

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ CHIULLO DOS SANTOS

**IMPLEMENTAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE
DINÂMICA LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

CAMPO MOURÃO

2022

ANDRÉ CHIULLO DOS SANTOS

**IMPLEMENTAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE
DINÂMICA LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

**Implementation of computer code for linear dynamic analysis of plane
trusses through finite element method**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Civil do
Curso de Bacharelado em Engenharia Civil da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

CAMPO MOURÃO

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

ANDRÉ CHIULLO DOS SANTOS

**IMPLEMENTAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE
DINÂMICA LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Civil do
Curso de Bacharelado em Engenharia Civil da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 01/junho/2022

Marcelo Rodrigo Carreira
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Leandro Waidemam
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Ronaldo Rigobello
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CAMPO MOURÃO
2022

Dedico este trabalho aos meus pais e esposa,
que me ajudaram em todo o percurso que
trilhei até o presente momento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por tudo, mesmo eu não possuindo merecimento.

Aos meus pais e irmã, José, Veroni e Andréia, por todo apoio e ajuda que me proporcionaram sempre que necessitei.

A minha amada Stephany, por me incentivar a sempre buscar o melhor e lutar pelos meus objetivos.

Aos meus professores, por me propiciar a oportunidade de aprimorar meus conhecimentos, em especial ao professor Dr. Marcelo Rodrigo Carreira, pela orientação desse trabalho e pela ajuda em cada obstáculo.

Aos meus amigos e amigas, Eduardo, Lucas, Bruno, Isadora e Monique, que estiveram ao meu lado nesse período acadêmico, proporcionando boas risadas e estando presente nos momentos difíceis do curso. Também aos meus amigos Leonardo, engenheiro que me auxiliou nas dúvidas e dificuldades referentes a engenharia civil e ao Rodolfo por disponibilizar tempo para sanar dúvidas relacionadas a programação, ajudando na confecção do trabalho.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o meu crescimento profissional dentro e fora da universidade.

E por fim, a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pelas oportunidades propiciadas em iniciação científica e projetos durante o período do curso.

“Enquanto o sábio sabe que nada sabe, o
ignorante pensa tudo saber.”
(NUNES, 2001)

RESUMO

O desenvolvimento de materiais com maior resistência mecânica e os refinamentos no cálculo estrutural permitiram a concepção de construções mais esbeltas e, conseqüentemente mais suscetíveis a vibrações. Nesses casos é preciso avaliar o comportamento dinâmico e a segurança da estrutura submetida a cargas dinâmicas. A Análise Dinâmica de Estruturas tem por objetivo avaliar tanto o estado limite de serviço quanto o estado limite último de uma estrutura sujeita a ações dinâmicas. Tais análises são possíveis e viáveis graças ao avanço da computação, permitindo a aplicação de soluções numéricas como o Método dos Elementos Finitos, desenvolvido na década de 1940 e aprimorado nas décadas seguintes, sendo utilizado em diversas áreas da engenharia e permitindo soluções complexas de problemas com inúmeros graus de liberdade. Neste trabalho foi proposto o desenvolvimento de um código computacional utilizando o *software* MATLAB Student R2021a para análise dinâmica linear de vibrações livres e forçadas não amortecidas em estruturas de treliças planas via Método dos Elementos Finitos. A metodologia proposta consistiu em implementar um algoritmo para analisar três treliças planas distintas, sendo uma sujeita à vibração livre, e as outras duas solicitadas à uma vibração forçada, onde foram analisados um carregamento dinâmico do tipo ressalto e outro exponencial. Os resultados obtidos pelo código implementado foram comparados com os resultados obtidos pelo *software* ADINA Structures versão 9.6 (900 nós) com licenciamento estudantil. A partir da análise dos resultados observou-se que o código desenvolvido produz resultados compatíveis com os obtidos com o *software* comercial. Dessa forma conclui-se que o programa desenvolvido neste trabalho apresenta resultados satisfatórios.

Palavras-chave: Análise Dinâmica das Estruturas; Método dos Elementos Finitos; Engenharia Civil; Treliças planas.

ABSTRACT

The development of materials with greater mechanical strength and refinements in the structural calculation allowed the design of more slender constructions and, consequently, more susceptible to vibrations. In these cases, it is necessary to evaluate the dynamic behavior and the safety of the structure subjected to dynamic loads. The Dynamic Analysis of Structures aims to evaluate both the serviceability limit state and the ultimate limit state of a structure subject to dynamic actions. Such analyzes are possible and feasible thanks to the advancement of computing, allowing the application of numerical solutions such as the Elements Method Finites, developed in the 1940s and improved in the following decades, being used in several areas of engineering and allowing complex solutions of problems with innumerable degrees of freedom. In this work it was proposed the development of a computational code using MATLAB Student R2021a software to linear dynamic analyze of free and forced vibrations undamped in structures of plane trusses through the Finite Element Method. The proposed methodology consisted of implement an algorithm to analyze three distinct plane trusses, one of which is subject to the free vibration, and the others requested to a forced vibration, where they were analyzed a dynamic loading of the bounce type and other exponential. The results obtained by the code implemented were compared with the results obtained by the ADINA Structures software version 9.6 (900 nodes) with student licence. From the analysis of the results, it was observed that the code developed produces results compatible with those obtained from the commercial software. Thus it is concluded that the program developed in this work presents satisfactory results.

Keywords: Dynamic Analysis of Structures; Finite Element Method; Civil Engineering; Plane trusses.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo de sistema com 1 grau de liberdade sob ação dinâmica	19
Figura 2 – Diagrama de corpo livre do sistema	20
Figura 3 – Modelo de sistema com 2 graus de liberdade sob ação dinâmica	21
Figura 4 – Fluxograma da solução via MDF para N GDL	29
Figura 5 – Deslocamento nodal em um elemento de barra	31
Figura 6 – Reações num elemento com 3 GDL	35
Figura 7 – Elemento de barra	38
Figura 8 – Elemento de treliça inclinado em coordenadas locais	39
Figura 9 – Elemento de treliça inclinado em coordenadas globais	40
Figura 10 – Coordenadas globais numeradas	43
Figura 11 – Treliças para análise	48
Figura 12 – Vibração forçada exponencial	49
Figura 13 – Vibração forçada ressalto	49
Figura 14 – Definição dos graus de liberdade do sistema	51
Figura 15 – Construção da função de tempo	51
Figura 16 – Definição da quantidade e tamanho dos passos de tempo	52
Figura 17 – Definição das coordenadas dos nós da treliça	52
Figura 18 – Construção das barras da treliça	53
Figura 19 – Definição das propriedades do material	53
Figura 20 – Definição dos apoios da estrutura	54
Figura 21 – Aplicando o carregamento em um nó	54
Figura 22 – Criação de um grupo para elementos de treliças	55
Figura 23 – Criação da malha de elementos	55
Figura 24 – Definição dos métodos de solução	56
Figura 25 – Modelagem da Treliça 1	58
Figura 26 – Modos de vibração da Treliça 1	59
Figura 27 – Modelagem da Treliça 2	61
Figura 28 – Modos de vibração da Treliça 2	62
Figura 29 – Histórico do deslocamento no nó do carregamento da Treliça 2	64
Figura 30 – Histórico do esforço normal no elemento 3 da Treliça 2	65

Figura 31 – Modelagem da Treliça 3	66
Figura 32 – Modos de vibração da Treliça 3	67
Figura 33 – Deslocamentos no nó do carregamento da Treliça 3	69
Figura 34 – Histórico de esforço normal no elemento 3 da Treliça 3	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação dos autovetores normalizados da Treliça 1	60
Tabela 2 – Resultados das frequências naturais da Treliça 1	60
Tabela 3 – Comparação dos autovetores normalizados da Treliça 2	63
Tabela 4 – Resultados das frequências naturais da Treliça 2	64
Tabela 5 – Esforço normal máximo no elemento 3 da Treliça 2	65
Tabela 6 – Comparação dos autovetores normalizados da Treliça 3	68
Tabela 7 – Resultados das frequências naturais da Treliça 3	68
Tabela 8 – Esforço normal máximo no elemento 3 da Treliça 3	69

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

A	Área da seção transversal	$[m^2]$
B	Condição de contorno no ADINA Structures	
c	Coeficiente de amortecimento	$[N \cdot s/m]$
c_c	Coeficiente de amortecimento crítico	$[N \cdot s/m]$
$[C]$	Matriz de amortecimento global do sistema	$[N \cdot s/m]$
$[D]$	Matriz dinâmica	$[N/(kg \cdot m)]$
e	Número de Euler	
E	Módulo de elasticidade	$[N/m^2]$
E_c	Energia cinética	$[J]$
f_D	Força de amortecimento	$[N]$
F^e	Vetor de carregamento do elemento no sistema de coord. global	$[N]$
f_I	Força inercial	$[N]$
f_s	Força elástica	$[N]$
$[I]$	Matriz identidade	
k	Constante de rigidez de um material	$[N/m]$
$[K]$	Matriz de rigidez global do sistema	$[N/m]$
$[k^e]$	Matriz de rigidez elementar	$[N/m]$
$[K^e]$	Matriz de rigidez elementar no sistema de coordenadas global	$[N/m]$
$[K_m]$	Matriz de rigidez modal	$[N/m]$
L	Comprimento da barra	$[m]$
L^e	Comprimento do elemento	$[m]$
m	Massa	$[kg]$
$[M]$	Matriz de massa global do sistema	$[kg]$
$[M]^{-1}$	Matriz de massa global inversa	$[kg^{-1}]$
$[m^e]$	Matriz de massa elementar	$[kg]$
$[M^e]$	Matriz de massa elementar no sistema de coordenadas global	$[kg]$
$[M_m]$	Matriz de massa modal	$[kg]$
$[N]$	Matriz das funções interpoladoras	
N_i	Função interpoladora i	
P	Força normal na barra	$[N]$
$P(t)$	Carregamento em função do tempo	$[N]$
P_m	Vetor de cargas modais	$[N]$

q	Vetor de amplitudes modais	
$[T^e]$	Matriz de transformação de coordenadas	
$[T^e]^T$	Matriz de transformação de coordenadas transposta	
T_n	Menor período natural do sistema	[s]
u	Deslocamento	[m]
u	Vetor dos deslocamentos nodais	[m]
U	Deslocamento nodal global	[m]
U^e	Vetor de deslocamento nodal no sistema de coordenada global	[m]
$u(t)$	Deslocamento em função do tempo	[m]
$u(x)$	Deslocamento do elemento na posição x	[m]
\dot{u}	Velocidade	[m/s]
$\dot{u}(t)$	Velocidade em função do tempo	[m/s]
\ddot{u}	Aceleração	[m/s ²]
$\ddot{u}(t)$	Aceleração em função do tempo	[m/s ²]
x	Coordenada axial de um elemento	
X	Resultado de referência	
\bar{X}	Resultado aproximado do resultado de referência	
z	Número do nó	

