UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARCO ANDRÉ DANTAS

SABERES HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA: IMPORTÂNCIA DA AULA EXTRACLASSE

LONDRINA

2022

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MARCO ANDRÉ DANTAS

SABERES HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA: IMPORTÂNCIA DA AULA EXTRACLASSE

HISTORICAL KNOWLEDGE OF TRIGONOMETRY: IMPORTANCE OF THE EXTRACLASS CLASS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Sturion

LONDRINA

2022

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

MARCO ANDRE DANTAS

SABERES HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA: IMPORTÂNCIA DA AULA EXTRACLASSE

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 19 de Maio de 2022

Dr. Leonardo Sturion, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alireza Mohebi Ashtiani, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Rogerio Mendonca Martins, Doutorado - Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp)

A Jhenifer Passos, que foi o meu norte nesta fase da minha vida, sem a sua ajuda de várias formas a realização deste trabalho não seria possível.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre comigo, em todos os momentos, me iluminando e abençoando na trilha dos meus caminhos.

Ao meu querido orientador, Prof. Dr. Leonardo Sturion, por toda atenção, dedicação e conhecimento compartilhado nesta minha jornada.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani e Prof. Dr. Rogério Mendonça Martins, por terem aceitado contribuir na minha formação e na conclusão deste trabalho.

A todos os Professores do Departamento de Matemática da Fundação Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Mandaguari, que contribuíram para a minha formação.

A todos os Professores do PPGMAT – UTFPR.

Ao Colégio Sagrado Coração de Bela Vista do Paraíso, que disponibilizou sua estrutura e seus discentes, possibilitando a realização desse trabalho.

Aos meus alunos que contribuíram para a realização desta pesquisa, permitindo o meu crescimento como profissional todos os dias.

A todos os meus amigos e companheiros do PPGMAT, por toda alegria, sofrimento e conhecimento compartilhado.

À minha família pelo apoio, amor, paciência e compreensão em todos os momentos difíceis da minha caminhada.

Aos amigos e amigas verdadeiros, por serem meu porto seguro de todos os momentos, sejam eles bons ou ruins, fazendo a minha vida mais feliz.

A Jhenifer Passos, que sem a sua ajuda em todos os sentidos, não seria possível começar e principalmente concluir esse projeto.

O meu muito obrigado a todos!

Existem apenas dois modos de viver a vida: um é como se nada fosse milagre; o outro é como se tudo fosse um milagre. Eu acredito no último. (ALBERT EINSTEN)

DANTAS, Marco. **Saberes históricos da trigonometria**: importância da aula extraclasse. 2021. 55 páginas. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

Resumo: A docência de trigonometria no ensino fundamental e médio, na maioria das vezes, é representada a partir de exercícios repetitivos e fórmulas, causando assim um menor aproveitamento por parte dos alunos, uma vez que estes ficam reféns de um aprendizado mecânico. A consequência disso é a incapacidade de resolução de situações problemas. Na tentativa de minimizar os impactos deste aprendizado mecânico, é comum em aulas de trigonometria a utilização de problemas que vêm com contextualizações do cotidiano. No entanto, mesmo com esta alternativa, os alunos muitas vezes não conseguem assimilar o conteúdo com a prática. Sendo assim, o presente estudo buscou observar e analisar pontos positivos em uma aula extraclasse, a qual foi denominada como "Aula de Campo", baseada em uma experiência de ensino que abordou os conteúdos de "Semelhança de Triângulos" e "Relações trigonométricas no triângulo retângulo" em uma escola particular no Norte do Paraná, na qual o professor é um dos pesquisadores. A metodologia usada na pesquisa é de cunho descritivo com foco qualitativo. Os dados foram colhidos, com os registros dos 19 alunos do 9° ano que se separaram em 6 grupos, os quais, posteriormente apresentaram fotos e relatórios. Os resultados encontrados relataram uma observação dos prós de uma "Aula de Campo." Buscando assim, um direcionamento para professores que tenham intuito de realizar uma aula embasada nesta metodologia.

Palavras-chave: Trigonometria; Aula diversificada; Investigação Matemática.

DANTAS, Marco. Historical knowledge of trigonometry: importance of extraclass class. 2021. 55 páginas. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

Abstract: The teaching of trigonometry in elementary and high school, most of the time is represented from repetitive exercises and formulas, thus causing a lower performance on the part of the students, since they are hostages of a mechanical learning. The consequence of this is the inability to solve problem situations, in an attempt to minimize the impacts of this mechanical learning; it is common in trigonometry classes to use problems that come with everyday contextualization. However, even with this alternative, students are often unable to assimilate the content with practice. Therefore, the present study sought to observe and analyze positive points in an extra class, which was called "Field Class", based on a teaching experience that addressed the contents of "Similarity of Triangles" and "Trigonometric Relations in the Triangle.” Rectangle” in a private school in Northern Paraná, in which the teacher is one of the researchers. The methodology used in the research is descriptive with a qualitative focus. The data were collected, with the records of the 19 students of the 9th year who were separated into 6 groups, of which, later, they presented photos and reports. The results found reported an observation of the pros of a “Field Class.” Seeking thus, a direction for teachers who intend to carry out a class based on this methodology.

Keywords: Trigonometry; Diverse class; Mathematical Research.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ainda, nos dias atuais, existe uma grande dificuldade no ensino-aprendizagem das ciências exatas, especialmente na matéria de trigonometria. Nesta, a dificuldade pode ser facilmente observada não somente no ensino-aprendizado, mas também na contextualização do assunto. Historicamente, a trigonometria surgiu da necessidade de resolver problemas de cálculos de distâncias inacessíveis. No entanto, nesta época, não se tinha conhecimento da palavra "trigonometria." De acordo com historiadores, esta palavra surgiu somente no século XVI depois de Cristo.

De acordo com Lindegger (2000), na astronomia, é impossível o estudo de fases da lua, pontos cardeais e estações do ano sem o uso de triângulos, um sistema de medida e uma escala. Desta forma, esta afirmação nos remete ao pensamento de que as primeiras ideias da exploração do pensamento trigonométrico estavam ligadas à Astronomia. Por terem sido grandes contribuintes à Geometria, os gregos também são tidos como colaboradores de ideias ligadas à Trigonometria. De diversos estudiosos gregos destacamos Tales de Mileto, que ao passar pelo Egito estabeleceu relações para calcular a altura da Pirâmide de Quéops, o que hoje conhecemos por tangente. E Pitágoras, a quem se atribui a relação "o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos", hoje conhecida como relação fundamental da Trigonometria.

Além destes, podemos citar também Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.), que introduziu uma única "função trigonométrica", denominada de função da corda, a partir dela ele associou a cada corda de um arco um ângulo central correspondente, desta forma, foi possível estabelecer uma tabela trigonométrica, na qual os ângulos variam de 0° a 180°, considerando a divisão de Hipsicles do círculo de 360 partes, denominou de arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida; calculou a distância entre a Terra e a Lua e por conta do avanço em seus estudos ficou conhecido por Pai da Trigonometria.

Poderíamos citar ainda os árabes, que aprimoraram a Trigonometria no estudo da Astronomia e aplicaram à cartografia; os povos do ocidente que direcionaram a Trigonometria ao estudo de problemas cartográficos e topográficos; entre tantos outros estudiosos que contribuíram para o surgimento da Trigonometria.

Já na atualidade, ao observar pesquisas voltadas para o ensino-aprendizagem de Trigonometria, percebe-se que os educadores fazem uso de diferentes alternativas metodológicas para trabalhar Trigonometria em sala de aula, com o objetivo de tornar as aulas mais atrativas, mais presentes no cotidiano e que as atividades sejam atraentes para os alunos e que o professor utilize um material adequado.

Santos e Gualandi (2016) baseados nas ideias de Turine e Pérez (2006) "afirmam que o uso do material depende do profissional que o emprega, do conteúdo a ser estudado, dos objetivos a serem atingidos e do tipo de aprendizagem que se espera alcançar."

Sampaio (2008) identificou como dificuldade dos alunos na compreensão da Trigonometria uma prática docente superficial, que não enfatiza o processo histórico e evolutivo do conteúdo, desta maneira o ensino torna-se complicado, favorecendo a não compreensão de funções trigonométricas. Nesse contexto, é comum que os alunos indaguem por que estudar trigonometria. De acordo com Oliveira (2015), os alunos entendem os elementos da Trigonometria como um amontoado de fórmulas que não tem sentido algum, fazendo com que o conteúdo da trigonometria seja um dos principais causadores do mau desempenho dos alunos na escola, sua evasão e reprovação. Outro dilema no ensino da Trigonometria é a distribuição curricular, uma vez que os professores precisam lecionar muitos conteúdos durante um ano letivo, e por este motivo muitas vezes acabam deixando muita coisa pra trás. Sendo a Trigonometria um dos conteúdos que requerem uma maior quantidade de aulas, visto que os alunos tendem a ter uma maior dificuldade para o entendimento e aplicações de conceitos, não seria exagerada a ideia de aulas extraclasse para o ensino-aprendizagem da trigonometria. Nesse contexto, o objetivo do presente estudo foi a observação dos pontos positivos de aulas extraclasses no ensino da semelhança de triângulos.

Como dito anteriormente, no cotidiano ainda existe uma grande dificuldade no ensino-aprendizagem da matemática, especialmente no ensino de Álgebra. Tal dificuldade pode ser facilmente observada não somente no ensino-aprendizado, mas também na contextualização do assunto. Um dos grandes problemas pode estar na "transição", ou seja, a interpretação por parte dos alunos, considerada muitas vezes mágica, de letras para números e números para letras. Desse modo, para que os alunos consigam fazer essa "transição" de uma maneira fácil e de forma natural, os educadores devem propor problemas que desenvolvam o pensamento algébrico. Historicamente essa transição ocorria de forma mecânica, de forma que não estimulava o desenvolvimento do pensamento algébrico. Pois, desde 1799, momento no qual a álgebra passa a fazer parte do currículo de ensino no Brasil, até início da década de 1960, prevaleceu um ensino de caráter reprodutivo, sem clareza, em que tudo era essencial. (ARAÚJO, 2008).

De acordo com Cândido (2001), o pensamento algébrico deve ser realizado por meio de situações de comunicação, e o professor pode obter informações importantes sobre conhecimentos prévios e incompreensões dos alunos. Tal conhecimento orienta o trabalho do professor, que pode então, planejar atividades de forma apropriada, para superar dificuldades encontradas e atender a necessidades individuais. O grande foco ao ensinar álgebra deve ser em desenvolver o pensamento algébrico nos alunos, e os educadores devem procurar meios para que isso ocorra. Uma das alternativas é a investigação matemática. De acordo com Mata-Pereira (2016), a investigação matemática é uma metodologia de ensino de Matemática muito eficaz, uma vez que propicia uma mobilização de saberes no sentido de buscar uma solução. Nessa busca, o aluno aprende a utilizar estratégias, raciocinar logicamente e verificar se sua estratégia foi válida, o que colabora para um amadurecimento das estruturas cognitivas.

Um dos momentos consideráveis no ato de lecionar é o momento da avaliação, pois, neste momento, o professor poderá orientar o aluno e ver o quanto do conteúdo foi compreendido por este, além de decidir em qual linha de raciocínio o ensino deverá seguir. No entanto, fazer uma avaliação não é algo fácil, pois o professor deve seguir a obrigatoriedade do sistema de ensino, o que faz com que este ato se torne algo repetitivo e muitas vezes maçante.

