UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TIÉLEN PRESTES DE LIMA

ESTUDO SOBRE OS ASPECTOS GEOMÉTRICOS DAS CURVAS CICLOIDAIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TIÉLEN PRESTES DE LIMA

ESTUDO SOBRE OS ASPECTOS GEOMÉTRICOS DAS CURVAS CICLOIDAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Me. Loreci Zanardini
Coorientadora: Ma. Marcia Regina Piovesan

TOLEDO
2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Estudo sobre os aspectos geométricos das curvas cicloidais" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de __/__/____

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Loreci Zanardini

Marcia Regina Piovesan

Larissa Hagedorn Vieira

Wilian Francisco de Araujo

TOLEDO

2021

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus que possibilitou que tudo isso acontecesse, providenciando o necessário para que este sonho fosse realizado, além de conceder força e graça.

Agradeço a minha família. Em momentos de dificuldades estavam ao meu lado, contribuindo com o que estava ao seu alcance para tornar esse sonho realizado. Em especial, minha mãe Marli Prestes que muito além do apoio financeiro, foi meu alicerce emocional para enfrentar as dificuldades dessa caminhada.

Deixo meu agradecimento especial ao meu orientador Me. Loreci Zanardini e a coorientadora Ma. Marcia Regina Piovesan por aceitarem participar significativamente da caminhada, dedicando seu tempo e apresentando valiosas contribuições durante todo o desenvolvimento do projeto.

Agradeço aos meu amigos do curso de graduação que compartilharam os desafios que foram superados com o espírito colaborativo. Sobretudo, agradeço as amigas Tayssa Carolina Baccin Asakawa e Sthella Rayssa Biz dos Santos que foram imprescindíveis.

Manifesto minha gratidão à Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo, aos docentes, diretores, coordenadores e administração que proporcionaram um ambiente favorável para a realização desse trabalho.

Por fim, estendo meus agradecimentos aos professores membros da banca examinadora, por compartilharem seus conhecimentos.

RESUMO

A presente pesquisa aborda um estudo sobre os aspectos geométricos das curvas cicloidais, tendo como foco as curvas cicloide, epicicloide e hipocicloide. São apresentadas as definições, propriedades das curvas e construções geométricas. Quanto ao ensino da curva cicloide, é exposto uma abordagem através da educação a distância (EaD).

Palavras-chave: Cicloide. Epicicloide. Hipocicloide. Construção Geométrica. Ensino a Distância.

ABSTRACT

This research addresses a study on the geometric aspects of cycloidal curves, focusing on the cycloid, epicycloid and hypocycloid curves. Definitions are the definitions, properties of curves and geometric constructions. As for teaching the cycloid curve, an approach through distance education (DE) is exposed.

Palavras-chave: Cycloid. Epicycloid. Hypocycloid. Geometric Construction. Distance Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre curvas cicloidais, com um olhar especial para as curvas cicloide, epicicloide e hipocicloide. Estas curvas apresentam propriedades que as caracterizam como braquistócronas e tautócronas como afirma Cordeiro (2013, p. 21) [9] “A curva Cicloide é a representação gráfica das resoluções dos problemas chamados “Braquistócrona” e “Tautócrona”.”

São apresentadas as construções das curvas cicloidais utilizando o software *GeoGebra*, uma vez que a geometria dinâmica torna possível “a transformação de figuras geométricas em tempo real.” (PENTEADO; SILVA, 2009, p. 1069) [11]. Além disso, uma abordagem através da geometria dinâmica faz com que os conceitos geométricos não fiquem obscurecidos com construções limitadas ao papel como aponta Fischbein (1993, apud Gravina, p. 3)[17]:

> “A dificuldade em manipular objetos geométrico, saber, a tendência em negligenciar o aspecto conceitual pela pressão de restrições do desenho, é um dos maiores obstáculos para o aprendizado da Geometria... Frequentemente condições figurais (de desenho) escapam do controle conceitual, e impõem, a linha de pensamento, interpretações que do ponto de vista de desenho são consistentes, mas que não são condições conceituais.”

Segundo Cordeiro (2013) [9] a curva cicloide não é mencionada no Ensino Básico, além de ser pouco trabalhada na graduação Matemática. Essa desinformação chama a atenção, dado que “podemos encontrar asCiclóides em diversas formas em nosso di-a-dia” (CORDEIRO, 2013, p. 19) [9], e “é de fundamental importância na arquitetura.” (RESENDE, 2017, p. 54) [30]. Segundo Farina (2013 apud Amorin, p. 12) [2]:

> “A Cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos.”

Seguindo os estudos dos autores: Leandro Miranda de Castro [8] e Allisson Wesley do Nascimento Venceslau [35]; são apresentados os resultados que demonstram as características braquistócrona e tautócrona da cicloide.

Será abordado a Educação a Distância (EaD) como um método de ensino para a curva cicloide. Uma vez que esta modalidade foi o recurso utilizado, em meio a pandemia de COVID-19, para alcançar os universitários do curso de licenciatura em matemática.

O objetivo deste trabalho é apresentar, a partir do estudo histórico, aplicações das curvas, construções geométricas e demonstrações das propriedades braquistócrona e tautócrona o quão relevante é o ensino das curvas cicloidais, tanto no Ensino Básico, como no Ensino Superior. Além disso, repensar a abordagem Educação a Distância (EaD) no ensino da curva cicloide.

O trabalho foi disposto em quatro seções, onde na primeira seção é apresentado uma introdução as curvas cicloide, epicicloide e hipocicloide. Na segunda são apresentados os resultados, onde é demonstrado que as curvas possuem propriedades físicas de braquistócrona e tautócrona. A terceira seção apresenta o desenvolvimento das construções geométricas e por fim, na quarta seção é apresentado a abordagem da educação a distância no ensino da cicloide.

2 INTRODUÇÃO ÀS CURVAS CICLOIDAIS

Em um primeiro momento é necessário estabelecer o conceito de *Curvas Cicloidais*. Para isto, faz-se uso do estudo *Curvas: Estudo e Visualização com o Software Cabri-Géomètre II* [13], onde Ferreto (2003) apresenta uma definição intuitiva:

Dado um plano, onde estão contidas duas curvas tangentes, sendo uma delas fixa (diretriz ou base) e a outra girando (geratriz ou roleta), sem escorregar, sobre a fixa, o lugar geométrico de todos os pontos B, onde B está fixado na curva geratriz (B pode pertencer ou não a geratriz) é uma curva chamada de *Curva Cicloidal.*

Dependendo dos objetos geométricos considerados como geratriz, diretriz e posição do ponto B, são apresentadas as propriedades e classificações das curvas cicloidais (BÉRTI, 2015, p. 29) [4]. Além disso, podem ser classificadas segundo a relação do raio da diretriz (R) e o raio da geratriz (r):

a) Chama-se *periciclóide* a curva obtida quando o raio da diretriz e geratriz são finitos, isto é $0 < R < \infty$ e $0 < r < \infty$. Quando a geratriz está no exterior a *periciclóide* é denominada como *epiciclóide*, caso esteja no interior é nominada *hipociclóide.* Sendo uma *hipociclóide* o valor do raio da geratriz não pode ser qualquer, isto é, seu valor deve permanecer entre *zero* e R, ou seja, $0 < r < R$.

b) Denomina-se *ciclóide* a curva gerada quando o raio da diretriz é infinito(reta) e o da geratriz é finito, isto é $R = \infty$ e $0 < r < \infty$.

c) Intitula-se *evolvente* ou *devoluta* a curva cujo raio da diretriz é finito e o da geratriz é infinito, isto é, $0 < R < \infty$ e $r = \infty$.

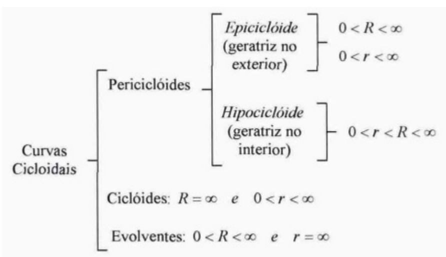

Figura 2.1: Curvas Cicloidais
Fonte: Ferreto, 2003, p.51

Neste trabalho apresenta-se um estudo, apenas, sobre as curvas onde a diretriz e geratriz são circunferências e o caso da reta que é considerada como uma circunferência de raio infinito. Isto é, fica aqui convencionando que quando apresentado o termo curvas cicloidais refere-se aos casos das curvas cicloide, epicicloide e hipocicloide.