Letras Gregas

α	Ângulo entre o eixo das coordenadas global e local	[rad]
$[\beta^e]$	Matriz de incidência cinemática	
δ	Variação no comprimento do elemento	[m]
ϵ	Deformação de um material	
ξ	Amortecimento adimensional	
ϕ	Autovetor	
$[\Phi]$	Matriz modal	
ϕ^T	Autovetor transposto	
$[\Phi]^T$	Matriz modal transposta	
ρ	Massa específica do material	[kg/m ³]
σ_x	Tensão em um material	[N/m ²]
ω	Frequência natural	[rad/s]
ω_n	Frequência natural angular	[rad/s]
$[\Omega]$	Matriz espectral	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	OBJETIVOS	17
2.1	Objetivo Geral	17
2.2	Objetivos Específicos	17
3	REVISÃO DE LITERATURA	18
3.1	Fundamentos de Análise Dinâmica das Estruturas	18
3.1.1	Introdução à Análise Dinâmica	18
3.1.2	Formulação da Equação de Movimento	18
3.1.3	Sistema discreto com 2 ou mais graus de liberdade	20
3.1.4	Autovetores e Autovalores	22
3.1.5	Método de Superposição Modal	24
3.1.5.1	Método da Diferença Central para N GDL	26
3.2	Método dos Elementos Finitos	29
3.2.1	Breve história do método	30
3.2.2	Elemento finito de barra submetido somente a esforços axiais	30
3.2.3	Obtenção das matrizes elementares	31
3.2.3.1	Obtenção da matriz elementar global de rigidez	35
3.2.3.2	Obtenção da matriz elementar de massa	37
3.2.4	Transformação de coordenadas	39
3.2.5	Condições de contorno	42
3.2.6	Matriz de incidência cinemática	42
3.2.7	Obtenção das matrizes globais da estrutura	43
3.3	Erros relativos	45
4	MÉTODOS	46
4.1	Desenvolvimento do algoritmo	46
4.2	Implementação computacional	46
4.3	Treliças solucionadas	47
4.3.1	Geometria das treliças para análise	47
4.3.2	Propriedades do material	49
4.3.3	Carregamento dinâmico	49

4.3.4	VALIDAÇÃO	50
5	COMPILAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	58
5.1	Treliça 1	58
5.2	Treliça 2	61
5.3	Treliça 3	65
5.4	Análise dos resultados	70
6	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A FLUXOGRAMA PARA DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO	75
	APÊNDICE B ESTRUTURA DO CÓDIGO DESENVOLVIDO	77

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica das estruturas é o ramo da engenharia que busca soluções para situações nas quais o carregamento aplicado na estrutura provoca vibrações significativas através de forças inerciais. Tais forças podem influenciar significativamente no comportamento do sistema resultando em deslocamentos e esforços de maior magnitude do que aqueles que poderiam ser obtidos para o caso de carregamento estático.

De acordo com Soriano (2014), com o passar do tempo, as estruturas têm sido projetadas com a utilização de materiais com resistências cada vez maiores, mais esbeltas e conseqüentemente mais suscetíveis a vibrações. Com o desenvolvimento de *softwares* específicos em cálculos estruturais e o aumento da capacidade de processamento dos computadores, torna-se possível avaliar o comportamento dessas estruturas.

Procurando a eficiência no ramo das construções, engenheiros buscam o equilíbrio entre segurança, economia e estética em projetos estruturais, desenvolvendo construções esbeltas que em muitos casos tornam-se sensíveis a ações dinâmicas como rajadas de ventos, ondas, tremores de terra, ou também por atividades humanas, como explosões, tráfego de pessoas ou veículos, e vibrações de máquinas. Tais ações, podem causar fadiga nos materiais da estrutura, danificando e, conseqüentemente, afetando sua utilidade.

O desenvolvimento da análise dinâmica em engenharia iniciou-se no século passado com estudos sobre o comportamento de equipamentos mecânicos, tendo grandes contribuições do croata Stephen Prokofyevich Timoshenko (1878-1972) e do holandês Jacob Pieter Den Hartog (1901-1989), se estendendo às demais áreas com o passar do tempo com a disponibilidade do aprimoramento na área da computação (SORIANO, 2014).

A análise dinâmica em estruturas de treliças possui aplicações práticas em pontes, galpões industriais que utilizam pontes rolantes, em estruturas metálicas sob ações de ventos, tremores ou motores que geram vibrações constantes, entre muitas outras, afim de evitar problemas de segurança e garantir bem estar aos usuários da edificação.

Para estruturas simples, é possível realizar uma análise dinâmica manualmente, porém, ao tratar de estruturas complexas como treliças, a solução requer um grande volume de cálculos, sendo inviável a solução manual. Nesse caso, o uso de um método numérico é indispensável e atualmente são empregados *softwares* específicos utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para realizar a análise dinâmica de estruturas.

O MEF é um método numérico que consiste na discretização de um modelo contínuo, afim de obter o comportamento físico de cada elemento e suas interações com os elementos vizinhos através de um sistema linear de equações que substituem as equações diferenciais parciais sem solução analítica que regem o comportamento do modelo contínuo.

Desenvolvido na década de 1940, e sendo aprimorado à partir de 1960 para a engenharia estrutural e aeroespacial (LOGAN, 2006), o MEF tornou-se extremamente útil para simulações de estruturas em diversas áreas da engenharia, sendo utilizado pela *National Aeronautics*

and Space Administration (NASA) através do *software* NASTRAN, capaz de solucionar problemas extremamente complexos (HUTTON, 2004).

O presente trabalho consistiu em desenvolver um código computacional em MATLAB afim de realizar análises dinâmicas lineares utilizando o MEF em treliças planas submetidas à vibrações livres e forçadas não amortecidas.

A escolha pelo MATLAB como linguagem computacional é devido a sua alta performance voltada para cálculos numéricos, facilitando o trabalho com matrizes e construções gráficas através de uma interface gráfica interativa que utiliza a linguagem matemática para o desenvolvimento de algoritmos.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do presente trabalho consiste na implementação e validação de um código computacional no MATLAB Student R2021a empregando o Método dos Elementos Finitos para análise dinâmica linear de treliças planas submetidas a vibrações livre e forçada não amortecidas.

2.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral foi necessário alcançar os seguintes objetivos específicos:

- Entender a formulação do MEF aplicado a treliças;
- Compreender os fundamentos de dinâmica das estruturas;
- Conhecer a linguagem computacional do MATLAB;
- Implementar um algoritmo para calcular modos e frequências de vibração, deslocamentos e esforços internos de treliças planas submetidas a uma ação dinâmica via MEF;
- Comparar os resultados obtidos no programa implementado com *software* ADINA Structures versão 9.6 (900 nós) com licença estudantil.

3 REVISÃO DE LITERATURA

3.1 Fundamentos de Análise Dinâmica das Estruturas

3.1.1 Introdução à Análise Dinâmica

Nos últimos anos, na engenharia civil, a análise dinâmica tem sido empregada com mais frequência afim de garantir segurança às estruturas, nos casos onde as forças inerciais atingem magnitudes consideráveis como, por exemplo, terremotos, ventos, tráfego de veículos ou pessoas e impactos em geral.

De acordo com Carreira (2018a), para realizar uma análise dinâmica, deve-se seguir alguns passos como:

1. Definir o modelo matemático do sistema;
2. Obter as equações que regem o comportamento da estrutura;
3. Solucionar as equações diferenciais;
4. Interpretar os resultados.

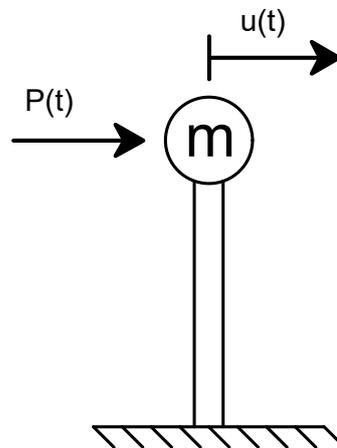
A depender da complexidade do problema em questão, torna-se extremamente complicado solucionar as equações diferenciais. Nesse caso, busca-se a solução numérica dessas equações através de algum método numérico, como por exemplo o MEF.

