UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO ALVES FERREIRA

MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU A PARTIR DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA EVIDENCIADO EM UM ROTEIRO DE UMA PEÇA TEATRAL

PATO BRANCO

2022

EDUARDO ALVES FERREIRA

MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU A PARTIR DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA EVIDENCIADO EM UM ROTEIRO DE UMA PEÇA TEATRAL

DIDATIC MODEL OF REFERENCE TO TEACH THE RESOLUTION OF QUADRATIC EQUATION BASED IN A STUDY AND RESEARCH PATH EVIDENCED IN A SCRIPT OF A THEATER PLAY

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador(a): Profª. Drª. Teodora Pinheiro Figueroa.

PATO BRANCO

2022

EDUARDO ALVES FERREIRA

MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU A PARTIR DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA EVIDENCIADO EM UM ROTEIRO DE UMA PEÇA TEATRAL

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: Dia/mês por extenso/ano

____

Teodora Pinheiro Figueroa
Pós- doutorado em Educação Matemática, Doutorado em Engenharia Mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Campus Pato Branco

____

Marcio Bennemann
Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Campus Pato Branco

____

Luzia Maya Kikuchi
Doutorado em Educação
Universidade Virtual do Estado de São Paulo

PATO BRANCO

2022

Dedico este trabalho ao pequeno Eduardo que com o espírito curioso e alma apaixonada me trouxe até aqui.

AGRADECIMENTOS

É com muito carinho que venho agora agradecer a todos que de alguma maneira fizeram possível a conclusão desta pesquisa. Agradeço imensamente minha orientadora pelo trabalho ímpar que realizou como minha mentora, por ter aceitado o desafio de orientar essa pesquisa e por toda paciência que teve comigo nos meses que se seguiram a isso. Este estudo foi de grande relevância para mim e de maneira alguma conseguiria alcançar esse resultado que tanto me agradou sem este auxílio.

Agradeço também os demais professores que cruzaram meu percurso como acadêmico, pois sem eles, a curiosidade de realizar essa pesquisa não teria surgido e esse momento nunca aconteceria.

Não posso deixar de mencionar aqui também meus amigos, que deram todo o suporte necessário para suportar a tensão de conciliar todas as ocupações com o tempo a ser dedicado aos trabalhos de pesquisa, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo equilíbrio que me trouxeram nesses duradouros meses.

Enfim, agradeço a cada um que de alguma maneira colaborou com isso.

RESUMO

Este trabalho se refere ao estudo e pesquisa das dimensões do problema didático: Como ensinar a resolução da equação do segundo grau através do recurso didático do teatro? Para responder a esta questão, realizou-se um estudo sobre as dimensões do problema didático, a partir das dimensões epistemológica, econômica e ecológica. Este estudo e pesquisa tem como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD). A partir dos resultados deste estudo, propomos um Modelo Didático de Referência (MDR), o qual contribui para o desenvolvimento de um roteiro de uma peça teatral, a partir de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), explicitando a possibilidade de abordar diferentes contextos que envolvem diferentes praxeologias para a resolução da equação do segundo grau. Espera-se que a proposta deste MDR possa contribuir para discussões a respeito deste objeto matemático no que se refere ao estudo das diferentes resoluções da equação do segundo grau a partir de uma proposta de ensino através do teatro.

ABSTRACT

This work refers to the study and research of the dimensions of the didactic problem: How to teach the resolution of quadratic equation through the didactic resource of the theater? To answer this question, a study was carried out on the dimensions of the didactic problem, from the epistemological, economic and ecological dimensions. This study and research has as its theoretical contribution the Anthropological Theory of Didactic (ADT). Based on the results of this study, we propose a Didactic Model of Reference (DMR), which contributes to the development of a script for a theatrical play, based on a Study and Research Path (SRP), explaining the possibility of approaching different contexts that involve different praxeologies for solving the quadratic equation. It is expected that the proposal of this DMR can contribute to discussions about this mathematical object with regard to the study of the different resolutions of the quadratic equation from a teaching proposal through theater.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A escolha do tema da pesquisa advém de questionamentos de quando era aluno do ensino médio, período no qual realizei atividades de teatro em diversas disciplinas, exceto na disciplina de matemática. Acho importante enfatizar que em toda minha trajetória como estudante nunca vivenciei a experiência do teatro na disciplina de Matemática. Dessa forma surgiu o seguinte questionamento: Como utilizar o teatro como um recurso didático nas aulas de matemática?

Diante deste questionamento é que surgiu o interesse em estudar e pesquisar sobre a utilização do teatro como recurso didático para o ensino de matemática, buscando trazer reflexões e discussões de como a arte pode auxiliar no ensino desta tão "temida" disciplina, conforme relatado por Kunwar (2020), o qual evidencia em sua pesquisa sobre a fobia matemática, relacionada a crença de que a matemática é um assunto difícil.

Quando falamos sobre o ensino da matemática podemos observar muitas discussões acerca da contextualização do ensino. O parágrafo 1º do artigo 8º das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, afirma:

> *[...] o currículo deve contemplar as quatro áreas do conhecimento, com tratamento metodológico que evidencie a contextualização, a diversificação e a transdisciplinaridade ou formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos, contemplando vivências práticas e vinculando a educação escolar ao mundo do trabalho e à prática social. (BRASIL, 2011, p. 58)*

D'Ambrosio (2009, p. 31, 32), cita a dificuldade de motivar a aprendizagem de matemática por meio da realidade atual considerando que os objetos matemáticos que são estudados foram desenvolvidos em outras épocas e propõe em resposta a isso um equilíbrio do histórico matemático com atividades que busquem resultados mais imediatos, para isso colocando o aluno como indivíduo em destaque no processo, de modo a individualizar esse trabalho.

Nesse sentido, acredita-se que o teatro pode ser usado como uma peça-chave para se trabalhar a disciplina em questão, pois, segundo Cartaxo (2001, apud LACERDA, 2013):

> *[...] o trabalho do Teatro na escola, mesmo caracterizando-se como uma ação formal e mesmo sendo ministrada por um professor habilitado para tal, em*

> *muitos casos ultrapassa o conteúdo programático do ensino de arte e passa a ser usado como recurso didático para outras disciplinas, caracterizando-se assim como um recurso pedagógico importante, cuja ação didática se justifica e é enaltecida em função de sua dinâmica na rotina escolar.*

Com base nestas considerações, o teatro assume a função de ferramenta para destacar este fator histórico da matemática, apontado por D'Ambrosio, ao mesmo tempo que o aluno pode assimilar isto com sua realidade atual, afinal "o Teatro é forte porque explica o mundo que está em nossa volta através do divertimento, da análise e da crítica." (CARTAXO, 2001)

Estas considerações, reafirmam o interesse em estudar e pesquisar sobre a utilização do teatro como um recurso didático em aulas de matemática, mais especificamente como um recurso didático no ensino e aprendizagem de resolução da equação do segundo grau. Pois segundo as pesquisas realizadas, os alunos apresentam muitas dificuldades na compreensão da resolução de equações do segundo grau. Gomes (2015) em seu trabalho relata a dificuldade dos alunos não só na compreensão da resolução, como também nas propriedades das equações de segundo grau. Avelino, Souza e Santos (2019) também relatam dificuldades vivenciadas por alunos ao estudar equações do segundo grau da mesma forma que Kuroiwa (2016) comenta sobre dificuldades que, segundo a autora, são "notórias" quando se fala sobre o aprendizado dos alunos relativo ao tema.

Dessa forma, a partir de um estudo sobre o problema didático: Como ensinar a resolução da equação do segundo grau através do recurso didático do teatro? Esperamos responder a esta pergunta a partir do desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR), de tal forma que fique explícito os resultados das investigações realizadas e evidencie a maneira como o teatro pode auxiliar no ensino da resolução da equação do segundo grau.

1.1 Objetivo Geral e Específicos da Pesquisa

Objetivo Geral:

Desenvolver um Modelo Didático de Referência (MDR) para o ensino da resolução da equação do segundo grau a partir do protótipo de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) evidenciado na forma de um roteiro de uma peça teatral.

Objetivos Específicos:

- Realizar um estudo dos construtos da Teoria Antropológica do Didático e do Percurso de Estudo e pesquisa a fim de embasar o roteiro da peça teatral;

- Estudar a dimensão epistemológica, econômica e ecológica do problema didático associado a equação do segundo grau.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Teoria Antropológica da Didático

Segundo Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2007, p. 111), essa teoria estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas. Um motivo para utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Assim sendo, a TAD considera como elementos primitivos: Instituições (I), Indivíduos (X) e Objeto (O). Já as relações pessoais (R(X,O)) e as relações institucionais (RI(O)) são noções básicas nesta teoria.

Uma parte da teorização da TAD consiste do desenvolvimento da noção de organização praxeólogica que, de acordo com Chevallard (1998, apud ARAUJO, 2009), acrescenta às noções acima descritas, as noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar as práticas sociais em geral e, em particular, as atividades matemáticas.

Os tipos de tarefas (T) que se situam em acordo com princípio antropológico supõem a existência de objetos bem precisos e que não são obtidos diretamente da natureza: eles são artefatos, obras, construtos institucionais, como por exemplo, uma sala de aula, cuja reconstrução é inteiramente um problema, que é o objeto da didática (CHEVALLARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

Uma técnica (τ) é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas. Segundo Chevallard, uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T necessita, em princípio, de uma técnica relativa. No entanto, ele afirma que uma determinada técnica pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas; ela pode funcionar para uma parte P(τ) das tarefas T e fracassar para T/P(τ). Isso significa que em uma praxeologia pode existir uma técnica superior a outras técnicas, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de T (CHEVALLARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

A tecnologia (θ) é definida inicialmente como um discurso racional sobre uma técnica, cujo primeiro objetivo consiste em justificá-la racionalmente. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica. (CHEVALARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

A teoria (Θ) tem como objetivos justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. (CHEVALLARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

Neste trabalho de pesquisa a TAD é de fundamental importância para a análise das praxeologias matemáticas: tipo de exercício (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ) da atividade matemática.

2.2 Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

O PEP é um construto teórico da TAD e, segundo Chevallard (2009), é resultado da didática de investigação codisciplinar. Para explicitar um PEP, é preciso compreender a noção de Sistema Didático (SD) na perspectiva da TAD.

No SD, no qual o PEP está inserido, a aposta didática é uma questão Q_0 geradora de novos questionamentos e de respostas, ou seja, $S(X,Y, Q_0)$. O objetivo é responder à questão Q_0. Para isso, é preciso desenvolver um meio *M*, o qual é composto de questões derivadas de Q_0, de respostas já “prontas” em relação a Q_0, validadas por uma ou mais instituições, nomeadas de $R^{\lozenge}$. A análise das respostas $R^{\lozenge}$ fornece elementos para a construção da resposta $R^{\heartsuit}$. As obras (O) e os dados coletados durante o PEP, também compõem o meio *M* e fornecem ferramentas para análise das respostas $R^{\lozenge}$. Simbolicamente, podemos compreender o SD a partir do esquema Herbartiano que pode ser denotado, segundo Chevallard (2011), por

$$(S\ (X;\ Y;\ Q) \Rightarrow M) \Rightarrow R^{\heartsuit}$$

onde M é o meio, que na sua forma desenvolvida é expresso por

$$[S\ (X;\ Y;\ Q) \Rightarrow \{R_1^{\lozenge},\ R_2^{\lozenge},\ ...,\ R_n^{\lozenge},\ O_{m+1},\ ...,\ O_m\}] \Rightarrow R^{\heartsuit}$$

Neste trabalho, a questão geradora do PEP surgirá a partir das análises das dimensões do problema didático: Como ensinar a resolução da equação do segundo grau através do recurso didático do teatro?

O PEP se referirá ao roteiro de uma peça de teatro, que evidenciará um sistema ***S,*** o qual diz respeito ao estudo e investigação do pesquisador para o desenvolvimento do MDR, onde em $\boldsymbol{S}$(X; Y; Q_0), X = {x_1} e x_1 simboliza o pesquisador estudando as dimensões do problema didático para o desenvolvimento do MDR, a fim de verificar as possibilidades de adequá-lo a uma situação de ensino e/ou a um contexto de atividade de formação de professores, onde o aluno e/ou professor é hipotético e, e Y= {y_1}a orientadora de TCC.

2.3 Metodologia

O trabalho de pesquisa é de cunho qualitativo, o que, de acordo com Creswell (2010), é um meio de se explorar e entender o significado que indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano. Para Garcia (2006), o adjetivo “qualitativo” é adequado às pesquisas que reconhecem:

> *(a) a transitividade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARCIA, 2006, p. 88).*

Dessa forma, a metodologia de pesquisa é qualitativa e o desenvolvimento tem como aporte teórico os fundamentos da TAD para a análise das dimensões do problema didático: Como ensinar a resolução da equação do segundo grau através do recurso didático do teatro?

3 AS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO

O problema didático da modelação matemática no âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD), segundo Gascón (2011b apud FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013) pode ser descrito pelo seguinte esquema heurístico: $\{[(P_0 \otimes P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$ sendo P_0 a formulação do problema inicial, denominado problema docente P_0 e o problema didático P_δ, que contém as três dimensões: dimensão epistemológica P_1; a dimensão econômica-Institucional P_2 e a dimensão ecológica P_3. O símbolo $\otimes$ refere-se a P_0 por ser incompleto, sendo necessário adicionar ao menos a dimensão epistemológica P_1 para ser considerado um problema.

Nas próximas seções apresentaremos o estudo e pesquisa a respeito de cada dimensão do problema didático e o MDR.