2.1 História das Curvas Cicloidais

Os primeiros a apresentarem estudos sobre curvas cicloidais foram Nicholas Cusa (1464 – 1471) e o teólogo, matemático, Charles Bouvalles (1553 – 1471). Neste momento as curvas não eram denominadas como cicloidais, mas tratava-se da quadratura da circunferência. O intuito da quadratura da circunferência era construir um quadrado cuja área é igual a um círculo dado. [9]

Ao observar o movimento da roda de uma charrete Galileu Galilei (1564 – 1642) apresenta interesse em descobrir a curva que esse movimento gera, nisto, busca demonstrá-la fazendo a utilização de chapas metálicas, porém não obtém sucesso. Sugeriu que formava o arco de uma ponte. Galileu é o primeiro a denominar a curva como cicloide. [9]

Galileu levanta a hipótese que a área de uma cicloide é exatamente três vezes a área do círculo que a gera. Essa afirmação é validada com a demonstração do professor matemático Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675), que além da demonstração encontra propriedades da curva, porém não publica seu trabalho. [9]

O frade Marin Mersenne (1588 – 1688) toma conhecimento dos trabalhos de Galileu e apresenta o desafio para Descartes, Fermat, Roberval, dentre outros matemáticos do século XVI: a curva cicloide pode ser utilizada para os diferentes testes infinitesimais, levantando discussões sobre a curva. [9]

Por meados do século XVII as cicloides voltam a ser discutidas com o surgimento dos problemas que apresentam a tautócrona e braquistócrona. [9]

Em 1644 Evangelista Torricelli (1608 – 1647) publica sua obra *De Parabole*, onde apresenta a quadratura da cicloide quanto à construção da tangente. [9]

Blaise Pascal(1623 – 1662), em 1658 propõem problemas sobre a resolução da cicloide, apresentando premiações, porém não ocorreram. [9]

Em 1658 a curva cicloide estava em evidência, devido ao desafio de Pascal, mas Christiaan Huygens (1629 - 1695) decidiu observar o que acontecia se usasse uma superfície cuja seção fosse um arco de cicloide invertido. Observou que nesse caso, o objeto chegará ao ponto mais baixo no mesmo tempo, independente da altura na qual o objeto foi colocado. Provou, assim, que a cicloide é tautócrona. (AMORIM, 2018, p. 36) [2]

Albrecht Dürer(1471 - 1528) [25] em seu livro intitulado *Investigação sobre a medida com círculos e retas de figuras planas e sólidas* tomou um ponto fixo sobre um círculo e depois deixou que o círculo rolasse ao longo da circunferência de um outro círculo, gerando uma epicicloide; mas, não tendo os instrumentos algébricos necessários, não a estudou analiticamente. (BOYER; MERZBACK, 2019, p. 208)[5]

Para estudar os movimentos dos planetas, Claudius Ptolomeus propôs um modelo geocêntrico segundo o qual, o Sol, a Lua e os planetas giravam em torno da Terra (que estaria fixa), descrevendo órbitas complexas. Em particular deu ênfase ao estudo dos planetas que giravam simultaneamente em dois círculos, um deles sobre o outro, fundamentando a sua teoria em epicicloides. [29]

Em 1772, Josep Lagrange provou que qualquer movimento ao longo da esfera celeste pode ser aproximado por uma epicicloide. [29]

Pelegrini (2004, p. 1171) [27] afirma que: "Isaac Newton queria saber qual era a forma de um túnel que liga dois pontos na superfície da Terra, de modo que permita a um corpo de massa m deslocar-se entre os dois pontos no menor tempo. Obteve como resposta a hipocicloide."

No momento atual, vemos estudos sendo apresentados na França, com o professor Robert Ferréol, que apresenta em seu site [12], estudos sobre todas as curvas aqui citadas.

No Brasil podemos encontrar estudos em trabalhos de conclusão de curso, dissertações de mestrados e doutorados, como no trabalho de conclusão de curso de Adriano F. dos Santos [32], na dissertação de mestrado de Fernando F. Amorim [2], dentre outros.

2.2 Definições

2.2.1 Braquistócrona

Definição 1:

Braquistócrona é a curva que um ponto (corpo pesado) percorre quando este se desloca de uma posição a outra mais baixa, no mais curto espaço de tempo possível, sendo nula a velocidade inicial, sujeito, apenas, à ação da gravidade e não estando os dois pontos na mesma vertical. (O nome braquistócrona vem do grego: *brahkhistos* = o mais curto; *khronos* = tempo). [13]

Definição 2:

O nome "braquistócrona" vem do grego *brakhisto* (rápido) e *chronos* (tempo), logo falamos da curva que permite a um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) realizar um mesmo percurso unindo dois pontos dados em menor tempo (não em distância).[24]

2.2.2 Tautócrona

Definição 1:

Tautócrona (também chamada *isócrona*) é a curva que um ponto (corpo pesado) percorre sempre no mesmo tempo, sendo nula a velocidade inicial e sujeito, apenas, a ação da gravidade. Este ponto parte de qualquer lugar dessa curva e chega a qualquer outro lugar dessa mesma curva.(O nome tautócrona vem do grego: *tauto* = o mesmo; *khronos* = tempo). [13]

Definição 2:

O nome "tautócrona" também vem do grego *tautos* (mesmo) e *chronos* (tempo) e, agora, neste caso, falamos da curva que faz com que um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) atinja o ponto baixo da curva após um intervalo de tempo que independa da altura em que foi solto. [24]

2.2.3 Cicloide

Chama-se cicloide uma curva plana descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola sem escorregamento sobre uma reta. [28]

Observação: Na definição acima, a circunferência é denominada circunferência geradora e a reta denominada diretriz. O ponto que descreve a cicloide é chamado ponto gerador. [28]

Se o ponto P gerador da cicloide pertence à circunferência geradora, então a cicloide é denominada simples ou normal. [28]

Figura 2.2: Cicloide Normal
Fonte: Ferreto, 2003, p.58

Se o ponto gerador está no interior da circunferência geradora, a cicloide é denominada encurtada. [28]

Figura 2.3: Cicloide Encurtada
Fonte: Ferreto, 2003, p.59

Se o ponto gerador é externo à circunferência geradora, a cicloide é denominada alongada. [28]

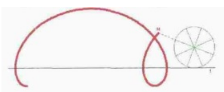

Figura 2.4: Cicloide Alongada
Fonte: Ferreto, 2003, p.59

A cada volta completa da circunferência geradora o ponto P descreve um ciclo ou um período da cicloide. Assim, a cicloide é uma curva periódica, isto é, ela repete-se periodicamente em idênticas condições. [28]

2.2.4 Epicicloide

Chama-se epicicloide a curva descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola externamente, sem escorregamento, sobre a outra circunferência fixa. [28]

Como nas cicloides, a circunferência móvel é denominada circunferência geradora, o ponto que descreve a epicicloide é chamado ponto gerador e a circunferência fixa é denominada circunferência diretora. [28]

Conforme o ponto gerador pertença à circunferência geradora, esteja no seu interior ou no seu exterior, a epicicloide é chamada, respectivamente, simples, encurtada ou alongada. [28]

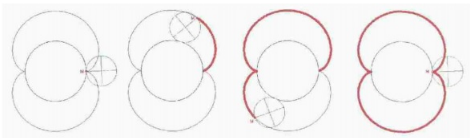

Figura 2.5: Epicicloide Simples
Fonte: Ferreto, 2003, p.52

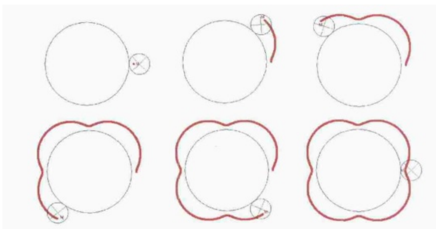

Figura 2.6: Epicicloide Encurtada
Fonte: Ferreto, 2003, p.53

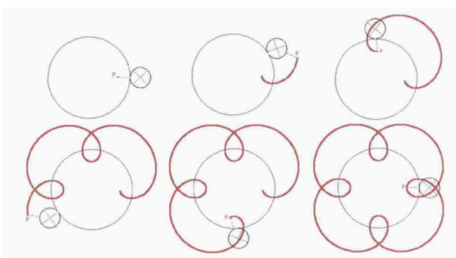

Figura 2.7: Epicicloide Alongada
Fonte: Ferreto, 2003, p.53

Quando a circunferência geradora completa uma volta inteira, o ponto gerador descreve um ciclo de epicicloide. [28]

Epicicloides Notáveis

Sejam R e r, respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma epicicloide. Se $r = \frac{R}{n}$, $n = 1, 2, 3, ...$, quando a circunferência geradora percorre a volta inteira da circunferência diretora, a epicicloide tem início e término num mesmo ponto. [28]

Neste caso, o número de ciclos da epicicloide é igual a n, isto é, a circunferência geradora dá n voltas sobre si mesma para então completar uma volta inteira sobre a diretora. [28]