3.1.2 Formulação da Equação de Movimento

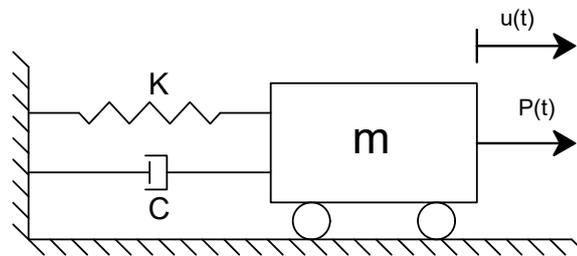
Num problema estático, o carregamento mobiliza apenas forças elásticas, diferente de um problema dinâmico, no qual podem ser mobilizadas forças inerciais, que geram vibrações nas estruturas, ou forças de amortecimento, que atenuam vibrações. Portanto, para uma análise dinâmica, é necessário obter uma equação que contemple massa, aceleração, amortecimento, velocidade, rigidez, deslocamento, forças elásticas, inerciais e dissipativas, sendo possível obtê-la, segundo Soriano (2014), à partir da 2ª Lei de Newton.

Dado um problema idealizado, demonstrado na Figura 1 (a), obtém-se um modelo matemático através de um sistema massa-mola, apresentado na Figura 1 (b), para exemplificar um caso simples, ou seja, com apenas 1 grau de liberdade (GDL).

Figura 1 – Modelo de sistema com 1 grau de liberdade sob ação dinâmica
(a) Modelo representativo



(b) Modelo massa-mola com 1 grau de liberdade



Fonte: Autoria própria (2022).

O carregamento dinâmico $P(t)$, apresentado nas Figuras 1 (a) e 1 (b), movimentará a estrutura, gerando forças inerciais, de rigidez e de amortecimento, que podem ser representadas por um diagrama de corpo livre, como mostra a Figura 2.

Segundo Clough e Penzien (1993), a força inercial f_I é uma ação contrária ao movimento, representada da seguinte forma:

$$f_I = m\ddot{u}(t), \quad (1)$$

onde m representa a massa e $\ddot{u}(t)$ a aceleração em função do tempo.

Para o elemento de mola, pode-se obter a força elástica f_s simulando a rigidez do sistema como:

$$f_s = ku(t), \quad (2)$$

onde k é a constante de rigidez e $u(t)$ o deslocamento em função do tempo.

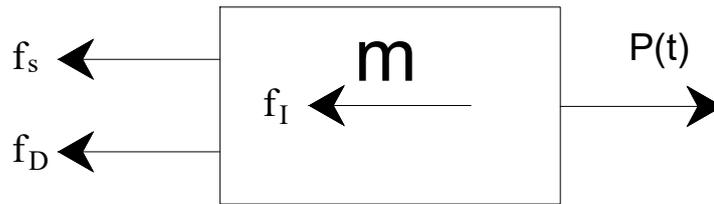
Para o caso do sistema possuir um amortecimento viscoso, deve-se levar em conta uma força f_D da seguinte forma:

$$f_D = c\dot{u}(t), \quad (3)$$

onde c é a constante de amortecimento, e $\dot{u}(t)$ a velocidade em função do tempo.

Considere o diagrama de corpo livre (DCL) apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Diagrama de corpo livre do sistema



Fonte: Autoria própria (2022).

Pela 2ª Lei de Newton, tem-se:

$$-f_s - f_D + P(t) = f_I. \quad (4)$$

Organizando a Equação (4), tem-se:

$$P(t) - f_I - f_D - f_s = 0, \quad (5)$$

onde $P(t)$ é a excitação dinâmica no sistema.

Substituindo as Equações (1), (2) e (3) na Equação (5), tem-se:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t). \quad (6)$$

De acordo com Lima e Santos (2008), para casos de vibração livre, onde o sistema vibra especificamente devido a uma perturbação inicial, no instante em que $t = 0$, sem ação de excitação dinâmica externa, considera-se $P(t)$ nula.

3.1.3 Sistema discreto com 2 ou mais graus de liberdade

Quando um sistema possui 1 GDL, significa que a discretização considera apenas uma coordenada de deslocamento. Esse sistema possui solução possível para casos particulares através da Equação (6).

Ao analisar problemas com mais GDL, a Equação (6) pode ser escrita matricialmente como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}, \quad (7)$$

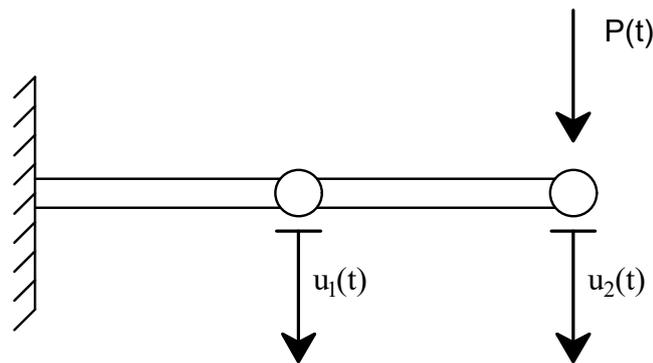
onde $[M]$ é a matriz de massa global, $[C]$ é a matriz de amortecimento global, $[K]$ é a matriz de rigidez global.

Para sistemas com mais do que 3 GDL, a resolução manual é muito trabalhosa e demorada, portanto, neste caso, o problema passa a possuir solução através de algum auxílio computacional.

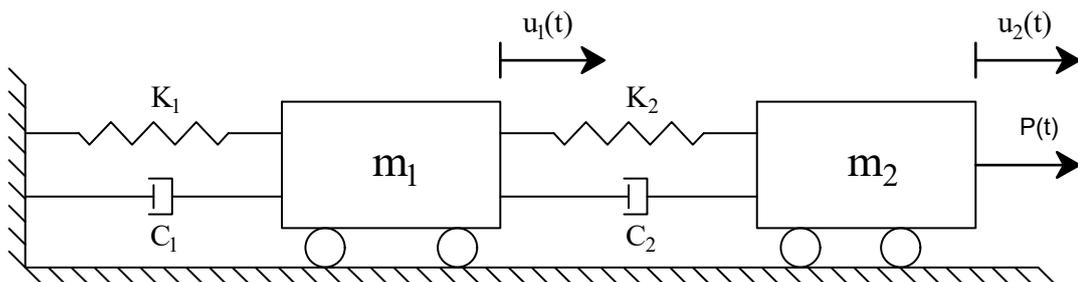
As Figuras 3 (a) e (b) mostram um exemplo de sistema com 2 GDL e o modelo representativo massa-mola respectivamente.

Figura 3 – Modelo de sistema com 2 graus de liberdade sob ação dinâmica

(a) Modelo representativo



(b) Modelo massa-mola com 2 graus de liberdade



Fonte: Autoria própria (2022).

As matrizes de massa e rigidez do sistema apresentado na Figura 3 possuem dimensão 2×2 , e para N GDL, tem-se matrizes quadradas de ordem N .

3.1.4 Autovetores e Autovalores

Um sistema em vibração com múltiplos GDL, possui frequências e modos de vibrações naturais, que podem ser obtidos respectivamente de autovetores e autovalores.

Para um problema de vibração livre, não amortecido, segundo Hutton (2004), tem-se:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}. \quad (8)$$

Considere, por exemplo, a solução homogênea do deslocamento para um sistema com 2 GDL como:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_n t - \theta), \quad (9)$$

onde ϕ representa o modo de vibração natural, e ω_n é a frequência natural angular.

Aplicando a Equação (9) em (8), eliminando o termo $\cos(\omega_n t - \theta)$ e escrevendo de forma compacta, tem-se:

$$-[M]\{\phi\}\omega_n^2 + [K]\{\phi\} = \{0\}. \quad (10)$$

Somando $\omega_n^2[M]\{\phi\}$ em ambos os lados e multiplicando pela matriz inversa da massa, $[M]^{-1}$, obtém-se:

$$[M]^{-1}[K]\{\phi\} = \omega_n^2[I]\{\phi\}. \quad (11)$$

Pode-se denominar uma matriz dinâmica $[D]$ como:

$$[D] = [M]^{-1}[K]. \quad (12)$$

Dessa forma, tem-se um problema de autovalores e autovetores como:

$$[D]\{\phi\} = \lambda[I]\{\phi\}, \quad (13)$$

onde λ corresponde aos autovalores, sendo equivalente ao quadrado das frequências naturais angulares, e $[I]$ a matriz identidade.

Segundo Carreira (2018b), os autovalores geram uma matriz diagonal, denominada matriz espectral $[\Omega]$, e está relacionada com as frequências naturais do sistema. Já os autovetores, formam uma matriz denominada matriz modal $[\Phi]$, em que cada coluna refere-se a um autovetor que define um modo de vibração da estrutura.

Retornando à Equação (10) e colocando ϕ em evidência, tem-se:

$$([K] - [M]^{-1}\omega_n^2) \{\phi\} = \{0\}. \quad (14)$$

A partir daí, pode-se obter infinitas soluções, sendo uma trivial, onde $\phi = 0$, e outras não triviais da seguinte forma:

$$\det([K] - [M]^{-1}\omega_n^2) = 0. \quad (15)$$

Calculando o determinante para 2 GDL e, assumindo $\lambda = \omega_n^2$, tem-se o polinômio característico:

$$\lambda^2 m_1 m_2 - \lambda [(k_1 + k_a)m_2 + (k_2 + k_a)m_1] + k_1 k_2 + k_1 k_a + k_2 k_a = 0. \quad (16)$$

As raízes do polinômio de segundo grau apresentado na Equação (16) são os autovalores do sistema de 2 GDL em vibração livre, e, portanto tem-se que, $\lambda_1 = \omega_{n1}^2$ e $\lambda_2 = \omega_{n2}^2$.

