n é ímpar ou quando n é par e no máximo metade dos vértices têm grau máximo. Para isso, é suficiente mostrar que o grafo P_n^k tem uma coloração de arestas DVA utilizando $\Delta(P_n^k) + 1 = n$ cores nestes casos.

Seja q o número de vértices com grau máximo. Renomeie os vértices de L tal que $v_i = u_i$. Renomeie cada $\Delta(P_n^k)$ -vértice pertencente a R tal que $v_i = w_{i - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Para os demais vértices de R , rotule-os consecutivamente, em ordem crescente de graus, a partir de $w_{\lceil \frac{q}{2} \rceil}$.

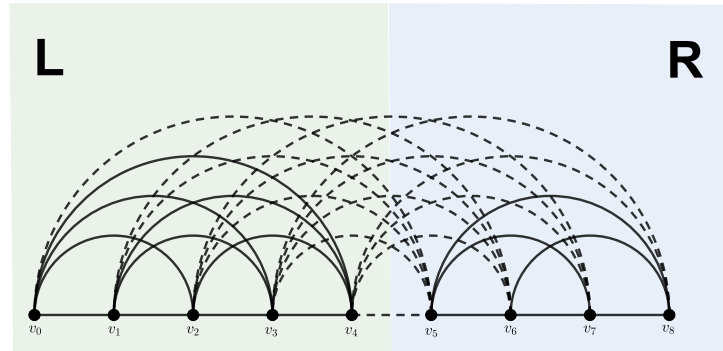


Figura 5 – Partição L e R do P_9^5

Vamos colorir os grafos $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$. Depois, vamos colorir o subgrafo bipartido induzido pelas arestas que têm um vértice em L e outro em R . Para a coloração de $P_n^k[L]$, atribua a cor $(i + j) \bmod \lceil \frac{n}{2} \rceil$ para cada aresta $u_i u_j \in A(P_n^k[L])$. Seja $\gamma = 1$ quando $n \equiv 0 \pmod{4}$; e $\gamma = 0$, caso contrário. Para a coloração de $P_n^k[R]$, atribua a cor $(i + j + \gamma) \bmod \lceil \frac{n}{2} \rceil$ para cada aresta $w_i w_j \in A(P_n^k[R])$. Observe a Figura 6.

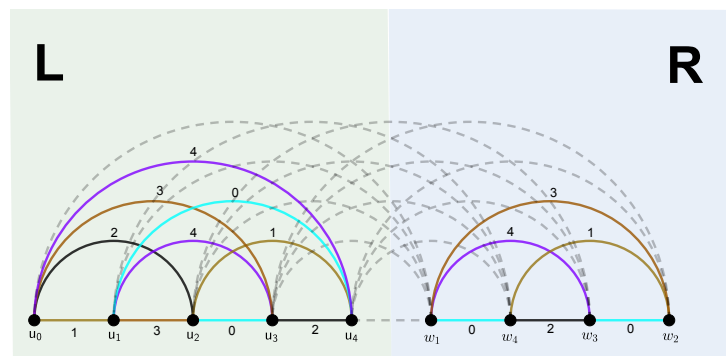


Figura 6 – $P_9^5[L]$ e $P_9^5[R]$ coloridos

Seja E o conjunto das arestas ainda não coloridas no grafo P_n^k . Note que o conjunto E é exatamente o subconjunto das arestas de $A(P_n^k)$ que têm um vértice em L e um vértice em R . Seja $B = P_n^k[E]$, o subgrafo bipartido de P_n^k induzido pelas arestas de E . Note que $\Delta(B) \leq |L| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Então, vamos colorir as arestas de B com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ cores novas. Atribua para cada aresta $u_i w_j$ de B a cor $(i - j - 1) \bmod (\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Veja a Figura 7.