Essas epicicloides particulares, em que $r = \frac{R}{n}$, são denominadas notáveis e, para os casos em que $n \geq 3$, a figura constituída pela reunião dos n ciclos é chamada Polígono Epicicloidal. [28]

É importante notar que a cada ciclo de uma epicicloide notável de n ciclos corresponde um ângulo central de $\frac{360°}{n}$ na circunferência diretora. [28]

2.2.5 Hipocicloide

Chama-se hipocicloide a curva descrita por um ponto de um raio ou do prolongamento de um raio de uma circunferência que rola internamente sem escorregamento sobre uma circunferência fixa. [28]

Os conceitos de circunferência geradora, circunferência diretora e ponto gerador são idênticos aos já estudados na epicicloide. O mesmo ocorre com a classificação em hipocicloide, encurtada e alongada. [28]

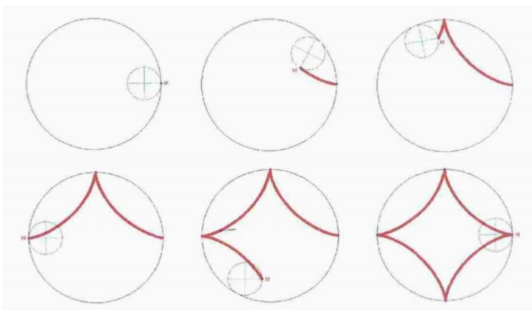

Figura 2.8: Hipocicloide Simples
Fonte: Ferreto, 2003, p.54

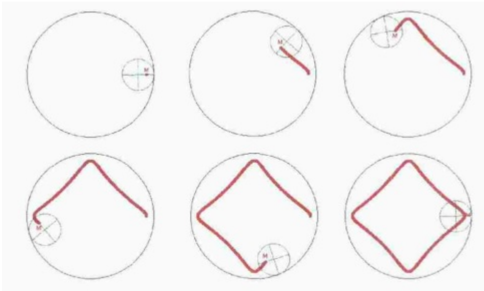

Figura 2.9: Hipocicloide Encurtada
Fonte: Ferreto, 2003, p.57

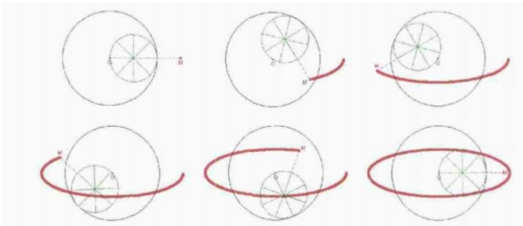

Figura 2.10: Hipocicloide Alongada
Fonte: Ferreto, 2003, p.56

Hipocicloides Notáveis

Sejam R e r, respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma hipocicloide. Se $r = \dfrac{R}{n}$, $n = 2, 3, 4, ...$, a hipocicloide é chamada notável. [28]

Nesses casos particulares, a hipocicloide possui n ciclos, sendo que o ponto de início do primeiro ciclo e o ponto de término do último ciclo coincidem. [28]

Além disso, a cada ciclo corresponde um ângulo central de $\dfrac{360°}{n}$ na circunferência diretora. Estas são as mesmas propriedades das epicicloides notáveis. [28]

3 PROPRIEDADE DAS CURVAS

3.1 Braquistócrona

> Eu, Johann Bernoulli, me dirijo aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto, cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., Eu espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar diante dos melhores matemáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me comunique a solução do problema proposto, eu o declararei publicamente merecedor de elogio. [8]

O problema apresentado por Bernoulli dizia o seguinte:

> *Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M, viam AMB per quam gravitate sua descends et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*(Sejam A e B dois pontos de um plano vertical. Encontre a curva na qual uma partícula M sujeita somente à ação da gravidade, descreve a trajetória mais rápida entre os pontos A e B). [8]

De acordo com Castro (2014) [8], os matemáticos da época, dentre eles Isaac Newton, Jacques Bernoulli, Gottfried Wilhelm Leibniz, Ehrenfried Walther Von Tschirnhaus e Guillaume de L'Hôpital apresentaram, por diferentes meios, a mesma resposta a curva de menor tempo ou braquistócrona, deveria ser uma cicloide.

Seguindo o raciocínio dos matemáticos da época, Leandro Miranda de Castro [8] apresenta em sua obra *O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais* o resultado para o desafio proposto. Sendo assim, faz-se uso desta resolução para expor que a curva cicloide é a reposta para a curva braquistócrona.

PROVA

O problema da braquistócrona gira em torno de se encontrar uma curva que faça com que um objeto de massa m sujeito apenas à aceleração gravitacional percorra a distância entre dois pontos distintos no menor tempo possível partindo do repouso. Seja a função $y(x)$ que define a curva desejada e sejam os pontos $P = (0, 0)$ e $Q = (a, b)$ distintos pertencentes a essa curva. Pelo fato de ser um sistema conservativo (sem nenhuma perda de energia) temos que a energia mecânica é conservada, assim:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy \tag{3.1}$$

Sendo $v(x) = \sqrt{2gy}$ [1], uma vez que a velocidade da partícula depende da coordenada x. Como o tempo de queda da partícula é dada por:

$$T[y(x)] = \int \frac{ds}{v}, \text{ onde } ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

logo, segue que

$$T[y(x)] = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy(x)}},$$

deixando dx^2 em evidência no integrando ficamos com

$$T[y(x)] = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + [\frac{dy}{dx}]^2}{2gy(x)}} dx,$$

Tome $w = \sqrt{\frac{1 + [\frac{dy}{dx}]^2}{2gy(x)}}$ que é função a ser variada.

Utilizando a identidade de Beltrami[2] e simplificando a notação $\frac{dy}{dx}$ para y', temos:

$$\frac{\partial w}{\partial y'} = \frac{1}{2}\left(1 + y'^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2y' \left(2gy\right)^{-\frac{1}{2}},$$

aplicando a identidade de Beltrami para $\frac{\partial w}{\partial y'}$ ficamos com

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{1}{\sqrt{2gy}} = C,$$

[1] Da equação (3.1) temos:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= mgy \\ mv^2 &= 2mgy \\ v^2 &= \frac{2mgy}{m} \\ v^2 &= 2gy \\ v &= \sqrt{2gy} \end{aligned}$$

[2] Note que o funcional $F[x, y(x), y'(x)]$ não dependem explicitamente de x. Nestas condições usasse a **identidade de Beltrami** [34].

$$\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = constante$$

Neste caso o funcional é dado por $W[x, y(x), y'(x)]$.

o primeiro membro da equação tem como mínimo múltiplo comum $(M.M.C)$ o termo $\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}$ logo a equação fica:

$$\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{(1+y'^2)(2gy)}}=C,$$

isto é,

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)(2gy)}}=C,$$

elevando ambos os membros da equação ao quadrado temos:

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{2gC^2}$$

tome $k=\dfrac{1}{2gC^2}$ ficamos com

$$y(1+y'^2)=k$$

isto é

$$y'^2=\frac{k-y}{y},$$

assim,

$$y'=\sqrt{\frac{k-y}{y}}, \tag{3.2}$$

voltando a escrever $y'=\dfrac{dy}{dx}$ e isolando dx temos

$$dx=\sqrt{\frac{y}{k-y}}dy,$$

por mudança de variável, tomando $y=ksen^2(\theta)$ com derivada $dy=2ksen(\theta)cos(\theta)d\theta$ logo

$$dx=\sqrt{\frac{ksen^2(\theta)}{k-ksen^2(\theta)}}2ksen(\theta)cos(\theta)d\theta,$$

colocando no denominador da fração k em evidência e utilizando a relação fundamental da trigonometria, a saber: $sen^2(\theta)+cos^2(\theta)=1$ a equação fica escrita como

$$dx=2ksen^2(\theta)d\theta$$

assim,

$$x = \int 2ksen^2(\theta)d\theta$$

aplicando a identidade trigonométrica

$$sen^2(\theta) = \frac{1 - cos(2\theta)}{2}$$

temos

$$x = 2k \int \frac{1 - cos(2\theta)}{2} d\theta$$

portanto

$$x = 2k\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}sen(2\theta)\right) + C$$

Assumindo $2\theta = \phi$, ficamos com

$$x = 2k\left(\frac{\phi}{4} - \frac{1}{4}sen(\phi)\right) + C$$

Concluímos que:

$$x = \frac{k}{2}(\phi - sen(\phi)) + C$$

Sendo $C \in \mathbb{R}$, tomando $C = 0$, temos:

$$x = \frac{k}{2}\left(\phi - sen(\phi)\right). \tag{3.3}$$

Para determinar o valor de y basta calcular a integral de (3.2) utilizando a mudança de variável $y = ksen^2(\theta)$ e $dx = 2ksen^2(\theta)d\theta$ assim

$$y = \int \sqrt{\frac{k - ksen^2(\theta)}{ksen^2(\theta)}} 2ksen^2(\theta)d\theta,$$

logo

$$y = k \int sen(2\theta)d\theta$$

assim,

$$y = -\frac{k}{2}cos(2\theta) + C,$$

tomando $C = \frac{k}{2}$ e $2\theta = \phi$, temos:

$$y = \frac{k}{2}(1 - cos(\phi)), \tag{3.4}$$

Portanto, como as equações (3.3) e (3.4) são as equações paramétricas da cicloide, conclui-se que a cicloide é braquistócrona.