3.1 Dimensão Epistemológica

Na dimensão epistemológica realizamos um estudo do ponto de vista da História da Matemática, o que implica em através da história identificar a Razão de Ser do objeto matemático, ou seja, investigar na perspectiva da história da matemática, em quais situações este objeto se fazia presente e, qual o papel do mesmo e/ou importância nestas situações e/ou contextos. Além disso, também trazemos um olhar na perspectiva da epistemologia do teatro e a educação. E, a partir de uma pesquisa em artigos científicos sobre o estudo da equação do segundo grau, procuramos investigar a razão de ser do objeto matemático nestes trabalhos.

3.1.1 Contexto histórico da equação do segundo grau

D'Ambrosio (2009, p. 29), coloca a história da matemática como "essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino" além de um importante fator motivador.

Pensando nisso, se torna indispensável um olhar histórico referente à equação do segundo grau, portanto, nesta seção tendo como referência Pedroso (2010) e Roque (2012, p. 237-247), discorremos sobre a história da equação do segundo grau procurando verificar os problemas resolvidos pelos estudiosos respectivos a cada época e os registros dos métodos de resolução deixados por eles.

Começamos falando sobre os povos do Egito que possuem escrituras remetidas a mais de 1500 anos a.C. Alguns dos registros deixados são o papiro de Berlim, o papiro de Rhind e o papiro de Kahun que trazem o método de falsa posição, como uma técnica (τ) utilizada por este povo para resolução das equações de grau dois.

Um exemplo, de tarefa (t_1) presente no papiro de Berlim diz:

t_1: "A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desse quadrado" (PEDROSO, 2010).

Algebricamente isso nos dá

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{3}{4}x \end{cases}$$

Usando, a técnica da falsa posição (τ_1) tomamos:

- $x = 3$ e $y = 4$
- Assim, temos $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \neq 100$, logo 3 e 4 não são soluções para a equação. O próximo passo, portanto, será encontrar uma constante que multiplicada na expressão resulte no desejado. Para isso:
- $100 \div 25 = 4$. Realizando a multiplicação do primeiro membro da equação do segundo passo por 4, teremos $4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 36 + 64 = 100$, que é onde queríamos chegar.
- Note que $4 = 2^2$, sendo assim podemos reescrever o primeiro membro da equação como $2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 = 6^2 + 8^2$, portanto 6 e 8 são as raízes da equação.

O problema tratado pertence à área do conhecimento de Álgebra (Θ_1), e seu método resolutivo consiste em testar dois números arbitrários como sendo raízes da equação e partir destes números encontrar a proporção que multiplicada por estes números resultará nas raízes que satisfazem o sistema de equações (θ_1).

Seguindo a linha cronológica da história chegamos na Mesopotâmia onde os povos resolviam as equações dando apenas uma raiz aos seus resultados, registrando isso em tabuletas de barro. Um dos primeiros problemas mesopotâmicos de que se tem conhecimento e relacionado a equações do segundo grau, é o seguinte:

t_2: “A diferença entre a área de um quadrado e seu lado é 870 . Encontrar o valor do lado desse quadrado.” (PEDROSO, 2010)

Usando as notações atuais, interpretamos este problema a partir da equação: $x^2 - x = 870$.

Para solucionar o problema utilizavam a seguinte técnica (τ_2):

- Tome o coeficiente de x pela metade $(\frac{1}{2})$ e multiplique por ele mesmo $(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25)$
- Some o resultado ao termo independente $(870 + 0{,}25 = 870{,}25)$.
- Do resultado temos um quadrado $(870{,}25 = 29{,}5^2)$ que somado à metade de 1 (coeficiente de x) é igual a 30, que é o valor do lado desejado.

Neste problema algébrico (Θ_2) veremos posteriormente que seu método resolutivo se assemelha muito ao método utilizado por outros povos para completar quadrados (θ_2). Nesse método também é possível notar que, ao se considerar a equação do exemplo em termos gerais temos $ax^2 + bx = c$ e usando essa notação podemos generalizar o método para $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$ que, com o passar dos anos, evoluiu até se tornar a fórmula que hoje em dia é usada para resolver tais equações, portanto, podemos dizer que mesmo que o conceito de álgebra e o emprego de fórmulas para resolução de problemas relacionados à equação de segundo grau sejam muito recentes, a ideia da técnica que conhecemos é muito antiga.

Partimos agora para a Grécia antiga, onde os problemas matemáticos deixam de ter cunho prático como os dos povos citados anteriormente e passam a assumir caráter mais abstrato, além de, principalmente depois da publicação dos trabalhos de Euclides em seu livro "Os Elementos da Geometria", assumir também resoluções geométricas para seus problemas. Não obstante, as soluções para suas equações de segundo grau assumem essas características, sendo possível encontrar, inclusive na obra de Euclides, proposições (Proposição 28 – Livro VI) relacionadas.

> t_3: *Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre a metade do segmento de reta. Em linguagem atual, $x^2 - px + q^2 = 0$, em que p e q são segmentos dados. (PEDROSO, 2010)*

Segue a técnica (τ_3) encontrada no livro de Euclides para resolver este problema:

Considere um segmento $\overline{AB} = p$ com ponto médio em P e um segmento $\overline{PC}$ ortogonal a $\overline{AB}$ de modo que $\overline{PC}$ seja menor que $\overline{AP}$. Chamaremos $\overline{AB}$ de p e $\overline{PC}$ de q. Para resolver a equação basta encontrarmos um ponto Q em $\overline{AB}$ de modo que $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = q^2$ e $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$. Para encontrar esse ponto Q tome:

- Com centro no ponto $C \in \overline{PC}$ uma circunferência de raio $\frac{p}{2}$;
- A circunferência corta o segmento p em dois pontos Q e Q'. Torna-se equivalente tomar Q ou Q' na sequência de passos. Seja então o ponto Q;
- Considere o triângulo PCQ, retângulo em P, pelo teorema de Pitágoras, segue:

$$q^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2$$

- Pela diferença de quadrados:

$$q^2 = (\overline{PB} + \overline{PQ}) \cdot (\overline{PB} - \overline{PQ}) \ (*)$$

- Sendo $\overline{PB} = \overline{AP}$, então $\overline{PB} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AQ}$ (1). Como Q está entre P e Q, $\overline{PB} - \overline{PQ} = \overline{QB}$ (2), logo, usando (1) e (2) em $(*)$

$$q^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{QB} \ (3)$$

- Ainda, como Q está entre A e B temos

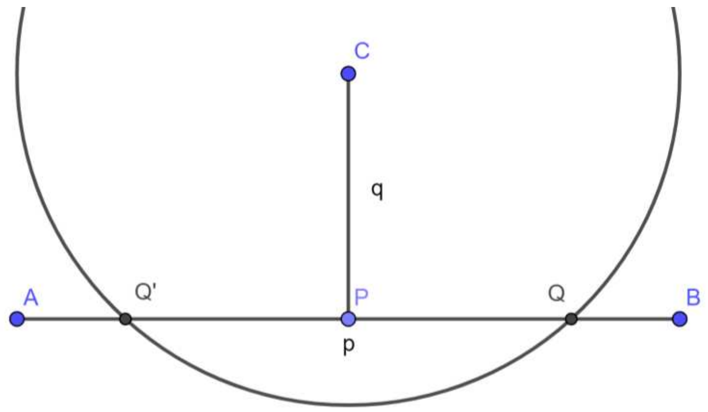
$$p = \overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{QB} \ (4)$$

- Por fim, considerando as equações de Girard, dada a equação do segundo grau $x^2 - px + q^2 = 0$, suas raízes são dois números r e s tais que $r + s = p$ e $r \cdot s = q^2$ (conhecido como soma e produto). Portanto, tomando $\overline{AQ} = r$ e $\overline{QB} = s$, temos, por (3) e (4):

$$r \cdot s = p^2 \text{ e } r + s = p$$

Ou seja, r e s são raízes da equação.

Figura 1- Construção da solução da tarefa 3



Fonte: Autoria própria (2022)

Diferente dos outros problemas já apresentados, este pertence à área do conhecimento de Geometria (Θ_3) e em sua técnica (τ_3) faz construções geométricas e com o uso do método de soma e produto, derivado das equações de Girard (θ_3) encontra as raízes da equação

Não sendo esta sua única menção a resultados relativos à equação de segundo grau em seu livro VI (Proposição 29 – Livro VI):

> t_4*: Prolongar um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado. Em linguagem atual,* $x^2 - px - q^2 = 0$*. (PEDROSO, 2010)*

Na técnica (τ_4) para esta equação considere:

- Um segmento $AB = p$ e uma extensão $BC = q$ ortogonal à p.
- Partindo disso, considere P ponto médio de p e, como centro em P e raio $\overline{PC}$, trace uma circunferência. Esta circunferência corta a reta que contém o segmento $\overline{AB}$ em dois pontos Q e Q' (tome o Q na mesma semirreta $\overrightarrow{AB}$ dado é equivalente)
- Logo, $\overline{PC} = \overline{PQ}$ visto que ambos são raios da mesma circunferência.
- Considerando o triângulo PBC, retângulo em B, temos:

$$q^2 = \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2$$

Mas como $\overline{PC} = \overline{PQ}$, segue:

$$q^2 = \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2$$

- Pela diferença de quadrados:

$$q^2 = (\overline{PQ} + \overline{PB}) \cdot (\overline{PQ} - \overline{PB}) \ (*)$$

- Como B está entre P e Q, $(\overline{PQ} - \overline{PB}) = \overline{QB}$. (1) E ainda, como P é ponto médio de $\overline{AB}$, $\overline{PB} = \overline{PA}$ (2). Usando (1) e (2) em $(*)$, temos

$$q^2 = (\overline{PQ} + \overline{PA}) \cdot \overline{QB}$$

- Mas como P está entre A e Q, $\overline{PQ} + \overline{PA} = \overline{AQ}$. Portanto:

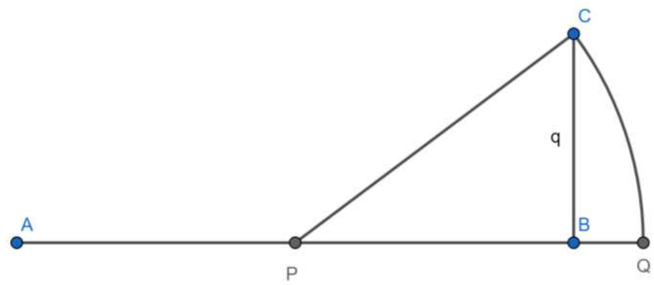
$$q^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{QB}$$

- Ainda, $\overline{AB} = \overline{AQ} - \overline{QB}$, pois B fica entre A e Q. Logo, ao tomar $\overline{AQ} = r$ e $\overline{BQ} = s$, segue

$$p = r - s \text{ e } r \cdot s = q^2$$

Que, pelas equações de Girard, r e s são raízes da equação.

Figura 2- Construção da solução da tarefa 4



Fonte: Autoria própria (2022)

A resolução deste problema acaba sendo muito semelhante ao anterior, sendo também relativo à Geometria (Θ_4) e nas construções realizadas o conceito de soma e produto deixado pelas equações de Girard (θ_4) é necessário para encontrar a solução.

Temos uma terceira menção de Euclides a equações de segundo grau, Euclides coloca em seu Livro II (Proposição 11 – Livro II):

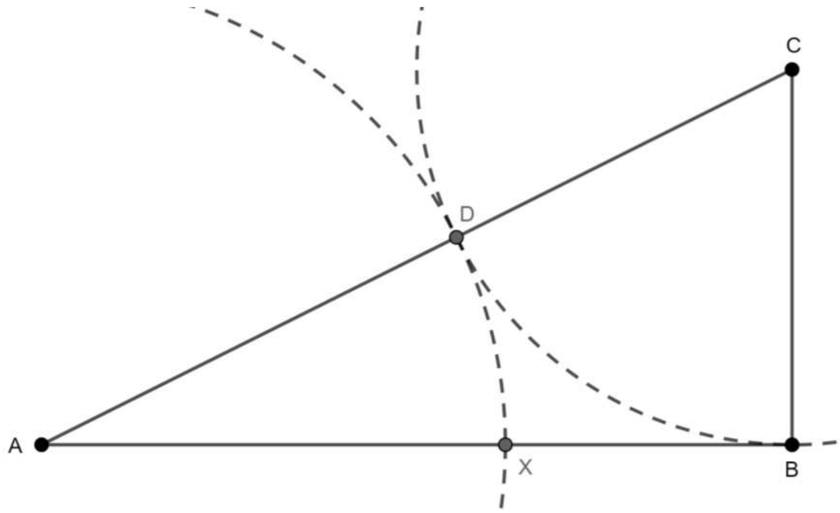
> ***t_5* (segmento áureo):** *Dividir uma linha reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes tenha área igual à do quadrado sobre a outra parte. De forma equivalente, dado um segmento de reta $\overline{AB}$, deve-se determinar o ponto X desse segmento tal que o retângulo de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AX}$ tenha a mesma área do quadrado de lado $\overline{XB}$. (PEDROSO, 2010)*

Na técnica (τ_5) para resolver este problema considere:

O segmento $\overline{AB}$ denotado como a e $\overline{AX}$ denotado como x que implica na equação $a \cdot (a - x) = x^2$ cujo a solução se dá pelas seguintes construções:

- Construa o triângulo retângulo ABC reto em B e que tem os catetos a e $\frac{a}{2}$;
- Com centro em C e raio $\overline{BC}$ trace uma circunferência c que cortará $\overline{AC}$ em um ponto D.
- Agora, com centro em A e raio $\overline{AD}$ trace uma circunferência d que cortará $\overline{AB}$ em X;
- Pelo Teorema de Pitágoras, temos
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \ (*)$$
- Dado que $\overline{AX} = x$ e, por construção, $\overline{AX} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = x$ da mesma forma que $\overline{DX} = \overline{BC} = \frac{a}{2}$. Isso aplicado em ($*$) implica:
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + ax - a^2 \Rightarrow x^2 = a(a - x)$$
Que é equivalente à nossa equação inicial, portanto, $\overline{AX}$ é raiz da equação.