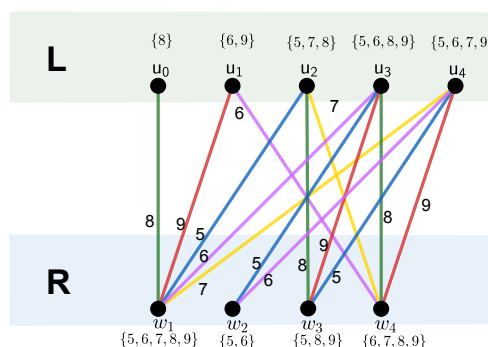


Figura 7 – Bipartido do P_9^5 colorido com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ cores

Observe que uma aresta $u_i w_j$ tem cor n somente se n é ímpar e $(i - j - 1) \pmod{(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \lceil \frac{n}{2} \rceil} = n$. Neste caso, $(i - j - 1) \equiv (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Como $i < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $j < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, isso ocorre apenas se $i = j$. Portanto, as arestas com cor n são arestas $u_i w_i$ de grafos P_n^k com n ímpar. Quando n é ímpar, tem-se que $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ e, portanto, $\gamma = 0$. Neste caso, vamos recolorir cada aresta $u_i w_i$ com cor $2i \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Observe que esta coloração de arestas ainda é própria, pois como n é ímpar, $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ e, portanto, $\gamma = 0$ e $(i + j) \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = (i + j + \gamma) \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ para todo par i, j . Assim a cor $2i \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ não incide em u_i nem em w_i na coloração de $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$. Note que como w_0 não existe, não há aresta com cor n incidindo em u_0 . Agora, a coloração das arestas de P_n^k utiliza $n = \Delta(P_n^k) + 1$ cores, independente da paridade de n . Observe a Figura 8.

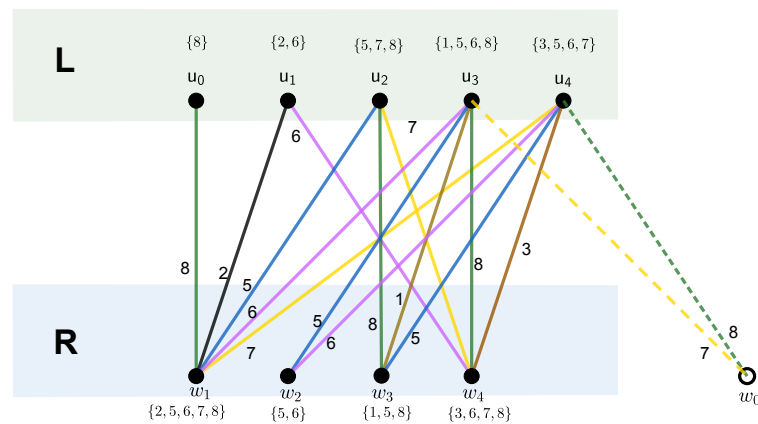


Figura 8 – Bipartido do P_9^5 com o vértice w_0

Agora, vamos provar que esta é uma coloração de arestas DVA. Há três casos: (1) n é ímpar; (2) n é par e $\frac{n}{2}$ é par; e (3) n é par e $\frac{n}{2}$ é ímpar.

Caso 1) n é ímpar: Neste caso, $|L| = |R| + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Pela coloração dada, em cada vértice $u_i \in L$ tal que $i \neq 0$, incidem todas as cores do conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ e no vértice u_0 incidem todas as cores do conjunto C com exceção da cor 0. Em R não existe o vértice w_0 e, portanto, não existem arestas $w_0 w_i$, para todo i . Logo, pela coloração dada, em cada vértice w_i , não incide a cor i . Como para cada w_i tem-se $i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$, sabe-se que a cor i que falta em w_i é sempre diferente de 0. Portanto, os conjuntos de cores dos vértices de L se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de R . Além disso, para qualquer vértice w_i falta exatamente uma cor do conjunto C . Como para quaisquer dois vértices w_i e w_j distintos, as cores que faltam são respectivamente i e j com $i \neq j$, tem-se que os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices de R se distinguem. Em L , os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices que não tenham o mesmo grau se distinguem por sua cardinalidade. Então resta provar que os $\Delta(P_n^k)$ -vértices pertencentes a L se distinguem dois a dois. Observe que em cada $\Delta(P_n^k)$ -vértice de L incidem $|R| - 1$ arestas com cores do conjunto $C' = \{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \dots, n - 1\}$. Para cada vértice $u_i \in L$, a cor que falta em seu conjunto de cores é a cor que este vértice teria com w_0 (que não existe) e esta cor é $i - 1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Então, para quaisquer dois $\Delta(P_n^k)$ -vértices, u_i e u_j , tais que $i \neq j$, as cores $i - 1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $j - 1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil$

são distintas. Portanto os conjuntos de cores dos $\Delta(P_n^k)$ -vértices de L são dois a dois distintos, concluindo a prova deste caso.