Além disso, Robert Ferréol afirma em sua obra *Courbe Brachistochrone* [12], que as curvas epicicloide e hipocicloide também são respostas para a braquistócrona. Em *Epicycloide* [12] o autor apresenta que a epicicloide é uma curva braquistócrona:

> L'équation différentielle $\frac{ds}{d\theta} = 2\frac{\sqrt{q+1}}{q+2}\frac{p^2}{\sqrt{p^2-a^2}}$ montre, via l'équation d'Euler-Lagrange, que, de même que la cycloïde, l'épicycloïde est une courbe brachistochrone : c'est la courbe plane qui minimise le temps de parcours d'un mobile se déplaçant librement le long de cette courbe, cette courbe tournant à vitesse constante autour d'un centre fixe O. (FERRÉOL, 2016)

Isto é:

> A equação diferencial $\frac{ds}{d\theta} = 2\frac{\sqrt{q+1}}{q+2}\frac{p^2}{\sqrt{p^2-a^2}}$ mostra, graças à equação de Euler-Lagrange, que, como o ciclóide, o epiciclóide é uma curva de braquistócrona: é a curva plana que minimiza o tempo de viagem de um ponto maciço movendo-se livremente ao longo desta curva, enquanto a curva gira a velocidade constante em torno de um centro fixo O. (FERRÉOL, 2016)

Na obra *Hypocycloïde* [12] Ferréol afirma que a curva Hipociclóide é uma Braquistócrona:

> L'équation différentielle $\frac{ds}{d\theta} = 2\frac{\sqrt{q+1}}{q+2}\frac{p^2}{\sqrt{p^2-a^2}}$ montre, via l'équation d'Euler-Lagrange que, de même que la cycloïde, l'hypocycloïde est une courbe brachistochrone : c'est la courbe plane qui minimise le temps de parcours d'un mobile soumis à un champ de forces central en $\frac{1}{r}$ se déplaçant librement le long de cette courbe. (FERRÉOL, 2016)

Ou seja:

> A equação diferencial $\frac{ds}{d\theta} = 2\frac{\sqrt{q+1}}{q+2}\frac{p^2}{\sqrt{p^2-a^2}}$ prova, graças à equação de Euler-Lagrange, que, como o cicloide, o hipocicloide é uma curva de braquistócrona: é a curva plana que minimiza o tempo de viagem de um ponto móvel sujeito a um campo de força central proporcional a $\frac{1}{r}$ e movendo-se livremente ao longo desta curva. (FERRÉOL, 2016)

3.2 Tautócrona

> A ciclóide é verdadeiramente uma tautócrona; isto é, sobre um arco de ciclóide invertido, um objeto escorregará de um ponto qualquer até o fundo exatamente no mesmo tempo, qualquer que seja o ponto de partida. (BOYER, 2012, p. 260 apud VENCESLAU, 2015, p. 19) [35]

A prova para está afirmação é apresentada por Allisson Wesley do Nascimento Venceslau em sua obra Curvas Parametrizadas, Ciclóides, Experimentos e Aplicações. Assim sendo, faz-se uso desta resolução para expor que a curva cicloide é uma tautócrona.

PROVA

Considere uma cicloide invertida, de modo que possa deslizar, sobre a mesma, uma partícula de massa m, inicialmente em repouso, que parte de um ponto $A(x(\theta_a), y(\theta_a))$ para o ponto mais baixo da curva com $\theta_a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ao mostrar que independente do ponto escolhido da cicloide o tempo que a partícula leva para chegar no ponto mais baixo da curva é constante e igual para todos os pontos escolhidos mostra-se que a cicloide é tautócrona.

Para calcular o tempo que a partícula demora a efetuar esse deslocamento é necessário recorrer ao princípio da conservação de energia, sabe-se que ao longo da trajetória a energia mecânica da partícula é constante, sendo:

$$E_{\text{mecânica}} = E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}}$$

No ponto inicial A a energia cinética da partícula é nula e a energia potencial gravitacional vale $mgy(x)$ de forma que pode-se escrever a energia mecânica inicial como:

$$E_{\text{mecânica(inicial)}} = mgy(x)$$

Por outro lado ao atingir o ponto mais baixo da curva, a energia potencial gravitacional da partícula é nula e sua energia cinética é máxima e vale $\frac{1}{2}mv^2$. Assim, sua energia mecânica vale:

$$E_{\text{mecânica(final)}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Pelo princípio de conservação da energia mecânica, podemos igualar essas duas últimas expressões:

$$mgy(x) = \frac{1}{2}mv^2$$

sendo v a velocidade da partícula no ponto mais baixo da curva e $P(x(\theta_a), y(\theta_a))$ um ponto genérico da curva de parâmetro θ, com $\theta \in [\theta_a, \pi]$ e $h = y(\theta) - y(\theta_a)$. Daí, temos:

$$v^2 = \frac{2mgh}{m} = 2gh$$

onde

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gh} \\ &= \sqrt{2g(y(\theta) - y(\theta_a))} \\ &= \sqrt{2g(r - rcos\theta - r + rcos\theta_a)} \\ &= \sqrt{2gr(cos\theta_a - cos\theta)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sabendo que $cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\theta}{2}} \Rightarrow cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+cos\theta}{2} \Rightarrow cos\theta = 2cos^2\frac{\theta}{2} - 1$, então utilizando essa relação em (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gr\left(2cos^2\frac{\theta_a}{2} - 1 - 2cos^2\frac{\theta}{2} + 1\right)} \\ &= \sqrt{4gr\left(cos^2\frac{\theta_a}{2} - cos^2\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= 2\sqrt{gr\left(cos^2\frac{\theta_a}{2} - cos^2\frac{\theta}{2}\right)} \qquad (3.6) \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo S a função comprimento do arco percorrido pela partícula do ponto A para o ponto mais baixo da curva, então $v = \frac{ds}{dt}$. Vamos procurar agora a expressão que define ds. Dado que $S = 2r\int_0^t sen\frac{\theta}{2}d\theta$[3], temos:

$$\frac{ds}{d\theta} = 2rsen\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow ds = 2rsen\frac{\theta}{2}d\theta \qquad (3.7)$$

Como $v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{ds}{v}$, então de (3.6) e (3.7), obtemos:

$$dt = \frac{2rsen\frac{\theta}{2}d\theta}{2\sqrt{gr\left(cos^2\frac{\theta_a}{2} - cos^2\frac{\theta}{2}\right)}} \qquad (3.8)$$

Integrando ambos os membros em (3.8), obtemos:

$$\begin{aligned} t &= \int_{\theta_a}^{\pi}\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{sen\frac{\theta}{2}}{\sqrt{cos^2\frac{\theta_a}{2} - cos^2\frac{\theta}{2}}}d\theta \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\theta_a}^{\pi}\frac{sen\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta_a}{2}\sqrt{1 - \frac{cos^2\frac{\theta}{2}}{cos^2\frac{\theta_a}{2}}}}d\theta \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Aplicando uma mudança de variável em (3.9), considerando:

[3]Utilizando a definição de comprimento do arco de uma curva parametrizada, equações (2.4), (2.5) e (2.6) o autor apresenta a equação dada. O desenvolvimento pode ser encontrado nas páginas 26 e 27 de sua obra [35].

$$\frac{cos\dfrac{\theta}{2}}{cos\dfrac{\theta_a}{2}} = u \Rightarrow \frac{-\dfrac{1}{2}sen\dfrac{\theta}{2}}{cos\dfrac{\theta_a}{2}}d\theta = du \Rightarrow sen\frac{\theta}{2}d\theta = -2cos\frac{\theta_a}{2}du \tag{3.10}$$

Note que:

$$\theta = \theta_a \Rightarrow u = 1 \text{ e } \theta = \pi \Rightarrow u = 0$$

Substituindo (3.9) em (3.10), temos:

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{r}{g}}\int_1^0 \frac{-2cos\dfrac{\theta_a}{2}}{cos\dfrac{\theta_a}{2}\sqrt{1-u^2}}du \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{g}}.[arcsen(u)]_0^1 \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{g}}(arcsen(1) - arcsen(0)) \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \pi\sqrt{\frac{r}{g}}
\end{aligned}$$

Portanto, o tempo que a partícula demora a deslocar-se do ponto A para o ponto mínimo da curva, com $\theta_a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ é constante, não dependendo do seu ponto de partida. Isto é, a cicloide é tautócrona.