Substituindo ω_{n1} na Equação (14), tem-se:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega_{n1}^2 & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a - m_2 \omega_{n1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Daí tem-se o primeiro modo de vibração do sistema, definido pelo primeiro autovetor como:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Substituindo ω_{n2} na Equação (14), calculando de forma análoga ao primeiro autovetor, tem-se o segundo autovetor como:

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

representando dessa forma, o segundo modo de vibração da estrutura.

Escrevendo em forma matricial:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \{\phi_1\} & \{\phi_2\} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

ou ainda:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

onde a coluna j da matriz modal representa as coordenadas modais do j -ésimo modo de vibração.

A matriz espectral é representada como mostrado na Equação 22.

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Genericamente, um autovetor $[\phi_j]$ representa a j -ésima forma deslocada de um sistema com uma frequência natural angular de ω_j (CARREIRA, 2018b).

Os valores obtidos dos autovetores são adimensionais e não possuem significado físico, possuindo infinitas representações possíveis para um único modo, dessa forma, é necessário realizar uma normalização para possibilitar a interpretação das formas modais (CARREIRA, 2018b).

Portanto, para a normalização unitária do autovetor, tem-se:

$$\{\phi_j\}^T \{\phi_j\} = 1, \quad (23)$$

onde $\{\phi\}^T$ representa o autovetor transposto.

E, para a normalização em relação à matriz de massa:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I], \quad (24)$$

onde $[\Phi]^T$ é a matriz modal transposta.

3.1.5 Método de Superposição Modal

Resolver um sistema de equações de movimento com múltiplos graus de liberdade não é uma tarefa simples dado ao fato dessas equações serem acopladas. Portanto para simplificar a resolução, esse acoplamento pode ser removido com o método de superposição modal.

De acordo com Soriano (2014), tal método baseia-se na ideia de transformar as coordenadas geométricas em coordenadas generalizadas modais, e então soluciona-se cada equação de movimento de forma individualizada para no fim obter a resposta à vibração forçada através da superposição, transformando as coordenadas do domínio $\{q\}$ para $\{u\}$ através da seguinte

equação:

$$\{u\} = [\Phi]\{q\}, \quad (25)$$

onde $\{q\}$ é o vetor de amplitudes modais.

Derivando duas vezes a Equação (25), tem-se:

$$\{\ddot{u}\} = [\Phi]\{\ddot{q}\}. \quad (26)$$

Considerando um caso sem amortecimento e substituindo as Equações (25) e (26) na Equação (7), encontra-se:

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{P\}. \quad (27)$$

Multiplicando a Equação (27) pela matriz modal transposta e desenvolvendo a equação, obtém-se:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T\{P\}, \quad (28)$$

ou, simplificando:

$$[M_m]\{\ddot{q}\} + [K_m]\{q\} = \{P_m\}, \quad (29)$$

onde, $[M_m]$ é a matriz de massa modal, $[K_m]$ é a matriz de rigidez global e $\{P_m\}$ é o vetor de cargas modais.

As matrizes de massa modal e rigidez modal são obtidas através das seguintes equações:

$$[M_m] = [\Phi]^T[M][\Phi], \quad (30)$$

$$[K_m] = [\Phi]^T[K][\Phi], \quad (31)$$

e o vetor de cargas modais, através da seguinte equação:

$$\{P_m\} = [\Phi]^T\{P\}. \quad (32)$$

As matrizes de massa e rigidez modais são matrizes diagonais e, por conta disso, as coordenadas de deslocamento estão desacopladas.

Através do Método da Superposição Modal, um sistema com 2 GDL possui duas coordenadas de deslocamentos desacopladas e, através da superposição das respostas individuais, obtém-se dois sistemas de 1 GDL cujas coordenadas de deslocamento estão desacopladas no espaço modal.

3.1.5.1 Método da Diferença Central para N GDL

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método numérico que soluciona equações diferenciais cujas derivadas são aproximadas geometricamente, onde o domínio da função é substituído por um conjunto de pontos discretos para calcular as incógnitas do problema em questão (FONTANA, 2019).

Para a equação de movimento, as derivadas do deslocamento em relação ao tempo são substituídas por diferenças finitas. Dessa forma, segundo Carreira (2019), a velocidade no passo de iteração i é calculada através da diferença central da seguinte forma:

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}, \quad (33)$$

onde u é o deslocamento e \dot{u} a velocidade.

A aceleração é obtida no passo i como:

$$\ddot{u}_i = \frac{\dot{u}_{i+\frac{1}{2}} - \dot{u}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \quad (34)$$

onde \ddot{u} é a aceleração.

As velocidades apresentadas na Equação (34) podem ser definidas como:

$$\dot{u}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} . \quad (35)$$

Substituindo a Equação (35) em (34), tem-se:

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta t^2} . \quad (36)$$

Considerando o sistema com 1 GDL, através da Equação (7), substituindo os valores obtidos para aceleração, velocidade e deslocamento, obtém-se:

$$m \left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta t^2} \right) + c \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \right) + ku_i = p_i . \quad (37)$$

Ao agrupar os deslocamentos, tem-se:

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right) u_{i+1} = p_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right) u_{i-1} - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2}\right) u_i. \quad (38)$$

Dessa forma, pode-se definir o termo que acompanha u_{i+1} como \bar{k} , o que acompanha u_{i-1} como a , e o que multiplica u_i como b , obtendo assim a Equação (38) de forma compacta como:

$$\bar{k}u_{i+1} = p_i - au_{i-1} - bu_i. \quad (39)$$

Portanto, o deslocamento no próximo passo pode ser calculado da seguinte maneira:

$$u_{i+1} = \frac{(p_i - au_{i-1} - bu_i)}{\bar{k}}. \quad (40)$$

No entanto, nota-se que, para obter o deslocamento no passo $i + 1$, é necessário conhecer o deslocamento no passo i e $i - 1$. Ao adotar $i = 0$ para obter u_1 , admite-se conhecer u_0 , e, isolando o deslocamento no passo $i = 1$ da Equação (35) e substituindo em (34), obtém-se:

$$u_{-1} = u_0 - \dot{u}_0\Delta t + \frac{\ddot{u}_0\Delta t^2}{2}. \quad (41)$$

Para \ddot{u}_0 , tem-se:

$$\ddot{u}_0 = \frac{P_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}. \quad (42)$$

Segundo Soriano (2014), como todos os métodos explícitos, o MDF é condicionalmente estável e, conhecendo u_0 e \dot{u}_0 , é necessário respeitar essa condição de estabilidade relativa ao tamanho do passo de tempo, dado por:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi}, \quad (43)$$

onde T_n é o menor período natural para sistemas com mais de 1 GDL e o único período natural de sistemas com 1 GDL.

Ao tratar de N GDL, o MDF retornará valores representados agora por matrizes e vetores. De forma análoga, considerando agora as propriedades da estrutura matricialmente, similar a Equação (40), tem-se:

$$\{U_{i+1}\} = [\bar{K}]^{-1}([\bar{P}_i] - [A]\{U_{i-1}\} - [B]\{U_i\}), \quad (44)$$

onde:

$$[\bar{K}] = \left(\frac{1}{\Delta t^2}[M] + \frac{1}{2\Delta t}[C] \right), \quad (45)$$

$$[A] = \left(\frac{1}{\Delta t^2}[M] - \frac{1}{2\Delta t}[C] \right), \quad (46)$$

e:

$$[B] = \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2}[M] \right). \quad (47)$$

Portanto, para N GDL, reescrevendo as Equações (41) e (42), tem-se:

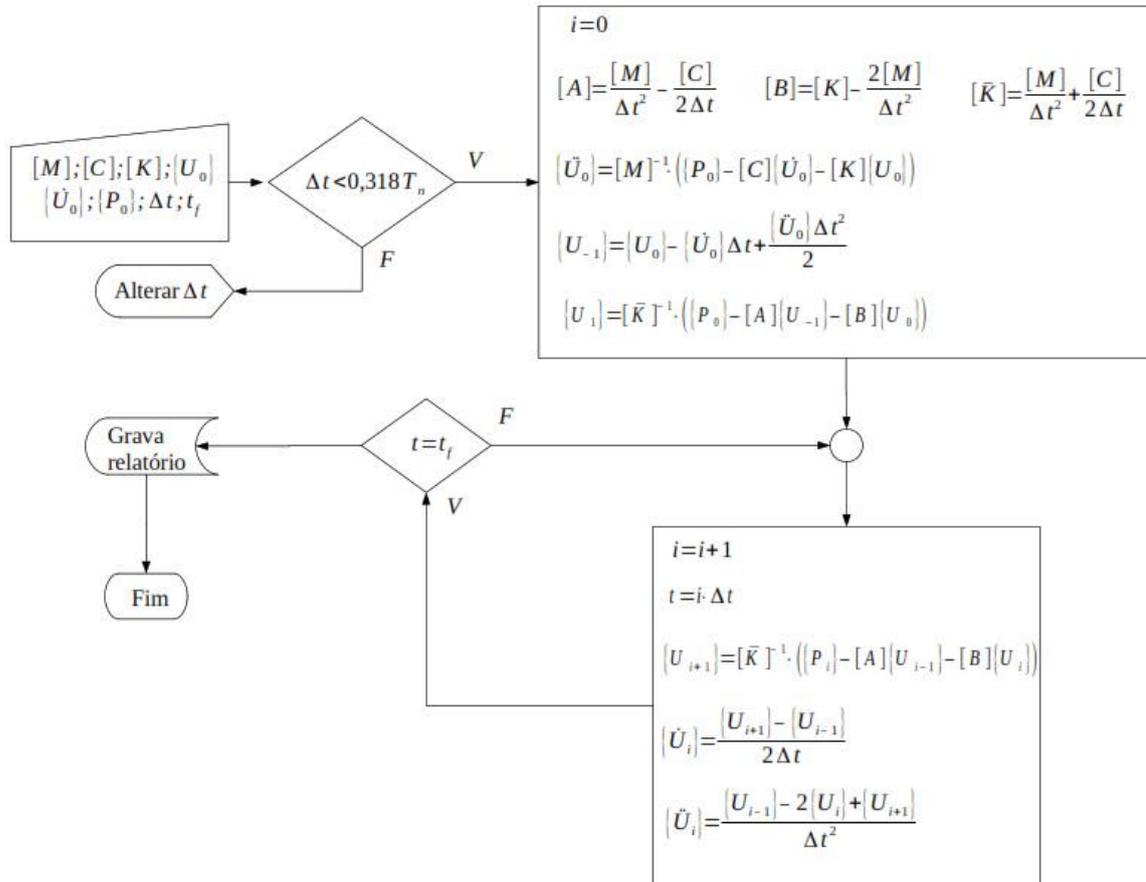
$$\{U_{-1}\} = \{U_0\} - \{\dot{U}_0\}\Delta t + \{\ddot{U}_0\}\frac{\Delta t^2}{2}, \quad (48)$$