Sendo a Trigonometria um dos conteúdos que requerem uma maior quantidade de aulas, visto que os alunos tendem a ter uma maior dificuldade para o entendimento e aplicações de conceitos, não seria exagerada a ideia de aulas extraclasse para o ensino-aprendizagem da trigonometria.

Atualmente, é possível observar que o conteúdo de trigonometria é ensinado de forma decorativa e repetitiva. Neste modelo, o professor passa aos alunos problemas sobre determinado assunto, que, por sua vez, os direcionam a uma resolução robótica, onde não há, por parte dos alunos, um total entendimento do exercício realizado. Nesse contexto, o objetivo do presente estudo foi observar os prós extraclasses em aulas de relações métricas em um triângulo retângulo, tanto na compreensão do conteúdo, quanto na motivação dos alunos.

1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Santos (2010) relatou que, para estudar matemática no presente, é importante se atentar em como está fora estudada anteriormente, do contrário não conseguiremos observar toda a dimensão das mudanças, uma vez que o desenvolvimento da matemática foi e ainda é ligado à sociedade e à economia, facilitando a compreensão da matemática na atualidade. Ao observarmos a evolução da matemática, é possível compreender o que há por trás das fórmulas, conceitos, teoremas e afins, desta maneira a matemática pode ser vista com mais naturalidade e o entendimento torna-se mais fácil, desmistificando a ideia de que a matemática é uma ciência de difícil entendimento.

Miguel e Miorim (2011) relatam que a forma alienada geralmente ensinada leva os alunos à não compreensão dos conhecimentos pretendidos, assim, a matemática torna-se uma matéria tediosa e complexa. No entanto, o ensino da história do processo evolutivo da matemática pode vir a tornar-se um estímulo à compreensão por parte dos alunos. Visto que, nesta metodologia, o aluno aprende a origem da fórmula, ou seja, quais foram os conceitos e caminhos que levaram à sua criação.

Ao observar a forma engessada com que a matemática é ensinada nos dias atuais, Lopes (2015) ressaltou que é preciso entender a maneira como foi desenvolvido determinado conceito, mesmo que este entendimento seja intuitivo, só assim é possível haver compreensão total do conteúdo abordado.

Os conhecimentos matemáticos estão diretamente ligados à cultura, uma vez que a matemática está relacionada com sociedade, ou seja, ela estava diretamente ligada a situações do cotidiano. As relações entre a matemática e a evolução do mundo (social e econômico), são um norteador para se obter uma facilitação na compreensão dos conhecimentos matemáticos atuais e, principalmente, no foco da sua origem. (LOPES 2015). Segundo Santos (2009, p. 19), "é importante olhar para o passado para estudar matemática, pois perceber as evoluções das ideias matemáticas observando somente o estado atual dessa ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças."

Ao perceber a história da matemática, e não apenas como uma ciência, relacionando-a com a cultura, descobre-se que a matemática foi construída por meio de tentativa e erro, com o intuito de solucionar problemas do cotidiano. Nessa perspectiva, Ferreira *apud* Santos (2009, p. 20) diz que a História da Matemática:

> Dá a este aluno a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político. (FERREIRA *apud* SANTOS, 2009, p. 20).

Seguindo esse pensamento, Miguel e Miorim (2011) relataram que a história é muito importante, uma vez que ela pode ser um estímulo no ensino-aprendizado da matemática. Visto que é comum o conteúdo matemático vir como uma ferramenta pronta que já induz a uma linha de raciocínio, mas não reflete o modo histórico que esse conhecimento foi construído, levando a uma compreensão dos conhecimentos matemáticos sem ter uma ligação com o os problemas corriqueiros do dia a dia.

Rossetto (2014) relata que a história pode ter um papel motivador nas aulas de matemática, quebrando a impressão de uma ciência fechada. Porém, Vianna (1995), aponta "que histórias fantasiosas que apresentam objetos matemáticos como criação de um único indivíduo contribuem para que a matemática seja discriminadora, como um conhecimento destinado a poucos escolhidos."

Para se estabelecer o currículo antimarginalização proposto por Santomé (1995), os educadores devem utilizar a história resgatando culturas de civilizações que não tiveram hegemonia econômica e política. Assim, devemos buscar a explicação, entendimento e convivências de habilidades, procedimentos e técnicas matemáticas desenvolvidas no entorno da sociedade de uma certa cultura. Esta ideia vem ao encontro com a base nacional curricular comum (2017), que relata:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. (BRASIL, 2017, p. 294, grifos nossos).

Reconhecendo esse ensino significativo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018, p. 298) esclarece que "Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria História da Matemática."

Saito (2013) apresenta uma maneira de como se deve usar a história para o ensino, que se deve ensinar seguindo a contingência que consta nos documentos originais. Mas não se deve usar uma matéria antiga na sua forma bruta, e os educandos devem utilizar uma nova interface entre a história e o ensino da matemática. Assim ele relata:

> A interface nesses termos é construída pautando-se em aspectos essenciais do fazer matemático de uma época, evitando-se adotar uma perspectiva normativa (ou filosófica) estranha ao contexto desse mesmo fazer matemático. Desse modo, a interface propicia ao discente o acesso à matemática do passado tal como ela era vista no passado, e não como ela deveria ser vista segundo uma perspectiva filosófica (ou epistemológica) ou didática pré-concebida. (SAITO, 2014, p. 28).

Ao encontro disso, o presente trabalho tem como objetivo ir em busca da naturalidade de se aprender matemática, ou seja, em que antes de dar um conteúdo e/ou uma matéria didática pronta, temos uma situação problema como feito historicamente pelos nosso antepassados, mostrando a importância da história da matemática em resolver problemas do cotidiano. Ressaltando que, como tal problema já foi resolvido anteriormente, deve-se aprender com os erros já cometidos e também formalizar uma maneira de resolver situações futuras.

Seguindo os raciocínios de Ponte, Brocado e Oliveira (2005), que relatam:

> Ajuda a trazer para a sala de aula o **espírito da atividade matemática genuína**, construindo, por isso, uma poderosa **metáfora educativa**. O aluno é **chamado a agir como um matemático**, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23, grifos nossos).

A partir dessa perspectiva, o presente trabalho ainda tem a intenção de dar autonomia aos alunos, para que estes possam fazer levantamentos de dados e a busca da solução de problemas semelhantes aos que matemáticos do passado realizavam.

1.1 PRINCÍPIO DA TRIGONOMETRIA

Antes de mostrar a proposta e como será feita a análise, se faz necessário falar da história do princípio da trigonometria, de como esta evoluiu com o passar dos anos, tanto na forma de aprender, de entender e de ensinar. Uma vez que a História é fundamental para formar cidadãos, pois mostra que antes de entender o presente é necessário compreender os caminhos já percorridos pela sociedade. (SAVIANI, 2018).

Antes de ensino-aprendizado é necessário que se faça um levantamento da importância e do porquê do surgimento dessa área tão importante da matemática. Pois o tipo de questão epistemológica dirige a pesquisa do historiador quando este tenta descobrir circunstâncias históricas e sociais sob as quais as invenções matemáticas surgiram. É muito vantajoso o estudo sobre o processo individual e histórico do desenvolvimento matemático; mesmo se os problemas com os quais os alunos eventualmente venham a se deparar sejam diferentes daqueles que os cientistas tenham se deparado no passado, é de extrema importância para a Psicologia da Educação Matemática que seja considerado o relacionamento entre o conhecimento desses problemas. (VERGNAUD, 1994). Ou seja, não se almeja aprofundar na parte histórica, mas sim fazer dela uma ferramenta de contextualizações para os alunos.

No primeiro momento, o pensamento trigonométrico surgiu para resolver problemas de distâncias inacessíveis, principalmente ligadas à astronomia. Lindegger (2000) afirma que o estudo das fases da lua, dos pontos cardeais e das estações do ano só é possível graças a um sistema de medida em escala. Porém, essa trigonometria era a esférica, que, conforme o mesmo Lindegger (2000), foi por muito tempo a maior aplicação.

Pode-se dizer também que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios.

Foram os gregos que denominaram a palavra trigonometria que é entendida como a medida das partes de um triângulo. E entre eles também tiveram vários pensadores sobre a geometria e, por consequência, da trigonometria, com destaque a Tales de Mileto, que em passagem pelo Egito estabeleceu relações para medir a altura da Pirâmide de Quéops, o que nos dias atuais é chamado de tangente, esta ferramenta é utilizada para aferir distâncias inacessíveis. (NASCIMENTO, 2014). Podemos citar também Pitágoras, cuja relação atribuída a ele – o quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado dos catetos – é a relação fundamental da Trigonometria até os dias atuais. (NASCIMENTO, 2014).

Hiparco de Nicéia, entre os anos de 180 a 125 a. C., pode ser considerado o pai da trigonometria, pois ficou historicamente conhecido por fazer a relação da astronomia com a geometria, criando assim a trigonometria. (COSTA NETO, 2011). Uma das suas principais obras que corrobora com essa visão é o tratado em doze livros, onde existem registros que podem ser considerados como a primeira tabela trigonométrica. Porém, depois de um tempo Claudio Ptolomeu criou a *Síntese da Matemática,* que, segundo Costa Neto (2011, p. 24), "é a principal obra da trigonometria da antiguidade, denominado Almagesto, que seu significado é a 'Grande coleção'." Nesta obra aparece a identidade trigonométrica, tabelas de cordas, e várias demonstrações de relações trigonométricas.

Ao falar da origem da trigonometria, não se pode esquecer de citar a contribuição dos hindus, eles também trazem uma coleção de textos que se denomina "*Surya Sidhanta*", que traduzido ao português significa sistemas de astronomias. Essa obra que, segundo Costa Neto (2011, p. 25), "denominou jiva, a relação da meia corda e da metade do ângulo central usando a trigonometria."

> A Trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega, muito mais geométrica. Com as mudanças introduzidas (inclusive quanto ao comprimento do raio considerado), as tabelas de Ptolomeu foram refeitas, utilizando os métodos de tabulação. (COSTA NETO, 2011, p. 25).

Outra contribuição para a evolução da trigonometria veio dos Árabes, que segundo Nascimento (2014), por conta da exigência da época das navegações, se aprofundaram nos estudos feitos pelos Hindus, onde foi aprimorada a aplicação da trigonometria na astronomia e cartografia. Também provaram que a razão seno é válida para qualquer triângulo retângulo, em que não é preciso levar em conta o tamanho do triângulo. A tabela trigonométrica também foi melhorada, isso porque havia a necessidade e a curiosidade em relação à altitude do sol.

Um período importante na história do desenvolvimento da trigonometria foi o Renascimento. Neste período, acontecia uma grande expansão marítima na Europa, assim, os estudos da trigonometria eram utilizados para resolução de problemas de topografia e de cartografias (Cálculos de latitudes e longitudes de países e cidades). Dentre esses estudiosos podemos citar Johann Muller, conhecido como Regiomontanus, o qual estabeleceu a trigonometria como um ramo da matemática. (NASCIMENTO, 2014).

No mesmo período, outro pesquisador que tem destaque é Joachin Rhaeticus que, segundo Lindegger (2000), citou em sua obra as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente), mesmo ele não nomeando como conhecemos hoje. É possível observar em sua obra funções em relação ao arco da circunferência. Ainda dentro de seus trabalhos é possível encontrar termos como hipotenusa, perpendicular, base, seno de 90° e uma ideia de tabela de secantes.