Figura 3- Construção da solução da tarefa 5



Fonte: Autoria própria (2022)

Assim como no problema anterior, este tem caráter geométrico (Θ_5) e nas construções geométricas realizadas é necessário e suficiente o conceito do Teorema de Pitágoras (θ_5) para encontrar a solução do problema.

Avançamos até o período entre os séculos VI e XI em que na Índia vários matemáticos tiveram grandes resultados nas resoluções de equações do segundo grau. Falaremos mais especificamente de Bhaskara, que viveu entre os anos 1114 e 1185 e teve publicações tratando da equação quadrática, sendo duas das mais importantes os livros *Lilavati* e *Bija-Ganita*[1].

Apesar da regra usada atualmente, no Brasil, carregar seu nome, é equivocado dizer que este autor foi quem a criou dado que em sua época não existia ainda o conceito de álgebra e, portanto, não faz sentido falar de fórmulas nesse período. O método de Bhaskara, apesar de sempre apresentar exemplos numéricos, ainda apresenta uma generalização e por ser totalmente retórico, cabe destacar os termos usados para indicar as operações, para que assim possamos melhor entender as soluções dadas por eles:

- ya, que abrevia $yavattavat$ representa a primeira incógnita;

[1] Pedroso (2010) comenta que Lilavati *é o nome da filha do autor e o título do livro se dá em sua homenagem, já* Bija-Ganita *se traduz como "semente do cálculo".*

- ka, abreviação de $kalaka$, indica a segunda incógnita;
- v, de $varga$, é a notação para potência dois;
- Um número sob um ponto significa que o número é menor que zero;
- bha, de $bhavita$, é a notação para um produto;
- ru, ou $rupa$, representa os números "comuns";
- Por fim, k,de $karana$, indica um radical ou irracional.

Podemos agora elencar um dos problemas dados por Bhaskara em seu livro *Bija-Ganita*:

> *t_6: De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Esse grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame? (ROQUE, 2012, p. 241)*

Para interpretar o problema era tomado $ya\ v\ 2\ (2x^2)$ como sendo o número de abelhas do enxame e a raiz quadrada da metade desse número como $ya\ 1\ (\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x)$. $ya\ v\ \frac{16}{9}\ (\frac{16}{9}x^2)$ representava os oito nonos do total de abelhas. Logo, para descobrir quantas abelhas compunham o enxame, é preciso somar o termo desconhecido com a fração e o casal de abelhas $(x + \frac{16}{9}x^2 + 2 = 2x^2)$

Dada a equação, os passos tomados por Bhaskara em seu método de resolução (τ_6) são:

- Eliminar o denominador, multiplicando por 9 os dois membros da equação e resultando em $16x^2 + 9x + 18 = 18x^2$ de onde subtraímos $(16x^2 + 9x)$, também de ambos os membros, e obtemos $2x^2 - 9x = 18$;
- Para reduzir o grau da equação se usa o método de completar quadrados, que também é descrito no *Bija-Ganita*, no qual, os dois lados da igualdade são multiplicados por 8 e do resultante se acrescenta 81, transformando a equação em $16x^2 - 72x + 81 = 225$. Tendo um quadrado em ambos os termos, podemos reescrevê-lo como $4x - 9 = 15$;

- Por fim, resolvemos a equação resultante e obtemos 6 como raiz, o que implica que a quantidade de abelhas $2x^2$ é 72.

Neste problema da área da Álgebra (Θ_6) o método resolutivo se dá fazendo a eliminação do termo médio (θ_6), onde acabamos reduzindo o grau da equação de dois para um o que torna os cálculos para determinação do valor desconhecidos mais diretos, se desvencilhando do obstáculo de lidar com uma incógnita de grau dois.

Quanto aos árabes, com a criação do centro científico nomeado Casa do Saber, foi publicado, por Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi o livro *Hisab al-jabr wa'lmuqabalah*[2] que apresentava estudos sobre a equação do segundo grau e sua resolução, sendo demonstrada pelo método de completar quadrados.

Para falarmos dos exemplos dados por al-Khowarizmi é interessante colocarmos as notações usadas por ele, sendo elas, comparadas a linguagem contemporânea, as expressas na seguinte tabela 1:

Quadro 1- Comparação entra as notações 1

Palavra	Significado na língua corrente	Sentido nos problemas	Notação atual
Adad	Número ou quantidade de dinheiro	Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	Raiz	Quantidade desconhecida	x
Mal	Possessão ou tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

[2] *Segundo Pedroso (2010) a tradução do título pode ser dada como* Ciência da restauração *ou* Ciência das equações*, sendo* al-jabr *o que al-Khowarizmi usa para se referenciar à álgebra, e essa a primeira vez a ser usado o termo.*

Fonte: Adaptado de Roque (2012, p. 250)

Sabendo disso, considere o exemplo descrito por Roque (2012, p.252):

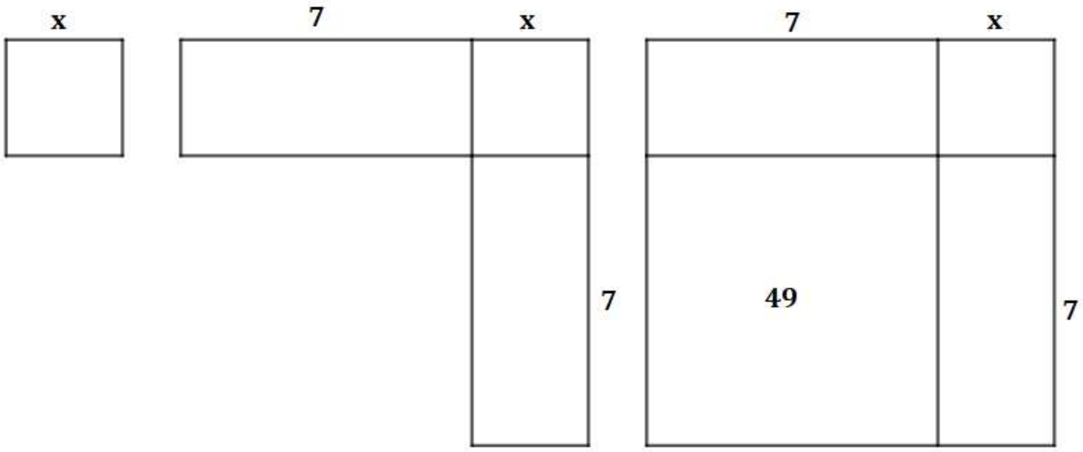
t_7: “umMal e dezJidhr igualam 39 dinares”

Esse problema pode ser interpretado pela equação $x^2 + 10x = 39$. Na técnica (τ_7) descrita por al-Khowarizmi, os passos seguidos são:

- Tome a metade da quantidade de *Jidhr*;
- Faça a multiplicação do resultado por ele próprio;
- Some o número encontrado a *Adad*;
- Calcule a raiz do resultante;
- Subtraia desse valor a metade de *Jidhr* e terá a solução.

Em sua demonstração a partir da construção geométrica (θ_7) al-Khowarizmi toma um quadrado de lado x, onde sua área representará a incógnita quadrática. Do coeficiente da incógnita de grau um é tirado sua metade e formado dois retângulos com os lados tendo a medida encontrada e dois lados consecutivos do quadrado. A área da figura é igual ao termo independente. Por fim, basta completar o quadrado e temos a solução como sendo a área total do quadrado completo (que é igual ao termo independente somado ao quadrado da metade do coeficiente de x) menos o termo independente. Para melhor exemplificar, considere a equação $x^2 + 14x = 51$ e, assim, temos:

Figura 4- Representação geométrica da solução da tarefa 7



Fonte: Autoria própria (2022)

Na figura, note que $\frac{14}{2} = 7$ $(\frac{b}{2})$ representa o lado do quadrado que completa a figura. Sabemos que $x^2 + 14x = 51$, portanto $7^2 + 51 = 49 + 51 = 100$ $(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c)$ será a área total do quadrado completo. Tendo a área do quadrado, podemos calcular seu lado p, dado que $p = 7 + x$, logo $\sqrt{100} = 7 + x \Rightarrow 10 = 7 + x \Rightarrow x = 10 - 7 \Rightarrow x = 3$. Portanto, a raiz da equação é 3.

Em resumo, a regra dada por al-Khowarizmi se trata de $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$, mesmo método usado pelos mesopotâmicos anteriormente, porém demonstrada.

Posteriormente, os chineses apresentaram o método fan-fa para resolver suas equações de segundo grau, que consistia numa técnica de aproximações sucessivas até chegar em um resultado que não se alterasse. Dito isso, tome:

t_8: Encontrar a solução para a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$

Nesta técnica (τ_8) são tomados os seguintes passos:

- Uma solução aproximada s, para o caso desta equação tome $s = 19$, visto que o resultado se encontra entre 19 e 20, e desta solução se dá uma troca de variáveis, onde $y = s - x$, ou seja, $y = 19 - x$.

- Na troca de variáveis, uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$ se torna $a(s-x)^2 + b(s-x) = c$, realizando esse processo no exemplo dado temos $(19-x)^2 + 252(19-x) = 5292 \Rightarrow y^2 + 290y = 143$.

- Nessa nova equação a solução está entre 0 e 1. Disso conclui-se que a solução aproximada para a equação é $y = \frac{143}{291}$.

- Este valor encontrado somamos à nossa primeira solução aproximada e temos $x = 19 + \frac{143}{291} = 19{,}49$.

- Repetindo o processo com a equação resultante temos $z = 19{,}49 - y$ que implica na equação $z^2 + 290{,}98z = 0{,}66$. Como a solução aproximada também se encontra entre 0 e 1, podemos concluir que a solução aproximada para a equação é $z = \frac{0{,}66}{298{,}98} = 0{,}0022$. Fazendo a soma das soluções aproximadas tem-se $19{,}4922$.

Nesse ponto já podemos observar que os números das duas primeiras casas decimais não se alteram, ou seja, temos uma aproximação de duas casas decimais da raiz da equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$. Esse método utilizado pelos chineses em problema algébricos (Θ_8) se resume em construir uma sequência que converge, ou seja, que tem limite como sendo a raiz positiva da equação de segundo grau (θ_8).

Partindo para a Europa Ocidental, entre os séculos XV e XVII há diversos registros de matemáticos que, usando o mesmo método de Bhaskara, resolveram equações de segundo grau representando-as de formas distintas. Dentre eles, vale citar François Viète que, fazendo algumas substituições de variáveis, chegou na generalização que utilizamos atualmente para resolver equações de segundo grau. Os passos feitos por Viète, segundo Pedroso (2010), foram:

- *Seja* $x = u + z$;
- *Então substituindo em* $ax^2 + bx + c = 0$ *tem-se* $a(u+z)^2 + b(u+z) + c = 0$, *ou seja,* $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$
- *Se* $2az + b = 0$, *tem-se* $z = -\frac{b}{2a}$;
- *Substituindo* $z = -\frac{b}{2a}$ *em* $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$, *tem-se* $au^2 + (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + c) = 0$, *ou seja,* $au^2 = \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^2}{4a^2} - c = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$, *ou ainda,* $u = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$;

- *Finalmente substituindo os valores* $z = -\frac{b}{2a}$ *e* $u = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}$ *em* $x = u + z$*, tem-se* $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$*, ou seja,* $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$*. (PEDROSO, 2010)*

Não sendo esta a única contribuição de Viète, temos também:

- *Seja* $x + a = u$*;*
- *Então* $u^2 = x^2 + 2ax + a^2$*;*
- *Pela equação dada* $x^2 + 2ax = b$*, ou seja,* $u^2 = b + a^2$*;*
- *Logo* $(x + a)^2 = u^2 = b + a^2$ *e* $x = \sqrt{b + a^2} - a$*. (PEDROSO, 2010)*

Nos anos seguintes outras demonstrações foram dadas à essa fórmula, mas os passos realizados para resolver equações de grau dois foram, predominante, os nascidos com os mesopotâmicos e desenvolvidos com o passar do tempo até chegar nas salas de aula onde é ensinado atualmente.

O que podemos concluir das questões colocadas inicialmente é que nosso objeto de conhecimento é alvo de estudos desde tempos muito antigos e que por muitos anos foram desenvolvidas técnicas para sua resolução, algumas inovadoras, outras dadas pelos conhecimentos construídos ao longo das épocas. Podemos observar que para cada povo e/ou civilização, o papel da equação do segundo grau e a técnica de resolução são associados às características de um povo e de seu contexto histórico, principalmente no que diz respeito a forma como os problemas são apresentados.

3.1.2 Razão de ser da equação do segundo grau de acordo com alguns pesquisadores

Ao procurar artigos que tratassem do assunto aqui pesquisado realizamos uma busca nas plataformas SciELO e Google Scholar usando as palavras-chave “teatro” e “equação do segundo grau” e, no total, um artigo, intitulado “Teatro e História da Matemática: uma possibilidade para o ensino de funções e equações do segundo grau”, dos autores Tedesco et al (2019) foi encontrado.