4 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DAS CURVAS CICLOIDAIS

Segundo Cordeiro (2013)[9], as cicloides não são estudadas em nenhum momento pelos graduandos em Matemática, ou ainda não são mencionadas no Ensino Básico. Mas é necessário ressaltar que a curva é mencionada no curso de Física, muitas vezes opcional nas matrizes curriculares dos cursos de graduação. Sendo assim, poucos licenciandos tem acesso ao conhecimento destas curvas e suas aplicabilidades.

As curvas cicloidais possuem uma versatilidade quanto as suas aplicações, sendo encontradas em diversos ramos. Suas curvas derivadas através de sua beleza, influenciam a moda (BRAGGS, 2010, apud CORDEIRO, 2013, p. 49)[9] sendo encontradas em peças de crochê, cujo ponto é denominado Ponto Crocodilo, peças que apresentam a textura Escama de Peixe, além de outra.

Figura 4.1: Ponto Crocodilo
Fonte: Pinterest

Figura 4.2: Textura Escama de Peixe
Fonte: Pinterest

Na arquitetura podemos citar o exemplo do Museu de Arte Kimbell (AMORIM, 2018, p. 43)[2], as pontes romanas como a Ponte de Trajano, em Portugal, além da Ponte

Calatrava, na Itália.

Figura 4.3: Museu de Arte Kimbell
Fonte: Pinterest

Figura 4.4: Ponte de Trajano
Fonte: Pinterest

Figura 4.5: Ponte Calatrava
Fonte: Pinterest

Na música vemos sua presença no arco de um violino (MOTTOLA, 2011, apud CORDEIRO, 2013, p. 49) [9]. Em jogos observamos sua presença na pista de *skate*, conhecida como "Half"(BUSTILLOS, 2009, p. 6) [7], além de observar sua aplicação nas luvas do jogo "Jai-Alai".

Segundo Firmino (2019, p. 38) [14] "a cicloide se apresenta como uma possível solução para diversos campos, como: Física de Partículas, Biologia, Matemática, Física, Tecnologia da Informação e outros campos da Ciências Exatas."

Figura 4.6: Pista de Skate Half
Fonte: Pinterest

Figura 4.7: Luva Jai-Alai
Fonte: Jai-Alai:The Fastest Sport Around

Abordar o ensino das curvas com a utilização da tecnologia despertam grande interesse nos jovens (FIRMINO, 2019, p. 38) [14]. Sendo assim, neste trabalho é apresentado uma abordagem quanto as construções geométricas das curvas cicloidais, utilizando o *software* GeoGebra Classic[1].

> Logo, a elaboração de aulas em que se utilizem computadores e/ou celulares para a construção da cicloide no GeoGebra, bem como aulas experimentais que apliquem conceitos que muitas vezes são vistos como inúteis e entediantes pelos alunos, pode fazer com que o interesse e rendimento deles sejam potencializados. (FIRMINO, 2019, p. 38) [14]

O *software* foi desenvolvido por Markus Hohenwartes e outros programadores, com o intuito de auxiliar na aprendizagem e ensino da matemática nas escolas, é um *software* de matemática dinâmica e mescla geometria, álgebra e cálculo [20]. O GeoGebra

[1] *Version:*(6.0.562.0 - Win(11 October 2019))

classifica-se como um programa construído dentro de princípios de geometria dinâmica, como afirma Gravina (1996, p. 6) [17]:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema.

Quanto ao ensino utilizando softwares de geometria dinâmica, segundo Gravina (1996, p. 7) [17]:

> Dois são os principais aspectos didáticos de utilização dos programas: a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente.

Seguindo o aspecto didático onde "os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações" Gravina (1996, p. 7)[17], procedendo conforme instruções de Bruno Glasses [16], Rhonal Smith Patino Guevara [18] e Rafael Pérez Laserna [22] são apresentados as construções das curvas cicloide, epicicloide e hipocicloide.

4.1 Ciclóide

1. Criar o controle deslizante com o nome $t = 1$, selecionar Número, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* 0 e *máximo* 40, com *incremento* 0.01

2. Criar o controle deslizante com o mome $r = 1$, selecionar *Número*, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* 0 e *máximo* 15, com *incremento* 0.1

3. Na caixa *Entrada* escrever as funções:

$$f(x) = r * (x - sen(x))$$
$$g(x) = r * (1 - cos(x))$$

4. Selecionar o objeto *Mover*

5. Ocultar as curvas $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, selecionar as funções, clicar com o botão direito e remover a marcação de *Exibir Objeto*

6. Na caixa *Entrada*, escrever curva, aparecera algumas opções, selecionar:
Curva [<Expressão>,<Expressão>,<Variável>,<Valor Inicial>,<Valor Final>]

7. Vamos substituir os valores: Curva [$f(s)$,$g(s)$,s,0,t]

8. Na caixa *Entrada*, vamos criar o ponto: $P = a(t)$

9. Na caixa *Entrada*, criar o ponto $R = (r * t, 0)$

10. Na caixa *Entrada*, criar o ponto $O = (r * t, r)$

11. Selecionar o objeto *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*

12. Selecionar o ponto O e ponto P

13. Selecionar o objeto *Segmento*

14. Selecionar o ponto O e P

15. Animar o ponto t, isto é, clicar com o botão direito no *controle deslizante t*, selecionar *Animação*

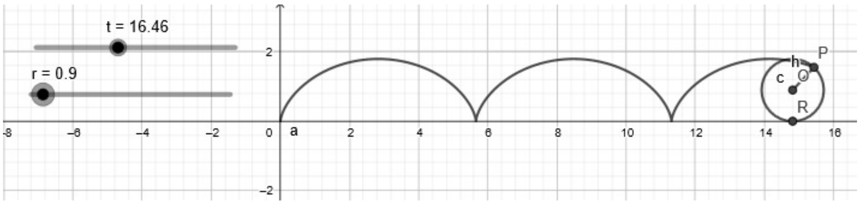

Figura 4.8: Curva Ciclóide - Objetos Visíveis do GeoGebra
Fonte: Autora

Figura 4.9: Curva Ciclóide
Fonte: Autora

4.2 Epiciclóide

1. Selecionar a ferramenta *Ponto – Interseção de Dois Objetos*

2. Selecionar os eixos x e y

3. Criar o *Controle Deslizante* com as seguintes características:
   Nome: RaioDiretriz = 2, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* 0 e *máximo* 10, com incremento 0.01

4. Selecionar *Círculo dados Centro e Raio*, com centro em A e raio igual a RaioDiretriz

5. Criar o *Controle Deslizante* com as seguintes características:
   Nome: K = 0, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* -5 e *máximo* 5

6. Criar o ponto $B = (j, k)$

7. Criar o *Controle Deslizante* com as seguintes características:
   Selecionar *Ângulo*, *Nome:* $\alpha = 45°$, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* 0° e *máximo* 360° , com incremento 1°

8. Selecionar a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa*

9. Selecionar o ponto B e A atribuir amplitude α

10. *Semirreta* e os pontos A e B'

11. Selecionar *Ponto – Interseção de Dois Objetos*

12. Selecionar a *f: Semirreta(A, B')* e o *c: Círculo(A, RaioDiretriz)*

13. Criar o *Controle Deslizante* com as seguintes características:
    Nome: l = 1, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* -5 e *máximo* 5

14. No campo *Entrada* escrever: $L = (x(C) + lcos(\alpha), y(C) + lsen(\alpha))$

15. Selecionar a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*

16. Selecionar L e C

17. Criar um *Controle Deslizante* com as seguintes características:
    Selecionar *Ângulo*,*Nome:* γ = 45°, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* 0° e *máximo* 1800°, com *incremento* 0.01°