e também:

$$\{\ddot{U}_0\} = [M]^{-1}(\{P_0\} - [C]\{\dot{U}_0\} - [\bar{K}]\{U_0\}). \quad (49)$$

O critério de adoção dos intervalos de tempo é similar ao apresentado no caso de sistemas com 1 GDL, e, para o fluxograma, tem-se a representação da Figura 4.

Figura 4 – Fluxograma da solução via MDF para N GDL



Fonte: Carreira (2018b, p. 210).

3.2 Método dos Elementos Finitos

O MEF consiste em um método numérico cuja finalidade é solucionar equações diferenciais parciais (EDP) que não possuem solução analítica, ou quando possuem é extremamente inviável a resolução manual (HUTTON, 2004).

A ideia do método é discretizar um domínio, ou seja, dividir um campo contínuo em pequenos pedaços individuais chamados de elementos finitos. Cada elemento possui uma matriz de rigidez, uma matriz de massa e uma de amortecimento que ao serem combinadas, resultarão nas matrizes globais do sistema.

Para a obtenção das matrizes elementares são utilizadas funções aproximadas para os deslocamentos e, dessa forma, as soluções obtidas são aproximadas. As soluções aproximadas tornam-se mais próximas das exatas a medida que os elementos finitos adquirem dimensões menores ou quando aumenta a ordem das funções de aproximação.

3.2.1 Breve história do método

Segundo Logan (2006), o MEF começou a ser desenvolvido em meados de 1940 devido a necessidade de análises estruturais aprofundadas no ramo da engenharia civil e aeronáutica. Alexander Hrennikoff, engenheiro estrutural, ao buscar formas de obter resultados de tensões em estruturas sólidas contínuas, usou uma analogia de treliça, dividindo o domínio da estrutura contínua em diversos elementos de linhas (barras e vigas), e em seguida utilizando funções de interpolação em cada elemento para obter um conjunto de equações para solucionar o problema como um todo. Porém, devido a dificuldade de solucionar as equações manualmente, o método só tornou-se viável com o desenvolvimento de computadores digitais no início dos anos 50.

De acordo com Bathe (2014), em 1956, a equipe de estudos de M. J. Turner, composta por ele, por R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp, foi a primeira a encontrar matrizes de rigidez para elementos de treliça a fim de obter a matriz de rigidez total da estrutura, desenvolvendo equações de rigidez de elementos finitos expressas em notação matricial. À partir de 1960, o MEF foi expandido, tendo aplicações em flexão de chapas, de cascas, problemas tridimensionais na análise estrutural, fluxo de fluídos, transferência de calor e massa, e também em análises dinâmicas das estruturas (LOGAN, 2006).

O NASTRAN foi desenvolvido em conjunto com o programa de exploração espacial dos EUA, a NASA, sendo o primeiro *software* de MEF, com processamento de problemas com centenas de milhares de graus de liberdade. Nos anos seguintes, diversos *softwares* foram introduzidos no mercado para análises de elementos finitos, como o ANSYS, ALGOR, COSMOS/M, entre outros (HUTTON, 2004).

Atualmente, a maioria desses *softwares* podem ser utilizados em computadores populares, a fim de obter soluções para problemas de análise estática ou dinâmica das estruturas, fluxo de fluídos, respostas sísmicas, eletromagnetismo, e transferências de calor e massa.

3.2.2 Elemento finito de barra submetido somente a esforços axiais

Para a análise dos elementos de treliça, admite-se uma barra que possua área da seção transversal A , módulo de elasticidade E e comprimento L , e segundo Hutton (2004), é necessário considerar as seguintes premissas para iniciar um estudo em elementos finitos de uma barra :

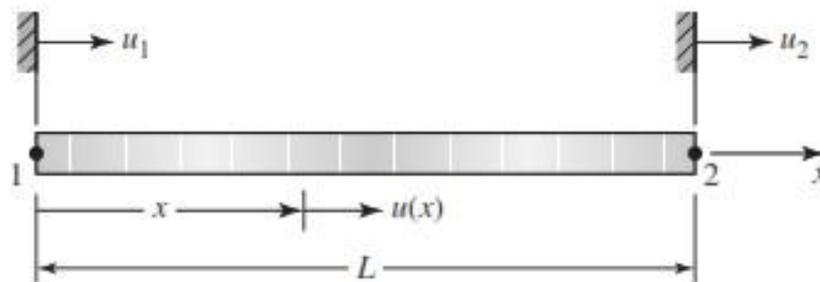
1. A barra é geometricamente linear;
2. O material obedece a Lei de Hooke;
3. As forças são aplicadas somente nas extremidades da barra;
4. A barra suporta apenas carregamento axial, sendo desconsiderado os esforços de cisalhamento e flexão.

Isso implica que o material possui comportamento elástico linear e o elemento possui apenas deslocamentos na direção longitudinal. Dessa forma, o deslocamento de um ponto qualquer do elemento pode ser expresso por uma variável independente u .

3.2.3 Obtenção das matrizes elementares

O elemento de treliça possui um sistema de coordenada próprio, não global, mas sim local. Representado por uma barra, o elemento de treliça possui sua extremidade esquerda posicionado na origem de um sistema de coordenadas uniaxial, onde o nó inicial do elemento é representado pelo número 1, e o nó final pelo número 2, como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Deslocamento nodal em um elemento de barra



Fonte: Hutton (2004, p. 32).

Como o elemento só possui deslocamentos na direção longitudinal, pode-se dizer que para um ponto x qualquer, tem-se um deslocamento $u(x)$, e os deslocamentos nodais do primeiro e segundo nó representam as condições de contorno e podem ser escrito como:

$$u_1 = u(x = 0) , \quad (50)$$

e,

$$u_2 = u(x = L) , \quad (51)$$

respectivamente.

É necessário o uso de funções interpoladoras escritas como N_i para descrever o deslocamento ao longo do comprimento do elemento em função dos deslocamentos nodais. Na Figura 5 existem 2 nós, portanto há duas funções, $N_1(x)$ e $N_2(x)$. Dessa forma, tem-se:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 . \quad (52)$$

As funções interpoladoras vão garantir a variação linear do deslocamento no elemento em função de x , portanto é possível escrever como uma função linear da seguinte forma:

$$N_i(x) = a_i x + b_i . \quad (53)$$

Pelas Equações (50) e (51), pode-se definir os valores de N_1 ao assumir $x = 0$ na Equação (52) e também N_2 assumindo $x = L$. Dessa forma, tem-se que:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} , \quad (54)$$

e,

$$N_2 = \frac{x}{L} . \quad (55)$$

Portanto, a função contínua do deslocamento da Equação (52) pode ser reescrita como:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2 . \quad (56)$$

Escrevendo em forma matricial, tem-se:

$$u(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right) \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} , \quad (57)$$

ou ainda,

$$u(x) = [N]\{u\} , \quad (58)$$

onde $[N]$ é a matriz das funções interpoladoras, e $\{u\}$ o vetor dos deslocamentos nodais.

De acordo com Hibbeler (2010), o deslocamento axial de uma barra com área da seção transversal constante é dada por:

$$\delta = \frac{PL}{AE} , \quad (59)$$

onde δ é a variação no comprimento do elemento e P é a força normal na barra.

Ao aplicar a Equação (59) na Lei de Hooke, onde $P = k\delta$, encontra-se a constante de rigidez em função de A , E , e L , da seguinte forma:

$$k = \frac{AE}{L} , \quad (60)$$

onde k é a constante de rigidez.

Admitindo que o elemento esteja submetido somente a componente de deformação axial, e que a deformação, representada pela letra grega ϵ , pode ser definida como:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad (61)$$

então, aplicando as regras de derivações na Equação (56), tem-se:

$$\epsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L}. \quad (62)$$

A tensão normal no material também pode ser obtida através da Lei de Hooke para casos lineares da seguinte forma:

$$\sigma_x = E\epsilon_x, \quad (63)$$

onde σ_x representa a tensão no material.