A pesquisa de Tedesco et al. (2019), relata uma experiência com alunos do Ensino de Jovens e Adultos (EJA) onde uma atividade de teatro de fantoches foi realizada buscando uma retomada do conteúdo de equação do segundo grau. Os autores salientam que o teatro possibilita ao discente assimilar as situações vividas pelos personagens com seu próprio cotidiano (VARGAS, 2007, apud. TEDESCO et al., 2019), além de proporcionar divertimento e criticidade (CARTAXO, 2001, apud. TEDESCO et al., 2019).

Também colocam que o olhar histórico da matemática como uma construção humana permite conexões entre o fazer matemático do passado com o presente, podendo assim, ser desenvolvidos valores e atitudes mais favoráveis do aluno mediante ao saber matemático (BRASIL, 2002, apud. TEDESCO et al., 2019).

Em uma pesquisa posterior entre os artigos publicados na revista “Educação Matemática Pesquisa” usando as palavras-chave “equação do segundo grau” um artigo foi encontrado e é intitulado “Equações do segundo grau em videoaulas: uma análise praxeológica no YouTube Edu” de autoria de Menezes; Silva (2022). Neste trabalho, os autores relatam que o tema escolhido sobre equações do segundo grau, é devido a situações vividas enquanto docentes em que alunos questionavam sobre aplicabilidades do tema no dia a dia, como descobriram a fórmula resolutiva e sobre os métodos de resolução. Nesse contexto, alguns vídeos da plataforma YouTube Edu que tratavam desse assunto foram analisados e desses vídeos, uma única tarefa é apresentada pelos autores, sendo esta “resolver uma equação de segundo grau”.

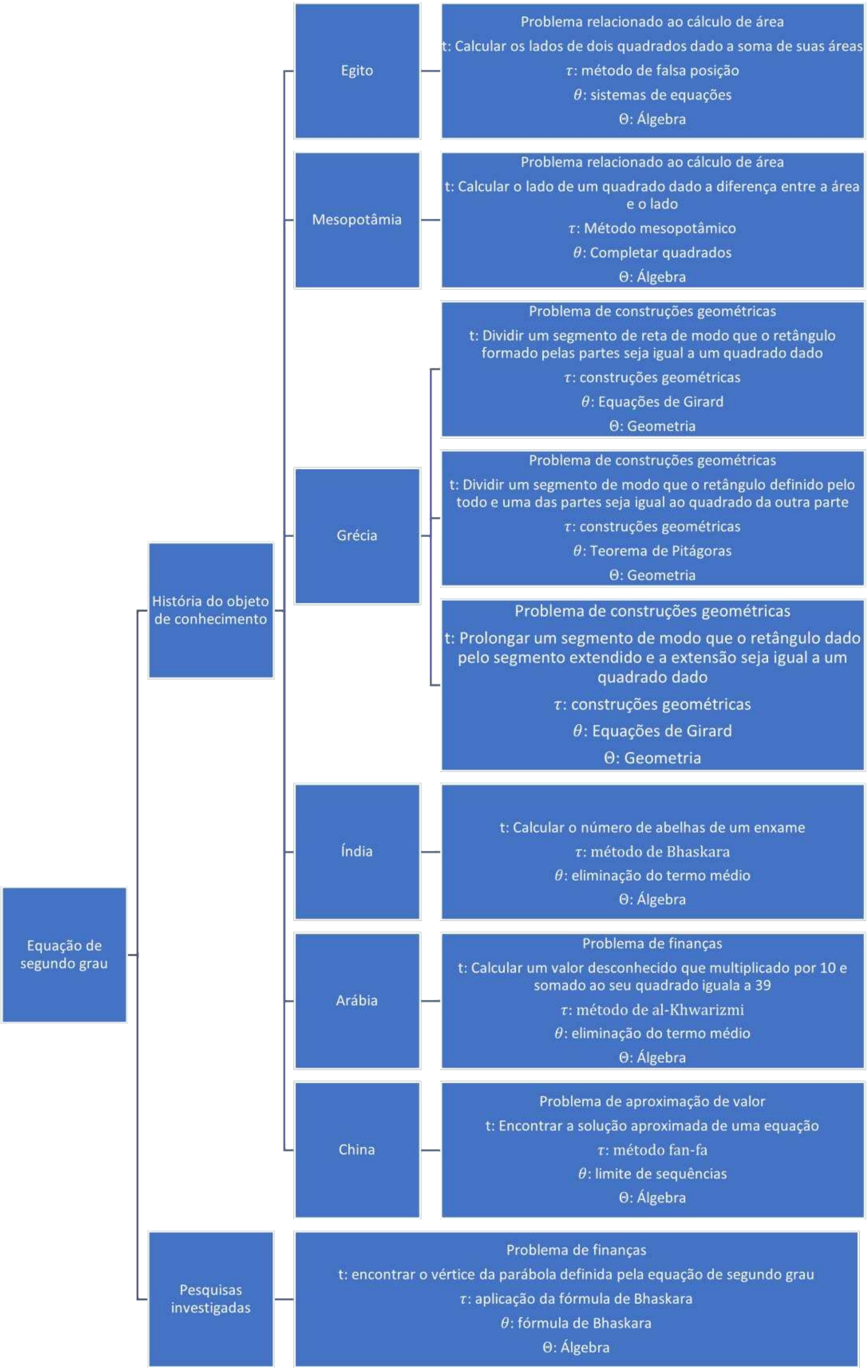
Na revista “Ensina UFMS” usando as mesmas palavras-chave encontramos também um artigo publicado, intitulado como “O Tema de Equações do Segundo Grau como Espaço para a Generalização” de autoria de Neto e Carvalho (2021), em que os autores procuram uma forma de apresentar aos alunos do ensino básico generalizações para uma equação de segundo grau. Os autores trazem um problema de geometria cuja tarefa é mensurar as dimensões de uma sala retangular dados a área da sala e a relação entre suas dimensões. A técnica utilizada e desenvolvida pelos autores para resolver o problema é a técnica de completar quadrados. Posteriormente, os autores sugerem outros problemas possíveis de serem repassados aos alunos, sendo estes problemas de geometria, finanças e algébricos.

Na perspectiva destes trabalhos, a razão de ser da equação do segundo grau está associada a contextos de problemas de finanças, geometria e contagem, aparecendo em mais de um problema.

3.1.3 Modelo Epistemológico de Referência (MER)

Após o relato referente a perspectiva histórica da equação do segundo grau através das civilizações, construímos o Modelo Epistemológico de Referência (MER), Figura 5:

Figure 5- Modelo Epistemológico de Referência



Fonte: Autoria propria (2022)

A partir do MER, podemos perceber uma diversidade de métodos, os quais poderiam ser introduzidos no contexto de sala de aula para os alunos fazerem uso em suas resoluções ou mesmo para auxiliar no processo de dedução de generalizações. Portanto, o conhecimento desta diversidade de métodos (técnicas, segundo a TAD) por parte do professor, amplia o seu equipamento praxeológico e, lhe dá mais possibilidades de apresentar aos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem os diferentes contextos de problemas envolvendo a equação do segundo grau e, consequentemente as suas diferentes técnicas de resolução, ampliando o meio de interação do aluno com o objeto matemático.

3.1.4 Contexto histórico do Teatro na Educação

Historicamente o teatro estabelece uma relação direta com o ato de ensinar, não necessariamente falando de conteúdos escolares, mas sobre diversos assuntos, ideais e comportamentos. Nas sociedades gregas o teatro era um meio de disseminar valores morais e éticos. A tragédia, gênero teatral mais popular na Grécia, trazia heróis gregos que praticavam atos desagradáveis aos deuses e, por consequência, acabavam por enfrentar desafios recorrentes aos seus atos. Mesmo a comédia trazia em seus elementos caráter político ao zombar de outros atores, filósofos ou mesmo representantes sociais.

Esse tom satírico fez com que o teatro fosse condenado pela igreja na Idade Média, até a adaptação de São Tomás de Aquino, que deu ao teatro um caráter predominantemente voltado à educação religiosa, sendo usado na catequização de ateus e pagãos. Assim como no teatro grego, os escritores medievais deixam marcadas suas intencionalidades em suas peças, chamadas de mistérios, pregando seu Deus único e salvador, “a quem se devia temer e adorar; e o caminho da salvação, o Cristo Jesus, filho único de Deus, que veio à Terra para salvar os homens” (MENDES FILHO e PAIVA, 2016). As peças teatrais desse período eram inicialmente realizadas dentro de igrejas e mosteiros, mas posteriormente passaram a ser exibidas em praças públicas.

Foi neste contexto que o teatro chegou ao Brasil, sendo utilizado pelos padres jesuítas para catequizar o povo nativo. As peças, escritas no idioma tupi-guarani e latim, intencionavam converter o povo indígena à religião católica, crença dos colonizadores europeus. Posteriormente, no século XIX, o teatro no Brasil buscou trazer em sua essência o patriotismo, em contraponto à sua origem, era possível observar nas peças brasileiras uma crítica à importância que era dada ao que era estrangeiro. Dessa forma, buscava ainda aliar o divertimento com o ato de ensinar.

Passando para o século XX, temos Bertold Brecht, escritor judeu-alemão, buscando inovações no contexto da dramaturgia. Mas diferentemente da maioria das estéticas teatrais que vimos até então, Brecht se opôs ao ideal grego. O teatro, que até então remete a essas concepções que Brecht procurava se afastar, implicava certa passividade do público, que buscava apenas divertimento, fuga das adversidades da vida, e segundo Mendes Filho e Paiva (2016, p. 47), o dramaturgo considerava este estado de inércia do público um problema, visto que retardava uma evolução social.

Por conta disso, conforme o que diz Mendes Filho e Paiva (2016, p. 49), Brecht procurou tornar suas peças mais didáticas, fazendo com que o público se tornasse parte da peça, acreditando que, assim, incitaria uma reflexão sobre a função social de suas personagens numa perspectiva crítica. Sua busca pela criticidade podia apelar até mesmo pela quebra da quarta parede, que separa o público do palco, e trazendo uma dissociação do personagem ao ator, sendo possível ver o intérprete incitar um julgamento ao interpretado.

Os escritos de Brecht foram movidos pela sua crença numa utopia comunista e buscavam conscientizar o público, que também era povo, da luta de classes enfrentada na sociedade capitalista, não objetivando uma excelência na encenação ou montagem, mas uma apropriação de seus escritos para que assim pudessem ser reproduzidos.

Portanto, não é novidade que vejamos o teatro sendo usado para ensinar, visto que já é uma característica intrínseca a ele. Basta àquele que o utiliza buscar o que deseja transmitir.

3.2 Dimensão econômica

A dimensão econômica no problema didático se refere a um olhar na perspectiva institucional. Neste trabalho tomamos como referência a Base Nacional

Comum Curricular (BNCC), (BRASIL, 2018) e o livro didático (CASTRUCCI, 2018) adotado nas escolas estaduais da cidade de Pato Branco, município do estado do Paraná, procurando identificar como o objeto matemático existe na instituição. Neste caso, o MER é uma referência para esta análise e investigação a respeito dessas instituições. Esta análise permite explicitar o Modelo Epistemológico Dominante (MED).

Segue o resultado de nossa análise na BNCC.

3.2.1 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular é um documento que estabelece as competências e habilidades essenciais que os estudantes de todo o país têm o direito de desenvolver durante a Educação Básica e tem como objetivo assegurar aos estudantes o direito a uma educação com equidade e qualidade.

Referente ao objeto de estudo Equação do segundo grau, apresentamos o quadro 1, que estabelece o objeto de conhecimento no 9° ano do ensino fundamental e as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos ao estudarem esse assunto:

Quadro 2- Equações do 2° grau na BNCC

MATEMÁTICA – 9° ANO		
Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Álgebra	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais de 2° grau por meio de fatorações	(EF09MA09): Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau.

Fonte: adaptado de Brasil (2018, p. 316)

De acordo com as orientações da BNCC, Quadro 1, observa-se que as habilidades estão relacionadas a contextos puramente algébricos, diferentemente do que consta no MER. Neste caso, podemos dizer que na BNCC, a equação do segundo grau não está associada a perspectiva geométrica.

Na próxima seção apresentaremos o resultado da investigação realizada no livro didático adotado nas escolas do município de Pato Branco.

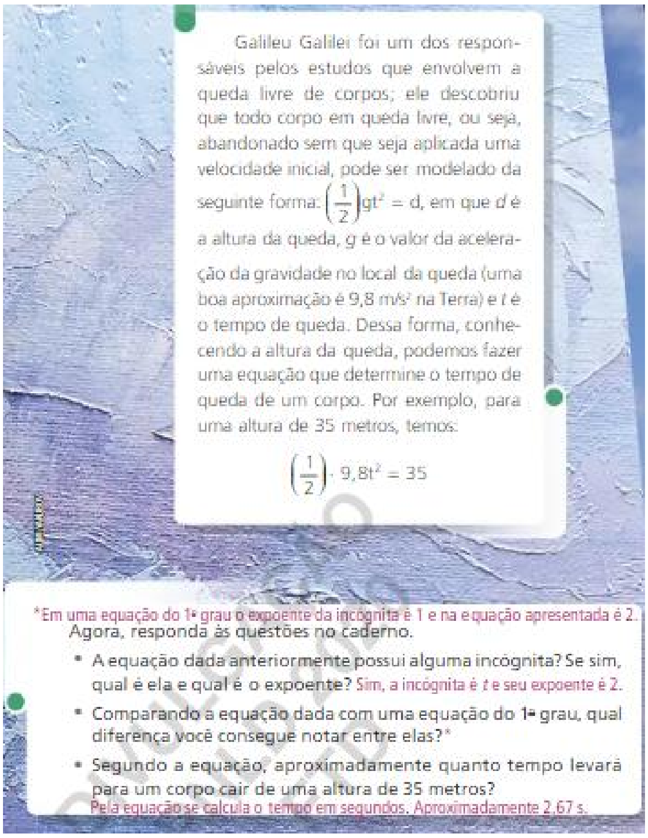
3.2.2 Livro didático

O livro didático vigente nas escolas do Núcleo de Educação de Pato Branco, Paraná é intitulado “A conquista da matemática” (CASTRUCCI, 2018), o qual é comum a todas as escolas pertencentes a este referido núcleo.