Para os casos (2) e (3), que têm n par, suponha que no máximo metade dos vértices são $\Delta(P_n^k)$ vértices.

Caso 2) n é par e $\frac{n}{2}$ é par: Neste caso, o conjunto de cores de qualquer vértice de P_n^k não contém exatamente uma cor do conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Para cada vértice $u_i \in L$, falta a cor $2i \bmod \frac{n}{2}$, que é um número par. E, para cada vértice $w_i \in R$, falta a cor $(2i + \gamma) \bmod \frac{n}{2}$, que é ímpar, pois $n \equiv 0 \pmod{4}$ e, por isso, $\gamma = 1$. Assim, o conjunto de cores de qualquer vértice de L se distingue do conjunto de cores de todos os vértices de R . Resta considerar vértices que pertençam à mesma parte (ambos em L ou ambos em R). Considerando os graus dos vértices no grafo P_n^k , observe que em cada parte existe um único d -vértice, para qualquer $d \in [k, \Delta(P_n^k) - 1]$. Então, os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices que estejam ambos em L (ou ambos em R) e tenham graus menores que $\Delta(P_n^k)$ se distinguem por sua cardinalidade. Resta considerar os $\Delta(P_n^k)$ -vértices que pertencem a uma mesma parte. Neste caso, o número de $\Delta(P_n^k)$ -vértices no grafo P_n^k é limitado a $\frac{n}{2}$ e, pela forma como foram particionados, metade desses vértices de grau máximo está em R e a outra metade está em L . Além disso, os vértices de grau máximo em L são os últimos da ordem e são consecutivos. Então, para qualquer $\Delta(P_n^k)$ -vértice $u_{\frac{n}{2}-i} \in L$, tem-se $1 \leq i \leq \frac{n}{4}$. Pela coloração que foi atribuída, em $u_{\frac{n}{2}-i}$ falta a cor $\frac{n}{2} - 2i$, $1 \leq i \leq \frac{n}{4}$. Portanto, para quaisquer dois $\Delta(P_n^k)$ -vértices em L , $u_{\frac{n}{2}-s}$ e $u_{\frac{n}{2}-t}$ com $t \neq s$, as cores que faltam são, respectivamente $\frac{n}{2} - 2s$ e $\frac{n}{2} - 2t$. Como $1 \leq s, t \leq \frac{n}{4}$ e $s \neq t$, estas cores são distintas. Portanto, os conjuntos de cores dos $\Delta(P_n^k)$ -vértices de L se distinguem dois a dois. De maneira análoga, os $\Delta(P_n^k)$ -vértices de R são os primeiros vértices na ordem de R e são, no máximo, $\frac{n}{4}$ vértices. Assim, para qualquer $\Delta(P_n^k)$ -vértice $w_i \in R$, tem-se $0 \leq i < \frac{n}{4}$. Pela coloração que foi atribuída, em w_i falta a cor $2i + 1$, $0 \leq i < \frac{n}{4}$. Portanto, para quaisquer dois $\Delta(P_n^k)$ -vértices em R , w_s e w_t com $t \neq s$, as cores que faltam são, respectivamente $2s + 1$ e $2t + 1$. Como $0 \leq s, t < \frac{n}{4}$ e $s \neq t$, estas cores são distintas. Portanto, os conjuntos de cores dos $\Delta(P_n^k)$ -vértices de R se distinguem dois a dois, concluindo este caso.