18. Selecionar a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa*

19. Selecionar os pontos C e L, atribuir a *Ângulo* γ

20. Selecionar a ferramenta *Segmento* e os pontos L e C'

21. Selecionar a ferramenta *Ponto – Interseção de Dois Objetos*

22. Selecionar a circunferência *d: Círculo(L, C)* e o segmento $g = Segmento(L, C')$

23. Selecionar o objeto *Mover*

24. Posicionar os *controles deslizantes* α e γ em 0°

25. Posicionar o *controle deslizante RaioDiretriz* em 4

26. Selecionar os *controles deslizantes* α e γ, clicar com o botão direito, marcar *Animação*

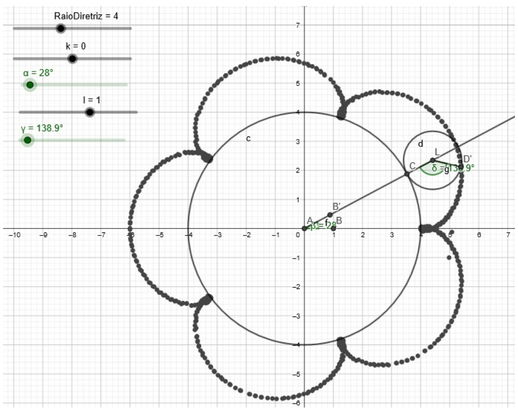

Figura 4.10: Curva Epicicloide - Objetos Visíveis do GeoGebra
Fonte: Autora

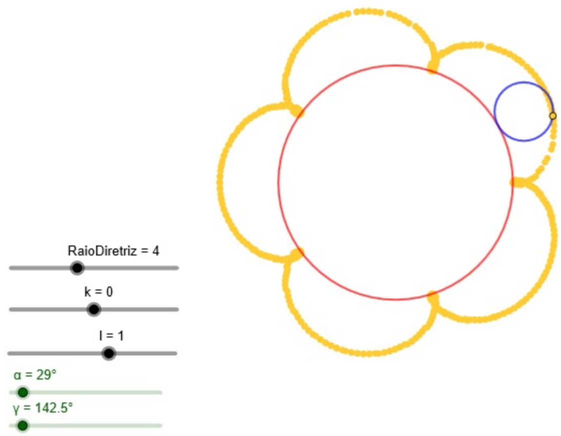

Figura 4.11: Curva Epicicloide
Fonte: Autora

4.3 Hipociclóide

1. Criar um *Controle Deslizante* com as seguintes características:
   Selecionar *Número*, *Nome*: *RaioDiretriz = 3*, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* 0, e *máximo* 5, com *incremento* 0.1

2. Criar um *Controle Deslizante* com as seguintes características:
   Selecionar *Ângulo*, *Nome*: $\alpha = 45°$, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* 0° e *máximo* 360°, com *incremento* 0.5°

3. Selecionar a ferramenta *Ponto - Interseção de Dois Objetos*

4. Selecionar os eixos x e y

5. Selecionar a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*

6. Selecionar o ponto A e atribuir raio RaioDiretriz

7. Selecionar a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*

8. Selecionar *c: Círculo(A, RaioDiretriz)* e eixo x

9. Selecionar a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa*

10. Selecionar os pontos C e A, atribuir *Ângulo* α e selecionar *sentido anti-horário*

11. Selecionar a ferramenta *Segmento* e os pontos A e C'

12. Criar um *Controle Deslizante* com as seguintes características:
    Selecionar *Número*, *Nome*: RaioSuporte, preencher os campos do *Intervalo*, sendo *mínimo* -5 e *máximo* 5

13. Selecionar a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*

14. Selecionar o ponto C' e atribuir raio RaioSuporte

15. Selecionar a ferramenta *Ponto-Interseção de Dois Objetos*

16. Selecionar *d:Círculo(C', RaioSuporte)* e o segmento f = *Segmento(A, C')*

17. Selecionar a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*

18. Selecionar os pontos D e C'

19. Selecionar a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa*

20. Selecionar os pontos C' e D, com ângulo α e *sentido horário*

21. Selecionar o objeto *Mover*

22. Selecionar o ponto C'', clicar com o botão direito e ativar o *Exibir Rastro*

23. Selecionar o controle deslizante α, clicar com o botão direito, selecionar *Configurações*, na aba *Controle Deslizante*, no campo *Repetir* selecionar *Crescente*

24. Selecionar o ponto $C'' = Girar(C', -\alpha, D)$, com o botão direito ir em *Configurações*, na aba *Básico* alterar a *Definição* para $Girar(C', -3\alpha, D)$, isso significa que haverá três vértices.

25. Selecionar o *Controle Deslizante* α, com o botão direito selecionar *Animação*

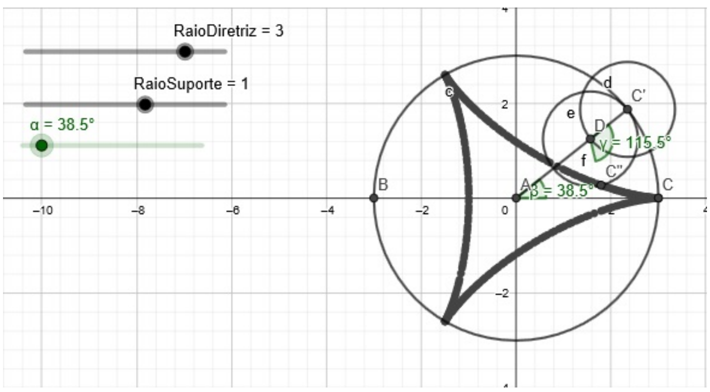

Figura 4.12: Objetos Vísiveis do GeoGebra
Fonte: Autora

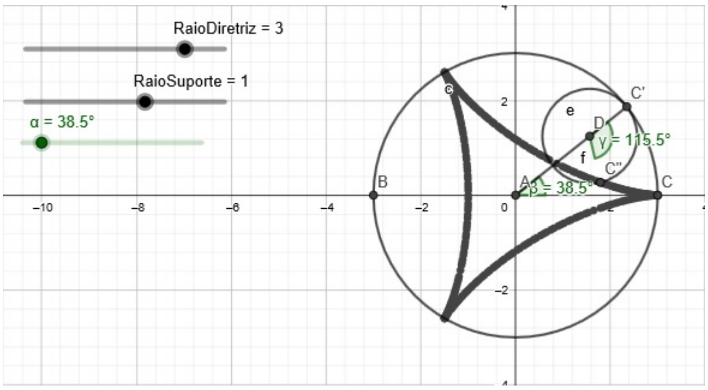

Figura 4.13: Curva Hipocicloide - Objetos Vísiveis do GeoGebra
Fonte: Autora

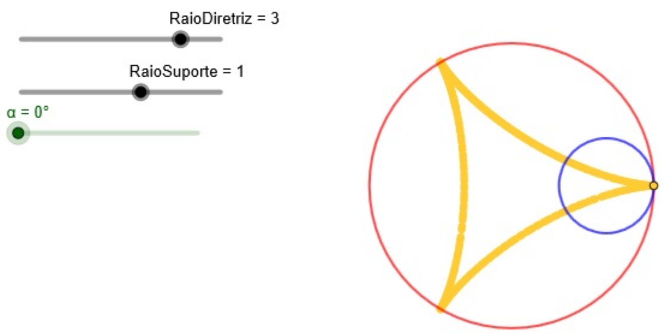

Figura 4.14: Curva Hipocicloide
Fonte: Autora

5 ENSINO A DISTÂNCIA DA CURVA CICLÓIDE

Primeiramente é necessário obter maior compreensão sobre a modalidade de ensino Educação a Distância (EaD). Segundo Litto(2009, apud MENDONÇA, 2014, p. 3) [26]: "São utilizados vários termos pra indicar a 'educação a distância': aprendizagem a distância, aprendizagem aberta, aprendizagem flexível, aprendizagem autônoma, aprendizagem online, estudo por correspondência, estudos independentes, entre outros.". Assim sendo, buscou-se a visão de alguns autores sobre o tema.

> "De uma maneira geral, defini-la como um tipo de educação não formal que se realiza através dos mais variados instrumentos de aprendizagem: material impresso (módulos instrucionais e outros), rádio, televisão, telefone e outros recursos." (BALLALAI,1991, apud MENDONÇA, 2014, p. 1) [26]

> "Um conceito pedagógico que descreve o universo de relações professor-aluno que se dão quando alunos e instrutores estão separados no espaço e/ou tempo. Este universo de relações pode ser ordenado segundo uma tipologia construída em torno dos componentes mais elementares deste campo – o saber, a estrutura dos programas educacionais, a interação entre alunos e professores, e a natureza e o grau de autonomia do aluno." (MOORE,1993, apud MENDONÇA, 2014, p. 2) [26]

> "Educação à Distância (EAD) é um sistema tecnológico de comunicação bidirecional, que substitui o contato pessoal professor/aluno, como meio preferencial de ensino, pela ação sistemática e conjunta de diversos recursos didáticos e pelo apoio de uma organização e tutoria, que possibilitam a aprendizagem independente e flexível dos alunos." (GARCIA, 1995, apud SANTOS, 2006, p. 3) [33]

> "EAD deve ser compreendida como uma modalidade de se fazer educação pela democratização do conhecimento, onde o conhecimento deve estar disponível a quem se dispuser a conhecê-lo, independente do lugar, do tempo e de engessadas estruturas formais de ensino." (PETRI, 1996, apud SANTOS, 2006, p. 3) [33]