O livro didático é material de referência para o professor em sala de aula, e contempla os conteúdos programáticos de ensino acompanhados de sugestões para seu ensino. Desta forma, esse material pode servir como base para termos um parâmetro de como está posto a organização matemática e didática da equação do segundo grau.

O capítulo que aborda este assunto tem início na página 88 e traz inicialmente uma abordagem histórica do conteúdo de forma muito sucinta, apresentado a fórmula utilizada por Galileu Galilei para calcular a velocidade de corpos em queda livre e, posterior a essa apresentação, o autor introduz perguntas das quais se espera que o aluno responda elencando elementos de uma equação de grau dois.

Figura 6- Questão introdutória 1



Galileu Galilei foi um dos responsáveis pelos estudos que envolvem a queda livre de corpos; ele descobriu que todo corpo em queda livre, ou seja, abandonado sem que seja aplicada uma velocidade inicial, pode ser modelado da seguinte forma: $\left(\frac{1}{2}\right)gt^2 = d$, em que *d* é a altura da queda, *g* é o valor da aceleração da gravidade no local da queda (uma boa aproximação é 9,8 m/s² na Terra) e *t* é o tempo de queda. Dessa forma, conhecendo a altura da queda, podemos fazer uma equação que determine o tempo de queda de um corpo. Por exemplo, para uma altura de 35 metros, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 9{,}8t^2 = 35$$

*Em uma equação do 1º grau o expoente da incógnita é 1 e na equação apresentada é 2.

Agora, responda às questões no caderno.

- A equação dada anteriormente possui alguma incógnita? Se sim, qual é ela e qual é o expoente? Sim, a incógnita é *t* e seu expoente é 2.
- Comparando a equação dada com uma equação do 1º grau, qual diferença você consegue notar entre elas?*
- Segundo a equação, aproximadamente quanto tempo levará para um corpo cair de uma altura de 35 metros? Pela equação se calcula o tempo em segundos. Aproximadamente 2,67 s.

Fonte: Retirado de Castrucci (2018, p. 86)

A sugestão que os autores deixam para se trabalhar essa introdução é através a realização de um experimento onde se solta uma borracha e uma folha em queda livre para se concluir que para o resultado de Galilei ser bem-sucedido deve-se desconsiderar o atrito.

A sequência é dada com figuras geométricas, mais especificamente um quadrado e um retângulo, das quais se pede para o aluno dizer quais as expressões que representam as áreas das respectivas figuras. Os autores também colocam um problema em que se pede para escrever a equação que representa a diferença das áreas como sendo 4, sendo a resposta esperada $x^2 - 3x = 4$ e, para esta equação pede-se para testar alguns resultados para x.

A partir disso a equação de segundo grau é apresentada por meio de um problema, do qual a equação resultante é usada como exemplo para definir os elementos da equação e ela própria:

Figura 7- Questão introdutória 2


Observe a planta parcial de um escritório.

As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m² de área. Cada sala tem x metros de lado, e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida x do lado de cada sala quadrada? De acordo com a figura e os dados do problema, podemos concluir que:

- a área de cada sala é x^2.
- a área do corredor é dada por $1 \cdot 2x$ ou $2x$.
- a equação que representa o problema é: $\underbrace{2x^2}_{\text{área das duas salas}} + \underbrace{2x}_{\text{área do corredor}} = 40$

Obtivemos uma equação que não é do 1º grau (que você já sabe resolver), pois existe um termo em que a incógnita x se apresenta com expoente 2.

Denomina-se **equação do 2º grau na incógnita** x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Fonte: Retirado de Castrucci (2018, p. 89)

Depois disso os autores ainda definem equações de segundo grau completas e incompletas e suas formas reduzidas, para então apresentar um método de resolução de equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 + c = 0$ realizando algumas manipulações algébricas e para equações completas usa o método de completar quadrados e a fórmula de Bhaskara. O método de completar quadrados é exemplificado algebricamente e geometricamente de forma simultânea enquanto a fórmula de Bhaskara é deduzida passo a passo. Em ambos os métodos é feito referência aos estudiosos, al-Khwarizmi e Bhaskara, que utilizavam tais métodos.

O livro apresenta uma grande quantidade de questões para os alunos resolverem, tendo 41 questões excedentes às questões introdutórias.

O quadro 2 apresenta alguns tipos de tarefas introdutórias propostas pelos autores:

Quadro 2- Praxeologias do livro didático

Tarefa (t)	Técnica (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)	Total de problemas

Encontrar as equações e expressões algébricas que determinam a área de uma figura dadas suas medidas	Observar e analisar	Conceitos de área, equações e expressões	Álgebra	2
Calcular o valor do lado de um quadrado dado sua área	Relação de igualdade/ Manipulações algébricas	Conceito de área	Álgebra	1
Interpretar geometricamente uma equação de segundo grau	Completar quadrados	Método de al-Khwarizmi	Geometria	5
Resolver a equação utilizando o método de Bhaskara	Aplicação da fórmula de Bhaskara	Eliminação do termo médio	Álgebra	3
Resolver a equação	Aplicação da fórmula de Bhaskara	Conceito da fórmula de Bhaskara	Álgebra	3

Fonte: Autoria própria (2022)

Das técnicas utilizadas para resolução dos problemas introdutórios podemos observar algumas variações, mas ao falarmos do método de completar quadrados, podemos ver nesta técnica não uma técnica para encontrar o valor de uma incógnita de uma equação de segundo grau, mas a fatoração de um polinômio para representá-lo como uma diferença de quadrados, atendendo assim, as orientações da BNCC e desenvolvendo de um conceito usado posteriormente para eliminar o termo médio na técnica de al-Kwarizmi. Dito isso, é possível enxergar essas duas técnicas como uma só, sendo reduzido a três métodos de resolução para equações de segundo grau.

Referente aos problemas propostos podemos observaras seguintes tarefas, quadro 3:

Quadro 2- Praxeologias do livro didático

Tarefa (t)	Técnica (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)	Total de problemas
Identificar equações que sejam do segundo grau e com uma incógnita	Observar e analisar	Definição de equação do segundo grau	Álgebra	1
Classificar equações como completas ou incompletas	Observar e analisar	Definição de equação do segundo grau	Álgebra	1
Identificar os coeficientes das equações	Observar e analisar	Definição de coeficiente	Álgebra	1
Escrever as equações do segundo grau dados seus coeficientes	Identificar referente a qual elemento é o coeficiente da equação e escrevê-la	Definição de coeficiente e equação do segundo grau	Álgebra	1
Reescrever equações em sua forma reduzida	Realizar a soma e multiplicação dos termos de uma equação	Operações básicas	Álgebra	2
Passar da linguagem retórica para a linguagem matemática e reescrever a	Interpretar o problema para identificar qual a equação e, então, realizar as manipulações algébricas	Operações básicas e definição de equação de segundo grau	Álgebra	1

equação na forma reduzida	necessárias para chegar na forma reduzida da equação			
Determinar o conjunto solução da equação	Resolver a equação do segundo grau	Conceito de equação de segundo grau	Álgebra	5
Identificar os números sabendo seu quadrado	Extrair a raiz quadrada dos valores dados	Potenciação	Álgebra	1
Determinar a medida da base e da altura de um triângulo sabendo sua área e a proporção entre as medidas	Multiplicar os valores da base e da altura, dividir por 2 e igualar à área do triângulo, o que dará uma equação do segundo grau. A solução da equação será o valor desconhecido referente à base e a altura do triângulo	Área do triângulo e conceito de equação do segundo grau	Álgebra	1
Calcular o diâmetro de um círculo sabendo sua área	Igualar a fórmula geral da área do círculo com o valor dado para a área, tendo assim, uma equação de segundo grau, que ao ser resolvida resulta no valor do raio do círculo. O dobro do raio será o valor do diâmetro	Fórmula geral da área do círculo	Álgebra	1

Somar o número real que torna a expressão um quadrado perfeito	Método de al-Khwarizmi	Completar quadrados	Álgebra	1
Determinar as raízes das equações usando o método de al-Khwarizmi	Método de al-Khwarizmi	Eliminação do termo médio	Álgebra	1
Calcular as raízes das equações usando o método de Bhaskara	Método de Bhaskara		Álgebra	2
Determinar a quantidade de números reais inteiros que existem entre as raízes da equação	Calcular a solução das equações e fazer a subtração entre as raízes encontradas	Conceito de equação do segundo grau e operações básicas	Aritmética	1
Calcular a soma das raízes não comuns às equações	Resolver as equações de segundo grau e, depois de verificar quais raízes não coincidem, realizar a soma das raízes distintas	Conceito de equação de segundo grau e operações básicas	Álgebra	2
Realizar a soma dos termos da raiz fracionária em sua forma simplificada de uma equação de segundo grau	Calcular as raízes de uma equação, verificar qual das raízes é uma fração e fazer a soma dos	Conceito de equação do segundo grau e operações básicas	Álgebra	1

	termos depois de simplificar a fração			
Verificar se a maior raiz da equação é um número primo	Resolver a equação de segundo grau, escolher a raiz de valor mais alto e verificar se é um número primo	Conceito de equação do segundo grau e definição de número primo	Álgebra	1
Passar da linguagem retórica para a linguagem algébrica uma equação e encontrar sua solução	Identificar a equação descrita de forma retórica no problema e resolvê-la	Conceito de equação do segundo grau	Álgebra	2
Realizar a divisão de polinômios e encontrar a raiz do resultante	Fazer a divisão polinomial para chegar em uma equação de segundo grau e, então, resolvê-la	Divisão de polinômios e conceito de equação de segundo grau	Álgebra	1
Calcular os lados de um retângulo sabendo sua área e a relação entre as medidas dos lados	Realizar a multiplicação entre os valores dos lados da figura que resultará em uma expressão de grau dois, que igualada à área da figura implica em uma equação quadrática. A solução da equação será dará o valor desconhecido relativo aos lados da figura	Área de figuras geométricas planas	Álgebra	6

Interpretar os dados de um problema para resolver uma equação de segundo grau	Extrair os dados do problema para encontrar a equação do segundo grau pertinente e resolvê-la	Conceito de equação do segundo grau	Álgebra	7

Fonte: Autoria própria (2022)

Podemos ver que os três métodos introduzidos para a resolução de equações de segundo grau são abordados em pelo menos um problema proposto.

Observamos que na Introdução do assunto equação do segundo grau, o autor do livro (CASTRUCCI, 2018) aborda as técnicas (τ_i) de resolução na perspectiva geométrica, porém na maioria dos exercícios propostos as técnicas (τ_i) se referem a tecnologias (θ_i) que são justificadas pela teoria (Θ) no campo da Álgebra.

Além disso, ao comparar a organização matemática e didática do autor, (CASTRUCCI, 2018) com o MER, observamos que na instituição livro didático, não são existem problemas que envolvem a equação do segundo grau em outros contextos como o financeiro e, a problemas como os abordados pelos indianos.

Além disso, na BNCC, (BRASIL, 2018) e no livro didático, (CASTRUCCI, 2018) não é sugerido ou proposto alguma atividade que contemple o uso do teatro como um recurso didático, foco deste trabalho.

Este fato, reforça o nosso questionamento: Como ensinar a resolução da equação do segundo grau através do recurso didático do teatro?

3.2.3 Teatro Escolar nos Documentos Oficiais

Nesta seção apresentamos a nossa investigação nos documentos oficiais: Diretrizes Nacionais Curriculares Gerais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Nacionais da Educação a fim de saber a possibilidade de utilização do teatro como um recurso didático para o ensino de matemática.

Referente às Diretrizes Nacionais Curriculares para a Educação Infantil podemos encontrar, no inciso IX do artigo 9° da Resolução n° 5 do Conselho Nacional de Educação[3], menção ao teatro, tratando-o como prática pedagógica:

> Art. 9º As práticas pedagógicas que compõem a proposta curricular da Educação Infantil devem ter como eixos norteadores as interações e a brincadeira, garantindo experiências que:
>
> [...]
>
> IX – promovam o relacionamento e a interação das crianças com diversificadas manifestações de música, artes plásticas e gráficas, cinema, fotografia, dança, teatro, poesia e literatura; (BRASIL, 2009)

Aparece também quando falado sobre o ensino fundamental, conforme o parágrafo 4° do Artigo 15 da Resolução n° 7[4], retratado como componente da disciplina de Arte:

> § 4º A Música constitui conteúdo obrigatório, mas não exclusivo, do componente curricular Arte, o qual compreende também as artes visuais, o teatro e a dança, conforme o § 6º do art. 26 da Lei nº 9.394/96. (BRASIL, 2010)

Ao falarmos da BNCC, podemos realizar uma articulação entre teatro e matemática, pois por mais que o documento não faça essa relação direta, ao tratar da matemática no ensino fundamental, afirma que os alunos precisam relacionar "as observações empíricas do mundo real a representações e associem essas representações a uma atividade matemática" (BRASIL, 2018). O teatro pode assumir o papel de ponte para a relação entre os conteúdos matemáticos e o empírico, visto seu potencial multidisciplinar e, assim, conectando a disciplina ao objetivo apontado pelo documento. Isso se faz como consequência do tratamento da matemática em uma peça teatral, visto que, segundo Boal "[...] todo teatro é necessariamente político, porque políticas são todas as atividades do homem, o teatro é uma delas" (BOAL, 1991, p. 13).