Caso 3) n é par e $\frac{n}{2}$ é ímpar: Pela coloração atribuída a $P_n^k[L]$ e a $P_n^k[R]$, nos vértices u_i e w_i a única cor que falta do conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ é a cor $2i \bmod \frac{n}{2}$. Como $\frac{n}{2}$ é ímpar, para $i \neq j$, tem-se $2i \not\equiv 2j \pmod{\frac{n}{2}}$, ou seja, a mesma cor $2i \bmod \frac{n}{2}$ falta somente nos vértices u_i e w_i do grafo P_n^k . Portanto, para quaisquer dois vértices distintos que pertençam à mesma parte, seja L ou R , os seus conjuntos de cores são distintos. Então resta considerar vértices de mesmo grau que pertençam a partes distintas. Vamos considerar primeiro dois d -vértices u_i e w_j , com $d < \Delta(P_n^k)$. Lembre-se que os últimos $\frac{q}{2}$ vértices de L e os primeiros $\frac{q}{2}$ vértices de R são $\Delta(P_n^k)$ -vértices. Além disso, os demais vértices estão em ordem crescente de graus, tanto em L , quanto em R . Então, considerando os dois d -vértices, u_i e w_j , tem-se $j = \frac{q}{2} + i$. Então, para que u_i e $w_{\frac{q}{2}+i}$ tenham o mesmo conjunto de cores, é preciso que $i = \frac{q}{2} + i$, ou seja, q deve ser zero. Um absurdo, pois todo grafo tem vértices de grau máximo. Portanto,

não existem d -vértices com o mesmo conjunto de cores, para $d < \Delta(P_n^k)$. Resta considerar dois vértices de grau máximo, um em cada parte. Sejam $u_i \in L$ e $w_j \in R$. Lembre-se que, neste caso, no máximo metade dos vértices têm grau máximo. Como u_i e w_j são $\Delta(P_n^k)$ -vértices, pela ordenação imposta aos vértices de L e de R , sabe-se que $i \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ e $j \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1$. Logo, $i \neq j$ para quaisquer dois vértices u_i e w_j que sejam $\Delta(P_n^k)$ -vértices. Como as cores do conjunto C que faltam u_i e w_j para $i \neq j$ são distintas, os conjuntos de cores de u_i e w_j se distinguem, concluindo a prova deste caso.

Se $n < 2k + 1$, então o grafo P_n^k tem pelo menos dois vértices adjacentes com grau máximo e, pelo Teorema 1.1, $\chi'_a(P_n^k) \geq \Delta(P_n^k) + 1$. Então, neste caso, a coloração de arestas DVA que foi apresentada é ótima.

Se $n = 2k + 1$, a potência de caminho P_{2k+1}^k tem um único vértice de grau máximo e n é ímpar. Para este caso, considere a coloração de $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$, como foi apresentada. Considere também que as arestas $u_i w_i$ foram coloridas com a cor $2i \pmod{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Sejam B o subgrafo induzido pelas arestas com um vértice em L e outro em R , $M = \{u_i w_i : 1 \leq i \leq |L| - 1\}$ e $B' = B \setminus M$. Observe que B' é o subgrafo bipartido induzido pelas arestas ainda não coloridas. Vamos determinar o grau máximo de B' . O vértice u_0 tem grau 0 em B' , visto que $n = 2k + 1$ e, portanto, todos os seus vizinhos pertencem a L . Então, cada vértice em L é adjacente a no máximo $|R| - 1$ vértices de R no subgrafo B' , pois cada vértice u_i , $1 \leq i \leq |L| - 1$, não é adjacente a w_i em B' . Pelo mesmo motivo e porque nenhum vértice de R é adjacente a u_0 , cada vértice em R tem grau no máximo $|L| - 2$ em B' . Logo, o grau máximo de $B' = |L| - 2 = |R| - 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Pelo Teorema 2.3, B' tem uma coloração de arestas com $\Delta(B') = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ cores. Considere uma coloração de arestas de B' com as cores do conjunto $C'' = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2\}$. Então, P_{2k+1}^k está colorido com $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 = n - 1 = \Delta(P_{2k+1}^k)$ cores. Resta provar que esta é uma coloração de arestas DVA. Observe que os vértices em L têm, dois a dois, graus distintos e que o mesmo ocorre em R . Então, os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices da mesma parte se distinguem por sua cardinalidade. Resta provar que quaisquer dois d -vértices u_i e w_j com $d < \Delta(P_n^k)$ têm conjuntos de cores distintos. Como u_i e w_j têm o mesmo grau (igual a d) no grafo P_n^k , tem-se $j = i + 1$, pela ordem imposta aos vértices de L e R . Em u_i , para $i > 0$ incidem todas as cores do conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, e em w_{i+1} falta a cor $i + 1$, já que w_0 não existe e a cor que cada vértice de R teria com w_0 está sobrando. Em u_0 está sobrando a cor 0 e em w_1 a cor 0 foi atribuída à aresta $w_1 w_{|R|}$ e, portanto, os conjuntos de cores destes dois vértices também se distinguem, concluindo a prova.