Outro matemático que podemos destacar é Viète, que, em 1580, acrescentou dados para a trigonometria. Sampaio (2008) aponta que ele fez a primeira elaboração sistemática dos métodos de cálculo dos triângulos planos e esféricos, usando as seis funções trigonométricas, relacionou as fórmulas trigonométricas e a resolução de equações cúbicas, por consequência, pode ser utilizada para resolver equações algébricas em geral.

Em ameados de 1595, Pitiscus fez publicações em que corrigia as tábuas de Rhaeticus. A partir desse momento a trigonometria começa a ser tratada como uma ciência. Dessa forma, passou a ter fundamentos e estruturas definidas, o que, por consequência, a tornou uma ferramenta para a investigação de relações fundamentais, onde ela passou a ter uma grande importância para o Cálculo e Análise Matemática. (LINDEGGER, 2000).

Lindegger (2000) relatou que houve uma mudança na forma que a trigonometria era vista, uma vez que anteriormente ela era vista como uma experimentação, e então ela passou a ser estudada também como forma de generalização, ou seja, partindo de aplicações concretas, o que a torna uma ciência. A partir do século XVII, o principal foco do estudo da trigonometria foram as funções trigonométricas, por possibilitar descrever fenômenos vibratórios, oscilatórios e periódicos, e assim tendo uma grande importância para os cientistas. (NASCIMENTO, 2014).

> Foi na primeira metade do século XVII que houve grande progresso na Trigonometria analítica, para descrever o mundo físico, fenômenos mecânicos da vida diária, enquanto os inventores de Trigonometria clássica estavam interessados na Trigonometria esférica, na sua utilidade para os cálculos astronômicos ptolomaicos e predominantes em relação à Trigonometria plana. (SAMPAIO, 2008, p. 72 apud MAOR, 1998).

Principalmente por conta dos cientistas, o período entre o fim do século XVII e o início do século XIX, os conhecimentos trigonométricos obtiveram um grande avanço, tanto na compreensão, surgimentos de novidades, como na sua representação. Dentre esses cientistas podemos destacar: Moivre (1722 – relacionou as funções trigonométricas com os números complexos), Roger Cotes (1722 – reconheceu a periodicidade das funções trigonométricas e o período das funções tangente e secante), John Wallis (expressou fórmulas usando equações em vez de proporções), Isaac Newton (1655 – expandiu o arcsen x nas séries por reversão quando deduziu as séries como par, o sen x), Euler (usou definitivamente a letra π; desenvolveu uma representação de séries trigonométricas das funções), John Bernoulli (explorou o tratamento analítico da trigonometria e usou as funções trigonométricas inversas), Araújo (2008 – escreveu as funções como números puros, onde afirmou que as relações trigonométricas podem relacionar-se a um número), Fourier (mostrou que as séries trigonométricas podem representar quaisquer funções). (SAMPAIO, 2008).

Ao mencionar a história da trigonometria não se deve dar atenção a apenas algumas determinadas culturas, uma vez que sua utilização sempre foi necessária, antes mesmo do conhecimento da sua definição. Como dito anteriormente, a intenção é dar uma breve história da origem de tal matéria, sem esquecer que a trigonometria obteve uma grande evolução histórica com a participação de vários povos e suas concepções científicas.

1.2 TRIGONOMETRIAS NA ATUALIDADE

A trigonometria obteve uma grande evolução historica, sendo muito importante para a evolução humana, e atualmente ela também é uma grande ferramenta que é usada em várias vertentes da nossa civilização, não só na matemática. Assim, serão abordados alguns ramos nos quais se pode notar essa contribuição.

1.2.1 A Importância da Trigonometria na Cartografia

Como dito anteriormente, a trigonometria foi muito importante no desenvolvimento da cartografia, mas ainda hoje ela se faz presente. Uma das grandes importâncias da trigonometria na cartografia é no uso do *Global Positioning System* ou Sistema de Posicionamento Global (GPS), uma vez que este utiliza técnicas de triangulação e cálculos trigonométricos baseados em instrumentos em referências astronômicas como os grandes navegadores no passado, com o diferencial que estes usam o controle da posição dos satélites, a transmissão de sinais de rádio e o processamento computadorizado do receptor. (OLIVEIRA, 2013).

1.2.2 A Importância da Trigonometria na Medicina

Outra área na qual podemos observar o usa da função trigonométrica é na medicina. De acordo com Oliveira (2013), ao fazer o monitoramento da frequência cardíaca, é calculado por um período de tempo o número de batimentos cardíacos, geralmente medido em bpm (batimentos cardíacos por minuto), fazendo o uso da função trigonométrica para observar se os batimentos estão constantes. Sendo este um monitoramento muito importante, uma vez que é com ele que se pode verificar a pressão sanguínea ou arterial de um indivíduo.

1.2.3 A Importância da Trigonometria na Física

Segundo Oliveira (2013), a física é uma das ciências em que mais se usa cálculos da matemática, fazendo-se primordial para compreender os seus conceitos. Por meio de cálculos se pode verificar as comprovações para as teorias relacionadas à Física. É correto pensar que Matemática e Física caminham juntas com o objetivo único de fornecer conhecimentos e ampliar novas pesquisas científicas. Da mesma forma, as funções trigonométricas estão em diversos ramos para auxiliar nos cálculos, podendo ser citados os ramos da Cinemática, Dinâmica, Ótica, entre outros.

1.2.4 A Importância da Trigonometria na Engenharia

A Engenharia consiste na aplicação de métodos científicos ou empíricos à utilização dos recursos da natureza em benefício do ser humano. Ela é uma ciência bastante abrangente que engloba uma série de ramos mais especializados, cada qual com uma ênfase mais específica em determinados campos de aplicação e tipos de tecnologia.

E não importa qual das vertentes da Engenharia, os conhecimentos matemáticos têm uma importância vital para execução das atividades de um engenheiro. Entre as importâncias matemáticas na engenharia, podemos citar a trigonometria, que é essencial para a execução de projetos de boa parte das engenharias. (OLIVEIRA, 2013).

Uma das engenharias em que a trigonometria se faz presente é a engenharia aeronáutica. Oliveira (2013) relata que esta engenharia usa a trigonometria para calcular a inclinação correta que as asas de uma aeronave devem ter para decolar e aterrissar de maneira segura. Também se faz presente nas construções das peças dos aviões.

Outra engenharia na qual a trigonometria se faz presente, sendo de extrema importância, é na Engenharia Civil.

> Ela é usada em todo e qualquer cálculo do projeto estrutural de construção civil, seja na simples construção de um telhado ou numa rampa de acesso, até projetos envolvendo estruturas e fundações e de infraestrutura no que compete projetar e construir obras como rodovias, ferrovias, viadutos, portos, metrôs, túneis e viadutos. (OLIVEIRA, 2013, p. 93).

Também não podemos deixar de citar a importância da trigonometria na Engenharia Agronômica.

> Quando há necessidade de se desenvolver uma base topográfica, e por algum motivo acontecem dificuldades ou impossibilidade de obtenção das medidas por meio de processos diretos, é possível determinar a distância da base procurada por meio de soluções matemáticas, com o auxílio da Trigonometria, onde os valores lineares e angulares necessários são obtidos por meio de instrumentos e métodos topográficos. (OLIVEIRA, 2013, p. 97).

Podemos verificar, à luz da literatura consultada, que a trigonometria teve uma grande importância para a sociedade, tanto na sua evolução histórica, como ainda se faz necessária sua utilização em vários setores da nossa sociedade, principalmente quando aprofundamos esse ramo com teorias acadêmicas. Logo, o seu ensino-aprendizado no mundo escolar é de suma importância.

1.2.5 O Ensino de Trigonometria

O conteúdo de trigonometria se faz presente no planejamento escolar, já que é um conteúdo que está presente em vários setores da nossa sociedade, seu estudo tem uma grande importância para o ensino e aprendizagem dos alunos. Uma vez que está presente diretamente ou indiretamente em todos os níveis, desde o ensino fundamental I, passando para o fundamental II e concluindo no ensino médio. Não podemos esquecer que em muitos cursos das áreas exatas ela é um dos tópicos mais importantes, pois fornece subsídios para outras matérias mais complexas.

Para se oficializar e padronizar o ensino de trigonometria no ensino básico, temos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que destacam a grande importância que esse conteúdo traz no aprimoramento do aprendizado matemático. É necessário destacar que um dos objetivos principais dos Parâmetros Curriculares Nacionais é orientar as instituições de ensino da Educação Básica quanto às competências, às habilidades e aos conhecimentos fundamentais que se espera que os alunos desenvolvam durante a vida escolar. Sendo assim, é um documento muito importante e também norteador para o ensino-aprendizado da matemática no ensino básico. (PEDROSO, 2012).

Especificamente sobre o ensino da Trigonometria, o documento ressalta a importância do tema:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que se deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL, 2000, p. 44).
> .

O trecho citado acima embasa a ideia de que os estudantes precisam incorporar os conhecimentos trigonométricos necessários para que desenvolvam habilidades e competências voltadas para a resolução de problemas aplicados no seu cotidiano. Destaca-se ainda o comentário de que os cálculos algébricos das identidades e as resoluções de equações continuam sendo importantes, o que não se recomenda é unicamente focar o ensino nesse aspecto da Trigonometria (PEDROSO, 2012).

Atualmente, o ensino básico principalmente o ensino médio, tem sua grade estruturada com ênfase na maior porta de entrada para o ensino superior, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). De acordo com o Ministério da Educação (2000), a banca estruturadora do ENEM espera que os candidatos tenham os seguintes conhecimentos de matemática e suas tecnologias:

Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais:

> H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais;
> H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem;
> H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos;
> H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas;
> H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos Numéricos,
> Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;
> H6 -Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional;
> H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais;
> H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e Forma;
> H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
> H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida;
> H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano;
> H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas;
> H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente;
> H14- Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas,
> Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
> H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas;
> H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais;
> H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação;
> H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
> Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas;
> H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas;
> H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas;
> H21- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos;
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação;
> H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação;
> H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências;
> H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos;

> H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas de determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística;
> H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos;
> H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e Probabilidade;
> H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação e
> H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Com base nesse edital de conhecimentos esperados, entende-se que o ensino fundamental e principalmente o médio, devem ser estruturados, pensando neste contexto, como uma das principais, senão a principal, maneira de ingresso para o ensino superior nos dias atuais.

2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

A transição que acontece entre conteúdos matemáticos aritméticos para conteúdos algébricos frequentemente causa dificuldades na aprendizagem dos alunos. As associações de letras com números e situações cotidianas não se tornam fáceis para eles, os conteúdos parecem não fazer sentido e/ou parte da realidade fora do ambiente escolar. Desde o início do ensino da álgebra percebem-se dificuldades em tornar o conteúdo compreensível.

Segundo Miguel e Miorim (1992 apud ARAÚJO, 2008), desde que a álgebra se torna um conteúdo do currículo escolar brasileiro até a década de 60, prevaleceram o ensino reprodutivo e mecânico, em que é apresentado com um caráter instrumental, com a utilidade de apenas resolver equações e problemas propostos. Nota-se que com o passar dos anos não ocorreram mudanças no que diz respeito às dificuldades em álgebra, pois elas continuam presentes na realidade escolar. Atualmente, os alunos apresentam grandes falhas em utilizar a linguagem simbólica para resolver problemas ou generalizar padrões. Araújo (2008) afirma que o pensar matemático e a linguagem algébrica não são desenvolvidos como deveriam em salas de aulas de matemática.