Quanto ao ensino médio, a área de matemática e suas tecnologias afirma que os conteúdos matemáticos do ensino médio são um aprofundamento aos conteúdos vistos anteriormente no ensino fundamental, mas ainda respeitando a abordagem com aplicações na realidade. Além disso, podemos encontrar uma brecha para relacionar

---

[3] Disponível em: <resol_federal_5_09.pdf (crmariocovas.sp.gov.br)>
[4] Disponível em: <MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (mec.gov.br)>

o teatro e a matemática também na área de linguagens e suas tecnologias quando, na competência específica 6, afirma:

> Pretende-se também que sejam capazes de participar ativamente dos processos de criação nas linguagens das artes visuais, do audiovisual, da dança, da música e do teatro e nas interseções entre elas e com outras linguagens e áreas de conhecimento. (BRASIL, 2018, p. 496)

Finalmente, os Parâmetros Curriculares Nacionais buscam ações que façam interação entre o currículo escolar e a sociedade para diversas matérias. O documento não cita o teatro como recurso didático diretamente, mas deixa aberto à possibilidade quando afirma:

> *Outro fator que interfere na disponibilidade do aluno para a aprendizagem é a unidade entre escola, sociedade e cultura, o que exige trabalho com objetos socioculturais do cotidiano extra-escolar, como, por exemplo, jornais, revistas, filmes, instrumentos de medida, etc., sem esvaziá-los de significado, ou seja, sem que percam sua função social real, contribuindo, assim, para imprimir sentido às atividades escolares. (BRASIL, 1997, p. 65).*

Desta forma, acreditamos que podemos utilizar o teatro como meio para alcançar o objetivo estabelecido pelo documento.

Visto que, podemos de alguma forma encontrar um respaldo nas entrelinhas dos documentos oficiais, a respeito da inserção do teatro como um recurso didático para o ensino, inclusive no que diz respeito ao ensino de matemática, neste caso, surge o questionamento: De que maneira o teatro pode auxiliar no ensino-aprendizagem de matemática?

D'Ambrosio (2009, p. 18), em seu livro onde analisa o processo de aprendizagem, mais especificamente de matemática, cita que o conhecimento advém do conjunto de geração, de organização social e intelectual e de difusão, sendo o processo de aprendizagem, como um todo, sujeito ao estímulo dado pelas condições sociais, culturais e naturais do sujeito. Isso nos leva a pensar que quanto mais próximo da realidade do sujeito o objeto de estudo está, mais fácil se torna a apropriação do conhecimento, o que faz necessária a assimilação dos conteúdos escolares com o contexto do aluno, para que ele enxergue a realidade escolar como própria. Neste sentido, Cartaxo coloca atividades lúdicas como algo capaz de aproximar o aluno do meio escolar:

> *Lúdico é tudo aquilo que se dá através do jogo, da brincadeira, da dinâmica, do divertimento. [...] E essa brincadeira educativa é o primeiro passo para que a criança*

> *se identifique com a escola, tornando-a uma extensão de sua casa (Cartaxo, 2001, p. 43).*

Além disso, retomando aos documentos oficiais, no que diz respeito à BNCC, dentre os elementos presentes importantes para um saber prático são apresentadas as competências necessárias a este processo, aqui vale ressaltar duas delas:

> *Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.*
>
> *Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9)*

Podemos concluir que o teatro pode assumir um papel fundamental no processo do desenvolvimento destas competências, dado que, como citado anteriormente, todo teatro é político, portanto, pode estimular o fator social, democrático e criativo supracitado, sendo possível ~~de~~ isso ocorrer no ensino de matemática ao assumirmos que "o professor/orientador de qualquer disciplina ou curso pode também trabalhar o seu conteúdo programático através da espontaneidade da linguagem teatral" (CARTAXO, 2001, p. 65).

A partir destas investigações nos documentos oficiais, acreditamos que ao realizarmos atividades teatrais com conteúdo matemáticos, podemos fazer do teatro a ponte para conectar os objetos de estudos com os objetivos aqui citados.

3.3 Dimensão Ecológica

A dimensão ecológica se refere a uma análise e possivelmente questões que surgem ao olhar as dimensões do problema didático, tendo como referência o MER.

Segundo, Carneiro (2020), geralmente, os questionamentos acerca dos problemas no âmbito educacional são característicos da problemática ecológica, presente na Teoria Antropológica do Didático: "O que existe? Por que existe"? "O que não existe"? Por que não existe? O que poderia existir? Sobre quais condições? Por outro lado, a partir de um conjunto de condições, quais os objetos são obrigados a viver ou, em contrapartida, quais são os objetos que são impedidos de viver nessas condições (ARTAUD, 1998, apud CARNEIRO, 2020, p.126).

Sendo assim, a partir das análises do problema didático, respondemos as questões: “Como equação do segundo grau existe na BNCC e no livro didático adotado nas escolas do município de Pato Branco?” e, observamos que o ensino de equações do segundo grau através do teatro não é mencionado de forma direta como uma orientação na prática pedagógica nas diretrizes curriculares da BNCC e, talvez devido a isso, esta perspectiva do ensino de matemática através do teatro, não exista na forma, por exemplo, de uma sugestão/comentário no livro didático.

Neste caso, neste trabalho propomos um Modelo Didático de Referência (MDR), para o ensino da resolução da equação do segundo grau, o qual evidencia as possibilidades de ensino da resolução da equação do segundo grau a partir de diferentes contextos.

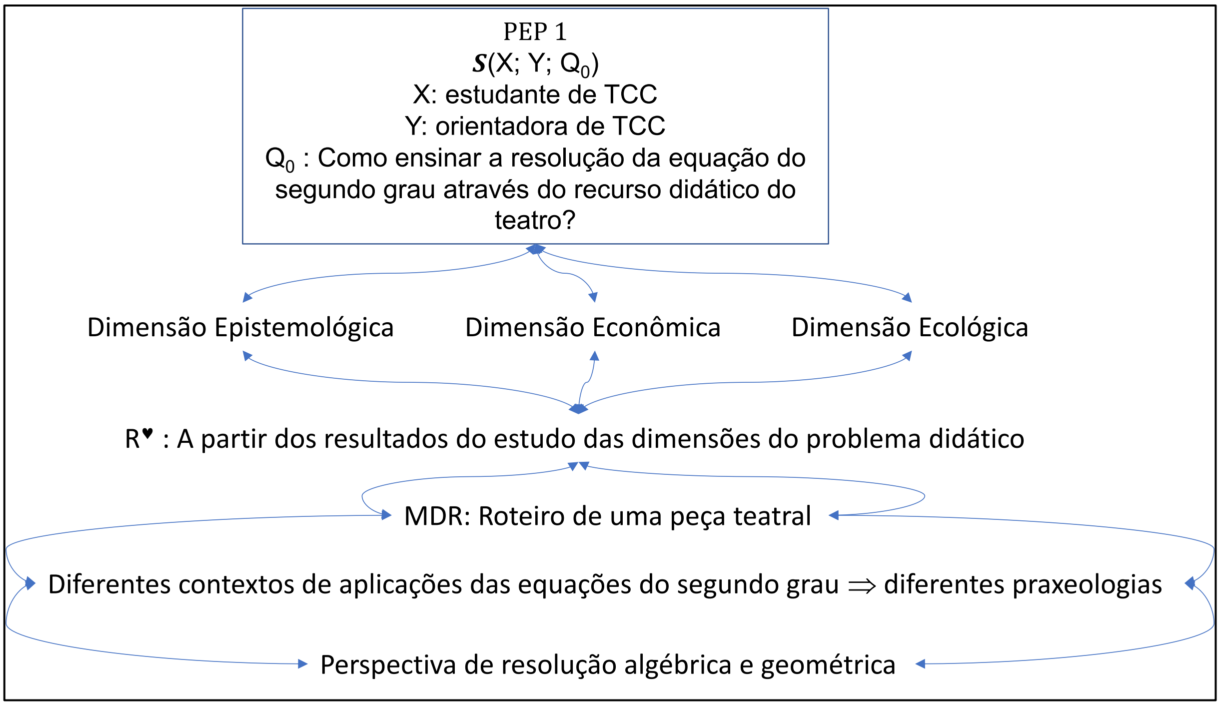
4 MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA (MDR): PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA (PEP) PARA O ENSINO DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

O Modelo Didático de Referência (MDR) é resultado de um trabalho de estudo, pesquisa e investigação sobre o problema didático: Como ensinar a resolução da equação do segundo grau através do recurso didático do teatro?

4.1 Estruturação do MDR

A estruturação do MDR é dada na forma de um esquema, Figura 8:

Figura 8- Estruturação do MDR



Fonte: Autoria própria (2022)

A Figura 8 evidencia o Modelo Didático de Referência proposto, explicitando em detalhes que ele resultou do PEP 1, Sistema Didático S_1, o qual teve como a resposta R♥. Esta resposta foi determinante para a estruturação do MDR: roteiro da peça teatral que foi desenvolvido na forma de Percursos de Estudo e Pesquisa (PEPs) em 4 Atos sob diferentes contextos que implicaram em diferentes praxeologias inseridas no campo da Álgebra e Geometria.

O roteiro da peça de teatro inicia-se com uma questão geratriz (Q_0): Para resolver um problema de batalha naval e saber o alcance de tiros em um canhão, cuja trajetória é dado por uma equação do segundo grau, existem outras maneiras de determinar este alcance, ou melhor, existem outras maneiras de resolução desta equação do segundo grau?

Esta questão faz parte do pano de fundo de todos os diálogos entre os personagens, os quais através de suas experiências, procuram ajudar ao protagonista Pedro, autor da questão Q_0, a trilhar o seu processo de investigação, o qual é formulado a partir do esquema herbatiano,

$$[S\ (X;\ Y;\ Q_0) \Rightarrow \{R_1^{\lozenge},\ R_2^{\lozenge},\ \ldots,\ R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m\}] \Rightarrow R^{\heartsuit}$$

Onde X é o personagem principal, o Pedro na narrativa da peça, Y são os personagens que o conduzem nesta investigação, ou melhor lhe dão um suporte a nível de conhecimento sobre as várias técnicas de resolução da equação do segundo grau e, Q_0 a questão geratriz.

$R_1^{\lozenge}$, $R_2^{\lozenge}$, ..., $R_n^{\lozenge}$ são as várias respostas dos personagens envolvidos que o guiarão para a resposta $R^{\heartsuit}$ que satisfaz a questão Q_0.

$Q_{n+1}, \ldots, Q_m$ são as perguntas derivadas de Q_0, isto é, perguntas formuladas a partir da procura para dar resposta a Q_0.

Segue a peça de teatro desenvolvida em 4 Atos:

ATO I

Sistema Didático S (X,Y,Q_0), onde X é o personagem Pedro, o qual tem uma pergunta Q_0 geratriz de outros questionamentos e respostas e, tem como fonte de pesquisa a sua própria mãe e, a experiência dela em um curso de moda e, ao próprio interesse dela pelo conhecimento ao buscar saber mais sobre a equação do segundo grau em um livro de História da Matemática.

O personagem principal, canhoneiro de um navio, se encontra sozinho na sala e demonstra certa preocupação ao analisar um mapa que tem em mãos.

–Como hei de resolver este problema? – Indaga ele com um tom de aflição na voz

Nesse momento a mãe, que estava andando pelo corredor e ouve Pedro, adentra a porta mostrando preocupação com filho:

–Se encontra com problemas meu filho? – Indaga ela. Nesse momento ela vê os mapas espalhados pela mesa com pontos marcados e, tirando suas próprias conclusões, se apressa a se sentar e tomar um deles em mãos – Está a jogar batalha naval sozinho? – Questiona novamente enquanto a marcar pontos – Se for este o problema, eu posso jogar com você!

–Não, mãe! – Exclama o filho enquanto tira o mapa das mãos da mãe.

–Trapaceiro! – Grita ela com irritação – Vai ver onde eu marquei minhas embarcações!

–É que pra resolver meu problema eu preciso falar com o veterano Gomes, que cuidava dos canhões antes de mim – se explica Pedro.

–Ingrato! – Ela reclama. – Me proponho a jogar com você e você me desdenha dessa maneira.

–Mãe, não é isso! – Começa ele a se explicar novamente – O problema que tenho é relativo aos meus canhões. Os tiros que realizo traçam uma trajetória descrita por uma equação de segundo grau. Logo, para saber onde o tiro do canhão irá cair, preciso encontrar a solução de uma equação de segundo grau. É claro que eu sei como resolver uma equação quadrática, porém me parece que meu método não é tão adequado, por isso gostaria de saber sobre a existência de métodos alternativos.

- Ah, entendi! Então esse drama todo é porque você quer saber se:

Q_0: Existem outros métodos alternativos para resolver a equação do segundo grau?

–***R_1 e Q_1 (ao mesmo tempo):*** Ora, meu filho! Tirei leite até de pedra pra pagar a tua escola pra agora vir me dizer que só sabe resolver equação de segundo grau de um jeito! – a mãe indignação.

Investigação de Pedro à mãe:

- E você, por acaso, sabe mais de um? – Pedro pergunta, desafiador.