> "EAD é a modalidade de ensino-aprendizagem mais apropriada para reduzir as distâncias e os isolamentos geográficos, psicossociais, econômicos e culturais, caracterizando uma nova revolução do conhecimento." (LANDIM, 1997, apud SANTOS, 2006, p. 3) [33]

> “A Educação a Distância, no sentido fundamental da expressão, é o ensino que ocorre quando o ensinante e o aprendente estão separados (no tempo ou no espaço). No sentido que a expressão assume hoje, enfatiza-se mais a distância no espaço e propõe-se que ela seja contornada através do uso de tecnologias de telecomunicação e de transmissão de dados, voz e imagens (incluindo dinâmicas, isto é, televisão ou vídeo). Não é preciso ressaltar que todas essas tecnologias, hoje, convergem para o computador.” (CHAVES, 1999, apud Alves, 2011, p. 85) [1]

> “Um processo de ensino-aprendizagem, mediando por tecnologias, no qual professores e alunos estão separados espacial e/ou temporariamente. Apesar de não estarem juntos, de maneira presencial, eles podem estar conectados, interligados por tecnologias, principalmente as telemáticas, como a Internet. Mas também podem ser utilizados o correio, o rádio, a televisão, o vídeo, o CD-ROM, o telefone, o fax e tecnologias semelhantes.” (MORAN,2002, apud MENDONÇA, 2014, p. 2) [26]

> “O conjunto de ações de ensino-aprendizagem desenvolvidas por meio de meios telemáticos, como a Internet, a videoconferência e a teleconferência.” (SILVIA,2003, apud MENDONÇA, 2014, p. 2) [26]

> “A Educação a Distância (EaD) é uma estratégia desenvolvida por sistemas educativas para oferecer educação a setores ou grupos da população que, por razões diversas, têm dificuldade de acesso a serviços educativos educacionais.” (GONZÁLES,2005, apud MENDONÇA, 2014, p. 2) [26]

> “É uma área em que se encontra uma conjunção rara de tecnologia, conhecimento e criatividade e alcançou êxitos formidáveis no desenvolvimento de estratégias e ferramentas de aprendizagem, utilizando todo o espectro de meios a sua disposição.” (TRIMER,2012, apud MENDONÇA, 2014, p. 3) [26]

> “Podemos definir EaD como uma forma de educação em que o aprendizado é realizado a distância – física e temporal -, mediada por uma ferramenta da tecnologia responsável por permitir a comunicação e a interação entre os participantes.” (MENDONÇA, 2014, p. 3) [26]

Quanto a Educação a Distância, o Decreto nº 9.057 esclarece:

> Art. 1º Para os fins deste Decreto, considera-se educação a distância a modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorra com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com pessoal qualificado, com políticas de acesso, com acompanhamento e avaliação compatíveis, entre outros, e desenvolva atividades educativas por estudantes e profissionais da educação que estejam em lugares e tempos diversos. (BRASIL, 2017). [6]

Utilizando a modalidade educacional EaD junto a abordagem aula expositiva elaborou-se o encontro. Segundo Brown (1985, apud RIBEIRO, 2007, p. 190) [31] "uma exposição consiste numa pessoa que fala para muitas sobre um tópico ou tema. A fala pode ser complementada pelo uso de recursos audiovisuais e por perguntas ocasionais." Além disso, em uma aula expositiva os principais objetivos, como aponta Brown (1985, apud RIBEIRO, 2007, p. 191)[31] são: "transmitir informações, gerar compreensão e estimular o interesse."

5.1 Planejamento

O planejamento da aula se deu com o foco na exposição, pois segundo Marcheti (2000, apud LEAL, 2006, p. 97) [23] "o foco está na exposição, feita por pessoas que tenham um conhecimento satisfatório sobre o assunto." Para isto, houve a organização em dois momentos. No primeiro momento são apresentados a definição, aplicações e construção geométrica da curva cicloide. Em um segundo momento é realizada a exposição do traçador de cicloide, construído em material concreto, e apontado suas características.

Cabe estabelecer as tecnologias existentes que forneçam um melhor aprendizado. Como afirma Mendonça (2014, p. 3) [26] "As práticas pedagógicas utilizadas a distância precisam levar em conta as tecnologias existentes e oferecer as práticas de educação mais adequadas para o aprendizado."

Para a elaboração da apresentação dos slides foi escolhido a ferramenta de criação Prezi. Ele torna possível uma apresentação não linear segundo Barroso (2014, p. 7) [3]:

> "Prezi é uma ferramenta totalmente diferente dos programas para a criação de apresentações em slide, a começar pelo simples fato de que o aplicativo não se limita ao espaço retangular dos slides. É similar ao pptPlex, um projeto da Microsoft Office Labs que traz esse tipo de funcionalidade para o Power Point. O usuário é apresentado à liberdade de organizar o conteúdo da maneira que ele quiser em um mapa visual, abrindo a possibilidade de criação de apresentações não lineares."

Quanto a videoconferência foi estabelecido a utilização da plataforma Google Meet uma vez que "o acesso gratuito pode ser feito de forma simples no computador, através do e-mail da Google: o Gmail. Além disso, o Google Meet também se encontra disponível para dispositivos móveis, por meio de download do aplicativo Google Meet." (ALVES, 2017, apud SILVA et al., 2020, p. 4) [10]. Ademais "Suporta até 100 participantes nas aulas remotas, sejam eles internos sejam externos (isto é, indivíduos que não possuem cadastro no Gmail). Para que isso ocorra, basta que o anfitrião do evento compartilhe o link das aulas remotas com os interessados em dela participar." (SILVA et al, 2020, p. 5) [10]

Para comunicação direta com os educandos foi escolhida a mídia social *WhatsApp*, esta mídia

> "Permite que os usuários troquem imagens, áudio, vídeo, animações e mensagens escritas através de uma conexão com a internet. É uma estratégia rápida e interessante de utilização do *smartphone* de forma gratuita uma vez que, através de qualquer conexão aberta é possível realizar chamadas de voz – ou troca de mensagens – sem nenhum custo associado."(ALBUQUERQUE; JUNIOR, 2016,p. 319) [21].

Além disso, pode "servir como ferramenta de coleta de dados já que o docente, ou aluno-pesquisador, poderá enviar perguntas em formato de texto ou áudio e receber as respostas através deste mesmo ambiente, oferecendo ao pesquisador rápido *feedback*". (ALBUQUERQUE; JUNIOR, 2016, p. 323) [21]

Quanto as construções geométricas faz-se necessário, nas máquinas dos educandos, a instalação do *software* GeoGebra. Para assim seguir os passos descritos no capítulo 4.1 e manusear a cicloide.

No segundo momento é apresentado o traçador da cicloide. Esta peça, inicialmente, seria construída em conjunto, porém devido aos empecilhos causados pela pandemia de Covid-19 não foi possível. Assim sendo, a construção e apresentação do traçador ficaram a cargo do Professor Me. Loreci. O traçador foi inspirado na peça 33 – Cicloide – Traçador 1 da exposição *Matemativa: Exposição Interativa de Matemática.* (GERÔNIMO, 2017, p. 23) [15]

5.2 Aula Expositiva

Para o desenvolvimento da atividade foram convidados os acadêmicos do oitavo período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Toledo - 2020. Está turma é constituída por cinco universitários, dos quais três participaram da aula expositiva.

Além da aula, todo contato com os acadêmicos se deu por intermédio da mídia social WhatsApp. Nos dias 08, 11 e 12 de novembro os universitários receberam avisos que no dia 13 de novembro, às 21 horas e 20 minutos, ocorreria a aula expositiva. Data e horário acordados com os acadêmicos, sendo o horário favorável para todos. Os avisos e interações ocorreram no grupo "8º Período MATEMÁTICA!".

Às 20 horas e 30 minutos foi enviado o *link* da videoconferência no grupo. No horário combinado três, dos cinco acadêmicos compareceram. Assim, houve a espera pelos demais por um espaço de tempo.

No primeiro momento os acadêmicos foram expostos a definição apresentada por PUTNOKI (1989, p. 70) [28] e aplicações na moda (BRAGGS, 2010, apud CORDEIRO, 2013, p. 49)[9], arquitetura (AMORIM, 2018, p. 43)[2], engenharia e jogos (BUSTILLOS, 2009, p. 6).

Devido ao tempo, a atividade de construção geométrica, mediante *software* GeoGebra foi enviada no grupo. Assim, seria possível que eles realizassem a construção no horário que melhor conviesse, porém deveriam enviar suas construções no grupo. Além disso, fora exibido como ficaria a cicloide finalizada, após eles seguirem todos os passos enviados.