Ponte (2003) afirma que o maior objetivo de estudar álgebra em sala de aula está atrelado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, que inclui a capacidade de manipulação da simbologia, que ultrapassa estudos mecanizados de expressões, equações e funções.

Kline (1976 apud SANTOS; SANTOS, 2010) revela-se atônito ao constatar que, em pleno século XXI, existem professores que acreditam na memorização de processos e aplicações de inúmeras provas em aulas de Matemática, como princípio fundamental para "fornecer aprendizagem." Destaca, ainda, que isso ocorre na maioria das vezes no ensino de Álgebra. *O National Council of Teachers of Mathematics1* (NCTM, 2000), considera que o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. Nessa direção, o aluno deve: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e analisar mudanças em diversas situações (Estudo da variação) (NCTM, 2000). No entanto, surge uma nova necessidade no cenário educacional, a de tornar-se: "Necessário e urgente repensarmos o trabalho que desenvolvemos atualmente com álgebra em nossas salas de aulas, buscando fazer com que o aluno consiga elaborar significado a esse domínio de desenvolver o Pensamento Algébrico." (SANTOS; SANTOS, 2010, p. 9).

O desenvolvimento do pensamento algébrico deveria ser o foco ao ensinar álgebra, o aluno deveria ser formado por completo, ser agente ativo de seu conhecimento, e poder construí-lo de forma significativa. Além disso, deveria saber utilizá-lo a seu favor, em todas as situações vivenciadas rotineiramente.

Não existe uma definição fechada do que seria o pensamento algébrico, mas uma das definições que vamos levar em conta é do Blanton e Kaput (2005, p. 99) que consideram:

> O raciocínio algébrico é um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas de uma forma cada vez mais formal e adequada à sua idade.

Assim Nobre (2016), considera que o pensamento algébrico consiste na generalização de uma situação que envolve matemática em estruturas matemáticas, a álgebra vem ao encontro no auxílio para se expressar as generalizações em formalização. A fórmula da área de um quadrado pode ser um exemplo, no qual se sabe que não é preciso saber qual quadrado específico se está trabalhando, mas que para calcular é só multiplicar a medida da base vezes a medida da altura.

3 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Oliveira (2017) observou que a preocupação frequente em congressos de educação matemática é sobre o questionamento da matemática ensinada em sala de aula, uma vez que há uma supervalorização da matemática científica, o que por muitas vezes pode levar a uma dificuldade na compreensão por parte dos alunos. Essa concepção em muitos casos leva a um distanciamento das práticas e culturas escolares. Assim, a matemática acadêmica deve ser o misto de matemática científica com a matemática na prática, que leva em consideração o cotidiano dos alunos, fazendo assim o seu ensino-aprendizado em aptidão para situações problemas usando ferramentas matemáticas.

Entre as várias metodologias que buscam a relação do cotidiano com a matemática, podemos citar a modelagem matemática que segundo Biembengut e Hein (2000) é tão antiga quanto a matemática, pois ela se surgiu com as necessidades corriqueiras de cada povo. Dessa forma, podemos classificar sua utilização intuitiva, em que ela vem para resolver problemas do cotidiano.

Barbosa (2012) questiona sobre o que é realmente modelagem matemática. Se existe um consenso da sua definição e de sua utilização no ensino- aprendizado, se existe uma regra e normas a se seguir para fazer um estudo com esse direcionamento e chegando à conclusão que não existe uma regra clara para o que é modelagem matemática, como uma receita. Assim, para não termos uma verdade pura no assunto, usaremos a perspectiva de modelagem matemática, já que seguiremos apenas uma das visões desse caminho.

Soares (2019) revela que a modelagem matemática é um processo que permite relacionar o estudo com o cotidiano do aluno na prática, ou seja, essa metodologia tem como objetivo fazer uma aplicabilidade da matemática aprendida em sala de aula com situações reais, fazendo ter um sentido do porquê ser estudado, e por consequência facilitando o aprendizado.

Para Bassanezi (2002, p. 16), "A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real." Assim, sendo capazes de reconhecer problemas do cotidiano, que possam ser resolvidos com a matemática aprendida em sala de aula, fazendo uma ponte da sala de aula com o cotidiano. Segundo Soares (2019), o mais importante da modelagem matemática é o reconhecimento da situação problema e conseguir produzir novos conhecimentos sobre a tal temática. Para fazer isso deve-se seguir o esquema da leitura analítica:

a) - identificar uma situação problema;
b) - identificar o conjunto de variáveis relativas ao problema;
c) - fazer a correlação das variáveis com a situação problema;
d) - transformar as relações em um sistema matemático e
e) - produzir novos conhecimentos sobre a temática.

Assim, para o melhor aproveitamento em um trabalho com a modelagem matemática, o aluno deve pesquisar. O papel de mediador cabe ao professor, assim deixando os alunos serem autônomos, sem ter o ar de superioridade encontrada geralmente em sala de aula, como o detentor de conhecimento, cabendo assim aos alunos a responsabilidade pelo seu aprender. (PEREIRA, 2019).

4 METODOLOGIA

A pesquisa realizada tem natureza descritiva, com abordagem qualitativa, utilizando-se de tratamento de dados quantitativos como complementaridade para melhor explicar os objetivos da investigação, do tipo exploratória e interpretativa, de acordo com Bogdan e Biklen (1994).

A pesquisa é de cunho qualitativo, onde se buscou uma maneira mais eficiente no ensino-aprendizagem, por meio de observações de aulas diferenciadas e suas vantagens. Os dados foram obtidos por meio de informações contidas nos relatórios dos alunos e também de um questionário realizado após a prática.

O estudo foi realizado em uma escola particular na cidade de Bela Vista do Paraíso – PR, com dezenove estudantes do nono ano do ensino fundamental II. A ideia de realizar o trabalho com a turma foi bem aceita por todos os alunos. Por se tratar de uma aula "diversificada", eles ficaram entusiasmados e, por consequência, foi obtido o percentual de 100% de participação.

A amostra foi obtida por conveniência (AMADO, 2013; YIN, 2014). O período de coleta foi no primeiro semestre de 2019 e atendeu às normas e aos requisitos de ética da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Londrina, com os procedimentos padrões de consentimento.

O genitores dos estudantes foram cientificados sobre a realização da pesquisa, com a devida ressalva de que as imagens e nomes dos alunos não seriam divulgados no trabalho, tendo assinado um termo de consentimento e autorização.

A instituição foi escolhida por conveniência, uma vez que um dos pesquisadores é docente nesta instituição.

Foram realizados seis relatórios e dezenove questionários por parte dos alunos. Nos relatórios, eles descreviam as realizações das tarefas. Além disso, as medições foram registradas por meio de fotos. Esta atividade foi realizada em grupos de 3 ou 4 alunos, os questionários eram constituídos por 5 perguntas, onde os alunos relatavam suas opiniões. Ao todo, foram realizados 8 encontros, com duração de 50 minutos cada e em todos os encontros participaram os 19 alunos.

O projeto denominado "Aula de Campo" teve como objetivo observar e analisar o ensino-aprendizagem em uma aula extraclasse. As observações tinham o objetivo de constatar os prós e contras de tal aula. Dessa forma, mesmo que de maneira sucinta, foram realizadas aferições de conhecimento dos alunos para subsidio de futuros professores, com o intuito de praticar aulas com esta metodologia.

Na primeira fase do projeto, os alunos elaboravam um relatório no qual deviam aferir lugares altos fazendo o uso de semelhança de triângulos (que consiste, de modo geral, na proporção entre dois ou mais triângulos, ou seja, são proporcionais se, e somente se, todos os seus lados e ângulos internos forem proporcionais ao outro triângulo), usando apenas uma trena e a sombra do objeto proveniente do sol. Os alunos anotavam as medidas e registravam as atividades com fotos. Em seguida, ainda usavam a semelhança de triângulos, mas desta vez não podiam mais usar a sombra do sol, para aferir os mesmos objetos. No segundo momento da primeira fase foram elaborados questionários para coleta das opiniões dos alunos. No questionário, eles relatavam se as atividades tinham sido prazerosas, proveitosas, de fácil entendimento, etc.

Na segunda fase do projeto, os alunos também tinham que elaborar um relatório no qual deviam aferir lugares altos, mas usando as relações trigonométricas. Para isso, eles usariam uma trena e um teodolito que fora construído anteriormente. Os alunos anotavam a distância que estavam do lugar pretendido a medir e calculavam o ângulo até sua altura máxima. Em seguida, usando a relação trigonométrica adequada, fariam os cálculos. Com as medidas em mãos, os grupos retornaram à sala juntamente ao docente, onde foi realizada uma discussão sobre as medidas levantadas, bem como a resolução dos problemas, e com a investigação matemática obtendo uma formalização do estudo.

A metodologia adotada para a análise dos resultados do projeto foi a descritiva qualitativa, o ambiente foi a própria fonte de dados, não podendo ter rasuras ou interferências pessoais do pesquisador, descrevendo a maior quantidade de elementos originais produzidos pelos alunos na investigação. Nesse projeto enfatizou-se a metodologia de Aulas Diversificadas.

Como proposta final, o pesquisador desenvolveu um Produto Educacional, que consistirá na criação de um manual compilado com todas as experiências realizadas nas atividades extraclasse de resolução de problemas com aulas proativas, que serão desenvolvidas com foco nas aplicações de trigonometria no fundamental II.

Os resultados foram frutos dos levantamentos feitos nas experiências com os alunos nas aulas proativas, extraclasse, e estão apresentados por meio de figuras e gráficos desenvolvidos a seguir.

5 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES EXTRACLASSE

O trabalho foi separado em duas fases, em que na Fase 1 foi dada ênfase no ensino-aprendizado de semelhança de triângulos e, na Fase 2, o foco se deu na relação trigonométrica, aplicada à realidade do cotidiano escolar dos alunos.

5.1 ATIVIDADE 1

Para descobrir a altura de um prédio, Luiz mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Luiz, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?

Na retomada da resolução desse problema os alunos foram indagados pelo professor com a seguinte questão:

Professor – Como podemos fazer a medição de uma árvore alta usando esse problema?

Aluno 1 – Um aluno pode subir lá em cima.

Professor – Repito, usando o problema que acabei de resolver.

Aluno 2 – Ora, medindo a sombra dessa árvore.

Professor – Muito bem, mas nos exercícios eram realizadas comparações de sombras e tamanhos, como podemos fazer isso?

Aluno 3 – Sei lá!

Professor – Vamos retomar o problema... O que ele mediu?

Aluno 2 – Ele mesmo, e também sua sombra.

Professor – Então, é isso que vocês irão fazer, com o tamanho e a sombra de alguém do grupo.

Aluno 4 – Como assim?

Aluno 5 – Vamos medir o aluno 2, e depois sua sombra… lá fora, porque aqui não tem sombra, né.

Professor – Isso mesmo! Então vai descer e fazer as medições, mas quero que vocês realizem um relatório.

Aluno 3 - Como assim?

Professor – Descrever o que estão fazendo, exemplo: medir a altura de um aluno e também de sua sombra, e não se esquecer de tirar fotos das medições. O relatório pode ser do formato que julgarem mais conveniente.

Assim, os alunos desceram para o pátio da escola, onde começaram as aferições. Foram formados 6 grupos, dos quais 5 grupos eram compostos por 3 alunos e 1 grupo era composto por 4 alunos. Cada grupo tinha uma trena métrica que foi distribuída pelo pesquisador. Desta forma, se descreverá as medições julgadas mais importantes.