Dessa forma, aplicando a Equação (62) na (63), tem-se:

$$\sigma_x = E \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right). \quad (64)$$

O esforço normal pode ser obtido dado que a tensão é a razão entre força e área, portanto:

$$P = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1). \quad (65)$$

Ao representar as forças aplicadas nos nós como f_1 e f_2 para o primeiro e segundo nó respectivamente, considera-se como positivo as coordenadas orientadas no sentido da esquerda para a direita. Adotando essa convenção, se a força f_1 for positiva, ela estará entrando no nó 1 (nó esquerdo) e causará esforço normal negativo, de compressão. Por outro lado, se f_2 for positivo, a força estará saindo do nó 2 (nó direito), resultando em um esforço positivo, de tração.

Dessa forma, pode-se generalizar que, para o primeiro nó, tem-se:

$$f_1 = -\frac{AE}{L}(u_2 - u_1), \quad (66)$$

e, para o segundo nó:

$$f_2 = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1). \quad (67)$$

As Equações (66) e (67) podem ser representadas matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (68)$$

A Equação (68) é referente a um elemento de barra qualquer, portanto representa uma equação elementar, podendo ser compactada da seguinte forma:

$$\{f^e\} = [k^e]\{u^e\}, \quad (69)$$

onde $[k^e]$ é a matriz de rigidez elementar de um elemento de barra, como o da Figura 5.

Portanto, de acordo com a semelhança entre as Equações (68) e (69), nota-se que a matriz de rigidez de uma barra de treliça no sistema local de coordenadas é representada como:

$$[k^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Para obter a matriz de massa, pode-se utilizar do método de energia cinética, demonstrado por Petyt (2010), onde:

$$Ec = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i \dot{u}_i^2), \quad (71)$$

onde, Ec é a energia cinética, m a massa, e \dot{u}_i a velocidade de um determinado elemento.

Escrevendo de forma matricial, tem-se:

$$Ec = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\}. \quad (72)$$

Como um elemento de treliça possui 2 GDL, então:

$$Ec = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (73)$$

Daí, tem-se:

$$[m^e] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

onde $[m^e]$ é a matriz de massa elementar no sistema de coordenadas local.

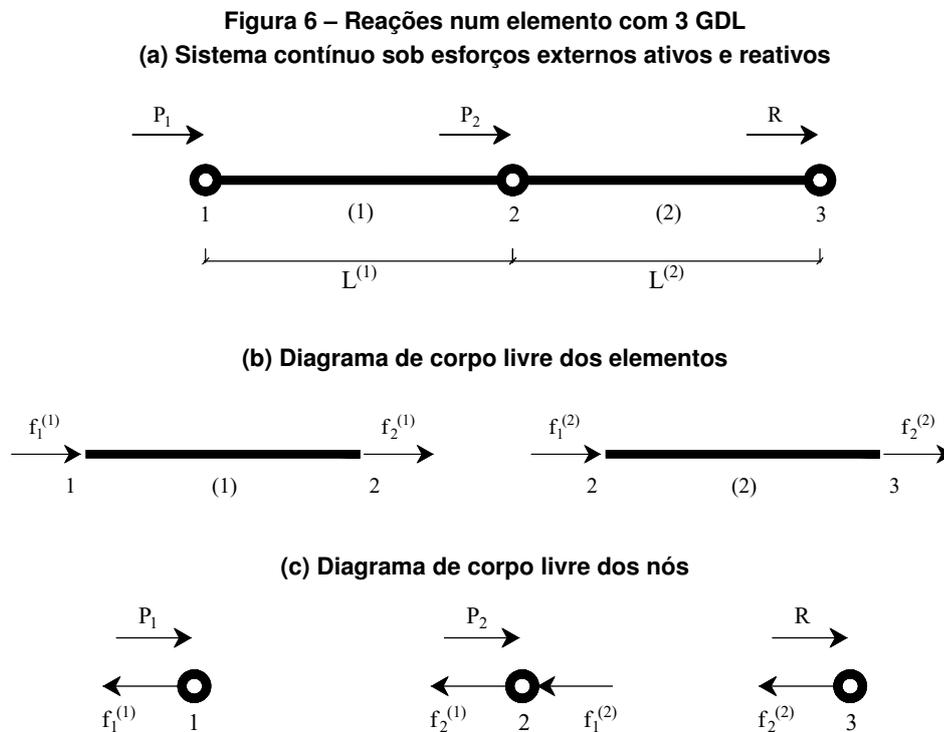
3.2.3.1 Obtenção da matriz elementar global de rigidez

Na Seção 3.2.3 foi demonstrado a obtenção da matriz de rigidez e de massa em um único elemento, porém, ao discretizar um sistema com diversos elementos, é necessário realizar uma concatenação das matrizes elementares para obter a matriz global.

Ao analisar uma estrutura formada por elementos de treliças planas no eixo horizontal global de coordenadas, ou seja, com 1 GDL por nó, obtém-se suas matrizes elementares de ordem 2, e, considerando um sistema global com $N - 1$ elementos, tem-se N GDL. Sendo assim, a matriz global do sistema é quadrada de ordem N.

Portanto, para concatenar as matrizes elementares, é necessário que elas possuam a mesma ordem da matriz global, pois, caso contrário, dada a Equação (69), o vetor deslocamento seria incompatível, dessa forma, adiciona-se 0 na matriz elementar para que sua dimensão fique equivalente a matriz global.

Para melhor exemplificar, na Figura 6 é apresentado 2 elementos de treliças vizinhos sob esforços externos (a), o DCL das reações internas nos elementos (b), e o DCL das reações nos nós (c).



Fonte: Adaptado de Fish e Belytschko (2007, p.16).

As reações demonstradas na Figura 6 (c) possuem mesma intensidade e direção, mas sentido oposto a força interna dos elementos, conforme a 3ª Lei de Newton, sendo possível

notar que, o nó intermediário, denominado nó 2, sofre influência das reações dos elementos vizinhos, denominados (1) e (2).

Segundo Fish e Belytschko (2007), ao desenvolver a matriz de rigidez com base na Equação (68) para o primeiro elemento, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}, \quad (75)$$

onde o deslocamento nodal local foi substituído por U , que é o deslocamento nodal global.

Analogamente, para o segundo elemento, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}. \quad (76)$$

Realizando o equilíbrio dos nós da Figura 6 (c) matricialmente, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}, \quad (77)$$

onde P são os esforços ativos, e R o esforço reativo.

Para realizar a concatenação das matrizes elementares afim de obter uma matriz global, de acordo com Fish e Belytschko (2007), é necessário primeiramente igualar a ordem dos vetores de deslocamento e esforços. Dessa forma, é necessário aumentar a ordem adicionando zeros, afim de alcançar uma igualdade na dimensão dos vetores. Portanto, a Equação (75) é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}, \quad (78)$$

analogamente, pode-se reescrever a Equação (76) da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}. \quad (79)$$

Dessa forma, obtém-se as matrizes de rigidez dos elementos (1) e (2), e, para a formulação da matriz de rigidez elementar no sistema global de coordenadas $[K^e]$, tem-se:

$$[K^e] = \sum_{e=1}^2 [k^e] = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (80)$$

De forma genérica, para a formulação da matriz de rigidez elementar de $N - 1$ elementos posicionados na mesma direção no eixo global de coordenadas, tem-se a seguinte matriz:

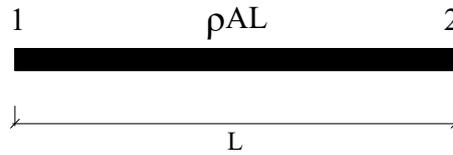
$$[K^e] = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k^{(N-2)} & -k^{(N-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k^{(N-2)} & k^{(N-2)} + k^{(N-1)} & -k^{(N-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k^{(N-1)} & k^{(N-1)} \end{bmatrix}. \quad (81)$$

3.2.3.2 Obtenção da matriz elementar de massa

Para analisar dinamicamente um sistema, deve-se obter a matriz de massa global, afim de computar as forças inerciais que atuam numa estrutura em vibração.

A forma de construir a matriz de massa é similar a formulação da matriz de rigidez, onde a massa de uma barra é dado pelo produto da massa específica ρ , da área da seção transversal A , e do comprimento L da barra. A Figura 7 apresenta uma barra idealizada (a) e sua respectiva representação em forma de elemento finito (b).

Figura 7 – Elemento de barra
(a) Barra idealizada de massa m



(b) Elemento finito de massa m



Fonte: Adaptado de Felippa (2004, p. 32-3).