Resta considerar os casos em que n é par e o grafo P_n^k tem mais que $\frac{n}{2}$ vértices de grau máximo. Para estes casos, vamos apresentar um limitante superior, provando que $\chi'_a(P_n^k) \leq \Delta(P_n^k) + 2$.

Se $\frac{n}{2}$ é par, faça a coloração de $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$ como nos casos anteriores (lembre que neste caso $\gamma = 1$). Então, adicione um novo vértice a L , rotulado como $u_{\frac{n}{2}}$, e um novo vértice a R , rotulado como $w_{\frac{n}{2}}$. Faça uma coloração de arestas no subgrafo bipartido com

partição dos vértices $[L, R]$ utilizando $|R| = |L| = \frac{n}{2} + 1$ novas cores do conjunto $C' = \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n\}$. E remova os vértices $u_{\frac{n}{2}}$ e $w_{\frac{n}{2}}$. Note que foram utilizadas $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 = n + 1 = \Delta(P_n^k) + 2$ cores para esta coloração de arestas. Para verificar que esta é uma coloração de arestas DVA, observe que quaisquer dois vértices em partes distintas tem conjuntos de cores distintos, já que nos vértices de L sobra uma cor par do conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ e nos vértices de R sobra uma cor ímpar do conjunto C . Resta verificar que os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices na mesma parte se distinguem. Quaisquer dois vértices da mesma parte têm conjuntos de cores distintos por sua cardinalidade quando não são ambos vértices de grau máximo. Então, considere dois vértices de grau máximo em uma mesma parte. Nos conjuntos de cores de cada um deles faltam duas cores, uma cor do conjunto C e uma cor do conjunto C' . A cor do conjunto C' é aquela usada na aresta que estes vértices tinham com $u_{\frac{n}{2}}$ (se são vértices de R) ou com $w_{\frac{n}{2}}$ (se são vértices de L) e, como são cores de arestas incidentes em um mesmo vértice, são distintas, concluindo a prova deste caso.

Se $\frac{n}{2}$ é ímpar, adicione um novo vértice a cada parte, tal que o novo vértice de L seja $u_{\frac{n}{2}}$ e o novo vértice de R seja $w_{\frac{n}{2}}$. Faça a coloração de $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$ como nos casos anteriores (lembre-se que neste caso $\gamma = 1$). Pinte as arestas do subgrafo bipartido com partição $[L, R]$ atribuindo para cada aresta $u_i w_j$ a cor $(i - j - 1) \bmod (\frac{n}{2} + 1) + \frac{n}{2} + 1$. Sejam C , o conjunto das cores usadas em $P_n^k[L]$ e $P_n^k[R]$; e C' , o conjunto das cores usadas no subgrafo bipartido. Note que cada aresta $u_i w_i$ está colorida com a cor $n + 1$. Faça um emparelhamento $M = \{u_i w_i : 0 \leq i < \frac{n}{2}\}$ e substitua a cor de cada aresta $u_i w_i$ pela cor $(i + \frac{n}{2}) \bmod (\frac{n}{2} + 1)$. Remova do grafo os vértices $u_{\frac{n}{2}}$ e $w_{\frac{n}{2}}$. Observe que foram usadas $\frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2} = n + 1 = \Delta(P_n^k) + 2$ cores nesta coloração. Os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices que pertencem à mesma parte e não têm grau máximo se distinguem por sua cardinalidade. Os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices em partes distintas que tenham o mesmo grau se distinguem pelas paridades das cores do conjunto C que sobram neles. Os conjuntos de cores de dois $\Delta(P_n^k)$ -vértices da mesma parte se distinguem pelas cores do conjunto C' que sobram neles. Observe que as cores do conjunto C' que sobram em quaisquer dois vértices da mesma parte são distintas, já que as cores de C' que sobram nos $\Delta(P_n^k)$ -vértices de L eram incidentes em $w_{\frac{n}{2}}$ e as cores de C' que sobram nos $\Delta(P_n^k)$ -vértices de R eram incidentes em $u_{\frac{n}{2}}$. Portanto não há dois vértices com o mesmo conjunto de cores, concluindo a prova. \square