Cruz (2015) ressalta que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos correspondentes são iguais e os lados correspondentes são proporcionais. Assim, no exemplo dado, é possível notar essa semelhança, em que os ângulos serão congruentes (pois tanto a pessoa como o objeto a ser medido estará perpendicular ao solo, e o ângulo formado pela sobra do sol também será congruente nos dois), havendo proporcionalidade dos lados desses triângulos.

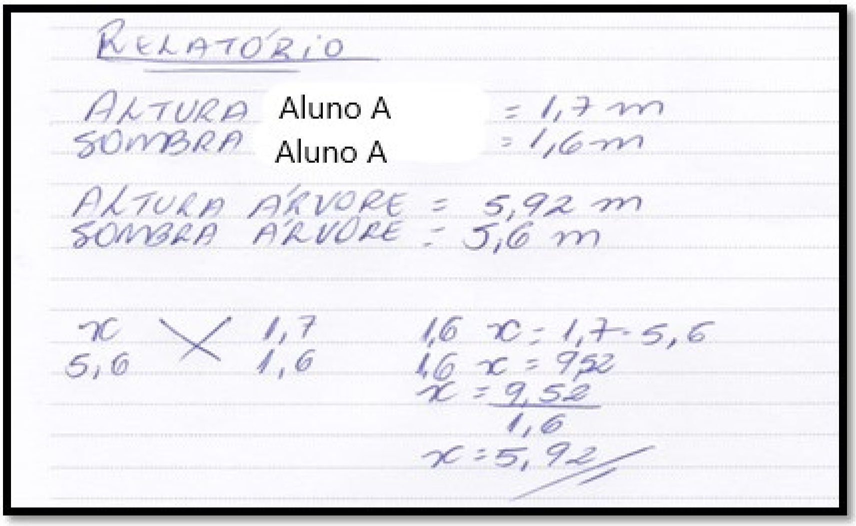
5.1.1 Medida 1 – Árvore Central

A primeira medição foi a da árvore central do pátio da escola, onde o Grupo 1 fez as medições do aluno A e de sua respectiva sombra (Imagem 1). Posteriormente, o grupo aferiu a sombra da árvore e, em seguida, foi realizada a semelhança de triângulos e encontrada a altura aproximada da árvore. Após os dados serem recolhidos, foram realizados os cálculos para descobrir o valor da altura da árvore.

Imagem 1 – Aluno medindo sua própria altura e sombra, respectivamente, com o auxílio dos colegas de classe

FONTE: Próprio autor (2019)

Imagem 2 – Relatório realizado pelos alunos



FONTE: Próprio autor (2019)

O Relatório descreve uma semelhança de triângulos, pois como eles perceberam que a altura do aluno e sua sobra e a altura da árvore com sua sombra teriam ângulos congruentes, usaram a definição de semelhança de triângulos para realizar e constatar que a altura da árvore dividida pela sua sombra seria igual à altura do aluno dividido pela sua sombra.

Como resultado dos cálculos matemáticos usando razão e proporção, os alunos desse grupo determinaram que a árvore tem, aproximadamente, 5,92 metros de altura.

5.1.2 Medida 2 - Portão da Escola

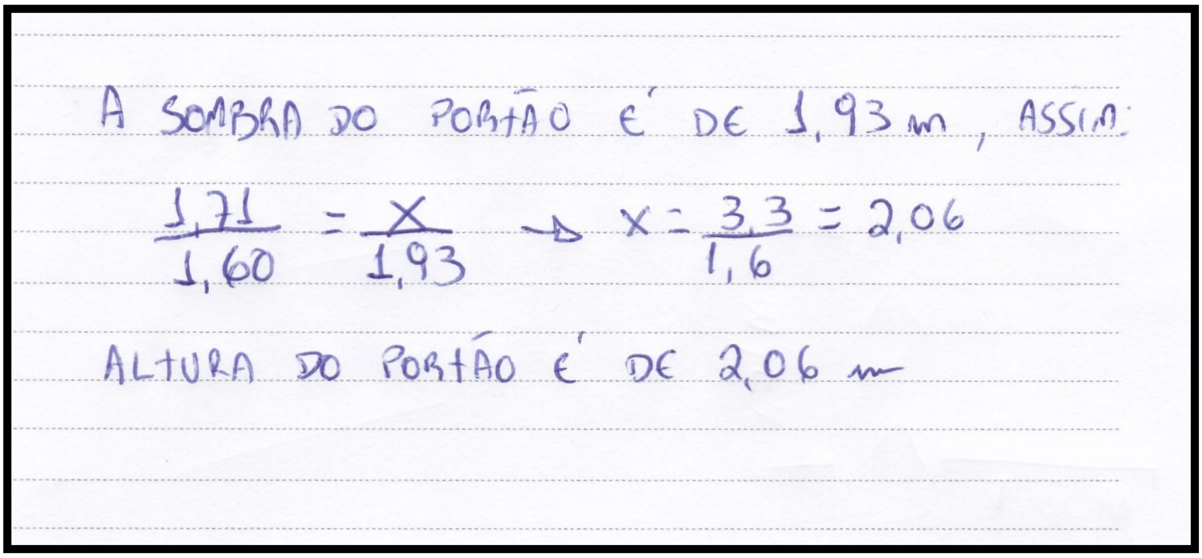
Esta experiência foi realizada com o intuito de observar se realmente são corretas as medições da altura do portão com a aplicação desta metodologia, ou seja, foi realizada a prova real. Para isto, foi medido o portão da escola, e observou-se que a sua altura era aproximadamente 2 metros. Em seguida, os alunos calcularam a altura e a sombra do aluno B, em que encontraram sua medida de 1,71 metros e sua sombra 1,60. Posteriormente, foi medida a sombra do portão da escola (Imagem 4), e foi encontrada a medida de 1,93 metros:

Imagem 3 – Aluna medindo a sombra do portão da escola com uma fita métrica.

FONTE: Próprio autor (2019)

Com os valores conhecidos, eles fizeram o cálculo para descobrir a veracidade do procedimento de semelhança de triângulos.

Imagem 4 - Relatório sobre as medições e cálculo da altura do portão



A SOMBRA DO PORTÃO É DE 1,93 m, ASSIM:

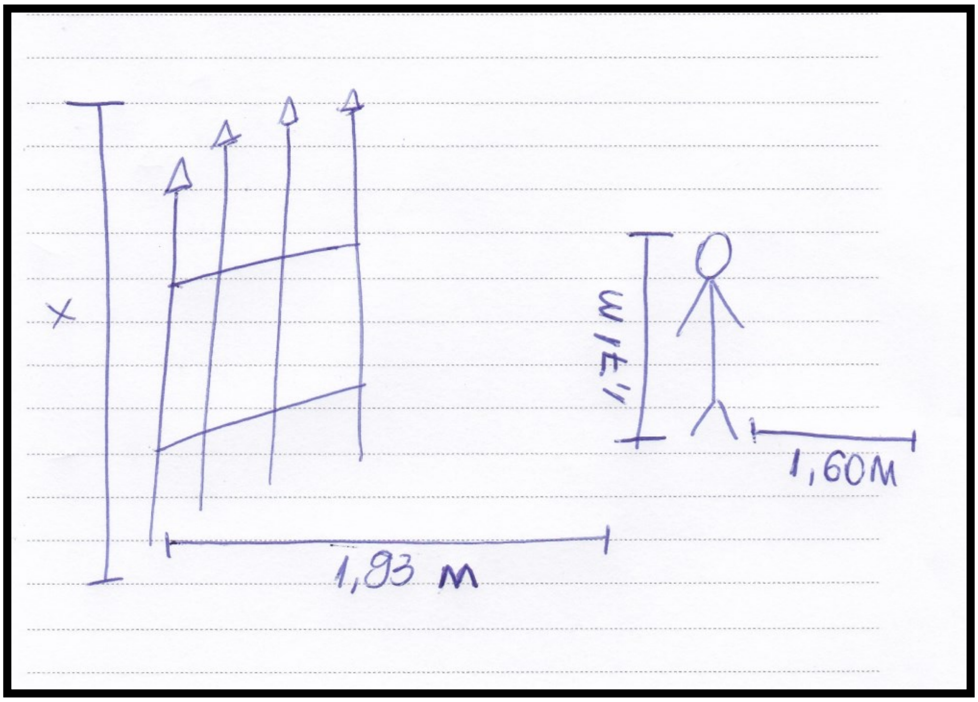
$$\frac{1,71}{1,60} = \frac{x}{1,93} \rightarrow x = \frac{3,3}{1,6} = 2,06$$

ALTURA DO PORTÃO É DE 2,06 m

FONTE: Próprio autor (2019)

Embora a altura obtida tenha apresentado uma pequena diferença em função da falta de precisão dos equipamentos utilizados e da pouca experiência dos alunos, a diferença foi de apenas 6,3% o que empiricamente é aceito em função da natureza empírica das medições.

Imagem 5 – Representação ilustrada do cálculo da altura do portão



FONTE: Próprio autor (2019)

Assim, eles concluíram que a altura do portão é realmente aproximadamente 2 metros.

5.1.3 Medida da Árvore lateral

A terceira medida foi considerada interessante, pois foi cometido um erro por parte do grupo na medição da sombra da árvore. Em lugar de eles medirem a sombra da altura da árvore, eles calcularam a medida da largura da arvore, assim não seria possível fazer a comparação para encontrar a altura da árvore.

Imagem 6 – Alunos medindo a largura da sombra da árvore

FONTE: Próprio autor (2019)

No novo encontro, foi levantada a seguinte questão:

Professor – Seria possível fazer as medidas em um dia sem sol?

Aluno 1 – Claro que não, professor.

Aluno 2 – Será que não dava para fazer com a lâmpada da sala?

Professor – Como assim?

Aluno 2 – Ué, a gente mede aqui na sala.

Professor – Mas como nos mediríamos os lugares realmente altos, que não estão em sala?

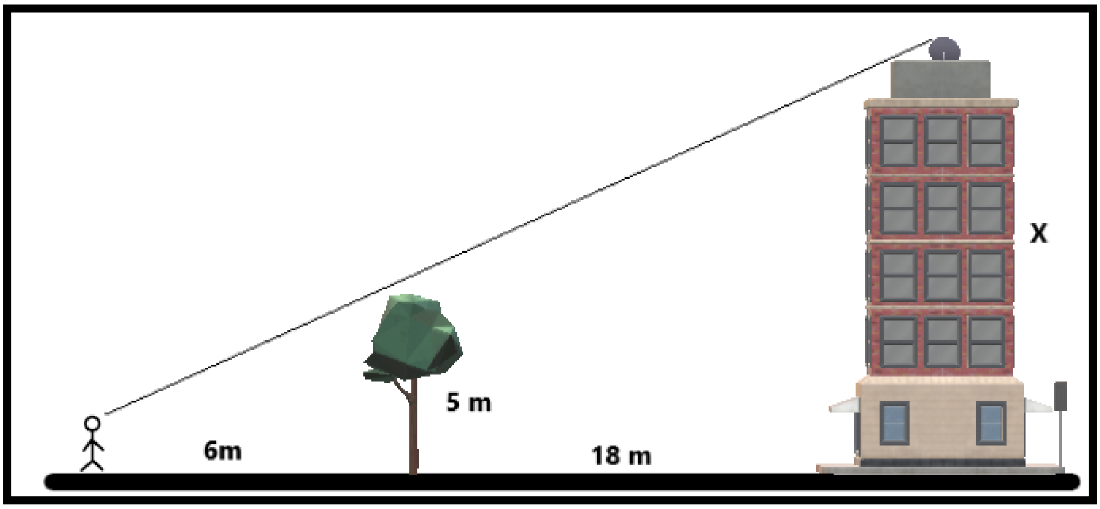
Aluno 2 – Ah, sei lá, coloca uma lâmpada bem alto...