Ao ser convertido em um elemento finito, a massa da barra é dividida igualmente entre os nós localizados nas extremidades da barra, portanto, o elemento que liga os nós 1 e 2 possui massa nula, como mostra a Figura 7 (b). Dessa forma, pela Equação (74), tem-se uma matriz diagonal chamada matriz de massa discreta ou matriz de massas concentradas:

$$[m^e] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Para a obtenção da matriz de massa consistente, segundo Bathe (2014), utiliza-se da seguinte equação:

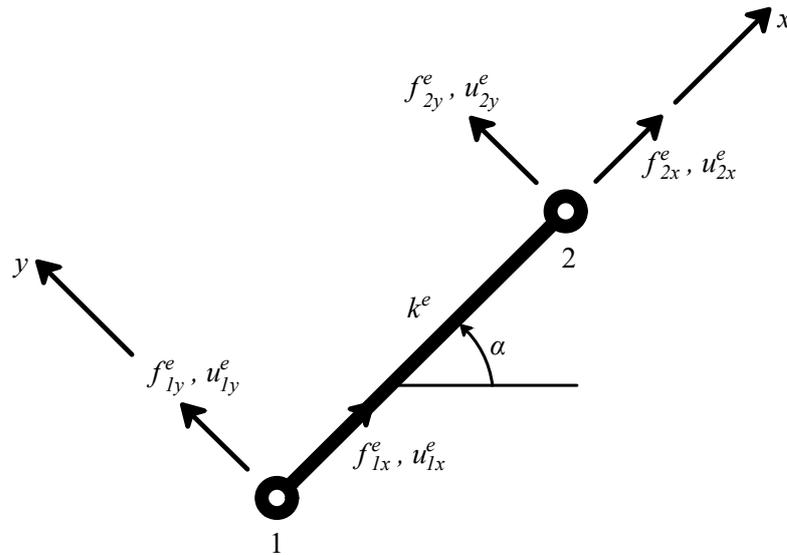
$$[m^e] = \int_0^L \rho A [N]^T [N] dx, \quad (83)$$

onde $[N]^T$ é a transposição da matriz interpoladora apresentada na Equação (57), e obtendo assim:

$$[m^e] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Tanto a matriz de massa, como a de rigidez, foram obtidas com 2 GDL, considerando deslocamentos e acelerações axiais apenas no eixo x , no entanto, uma treliça é composta por barras horizontais, verticais, e inclinadas, como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Elemento de treliça inclinado em coordenadas locais



Fonte: Adaptado de Carreira (2019, p. 18).

Um elemento de treliça no plano possui 4 GDL, então sua matriz elementar é de ordem 4, pois o vetor de carregamento, de deslocamento e de aceleração possuem quatro componentes, sendo necessário expandir a matriz para uma dimensão 4x4. Dessa forma, tem-se a matriz apresentada na Equação (84) reescrita da seguinte forma:

$$[m^e] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

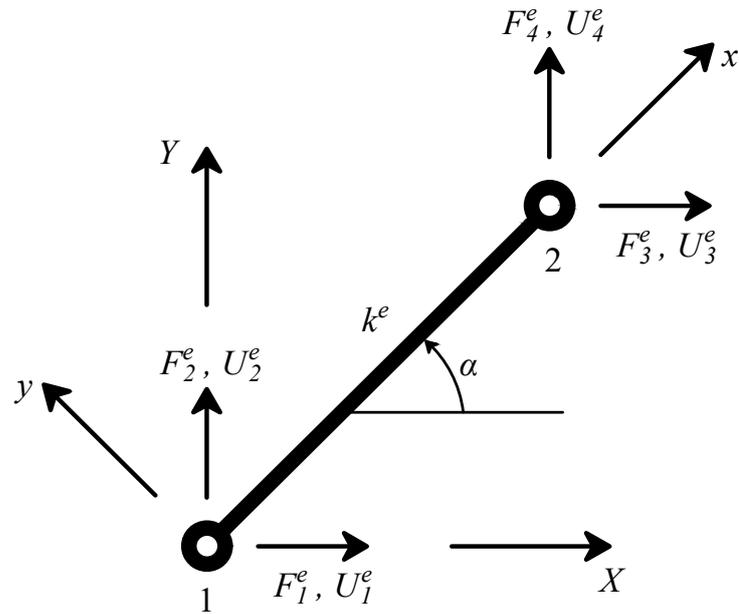
3.2.4 Transformação de coordenadas

Para um elemento em coordenadas locais, apresentado na Figura 8, reescrevendo a Equação (69) e considerando 4 GDL, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^e \\ f_{1y}^e \\ f_{2x}^e \\ f_{2y}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^e & 0 & -k^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k^e & 0 & k^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ u_{2y}^e \end{Bmatrix}. \quad (86)$$

Utiliza-se da trigonometria para correlacionar as coordenadas locais de um elemento, indicado na Figura 8, com as coordenadas globais na Figura 9

Figura 9 – Elemento de treliça inclinado em coordenadas globais



Fonte: Adaptado de Carreira (2019, p. 18).

Considerando o ângulo α crescente no sentido anti-horário, para realizar a transformação, é necessário obter relações entre as coordenadas através da trigonometria, onde:

$$\text{sen } \alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{L^e}, \quad (87)$$

e:

$$\text{cos } \alpha = \frac{X_2 - X_1}{L^e}, \quad (88)$$

onde L^e é o comprimento do elemento, definido por:

$$L^e = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (89)$$

Escrevendo matricialmente a relação entre as coordenadas local e global, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos } \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & \text{cos } \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_X \\ U_Y \end{Bmatrix}. \quad (90)$$

Para aplicar a matriz de transformação, é necessário expandir para compatibilizar com o vetor deslocamento da Equação (86), dessa forma, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}. \quad (91)$$

A matriz de transformação, denotada como $[T^e]$, é uma matriz ortogonal, onde sua inversa é igual a sua transposta. Reescrevendo a Equação (91) de forma compacta e isolando a parcela do deslocamento global, tem-se:

$$\{U^e\} = [T^e]^T \{u^e\}, \quad (92)$$

onde $\{U^e\}$ é o vetor de deslocamento nodal no sistema de coordenada global, e $[T^e]^T$ é a matriz de transformação de coordenadas transposta.

De forma análoga, tem-se o vetor de forças na coordenada global como:

$$\{F^e\} = [T^e]^T \{f^e\}, \quad (93)$$

onde $\{F^e\}$ é o vetor de carregamento do elemento no sistema de coordenada global.

Substituindo a Equação (69) em (93), tem-se:

$$\{F^e\} = [T^e]^T [k^e] \{u^e\}. \quad (94)$$

Daí obtém-se:

$$\{F^e\} = [K^e] \{U^e\}, \quad (95)$$

onde $[K^e]$ é a matriz de rigidez elementar no sistema global de coordenadas, denotada como:

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e]. \quad (96)$$

A matriz $[k^e]$ é obtida da Equação (60).

3.2.5 Condições de contorno

De acordo com Carreira (2019), a matriz de rigidez não possui inversa, pois é considerada singular, demonstrando uma hipostaticidade da estrutura. Para que o sistema alcance a condição de equilíbrio, é necessário a aplicação de condições de contorno. Tais condições indicam os pontos da estrutura que não possuem deslocamento, transformando a matriz de rigidez em uma matriz não singular e propiciando um sistema isostático ou hiperestático.

Para que a condição de contorno seja aplicada, admite-se os deslocamentos dos nós posicionados nos apoios da estrutura iguais a zero, de acordo com o tipo de apoio da estrutura. Dessa forma, elimina-se as linhas da matriz e dos vetores referente ao deslocamento e a respectiva coluna da matriz.

3.2.6 Matriz de incidência cinemática

A matriz de incidência cinemática $[\beta^e]$ garante ao sistema a interação entre os elementos através do nó para implementação computacional. Possui ordem $m \times n$, onde m representa o número de coordenadas locais do elemento, e n , o número de coordenadas globais (CARREIRA, 2019).

Para treliças planas, o índice m equivale a 4, devido aos GDL de um único elemento, e o índice n é definido pelo dobro da quantidade de nós da treliça.

Para simplificar, a numeração dos nós da treliça pode ser denotado da seguinte forma:

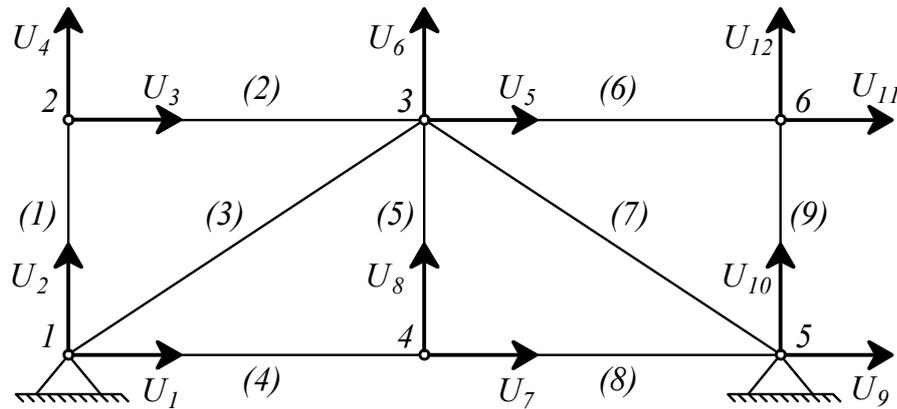
$$\begin{aligned} U_X &= U_{2z-1} \\ U_Y &= U_{2z} \end{aligned}, \quad (97)$$

onde z é o número do nó.

A matriz de incidência cinemática é uma matriz binária, que relaciona os deslocamentos nos nós do elemento com as coordenadas globais do sistema, adotando o valor 1 quando o deslocamento possui índices coincidentes, e 0 caso contrário.

A Figura 10 demonstra uma treliça arbitrária com seus deslocamentos nomeados segundo a Equação (97).

Figura 10 – Coordenadas globais numeradas



Fonte: Adaptado de Carreira (2019, p. 22).

Segundo Carreira (2019), para o primeiro nó do elemento, cada coluna da matriz de incidência recebe valores determinados pelo esquema apresentado abaixo:

$$\beta_{1j}^e = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 2m - 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\beta_{2j}^e = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 2m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já para o segundo nó, as colunas são definidas da seguinte forma:

$$\beta_{3j}^e = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 2n - 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\beta_{4j}^e = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 2n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3.2.7 Obtenção das matrizes globais da estrutura

As matrizes de massa e rigidez globais são obtidas aplicando a transformação de coordenadas nas matrizes elementares, definida nas Seções 3.2.3.1 e 3.2.3.2, e da inserção da matriz de incidência cinemática, que foi apresentada na Seção 3.2.6.