A Figura 9 apresenta uma potência de caminho P_9^5 com uma coloração de arestas DVA ótima, obtida pela técnica do Teorema 3.4.

Pelos argumentos apresentados na prova do Teorema 3.4, quaisquer dois vértices da potência de caminho P_n^k com $k + 1 \leq n \leq 2k + 1$ têm conjuntos de cores distintos quando satisfeitas as hipóteses daquele teorema. Portanto, as colorações de arestas DVA apresentadas são também colorações de arestas DV. Assim, enunciamos o seguinte corolário.

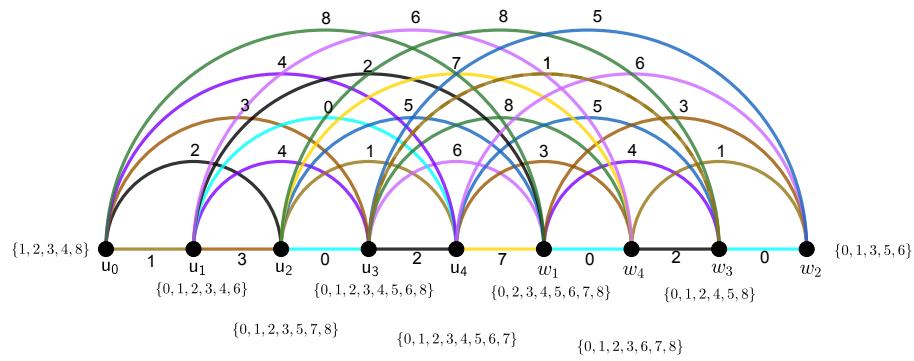


Figura 9 – P_9^5 colorido com $\Delta(P_9^5) + 1$ cores

Corolário 3.5. *Sejam P_n^k uma potência de caminho com $k + 1 < n \leq 2k + 1$ e q o número de $\Delta(P_n^k)$ -vértices. Então,*

$$\chi'_s(P_n^k) = \begin{cases} \Delta(P_n^k), & \text{se } n = 2k + 1; \\ \Delta(P_n^k) + 1, & \text{se } n < 2k + 1 \text{ e } n \text{ é ímpar ou se } q \leq \Delta(P_n^k) + 2. \end{cases}$$

Além disso, $\chi'_s(P_n^k) \leq \Delta(P_n^k) + 2$ para os outros casos.

□

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma nova técnica para obter uma coloração de arestas DVA ótima para as potências de caminhos com vértice universal de ordem par em que no máximo metade dos vértices é universal e para as potências de caminhos com vértice universal de ordem ímpar. Esta nova técnica baseia-se na decomposição da potência de caminho em três subgrafos disjuntos nas arestas, sendo eles dois grafos completos com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices, respectivamente, e um grafo bipartido. Anteriormente, a técnica conhecida para a coloração de arestas DVA em potências de caminhos com vértice universal utilizava uma decomposição em quatro subgrafos, sendo eles três subgrafos completos e um grafo bipartido quando $n = 2k + 1$ (Lema 2.5); ou quadrados latinos quando $k + 1 < n < 2k + 1$ (Lemas 2.7 e 2.8). Além disso, quando n é par e mais da metade dos vértices são universais, a técnica anterior exige uma troca entre cores nas arestas de um caminho, e a prova de que essas trocas são possíveis não é trivial. Então, acreditamos que a nova técnica seja mais simples. Como trabalhos futuros, sugerimos verificar se é possível estender a técnica apresentada neste documento para os casos em que n é par e mais da metade dos vértices são universais, apresentando uma coloração de arestas DVA ótima.