Professor – Tá, me deixa reformular a pergunta, seria possível fazer as medidas sem sombra?

Aluno 2 – Aí não, né, professor...

Professor – Tá, vou retomar um exercício e ver se isso te dá uma ideia.

Imagem 7 – Desenho do exercício usado como exemplo



FONTE: Próprio autor (2019)

Professor – Será que tem como fazer a medida tomando esse exercício com exemplo?

Aluno 3 – Acho que até dá, mas vai ser difícil.

Professor – E se o aluno sentar no chão e outro, ou melhor, se for o mais alto, ficar na sua frente e se localizar no exato momento que ele "tampa" a árvore?

Aluno 5 – Como assim?

Professor – Vou fazer uma ilustração no quadro.

Aluno 5 – Entendi, mas como vamos fazer?

Professor – Da imagem que acabei de fazer, quais medidas, ou seja, qual distância eu consigo calcular?

Aluno 6 – A altura dos alunos ué...

Professor – Só isso? E a distância entre os alunos? O que está sentado com o que está em pé.

Aluno 6 – Acho que dá, e também vai dar para calcular da pessoa de pé até na árvore, se a árvore estiver aqui dentro...

Professor – Muito bem, será que não daria também para calcular a distância entre a pessoa sentada e a árvore?

Aluno 6 – Não entendi.

Professor – Temos a distância de pessoa sentada para a pessoa em pé, também temos a distância da pessoa em pé para a árvore, assim para calcular da pessoa sentada para a árvore é só somarmos as distâncias...

FONTE: Próprio autor (2019)

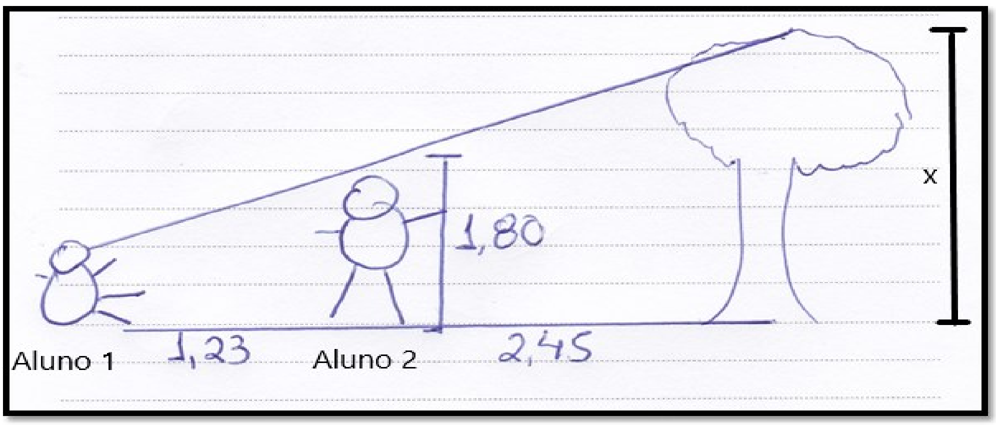
Assim, os alunos partiram para o pátio novamente, com os mesmos grupos, mas agora para medir a árvore central da escola, porém, sem o uso da sombra. Segue relato do desenvolvimento do grupo considerado mais interessante.

5.1.4 Árvore Central

Nessa medição, eles colocaram o Aluno 1 sentado no chão, e postaram o Aluno 2 no lugar exato que não poderiam mais ver o topo da árvore.

Calcularam a distância do Aluno 1 até o Aluno 2 e, em seguida, calcularam a distância do Aluno 2 até a árvore. Depois desses dados recolhidos, fizeram a medida do Aluno 2, que deu 1,80 metros, e assim fizeram o cálculo:

Imagem 8 – Representação ilustrada do cálculo da altura da Arvore



FONTE: Próprio autor (2019)

$$\frac{1,80}{1,23} = \frac{x}{1,23 + 2,45}$$

Fazendo as operações, se determina que x = 5,38 metros, que é a altura da árvore.

Nota-se que eles cometeram um pequeno erro na conclusão da altura, vez que ficou faltando a altura do chão até a altura dos olhos do Aluno 1, ou seja, a árvore era maior que a calculada. Esse tipo de erro já foi cometido anteriormente, pois eles ficam mais interessados nos cálculos e às vezes esquecem alguns detalhes.

Na primeira fase, a busca foi a de fazer um encontro com a história e a trigonometria, trazendo situações problemas que foram realizadas por povos anteriormente. O professor teve um papel de apenas observador, que auxiliava somente em momentos bem específicos, como na forma de utilizar a trena, de quais lugares medir, etc. Porém, os alunos tiveram autonomia para fazer as medidas e os cálculos que achavam adequados.

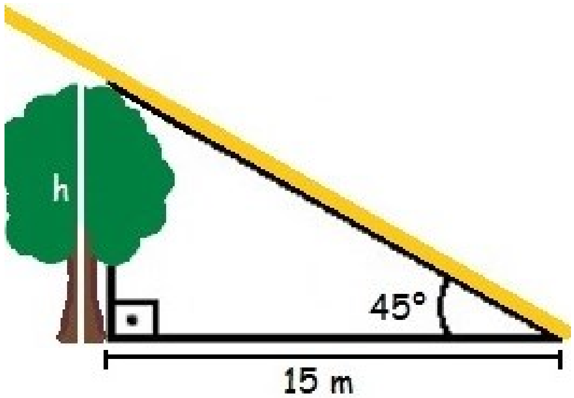
6 FASE 2

Os dados foram obtidos após o professor regente da turma aplicar o conteúdo “Razões trigonométricas no triângulo retângulo”, previsto para o 4° bimestre. Posteriormente à conclusão do conteúdo, foi iniciado o projeto, no qual o objetivo era avaliar a contextualização do conteúdo por parte dos alunos. Após a avaliação e a obtenção das notas de cada aluno, o projeto foi posto em prática. Nele, eles fariam medições de árvores altas que existem no pátio da escola. No entanto, anteriormente, o docente exemplificou o conteúdo em sala para que os alunos tivessem um embasamento. (Imagem 9).

6.1 ATIVIDADE

Qual a altura da árvore descrita na imagem abaixo?

Imagem 9 – exemplo utilizado pelo professor em sala de aula.



FONTE:https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-seno-cosseno-tangente.htm

Ainda em sala de aula, o professor fez as seguintes perguntas aos alunos:

Professor – De que maneira poderíamos mediar as duas árvores do pátio do colégio?

Aluno 1 – Igual ao problema do exemplo, calculando a distância da árvore, da pessoa até a árvore.

Professor – Explique melhor.

Aluno 1 – Ué! Uma pessoa fica parada e a outra mede a distância até a árvore.

Professor – Mas e como iríamos encontrar o valor do ângulo?

Aluno 2 – Vai mais ou menos, até formar 90 graus.

Professor – Será que seria possível?

Aluno 3 – Claro que não, professor… Só se for um avião no céu.

Professor – E se nós usássemos um transferidor?

Aluno 1 – Acho que aí dava. Mas como calcula?

Aluno 2 – Ah, professor, nem sei usar!

Professor – *Ok*, vamos relembrar como se usa um transferidor.

Fonte: Próprio autor, (2019).

Após o diálogo em sala, os alunos foram até o pátio da escola para realizar as medições das árvores e outros lugares altos que achassem interessante, cada grupo teve que elaborar um relatório onde explicavam como foram realizadas as medidas. Para o trabalho, foram utilizadas as medições consideradas mais interessantes.

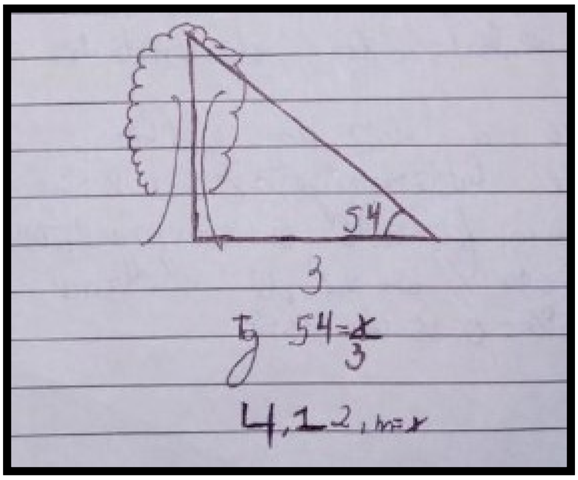
6.1.1 Medida da Árvore Central

A primeira medida recolhida pelos alunos foi da árvore central da escola. Para isso, os alunos ficavam a uma determinada distância da árvore, tal distância calculada com o auxílio de uma trena e um teodolito feito com transferidor. O ângulo foi formado a partir da distância da árvore até o aluno e do aluno ao topo da árvore (Imagem 10). Após o recolhimento dos dados, os alunos chegaram ao seguinte cálculo (Imagem 11).

Imagem 10 - aluno medindo a distância sua à arvore central da escola.

FONTE: Próprio autor (2019)

Imagem 11 - Cálculos realizados pelos alunos durante a atividade



FONTE: Próprio autor (2019)

Foi possível constatar, por meio da observação dos cálculos resolvidos pelos alunos, que houve por parte deles um bom entendimento da concepção trigonométrica utilizada. No entanto, é possível observar que foram esquecidos alguns detalhes no desenvolver dos exercícios, como, por exemplo, o fato de os alunos não acrescentarem a medida da altura dos olhos do medidor.

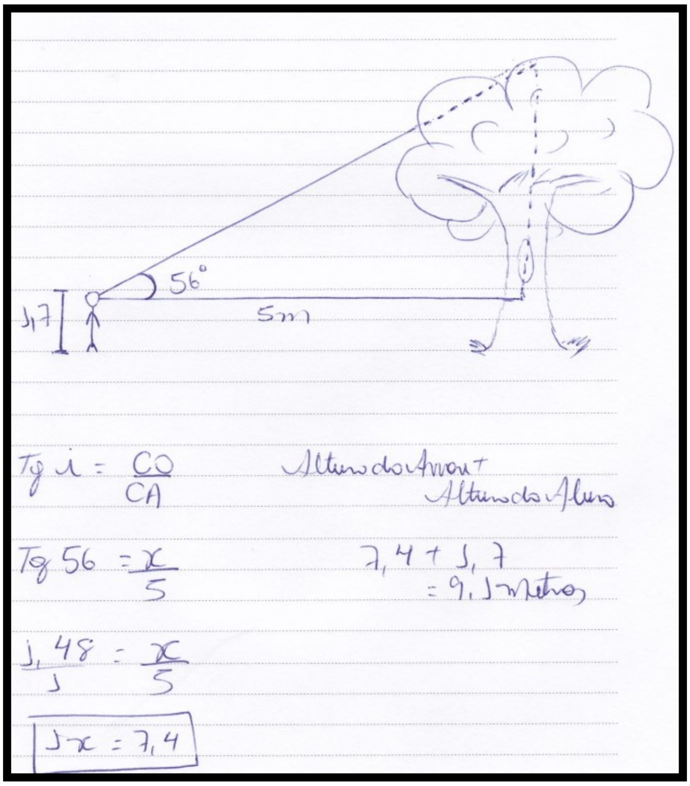
6.1.2 Medida da Árvore Lateral

A segunda medida coletada foi a da árvore lateral da escola, de uma forma análoga à primeira (Imagens 10 e 11).