–**R_2:** Mas é claro que sim! – Rebate a mãe com ar de superioridade. – No meu **curso de moda** que eu fiz pra ser costureira a gente falava sobre equações de segundo grau.

–**Q_2:** E o que agulha e tesoura tem a ver com tiro de canhão? – O filho tem impaciência ao perguntar.

–**R_3:** Pois tem muito mais do que você imagina! – Responde a mãe rapidamente ao se sentir menosprezada. Ela levanta da cadeira e se dirige ao quadro que o filho tem na sala – Eu li em um livro de história da matemática que quando os **gregos** desenvolveram a **proporção áurea**, que até hoje é parâmetro para beleza, dividiram um segmento de reta em duas partes de modo que formasse uma média geométrica – ela desenha um segmento AB no quadro dividido por um ponto C.

Figura 9- Segmento AB divido por C

Fonte: Autoria própria (2022)

–**R_4 e de certa forma um questionamento implícito Q3:** Ainda não entendi a relação – prossegue o filho.

–**R_5:** Simples, quando eu divido esse segmento AB no ponto C, eu tenho que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}.\overline{CB}$. Assim eu tenho uma equação de grau dois.

–**R_6:** Certo, mãe, mas de problema eu já tô cheio, não quero mais.

ATO II

Sistema Didático S (X,Y,Q_0), onde X é o personagem Pedro, o qual tem uma pergunta Q_0 geratriz de outros questionamentos e respostas e, tem como fonte de pesquisa, mesmo que de certa forma, de modo surpreendente, o amigo Josué e, o problema de rodapé da cabine e, a sua mãe.

–Alguém aqui falou de problema? – Pergunta Josué enquanto entra na sala.

–Olá, Josué! – Pedro fica surpreso ao ver o amigo – O que te traz até aqui?

–Tô querendo conversar – Desabafa Josué – Se eu pego o antigo mestre de obras dessa canoa eu dou uma bicuda de fazer parar na cidade vizinha!

–Hoje a tripulação está agitada! – Exclama Pedro enquanto ri da revolta do amigo – Vejo sua indignação, mas podemos conversar mais tarde? Queria falar com o veterano sobre:

Q_0: como ele calculava as equações de segundo grau?

–**R₁:** Se for esse o caso, eu conto meu causo e ainda te ajudo nisso!

–Até tu, Josué – Pedro responde surpreso

–Eu que diga! Veja o que me aconteceu – prossegue Josué com desânimo – capitão me chamou pra trocar os rodapés da cabine dele hoje.

–E é claro que rodapé de parede também tem muito a ver com tiro de canhão! – Pedro exclama – Mas prossiga com sua história, meu amigo.

Josué expressa certa confusão, mas continua a contar

–**R₂:** Acontece que o antigo mestre de obras perdeu a planta do navio e não se sabe as medidas da cabine, só que tem 45 metros quadrados e que um dos lados tem 4 metros a mais que o outro – explica Josué indignado com a situação. – Aí tive que fritar meus dois últimos neurônios pra descobrir quanto que mede cada lado da cabine pra saber quantos metros de rodapé vai precisar comprar.

–Vejo que tem motivos para estar bravo. Mas e como você fez isso?

Josué se levanta, agora animado em contar seu raciocínio para o amigo.

–Pense comigo, eu sei que a cabine é retangular. Eu não sei quanto mede cada lado desse retângulo, mais sei que um lado é quatro metros maior que o outro, então vou dizer que um lado mede x e o que mede quatro metros a mais eu chamo de $x + 4$! – Josué expressa a animação na voz.

–Esperto! – Pedro exclama.

–Tirasse pra me elogiar hoje, hein! – Josué brinca – Mas continuando, a área da sala é de 45 metros quadrados, então a medida de um lado multiplicado pela medida do outro vai ser 45, ou seja, x vezes $x + 4$ é igual à 45.

–Entendo, isso dá uma equação de segundo grau. $x^2 + 4x = 45$ – completa Pedro, compreendendo o problema de Josué.

–Isso mesmo!

–**Q₂:** E como você fez pra solucionar isso? – Pedro pergunta, curioso.

–**R$_3$:** Resolvi usando o método de completar quadrados – Josué responde imaginando que Pedro conheça o método.

Pedro que não sabe do que se trata, pergunta: **Q$_3$:** Como assim completar quadrados?

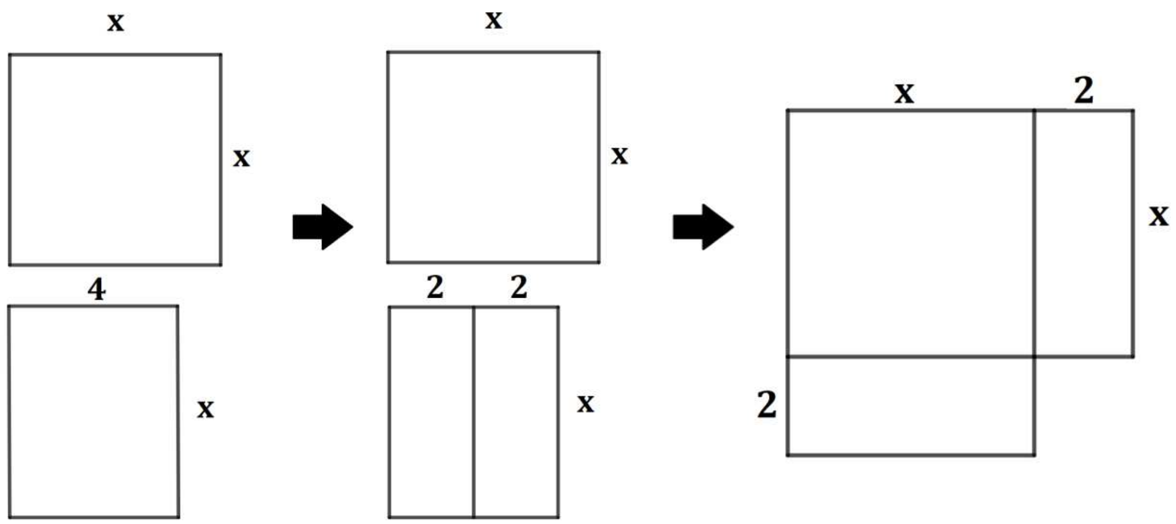
–**R$_4$:** Você não aprendeu isso na escola? – Josué se surpreende. – É um método muito antigo usado por vários matemáticos para resolver equações de grau dois.

–Me desculpe se eu dormia nas aulas de matemática! – Pedro rebate, irritação.

Josué ri, mas continua:

–**R$_5$:** Esse método não é difícil. Pense em x^2 como área de um quadrado de lado x e $4x$ como área de um retângulo de lado 4 e x – enquanto explica, Pedro desenha no quadro seu raciocínio. – Eu ainda posso dividir esse retângulo em dois outros de lado x e 2 e com esses dois menores, eu encaixo o lado x em dois lados consecutivos do quadrado. Aí, como eu sei que $x^2 + 4x = 45$, eu posso dizer que esse troço aqui, – Josué aponta para a figura no quadro – tem área igual a 45.

Figura 10- Resolução do problema de Josué

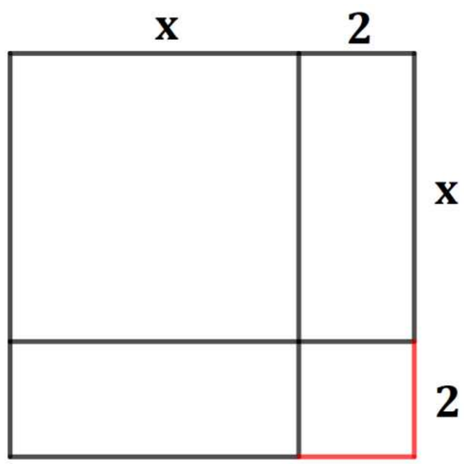


Fonte: Autoria própria (2022)

–**Q**$_4$**:** E no que isso ajuda? – Pergunta Pedro sem saber onde Josué quer chegar.

–**R**$_6$**:** Nada, – Josué faz uma pausa – ainda. Tá vendo que se eu colocar mais um quadradinho aqui – Josué aponta para a parte incompleta do quadrado – eu vou ter um quadradão inteiro?

Figura 11- Outra parte da resolução de Josué



Fonte: Autoria própria (2022)

–Sim – Pedro responde com cenho de concentração.

–**Q_5:** E quanto mede o lado desse quadradinho? – Josué pergunta instigando Pedro a pensar.

–**R_7:** Bem, se aquele lado do retângulo mede 2, o lado do quadrado também mede 2.

–**Q_6:** E a área? – Josué continua perguntando.

–**R_8:** Mede 4.

–Isso aí. E se a área desse negócio sem o quadradinho media 45, com o quadradinho, que mede 4, vai medir 45 mais 4, ou seja, 49. Agora eu te pergunto: **Q_7:** quanto mede o lado de um quadrado de área 49.

–**R_9:** A área do quadrado é igual ao lado do quadrado vezes ele mesmo. O número que multiplicado por ele mesmo é igual a 49 é 7. Então o lado desse quadrado grande mede 7 – conclui Pedro.

–Isso mesmo – continua Josué – e é agora que vem a mágica. Lembra que o lado desse quadrado mede x – Josué aponta para o primeiro quadrado que desenhou – e que esse lado do retângulo mede 2 – continua ele, agora apontando para o lado menor do retângulo. – Então o lado do quadrado maior mede $(x + 2)$. Mas a gente também já viu que esse mesmo lado mede 7. Então eu posso dizer que $x + 2$ é igual a 7. **Q_8:** E se $x + 2$ é igual a 7 quanto vale x?

–**R_{10}:** Vale 5! – Conclui Pedro entendendo o raciocínio de Josué.

–**R_{11}:** Isso mesmo! – Josué fica feliz por conseguir explicar – Isso quer dizer que lá na minha equação onde eu tinha $x^2 + 4x = 45$, meu x vale 5. Então aquela cabine mede cinco por sete metros e eu vou precisar 28 metros de rodapé.

–**R_{12}:** Uau! Muito boa resolução, Josué! – elogia Pedro.

– Mas assim, não era mais fácil medir com uma trena? – questiona Pedro.

–Tópico sensível! – Josué responde enquanto se senta novamente – A minha quebrou e o mão de vaca do Sérgio não quer comprar outra.

–Uma pena mesmo! Mas bem, eu queria um método que não envolvesse muito desenho porque eu sou meio ruim em geometria. Vou ver se consigo algo com o veterano! – Conclui Pedro, tentando se desvencilhar da situação.

— **R_{13}:** Credo! Parece até que nasceu de sete meses! Quanta pressa! Eu não te falei que sabia um outro jeito de resolver? – A mãe pergunta enquanto escreve a equação $x^2 + 6x = 16$. – Pois bem, leve em conta essa equação. Para resolver uma equação de segundo grau eu considero a metade do coeficiente de x. Aqui o coeficiente de x é o número 6, nesse caso, metade de 6 é 3.Depois eu elevo o resultado ao quadrado. 3^2 é igual a 9. Esse número eu somo ao termo independente, que aqui é 16. Disso eu tenho $16 + 9$ que é igual a 25. O próximo passo é extrair a raiz do resultado. Raiz de 25 é 5. Por fim, desse número eu subtraio a metade do coeficiente de x, que é 3, e isso me dará o número 2 que é uma raiz da equação.

– **R_{14} e um questionamento Q_9:** Muito bom esse método mãe, de onde você tirou isso?

–**R_{15}:** al-Khwarizmi, um matemático antigo, usava este método para resolver equações de segundo grau e eu achei um jeito bom de se resolver. É o mesmo método que o Josué usou, só que ele fez geometricamente e eu algebricamente. Se você comparar, ele fez as mesmas coisas, dividiu 4 pela metade primeiro, elevou o resultado ao quadrado e somou com o termo independente – enquanto explica, a mãe vai destacando no quadro os passos tomados por Josué – o resultado foi um quadrado, que você extraiu a raiz e subtraiu a metade de x. Serve apenas para equações em que o coeficiente de x^2 é 1, mas me ajuda muito – a mãe explica.

- Q_{10}: E como você sabe tudo isso?

- R_{16}: Ah, meu filho eu li em um livro de história da matemática. al-Kwarizmi usava a álgebra pra resolver as contas e mostrava que dava certo com a geometria. Na escola, você não viu este método? Não acredito!

–**R_{17}:** Realmente gostei desse, mãe, mas agora vou conversar com o veterano para ver se ele pode me dizer qual método é o mais adequado. Se puder me dar licença fico grato – diz o filho para a mãe enquanto arruma as coisas para sair.

–Filho ingrato! – Diz ela decepcionada – A gente carrega nove meses na barriga para ser dispensada desse jeito! – Conclui e se retira da sala.

ATO III

Sistema Didático S (X,Y,Q_0), onde X é o personagem Pedro, o qual tem uma pergunta Q_0 geratriz de outros questionamentos e respostas e, tem como fonte de pesquisa, mesmo que de certa forma, de modo surpreendente, o amigo Sérgio e, o problema do orçamento.

Ao que a mãe sai, Sérgio entra na sala também.

–Josué, te procurei por todo esse navio pra falar contigo sobre o orçamento dos rodapés! – Sérgio diz, satisfeito por encontrar Josué.

–Foi falar no pão que não demorou pra aparecer... – Pigarreia Josué ao ver Sérgio.

–Quem é pão duro? – Sérgio pergunta, curioso.

–A minha tia lá da zona Sul – Josué responde, desviando o assunto.

–Ah bom – Sérgio não entende a ironia. Recupera o foco ao assunto que chegou para tratar e indaga a Josué – Você tá ocupado ou podemos conversar sobre o orçamento agora?