Nesta apresentação foram expostas as peças que formam o traçador, além disto, foi realizado a utilização da peça. Apresentado a classificação da cicloide traçada, relembrando as definições vistas anteriormente.

Figura 5.1: Traçador da Ciclóide
Fonte: Me. Loreci

Os acadêmicos participaram ativamente do encontro, realizando sugestões e diálogos. Uma das sugestões levantas quanto a construção em material concreto foi a utilização de uma mola onde é posicionado o pincel, assim o pincel acompanharia as ondulações da lousa.

É valido ressaltar que durante o levantamento da sugestão houve um contratempo, pois o universitário desejava realizar o desenho da mola, porém no Google Meet não apresenta ferramentas de desenhos, somente transmissão de tela, assim sendo, foi sugerido que o mesmo realizasse o esboço no *software* Microsoft Paint e transmitisse a sua tela.

A apresentação no Prezi pode ser acessada através do *link*: `https://prezi.com/p/mgihkg0atf1w/?present=1`.

5.3 Retorno

A atividade enviada para os acadêmicos consistia em construir, mediante *software* GeoGebra, uma cicloide. Para esta construção os universitários deveriam seguir os passos descritos no capitulo 4.1, manipular a animação e posteriormente enviar as suas construções no grupo do WhastApp.

Os passos para a construção foram enviados logo após o encontro, no dia 13 de novembro. O retorno das construções deveriam ser enviados assim que eles conseguissem realizar a construção. Não foi estipulado, inicialmente, uma data de envio, uma vez que foi relatado que as atividades acadêmicas estavam ocupando demasiado tempo para serem realizadas. Assim, ficou acordado que as construções seriam enviadas quando possível.

Para Cornachione e Silva (2000, apud IKEDA et al., 2005, p. 15)[19]:

> "Algumas desvantagens adicionais da educação a distância: problemas com o acompanhamento e avaliação do desempenho; dificuldade na punição; problemas com a linguagem escrita e falada utilizada; questões éticas envolvendo o atestado do saber e a identificação pessoal."

Após duas semanas do encontro, no dia 30 de novembro, foi entrado em contato com o grupo, estipulando que enviassem as construções até o dia 06 de dezembro, porém não houve retorno. Lembrando que, o convite para a realização da construção foi enviado aos cinco acadêmicos.

Quando convidados para participar desta atividade os acadêmicos questionaram se valeriam horas acadêmicas, quando souberam que era possível essa validação, então se atraíram mais pela experiência. Foi percebido que a experiência era reconhecida quando, aparentemente, havia uma troca. Como não foi apresentado uma certificação posterior a aula, não houve um interesse em concluir a atividade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho foi possível ampliar os conhecimentos sobre as curvas cicloidais: Cicloide, epicicloide e hipocicloide. Por meio da história de sua descoberta, construções e aplicações fica claro sua relevância e importância do seu ensino, tanto no ensino fundamental, como nos cursos de licenciatura.

Frases como "Quando vou usar isso na minha vida?" e "Onde encontro isso?" são muitas vezes utilizadas por alunos que não conseguem fazer a associação do conteúdo estudado com sua realidade. Sendo assim, ter o conhecimento do quão presente a curva está em nosso dia a dia, torna possível a associação da matemática com a realidade, cotidiano, chamando a atenção do educando.

Quando falamos das curvas cicloidais a primeira associação feita é com seus desenhos, o que não está errado, mas não são somente isto. Fica claro, através do estudo de suas aplicações, sua relevância, sendo encontradas em hidroelétricas, arquiteturas, esportes e música. Reforça ainda mais a importância de seu ensino.

Transmitir as definições utilizando o *software* GeoGebra torna possível uma compreensão mais clara. A geometria dinâmica permite essa manipulação, onde o aluno, através do manuseio, pode perceber as características, variações e limitações.

Em meio à crise sanitária mundial trazida pela pandemia da Covid-19, houve-se a necessidade de uma reinvenção do projeto proposto, assim, optou-se pela educação a distância (EaD). O projeto inicial era focado nas construções geométricas, em materiais concretos, sendo desenvolvidos ainda no campus da universidade, mas devido as adversidades advindas pela pandemia, houve a necessidade da alteração deste objetivo.

Espera-se com esse trabalho deixar claro a relevância do ensino das curvas cicloidais, através de todo o projeto apresentado, bem como, apresentar uma abordagem de ensino que instigue os educadores a buscar readequações para a proposta de educação a distância (EaD). Readequações que tragam o retorno desejado quando elaborado suas propostas de ensino.

REFERÊNCIAS

[1] Alves, L. Educação a distância: conceitos e história no brasil e no mundo. *Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância 10* (2011).

[2] AMORIM, F. F., et al. Curvas cicloidais: parametrização, propriedades e aplicações.

[3] Barroso, R. H. D. A utilização do prezi em sala de aula: uma proposta de inclusão no ensino de história. *Revista Virtual de Cultura Surda 12* (2014), 1–15.

[4] Bérti, G. C., et al. Curvas descritas mecanicamente e geogebra: uma proposta destinada ao ensino médio.

[5] Boyer, C. B., and Merzbach, U. C. *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.

[6] BRASIL. Decreto nº 9.057, de 25 de maio de 2017. regulamenta o art. 80 da lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União* (2017).

[7] Bustillos, O. V., and Sassine, A. A magia da curva cicloide: Braquistócrona e tautócrona. *São Paulo: Scor Tecci* (2011).

[8] Castro, L. M. d. O cálculo variacional e as curvas cicloidais.

[9] Cordeiro, A. C. F., and Baroni, A. O que é a curva cicloide: Ideias centrais no ensino da matemática.

[10] da Silva, B. A., Lacerda, A. P. C., de Castro, M., and Coelho, S. F. Ensino remoto: Análise comparativa do zoom e do google meet no contexto educacional. In *Anais do Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online*, vol. 9.

[11] da Silva, G. H. G., and Penteado, M. G. O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa.

[12] Ferréol, R. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, 2019.

[13] Ferretto, D., et al. Curvas: estudo e visualização com o software cabri-gèométre ii.

[14] Firmino, E. G., de Assis Borges, I., and Coelho, L. M. d. F. R. Cicloide: uma abordagem sobre as propriedades tautócrona e braquistócrona. *Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática 1*, 1 (2020).

[15] Gerônimo, J. R. Matemativa: Exposição interativa de matemática. *Universidade Estadual de Maringá 10* (2017).

[16] Glasses, B. Construção da curva ciclóide no geogebra, 2015.

[17] Gravina, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação 1* (1996), 1–13.

[18] Guevara, R. S. P. Epicicloide, 2018.

[19] Ikeda, A. A., and Cavalheiro, C. Reflexões sobre as contribuições do ensino a distância. *eGesta-Revista Eletrônica de Gestão de Negócios-Mestrado em Gestão de Negócios* (2005), 55–75.

[20] Institute, I. G. Geogebra: Manual.

[21] Junior, J. B. B., and Albuquerque, O. C. P. Possibilidades para o uso do whatsapp na educação: análise de casos e estratégias pedagógicas. *Anais do I Simpósio Nacional de Tecnologias Digitais na Educação* (2016), 315–332.

[22] Laserna, R. P. Deltoide,tricúspide o hipocicloide de steiner, con geogebra., 2015.

[23] Leal, D. T. B., and Júnior, E. C. A aula expositiva no ensino da contabilidade. *Contabilidade vista & revista 17*, 3 (2006), 91–113.

[24] Lunazzi, J. J. Queda em curvas de menor tempo e tempo independente da altura - braquistócrona e tautócrona.

[25] Martins, S. Albrecht dürer, 2016.

[26] Mendonça, G. A. d. A. As tecnologias na educação a distância.

[27] Pelegrini, W. L., de Amorim, E. B., and de Queiroz, L. C. Abordagens dos dados históricos e princípios do cálculo variacional.

[28] Putnoki, J. C. *Elementos de geometria & desenho geometrico: volume especial para o vestibulando: caderno de atividades.* Scipione, 1989.

[29] Raposo, C. S. C. M. *Curvas Famosas e não só: teoria, histórias e atividades.* PhD thesis, 2013.

[30] Resende, K. A., et al. Curvas e aplicações.

[31] Ribeiro, C. A aula magistral ou simplesmente aula expositiva. *Máthesis*, 16 (2007), 189–201.

[32] Santos, A. F. D. Geometria dinâmica: Um blog dedicado às curvas planas.

[33] Santos, J. F. S. Avaliação no ensino a distância. *Revista Iberoamericana de Educación 38*, 4 (2006), 1–9.

[34] Tort, A., and Nogarol, F. Tópicos de física clássica 1.

[35] Venceslau, A. W. d. N., et al. Curvas parametrizadas, ciclóides, experimentos e aplicações.