Imagem 12- - Distância do ponto referencial do cálculo até a árvore lateral

FONTE: Próprio autor (2019)

Imagem 13 - Cálculo efetuado pelos alunos para a obtenção do resultado da altura da arvore da imagem 12.



FONTE: Próprio autor (2019)

Os procedimentos para os cálculos para obter a altura da árvore da imagem 13 foram realizados corretamente. Assim, os alunos puderam concluir que a árvore mede, aproximadamente, 9,1 metros.

Novamente em sala, os grupos relataram como foram realizadas as medidas e como foram realizados os cálculos para encontrar a altura do objeto. Depois da discussão, iniciou-se o seguinte o diálogo:

Professor – Será que não teria como medirmos a altura do prédio?

Aluno 2 – Ter tem, mas duvido que a diretora vai deixar sair da escola.

Professor – Mas será que não tem um jeito de medirmos um prédio próximo sem sair da escola?

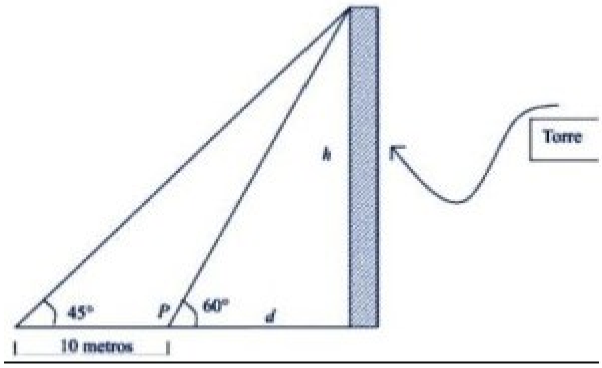
Aluno 2 – Do jeito que a gente fez não... Porque tinha que medir do pé da árvore.

Professor – *Ok*, vou passar um exercício e ver se ele nos dá alguma uma ideia.

6.1.3 Medida do prédio

Exemplo: Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60º. Se ele se afastar do edifício mais 10m, passará a ver sob ângulo de 45º. Calcule a altura do edifício.

Figura 14 – Exemplo utilizado pelo professor em sala de aula



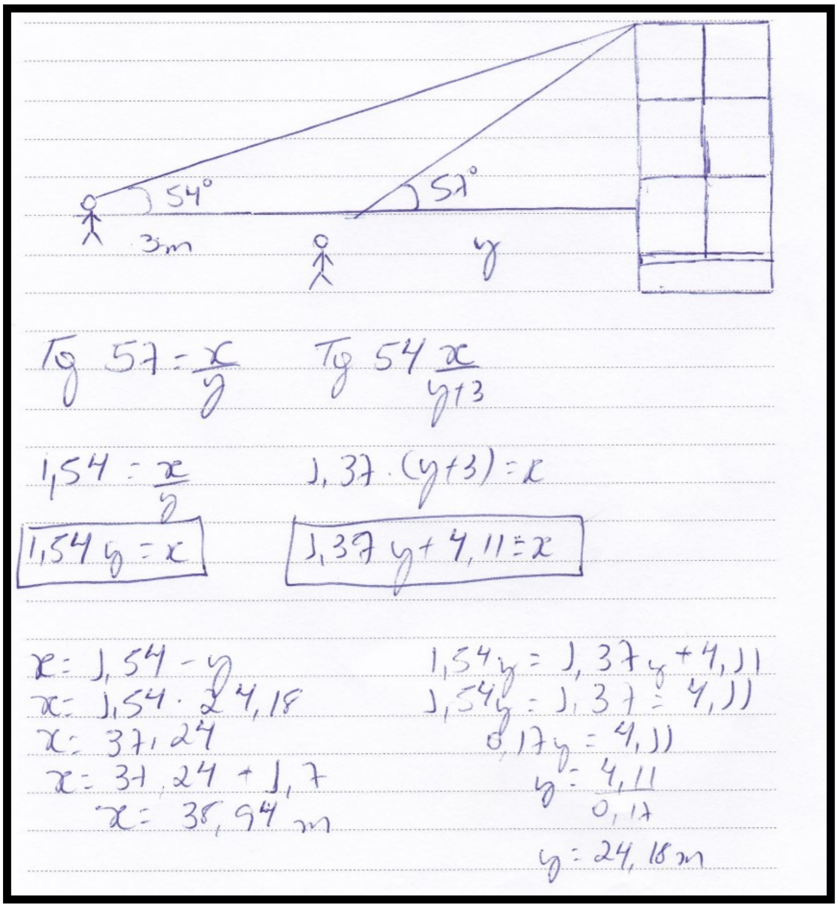
FONTE – COPS (2010)

Após a discussão sobre o exercício exemplo, os alunos dividiram-se em dois grupos, tais grupos dirigiram-se para o pátio da escola, onde fizeram o levantamento dos dados necessários para calcular a altura do prédio ao lado da escola.

Imagem 15 - Aluno medindo o grau em relação ao prédio

FONTE: Próprio autor (2019)

Imagem 16 - Cálculo efetuado pelos alunos para a obtenção do resultado da altura do prédio



FONTE: Próprio autor (2019)

Neste problema, os alunos observaram que, primeiramente, era mais fácil encontrar a distância deles até o prédio (valor representado por y), e posteriormente encontrar o valor da altura do prédio (valor representado por x). Novamente em sala, os alunos responderam duas questões com o mesmo método avaliativo, para constatar se realmente houve ou não um aumento no aprendizado por parte dos alunos.

7 PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional desse trabalho vem com a intenção de mostrar problemas do cotidiano dos alunos de modo prático. É verdade que cada vez mais são inseridas situações problemas do cotidiano em sala de aula, mas mesmo que tenha uma grande valia no ensino-aprendizado, tais problemas podem ser aprofundados na prática.

No cotidiano, não é raro ver vários profissionais usando matemática na prática, sem saber sua teoria: como o pedreiro que para levantar uma parede faz uso de um triângulo pitagórico, o pintor que calcula a área de uma parede para saber a quantidade de tinta, o marceneiro que usa razão e proporção nas medições de seus móveis, entre outas áreas de serviços. Também é comum o uso da matemática intuitivamente por crianças, adolescentes e jovens. Assim, esse produto educacional vem com o intuito de fazer uma ponte entre a matemática prática e a teórica.

O Produto Educacional tem a intenção de agregar em um único produto pontos de vistas de diversos professores e profissionais da área educacional, uma vez que muitos professores já abordam esta metodologia. Dito isto, o objetivo é fazer um levantamento de situações problemas do cotidiano, para que os alunos consigam ter autonomia na resolução de impasses matemáticos que envolvam a matemática na prática, e que futuros professores possam utilizá-lo em suas aulas no futuro e ir incrementando com novas situações surgidas com as dúvidas levantadas pelos alunos no seu cotidiano escolar.

O produto será constituído inicialmente por oito problemas, e os professores terão a liberdade de adicionar problemas que julgam relevantes para a matemática cotidiana. Sendo assim, o produto estará em constante atualização e sempre em sincronia com a atualidade, sendo um estímulo para os alunos independente do passar dos anos.

Para o acesso dos alunos, o produto contará com um QR CODE nos livros didáticos. Ao abordar assuntos que envolvam determinada situação problema, o aluno, de forma autônoma, poderá acessar de seu celular o conteúdo e tentar resolver por conta própria. Neste contexto, o professor tem o papel de auxiliar, não esquecendo que o papel de protagonista deve ser do aluno, o professor vem com o objetivo de complementar o ensino, mostrando por meio de fórmulas o conteúdo abordado no exercício prático, sendo o mediador que só vai interferir quando os alunos se depararem com obstáculos que precisam de um referencial teórico para prosseguir no desenvolvimento do problema proposto.

Estes problemas foram pensados com ênfase no conteúdo de trigonometria, mas também abordarão outros assuntos, como por exemplo o plano cartesiano, comprimento de circunferência, etc. incentivando, assim, a colaboração de professores.

Os problemas já foram colocados em prática, no entanto até a data presente não houve uma observação analítica para uma descrição teórica de todos eles. Porém, foi possível constatar que os problemas são possíveis de serem realizados pelos alunos, relacionando situações do cotidiano escolar.

PROBLEMA 1 - Altura de um lugar alto com a sombra:

Não que é difícil encontrar essa situação em vestibulares, principalmente, por isso, é muito interessante os alunos entenderem o desenvolvimento na prática: a ideia é calcular a altura de um lugar que não é possível subir até o topo para medir (como um prédio, por exemplo), e que, porém, é possível medir o comprimento de sua sombra. Para fazer tal averiguação, o aluno mediria sua própria altura, a sombra do objeto e também sua sombra, e com uma regra de três simples ele obteria um valor aproximado de qual a altura do objeto. O importante dessa contextualização é que o professor pode se aprofundar no conteúdo de proporcionalidade, de trigonometria no conteúdo de semelhança de triângulos, entre outros.

PROBLEMA 2 – Altura de um lugar alto sem a sombra:

O Problema 2 tem uma direção de conteúdo bem parecido com o problema anterior, entretanto, ele tem um maior grau de complexidade. Para conseguir fazer as medições, seria importante um grupo de alunos, de no mínimo três pessoas, em que eles também fariam uma medição de um lugar alto, o qual não seja possível subir até o topo para medir. Para a resolução desse problema, o Aluno 1 sentaria no chão, o Aluno 2 ficaria em pé tapando a visão do objeto a ser medido, o Aluno 3 calcularia a distância do Aluno 1 até o 2, posteriormente a distância do Aluno 2 até o objeto. Também é preciso saber a altura do Aluno 2 e a altura até o olho do Aluno 1 sentado. Depois, com uma regra de três via semelhança de triângulos, se faz as medições, encontrando a altura do objeto.

PROBLEMA 3 – Altura de um lugar alto com teodolito

Para a realização desse problema, os alunos teriam que criar um teodolito, para que eles possam realizar as medições de ângulos. E com as medições desses ângulos, os alunos usariam na prática as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente. Para saber a altura, os alunos ficariam a uma distância do objeto e com o teodolito calculariam o ângulo do topo deste objeto. Depois de saber a distância e o ângulo do topo, faz-se uma relação trigonométrica para saber a altura aproximada do objeto. Tal problema aborda diversos conteúdos, mas tem ênfase em relações trigonométrica.

PROBLEMA 4 - Altura de um lugar alto distante com teodolito

A realização desse problema tem muitas coisas similares com o anterior, mas com um pouco mais de complexidade, tanto no uso das relações trigonométricas, quanto nas contas para as realizações. Para a realização do problema, os alunos também terão que criar o teodolito, em que eles procurariam um lugar distante no qual eles não precisam chegar. Eles achariam um Ponto A e calculariam o ângulo do topo do lugar, depois andariam até o Ponto B, que estaria mais próximo, e calculariam o ângulo desse ponto. Depois calculariam a distância entre os Pontos A e B, e com duas relações trigonométricas e com um sistema de equações resolveriam tal altura.