Pedro interrompe a conversa

–Não está ocupado e pode conversar com você em outro lugar – Pedro dá ênfase ao “outro lugar” – **Q_0:** Quero muito falar com o veterano sobre as equações de segundo grau pra poder acertar a mira do canhão.

–Equação de segundo grau?! – Sérgio se interessa – Você sabia que eu fui chamado pra trabalhar no navio porque eu era um vendedor muito bom?

–E daí? – Josué não vê sentido no que Sérgio disse.

–**Q1:** Vendas tem tudo a ver com tiro de canhão, Josué – Pedro comenta, com ironia. – Você não sabia?

Sérgio fica envergonhado, mas responde:

–**R1:** É que o gráfico de vendas forma uma parábola – ele desenha a parábola no quadro para me melhor se expressar – dada por uma expressão de segundo grau que coloca o total de vendas em função do valor do produto. Pra saber a que preço eu teria o maior número de vendas – marca um ponto no vértice da parábola representando o maior total de vendas – eu acabava calculando uma equação de segundo grau.

–Agora falou coisa com coisa – diz Josué.

–**Q2:** E de que maneira você resolvia essas equações? – Pedro fica curioso para saber.

–**R2:** Bem, numa equação de segundo grau a gente tem ax^2, bx e c. Uma equação de segundo grau tem duas raízes. Se eu somar as duas raízes o resulta é igual a $-\frac{b}{a}$. Agora se eu multiplicar as duas raízes, o resultado é $\frac{c}{a}$. Os gregos em sua matemática já usavam esse meio de calcular as equações quadráticas. Aí sabendo disso é só achar os dois valores que satisfazem a relação.

–Curioso isso, hein! – Josué comenta, intrigado com o método. – **Q3:** Como isso é possível?

–É bem simples, pra falar a verdade! Suponho que conheçam a fórmula resolutiva da equação de segundo grau – começa, Sérgio.

–Essa eu conheço! – Exclama, Pedro, empolgado.

–**R3:** A fórmula nos proporciona duas raízes para a equação. x' e x''. Podemos dizer que $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Se eu somar as duas raízes eu vou ter $x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Isso vai ser igual a $\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ que resulta em $-\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$. – Explica Sérgio.

–Impressionante! – Josué mostra surpresa ao ver a explicação – Deixa eu ver se eu consigo fazer a da multiplicação?! – continua ele enquanto se levanta empolgado para ir ao quadro tentar fazer o mesmo que Sérgio. – **R4:** Usando o mesmo raciocínio eu vou ter que o produto das raízes é $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Certo?

–Isso mesmo! – Incentiva, Sérgio.

–**R5:** Ótimo! O produto vai ser então igual a $\left(-b+\sqrt{\Delta}\right) \cdot \left(-b-\sqrt{\Delta}\right)$ dividido por $2a \cdot 2a$. O numerador fica igual a $(-b)^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ ou seja $b^2 - \Delta$. Já o denominador fica $4a^2$, o que dá a fração $\frac{b^2-\Delta}{4a^2}$. – Josué olha confuso para o resultado que encontrou. – Ih Sérgio, acho que deu furo aqui!

–Calma, ainda não! – Conforta Sérgio. – **Q4:** Quanto é que vale Δ?

–**R6:** $b^2 - 4ac$ – responde Josué. Nesse momento ele percebe o que pode fazer. – Ah claro! Eu posso substituir o valor de Δ! Isso vai dar $\frac{b^2-b^2-4ac}{4a^2}$ que é igual a $\frac{-4ac}{4a^2}$. Eu faço a divisão, dá $-\frac{c}{a}$ e acabou! Dá certo mesmo! Incrível, Sérgio!

Pedro que estava concentrado em Sérgio, recobra o foco:

–Olha, eu agradeço a ajuda dos dois, mas agora vou ter que pedir para que se retirem. Eu tenho assuntos a tratar e vocês também .

–Como é mal anfitrião esse rapaz – brinca Josué, mas se levanta para sair – Vamos Sérgio, antes que ele atire uma incógnita ao quadrado na gente!

–Até mais, Pedro – Sérgio se despede.

ATO IV

Sistema Didático S (X,Y,Q0), onde X é o personagem Pedro, o qual tem uma pergunta Q0 geratriz de outros questionamentos e respostas e, tem como fonte de pesquisa, o amigo Gomes, através do qual o PEP é finalizado com a resposta final R♥.

Pedro se apressa em voltar para a mesa pegar suas coisas enquanto os outros dois saem. Quando está prestes a sair ouve um bater na porta novamente.

–Mas essa sala virou festa agora?! – Pigarreia ele, enquanto se dirige até a porta. Quando abre, vê que quem estava batendo era o veterano que ele procurava.

–Se estiver ocupado eu volto em outro momento! – Gomes se adianta.

–De maneira alguma! Era com você que eu queria falar – se explica Pedro. – Por favor, entre!

–Eita! Mas o que de tão importante tem a tratar comigo? – questiona o veterano.

–Como você tem muito mais experiência com os canhões, gostaria de saber **Q_0:** que método você usava para resolver as equações de segundo grau pra calcular a mira do projétil. Só hoje vi vários meios de fazer isso, conversando com várias pessoas e até com a minha mãe, mas não consigo enxergar qual é o jeito certo – desabafa Pedro.

–**R**$^{\heartsuit}$**:** Você não consegue ver qual é o jeito certo porque não tem UM jeito certo. O melhor jeito de calcular as equações é relativo ao que cada sujeito acha melhor. Eu mesmo quando fazia isso não usava só um método, tudo dependia de como era situação e então eu avaliava qual seria o mais viável – Gomes explica. Mas, para saber avaliar qual o melhor método é importante ser curioso como você e, trocar ideias com pessoas que resolvem de formas diferentes, olhar os livros, perguntar ao professor na escola, se existe outro jeito diferente de resolver. É preciso fazer este percurso que você disse que fez! Acredito que você fez um excelente percurso de estudo e pesquisa! Agora você decide o método!

5 CONCLUSÃO

A pesquisa contribuiu para responder o meu questionamento inicial a respeito da possibilidade de usar o teatro como um recurso didático para o ensino de matemática.

O fator determinante para a resposta deste questionamento inicial foi o processo de um percurso de estudo e pesquisa (PEP) para o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso (TCC).

E este percurso teve como questão inicial (Q_0): Como ensinar a resolução da equação do segundo grau através do recurso didático do teatro?

Sendo assim, a partir deste questionamento, o PEP se iniciou com o estudo das dimensões deste problema didático, sob a orientação da orientadora de TCC. Neste caso, podemos observar a importância do estudo destas dimensões sob a visão da TAD, na perspectiva das praxeologias evidenciadas no estudo da dimensão epistemológica e econômica.

A análise sob a visão da TAD na dimensão epistemológica, nos proporcionou evidenciar as tarefas, as técnicas utilizadas, tecnologias e teorias associadas para a resolução de tarefas e, dessa forma, foi possível construir o Modelo Epistemológico de Referência (MER), o qual serviu como referência para analisar o que está posto no livro didático, ou seja, o que existe, o que não existe, o que poderia existir e, como poderia existir.

Observou-se também que alguns pesquisadores defendem o ensino de conteúdos matemáticos a partir da história da matemática. Da mesma forma, verificou-se também que alguns métodos de resolução da equação de segundo grau, desenvolvidos ao longo das gerações, na perspectiva da dimensão epistemológica, e presentes no MER não existem nas instituições investigadas na dimensão econômica.

A partir do estudo da dimensão econômica pode-se constatar que o teatro apesar de não ser explicitado de forma direta como um recurso didático para o ensino de matemática pelos documentos oficiais da educação, a sua perspectiva lúdica e a possibilidade de conexão entre atividades socioculturais extraclasse se fazem presentes nas diretrizes.

No entanto, o estudo do teatro em sua perspectiva epistemológica enfatiza a relação direta do mesmo com o ato de ensinar.

O resultado da pesquisa foi a proposta de estruturação de um MDR que evidencia a possibilidade de apresentar em um contexto de ensino e aprendizagem da equação do segundo grau, as diferentes formas de resolução da mesma, em diferentes contextos que podem ser criados e/ou desenvolvidos através de um roteiro de uma peça de teatro, a partir de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), o qual poderá ser usado para discussão em cursos de formação de professores e/ou em atividades de formação continuada de professores.

Nos três atos iniciais do roteiro da peça de teatro, um método resolutivo (ou técnica, τ) é desenvolvido enquanto os personagens fazem perguntas e justificam os métodos. Os diálogos e /ou interações entre os personagens acontecem tendo como referência 4 sistemas didáticos e, diferentes praxeologias.

Espera-se que este MDR possa contribuir de forma significativa através do uso do teatro como um recurso didático, onde a partir do mesmo o conhecimento possa ser instigado, questionado, em que o fazer matemático possa ser realizado de forma criativa.

Podemos concluir que O MDR é um modelo a ser discutido, proporcionando ao professor a partir do roteiro da peça de teatro, escolher e/ou desenvolver as várias maneiras de se trabalhar com a resolução da equação do segundo grau em diferentes contextos em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S, A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007

ARAUJO, A.J. **O Ensino de Álgebra no Brasil e na França**: Um Estudo Sobre o Ensino de Equações do 1°. Grau à Luz da Teoria Antropológica do Didático. (Tese de Doutorado). UFPE, 2009.

AVELINO, Ana Paula S., SANTOS, Daniela B., SOUZA, Laíse P. Uma abordagem peculiar da equação do segundo grau no ensino fundamental e médio. **XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática**. Ilhéus, BA. 03-06 jul, 2019.

BRASIL. LDB – **Lei de Diretrizes e Bases da Educacional**. Lei 9394/96

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

Brasília: MEC, 2006. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.

Brasília: MEC, 2010. **Diretrizes Curriculares Nacionais** para o Ensino Fundamental. Disponível em: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (mec.gov.br)

Brasília: MEC, 2010. **Diretrizes Curriculares Nacionais** para o Ensino Médio. Disponível em: Sumário (mec.gov.br)

BOAL, Augusto. **Teatro do oprimido e outras poéticas políticas**. São Paulo: Cosac Naify. 2013.

CARTAXO, Carlos. **O Ensino das Artes Cênicas na Escola Fundamental e Média**. 1° ed. João Pessoa: 2001.

CARNEIRO, Abel de Oliveira. **Análise das praxeologias dos estudantes do 1° ano do ensino médio em um modelo interdisciplinar entre matemática, química e física envolvendo função afim**. Universidade Federal da Bahia. Bahia. 2021.

CASTRUCCI, Benedicto. GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática**. 4° ed. São Paulo: 2018.

CHEVALLARD, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Cours donné à la 15e école d'été de didactique des mathématiques (Clermont-Ferrand, 16-23).

CHEVALLARD, Y.. (2011). **Didactique Fondamentale - Module 1:** Leçons de didactique. Curso dado a Universidade de Provence, 2011. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DFM_2011-2012_Module_1_LD_.pdf>. Acesso em: 10/2022.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Traduzido por Magda Lopes. 3° ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. 17° ed. Campinas: Papirus, 2009.

FARRAS, B.B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **EMP – Educação Matemática e Pesquisa**, v.15, n°.1, p.1-28.

GARCIA, A.V.M. **História Oral e Educação Matemática**. In: Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo (Org.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, p. 79-100, 2006.

GOMES, Kailane da Silva. **Uso de diferentes abordagens metodológicas na sala de aula de matemática**: um exemplo com equação do segundo grau. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Caicó, RN. 2015.

KUNWAR, Rajendra. **Mathematics phobia**: causes, symptoms and ways to overcome. Nepal. Disponível em <https://ijcrt.org/papers/IJCRT2008103.pdf>. Acesso em 31 de agosto de 2021.

KUROIWA, Elisabete Tiyoko Nishimura. **Uma abordagem peculiar da equação do segundo grau no ensino fundamental e médio**. Universidade Estadual Paulista. Presidente Prudente, SP. 2016.

LACERDA, Hannah Dora de Garcia e. Teatro e educação matemática: o ensino do conceito de média por meio da linguagem teatral. **Encontro nacional de educação matemática**. Curitiba, PR. 18-21, jun, 2013.

MENDES FILHO, Alvarito; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. **Matemática em cena**: aprendizagens com ludicidade, criatividade e alegria. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, ES. 2016.

NETO, Alexandre Maicher; CARVALHO, Túlio de Oliveira. O Tema de Equações do Segundo Grau como Espaço para a Generalização. **Revista Ensin@ UFMS**, v. 2, n. Esp., p. 186-209, 2021.

PEDROSO, Hermes Antônio. Uma breve história da equação do segundo grau. **REMat**: revista eletrônica de matemática. Disponível em: <ISSN2177-5095-2010-02-01-13.pdf (unesp.br)>. São José do Rio Preto, 2010.

PILLÃO, Delma. **A pesquisa no âmbito das relações didáticas entre matemática e música**: estado da arte. São Paulo, 2009.

ROQUE, Tatiane. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

SILVA, Luana Letícia da; MENEZES, Marcus Bessa de. Equações do Segundo Grau em Videoaulas: Uma Análise Praxeológica no Youtube Edu. **EMP – Educação Matemática Pesquisa**, v. 24, n° 1, 2022.

TEDESCO, Murilo F. G., OLIVEIRA, Jenifer C. S., LUZ, Bruno F., SILVA, Fabiana G. L. **Teatro e história da matemática**: uma possibilidade para o ensino de funções e equações do segundo grau. Instituto Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul. 2019.