Vale ressaltar que, como consequência da técnica apresentada, determinou-se o índice cromático DV nas potências de caminhos com vértice universal que têm ordem par e no máximo metade dos vértices são universais e naquelas que tem ordem ímpar. Apresentamos também um limitante superior para o índice cromático DV nas potências de caminhos de ordem par em que mais da metade dos vértices são universais.

Por fim, é interessante observar que a rotulação dos vértices para a execução da técnica apresentada neste trabalho de conclusão de curso pode ser feito em tempo linear. Além disso, dada a rotulação dos vértices, a atribuição de cores em cada aresta é feita por uma fórmula que depende apenas dos rótulos dos vértices da própria aresta e, portanto, pode ser feita em tempo linear. Dessa forma, concluímos que o algoritmo apresentado é linear em função do tamanho do grafo.

REFERÊNCIAS

- BENSMAIL, J.; HOCQUARD, H.; LAJOU, D. On the algorithmic complexity of determining the avd and nsd chromatic indices of graphs. **Theoretical Computer Science**, v. 939, p. 105–118, 2023. ISSN 0304-3975. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397522005977>.
- BURRIS, A. C.; SCHELP, R. H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. **Journal of graph theory**, Wiley Online Library, v. 26, n. 2, p. 73–82, 1997.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic Graph Theory**. 1. ed. [S.l.]: Chapman and Hall, 2009. (Discrete mathematics and its applications).
- CHEN, B. L.; FU, H. L.; KO, M. T. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. **J. Combin. Math. Combin. Comput**, v. 17, p. 137–146, 1995.
- KÖNIG, D. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. **Mathematikai és Természettudományi Ertesito**, v. 34, p. 104–119, 1916.
- OMAI, M.; ALMEIDA, S.; SASAKI, D. Avd-edge coloring on powers of paths. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 62, p. 273–278, 11 2017.
- OMAI, M. M. **Colorações Distintas nos Vértices Adjacentes em Potências de Caminho**. 2018. 85 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal de Paraná, Ponta Grossa, 2018.
- RAUCH, T.; ALMEIDA, S. M. Adjacent vertex distinguishing edge coloring on complete split graphs and split-indifference graphs. *In*: UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. **Anais do WPCCG'2017**. Ponta Grossa, Brasil, 2017. v. 2, p. 45.
- VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. **Discret Analiz**, v. 3, p. 25–30, 1964.
- ZHANG, Z.; LIU, L.; WANG, J. Adjacent strong edge coloring of graphs. **Applied Mathematics Letters**, v. 15, n. 5, p. 623–626, 2002. ISSN 0893-9659. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965902800155>.

ÍNDICE REMISSIVO

- aresta, 8
 - múltiplas, 8
- clique, 13
- coloração
 - de arestas, 8
 - distinguidora de vértices, 10
 - distinguidora de vértices adjacentes, 8
 - DVA, 8
 - própria, 8
 - própria, 8
 - ótima, 8
- coloração de arestas
 - DV, 10
- conjunto de cores, 8
- conjunto independente, 14
- emparelhamento, 15
- grafo, 8
 - bipartido, 14
 - completo, 13
 - indiferença, 14
 - simples, 8
 - sobrecarregado, 13
- laço, 8
- ordem indiferença, 14
- partição, 14
- Problema
 - da Coloração de Arestas, 8
- quadrado latino, 14
- subgrafo, 13
 - induzido, 13
- vértice, 8
 - adjacentes, 8
 - vizinhos, 8
- índice cromático, 8
 - distinguidor de vértices, 10
 - distinguidor de vértices adjacentes, 9
 - DV, 10
 - DVA, 9