PROBLEMA 5 – Altura de uma pipa

O Problema 5 vem para trazer resposta para uma pergunta bem comum que é da altura que a pipa está. Assim, para resolver, irá se usar a trigonometria. Para isto, é utilizado um carretel com o tamanho de linha conhecido, a pipa é solta até que a linha se desenrole completamente. Posteriormente, calcula-se o ângulo da linha. Semelhante ao Problema 3, seriam feitos cálculos utilizando as relações trigonométricas, encontrando assim a altura em que a pipa se encontra.

PROBLEMA 6 – Batalha naval no plano cartesiano

Neste problema não será abordado o conteúdo de trigonometria, ele tem grande direcionamento para o uso do plano cartesiano, mas também usa raciocínio lógico, coordenação motora, entre outros. Neste problema, o objetivo será ganhar o jogo do seu adversário, porém, o desenvolvimento matemático começa já na preparação do jogo. Cada um dos jogadores recebem uma folha, dobram ao meio e, tanto na parte de cima quanto na parte de baixo, serão desenhados dois quadrados grandes, compostos com 121 quadradinhos (de um centímetro por um centímetro). Eles vão desenhar seus barcos na quadra de cima, sem que seu adversário saiba. No quadro de baixo, serão marcadas as tentativas de acertar os barcos do adversário. Ganha quem derrubar todo o esquadrão do adversário. Depois do jogo, o professor pode trabalhar com os alunos raciocínio lógico e também probabilidade, entre outros conteúdos.

PROBLEMA 7 – Batalha Naval Simetria

O grande foco matemático usado neste problema é a simetria axial, mas também será utilizado o raciocínio lógico e figuras geométricas. O jogo vai ser disputado entre duas pessoas e cada uma teria uma folha e dobrariam a folha perfeitamente ao meio. Em seguida, na parte de cima, serão desenhadas 10 figuras geométricas já estabelecidas. O objetivo do jogo é "derrubar" os navios adversários, mas, antes de começar, serão medidos os tamanhos dos barcos adversários para confirmação das medidas, se as medidas não baterem, os barcos serão eliminados. O jogo continua de modo alternado, onde cada jogador tenta acertar os barcos por meio da simetria, fazendo um círculo na parte inferior da folha com o intuito de acertar a posição do barco. Quem acertar todo esquadrão adversário, vence.

PROBLEMA 8 – Relação comprimento e diâmetro na circunferência

Esse problema tem o intuito de mostrar o valor do π, em que os alunos vão medir algo circular. É melhor optar por um lugar grande, para ter um grau de dificuldade e de diversão maiores. Eles medirão os comprimentos das circunferências e depois o diâmetro, em seguida, com as medições aferidas, eles dividem a medida do comprimento pela medida do diâmetro. Quanto mais medições, melhor, observando qual se aproxima mais do valor de π. Após o término das medições, os alunos levariam os resultados ao professor, que finalizaria a aula fazendo uma ponte entre o exercício prático e aplicação de fórmulas. Esse problema tem o grande intuito de mostrar a fórmula do comprimento da circunferência e da origem do π, entre outros assuntos matemáticos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em relação à utilização dos questionários, conclui-se que contribuíram com êxito na parte da estimulação para participação das atividades. Uma vez que se tratava de uma aula extraclasse, na qual os alunos ficaram mais entusiasmados devido ao fato de se tratar de uma atividade diversificada, e não uma aula “tradicional.”

A respeito das contextualizações antes de se iniciar a prática, observou-se que o resultado foi favorável. Pois se tratou de uma atividade prática, na qual havia uma situação problema, onde os alunos tiveram que fazer medições com trenas e transferidor. Considerando que muitos dos alunos envolvidos não apresentavam habilidades para o manuseio de tais ferramentas, foi de grande valia a experiência obtida neste quesito por estes alunos, bem como na compreensão e assimilação de semelhança de triângulos caso ângulo-ângulo.

Outro ponto forte do trabalho foi a formação dos alunos em equipes, pois proporcionou aos alunos uma noção prática de trabalho em equipe, mostrando que se aprende melhor quando compartilhamos ideias e informações. Esta estratégia de equipes fez com que o conteúdo fosse bem assimilado, uma vez que os alunos foram capazes de aferir os locais determinados, mesmo que com equívocos, e também foram capazes de elaborar e resolver os cálculos necessários.

A pesquisa mostrou também que os professores de ensino fundamental II devem investir em uma metodologia mais dinâmica, a fim de estimular os alunos e ao mesmo tempo tornar as aulas menos cansativas e repetitivas. Nesse contexto, seria possível obter uma nova perspectiva e contextualização do ensino-aprendizagem em aulas de matemática.

Para que a atividades sejam realizadas com sucesso, é necessário que o professor seja um norteador e mediador na aplicação e desenvolvimento das atividades, além de aprender a observar o desenvolvimento e saberes por parte dos alunos. Porém, é preciso tomar cuidado para levar os alunos às descobertas das soluções e não tentar usar um ar de superioridade, o que provocaria a inibição de muitos alunos. Desta forma, o professor também estaria aprendendo e não somente ensinando.

Finalizando, vale salientar que as “aulas de campo” esporádicas trouxeram grandes benefícios ao aprendizado, pois, como já dito anteriormente, possibilitou que os alunos colocassem em prática a teoria, enfrentassem os desafios do trabalho em equipe, além de tornar as aulas mais motivadoras e prazerosas. No entanto, os professores não devem esquecer-se de tomar as devidas precauções e direcionamentos necessários para obter um melhor aproveitamento das aulas.

REFERÊNCIAS

AMADO, João. **Manual de investigação qualitativa em educação**. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013.

ARAUJO, Elizabeth Adorno de. Ensino da álgebra e formação de professores. **Educ. Mat. Pesq**, São Paulo, v. 10, n .2, p. 331-346, 2008.

BARBOSA, Angela Afonsina de Souza. **Modelagem matemática: relatos de professores.** 2012. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática)—Setor de Ciências Exatas. Curitiba, Paraná: Universidade Federal do Paraná.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **A modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BLANTON, Maria.; KAPUT, James. Caracterizando uma prática em sala de aula que promove o raciocínio algébrico. **Revista de pesquisa em educação matemática**, v. 36, n. 5, p., 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/ SEB, 2018.600 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

CÂNDIDO, Patrícia. Comunicação em Matemática. In: SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. (Orgs). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COSTA NETO, Deoclécio Pinto da. **Dando corda na trigonometria.** 2011. 61 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/373/1/PDF%20-%20Deocl%C3%A9cio%20Pinto%20da%20Costa%20Neto.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2022.

CRUZ, Josinaldo dos Santos et al. **O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e aplicações**. 2015.

DA PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Autêntica Editora, 2003.

FONSECA, Lina.; SANTOS, Leonor.; CANAVARRO, Paula. (Eds). Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. **Anais**... EIEM, 14, p. 5-27.

Lisboa: SEM-SPCE, 2006. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf>. Acesso: 18 de jun. 2019.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura et al. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo**: uma proposta a partir da manipulação de modelos. 2000.

LOPES, Marília Marques et al. Consciência metatextual, compreensão leitora e resumo de histórias: possíveis relações em uma perspectiva psicolinguística. 2015.

MAGALHÃES. Ana Paula de A. S. **Resolução de problemas**: um problema, como resolver? Trabalho de conclusão de curso. Orientação Fábio Vitoriano da Silva, 2002.

MARTINS, Egídio Rodrigues. **Possibilidades do uso da metodologia de ensino-aprendizagem** -avaliação de Matemática através da resolução de problemas em um curso de licenciatura Matemática na Rede Federal de Educação Tecnológica no Estado de São Paulo. 2019.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 32, p. 781-801, 2018.

MIGUEL, Antônop.; MIORIM, Angela. **História na educação matemática**: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

NASCIMENTO, Maurício Alves. **Trigonometry Learning-Teaching through solution and exploration of everyday problems in the classroom**. 2014. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS1 (NCTM). **Principles and standards for school mathematics**. Reston VA: NCTM, 2000.

NOBRE, Sandra Guerreiro Gonçalves. **O desenvolvimento do pensamento algébrico**: uma experiência de ensino com alunos do 9. º ano. Tese (Doutorado) - Universidade de Lisboa (Portugal), 2016.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de. **The trigonometry in basic education with a focus on historical evolution and contemporary applications.** 2013. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de. **História da educação matemática como disciplina na formação de professores que ensinam matemática**. 2017.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de. História da educação matemática como disciplina na formação de professores que ensinam Matemática. 2017.

OLIVEIRA, Silvânia Cordeiro; LAUDARES, João Bosco. Pensamento algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. **Puc-MG/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, MG**, 2015.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin,** p. 73-98, 2011.

PASSOS, Marcello Henrique Marques. Padrões de Speckles produzidos por vórtices óticos e sua aplicação na medida de rugosidade. 2016.

PEDROSO, Leonor Wierzynski. Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do sofware GeoGebra. 2012.

PEDROSO, Mohab Angelo et al. APLICAÇÃO DE AULA PRÁ TICA PARA O ENSINO DE CIÊNCIAS: UMA ANÁ LISE QUANTITATIVA DO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM. **ANAIS DO FÓRUM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO UNIFUNEC**, v. 3, n. 3, 2012.

PEREIRA, Ana Lúcia; JOLANDEK, Emilly Gonzales; MENDES, Luiz Otávio Rodrigues. Modelagem matemática: concepções de licenciandos em formação inicial**. Com a Palavra, o Professor**, v. 4, n. 8, p. 1-15, 2019.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas na Sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2003, 1a edição, 151p

PORTOLAN, Juliano et al. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. Um resgate histórico: A importância da história da matemática. 2014.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, mar. 2013. Quadrimestral

SAITO, F. O "sentido da história": repensando o papel da história da matemática no ensino e na aprendizagem de matemática [em preparação], 2014.

SAMPAIO, Helenara Regina. **Uma abordagem histórico-filosófica na educação matemática: contribuições ao processo de aprendizagem em trigonometria no ensino médio. Londrina: UEL, 2008**. 2008. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANTOMÉ, Jurjo Torres. As Culturas Negadas e Silenciadas no Currículo. In: SILVA, Tomaz Tadeu da (org). Alienígenas na Sala de Aula: uma introdução aos estudos culturais em educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

SANTOS, L. G.; SANTOS, V.M. Introdução do pensamento algébrico. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, n 10. 2010. Salvador. **Anais**... Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

SANTOS, M. C. Desenvolvimento do pensamento algébrico: O que estamos fazendo em nossas salas de aulas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n. 10, 2010. Salvador. **Anais**... Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

SANTOS, Rejane Costa dos; GUALANDI, Jorge Henrique. Laboratório de ensino de matemática: o uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. XII ENEM–Encontro Nacional de Educação Matemática, p. 1-12, 2016.

SAVIANI, Dermeval; LOMBARDI, José Claudinei. História e história da educação: o debate teórico-metodológico atual. Autores Associados, 2018.

SOARES, Sória Pereira Lima. Modelagem matemática como metodologia para o ensino aprendizagem da matemática: revisão da literatura. **Itinerarius Reflectionis**, v. 15, n. 1, p. 01-12, 2019.

VERGNAUD, Gerard. **Multiplicative conceptual field**: what and why. The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. State University of New York Press: Albany, NY, 1994.

VIANNA, Carlos Roberto. **Matemática e História:** algumas relações e implicações pedagógicas. Unpublished Master Degree Dissertation. Faculdade de Educação, USP, Brazil, 1995.

YIN, Robert K. **Case study research**: design and methods. California: Sage, 2014.