Primeiramente, de forma análoga ao utilizado na obtenção da matriz de rigidez do elemento no sistema global, dado na Equação (96), utiliza-se da matriz de massa consistente, obtido na Equação (85), e aplica-se a transformação de coordenadas da seguinte forma:

$$[M^e] = [T^e]^T [m^e] [T^e], \quad (98)$$

onde $[M^e]$ é a matriz de massa elementar no sistema global de coordenadas.

Em seguida, de acordo com Carreira (2019), com a matriz de massa elementar no sistema global, é necessário obter a matriz de massa global da estrutura. Para isso, aplicando a matriz de incidência cinemática, tem-se:

$$[M] = \sum_{e=1}^{n_{el}} [\beta^e]^T [M^e] [\beta^e], \quad (99)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa global da estrutura.

Utilizando do mesmo raciocínio, com a matriz de rigidez do elemento no sistema global, obtido na Equação (96), aplica-se a matriz de incidência cinemática, obtendo assim:

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_{el}} [\beta^e]^T [K^e] [\beta^e], \quad (100)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura.

E para a força atuante no elemento, através da Equação (95) tem-se:

$$[F^e] = [K^e] [\beta^e] \{U\}. \quad (101)$$

A matriz global de amortecimento proporcional $[C]$, conhecida como matriz de amortecimento de Rayleigh, pode ser escrita como:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K], \quad (102)$$

onde a_0 e a_1 são constantes de proporcionalidades que podem ser definidas se houver conhecimento dos amortecimentos adimensionais, bem como as frequências naturais de dois modos distintos, j e k , da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_j\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \begin{bmatrix} \omega_k & -\omega_j \\ -1/\omega_k & 1/\omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_j \\ \xi_k \end{Bmatrix}, \quad (103)$$

onde ω é a frequência natural, e ξ é o amortecimento adimensional, e pode ser definido como:

$$\xi = \frac{c}{c_c}, \quad (104)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento, e c_c é o coeficiente de amortecimento crítico.

3.3 Erros relativos

Ao solucionar problemas de forma numérica, os resultados ficam sujeitos a erros devido a incertezas de modelagem, de dados de entrada, erros de arredondamento referente a limitação de representação de números, que conseqüentemente podem acumular ao longo do processo de cálculo, e erros de truncamento. Desse modo é necessário definir medidas de erros para validação e confiabilidade da solução de um problema. A medida de erros utilizada neste trabalho foi a do erro relativo.

De acordo com Justo (2020), o erro absoluto é representado pela diferença entre um valor obtido, da seguinte forma:

$$E_A = X - \bar{X}, \quad (105)$$

onde X é um número real utilizado como resultado de referência e \bar{X} é sua aproximação. Já o erro relativo, possui resultado adimensional e é geralmente expressado em porcentagens, sendo expresso matematicamente como:

$$E_R = \frac{|E_A|}{|X|} 100\% \quad , \quad X \neq 0, \quad (106)$$

Como o intuito é validar os resultados do código desenvolvido com algum *software* profissional, os valores obtidos pelo código foram considerados como a aproximação \bar{X} dos resultados obtidos pelo *software* profissional.

4 MÉTODOS

Para a realização deste trabalho foram necessárias algumas etapas primordiais para entender os conceitos teóricos e desenvolver o código computacional capaz de realizar a análise dinâmica em estruturas de treliças.

4.1 Desenvolvimento do algoritmo

Através do estudo da revisão de literatura, foi desenvolvido um fluxograma, apresentado no Apêndice A a fim de exemplificar o processo do algoritmo para implementar o código computacional e obter as respostas das ações dinâmicas atuantes em treliças.

4.2 Implementação computacional

A partir do algoritmo desenvolvido, foi realizada a implementação computacional do problema utilizando o *software* MATLAB Student R2021a desenvolvido pela empresa MathWorks Inc.

Foram configuradas as seguintes etapas no algoritmo para a análise:

1. Definição da posição dos nós da treliça;
2. Designação da posição inicial e final das barras da treliça;
3. Contabilização dos números de nós e barras, e definição dos graus de liberdade;
4. Definição das propriedades geométricas, do material, do intervalo de tempo para análise, do grau de liberdade para análise de deslocamento e do elemento para análise de esforços internos;
5. Atribuição das matrizes e vetores iniciais de massa, rigidez, deslocamento e carregamento;
6. Definição das condições de contorno da estrutura;
7. Cálculos do comprimento das barras e ângulos entre os eixos locais e globais;
8. Solução das matrizes de rigidez e de massa consistente dos elementos e concatenação para obtenção de matrizes de massa e rigidez globais;
9. Remoção das linhas e colunas das matrizes e vetores que coincidem com as linhas do vetor deslocamento restringido pelas condições de contorno;
10. Solução do problema linear para obtenção dos deslocamentos estáticos e reações de apoio;

11. Obtenção das matrizes espectral e modal do sistema;
12. Organização em ordem crescente das matrizes espectral e modal;
13. Verificação do intervalo de tempo para solução via Método das Diferenças Finitas;
14. Obtenção das matrizes e vetor de massa, rigidez e carregamento modais;
15. Aplicação do Método das Diferenças Finitas através de uma função, conforme fluxograma apresentado na Figura 4;
16. Impressão dos resultados e plotagem dos gráficos do histórico de deslocamento no grau de liberdade pré definido e do histórico de esforços internos no elemento pré determinado.

4.3 Treliças solucionadas

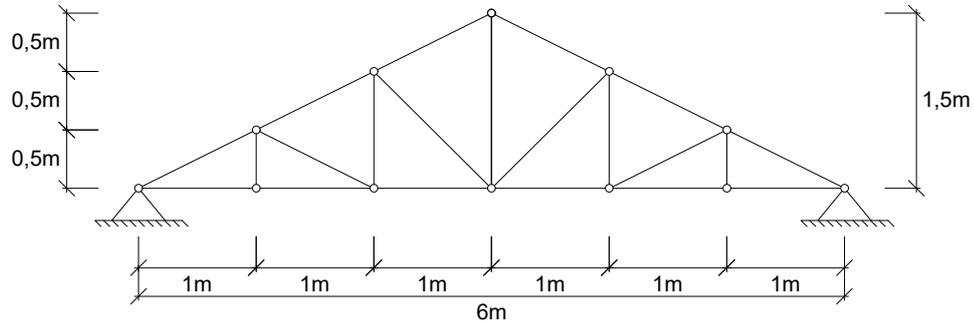
Para testar o código foram pré determinadas as propriedades geométricas e do material e o carregamento dinâmico atuante na estrutura.

4.3.1 Geometria das treliças para análise

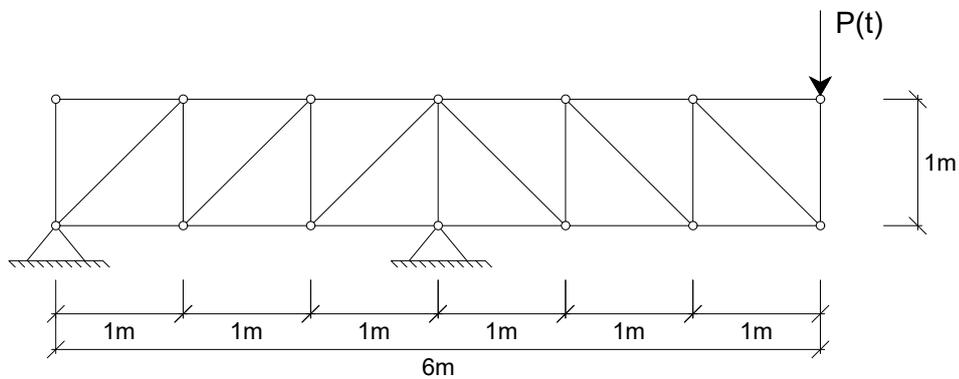
Foram analisadas 3 treliças hiperestáticas distintas, como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Treliças para análise

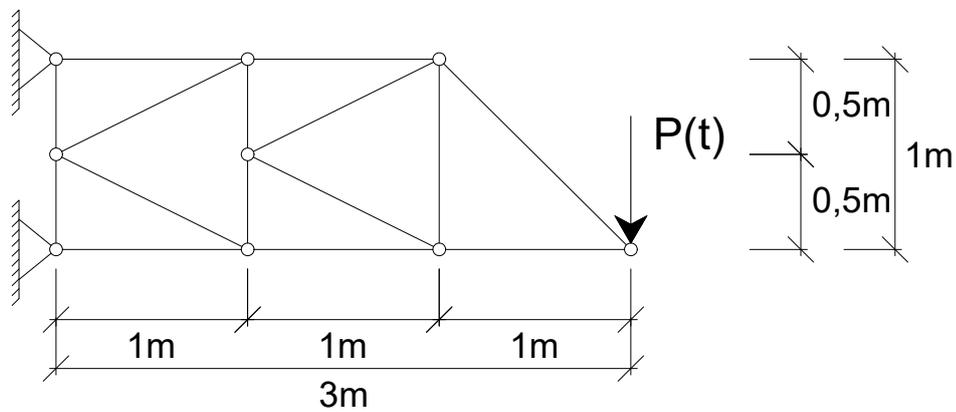
(a) Treliça 1



(b) Treliça 2



(c) Treliça 3



Fonte: Adaptado de Karnovsky e Lebed (2010, p. 50, 75 e 174).

As estruturas foram definidas com geometrias diferentes no intuito de garantir que o código consiga encontrar as respostas à ações dinâmicas em treliças com diversas configurações geométricas. No entanto, foi adotado para todas as treliças barras genéricas com área de $5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

4.3.2 Propriedades do material

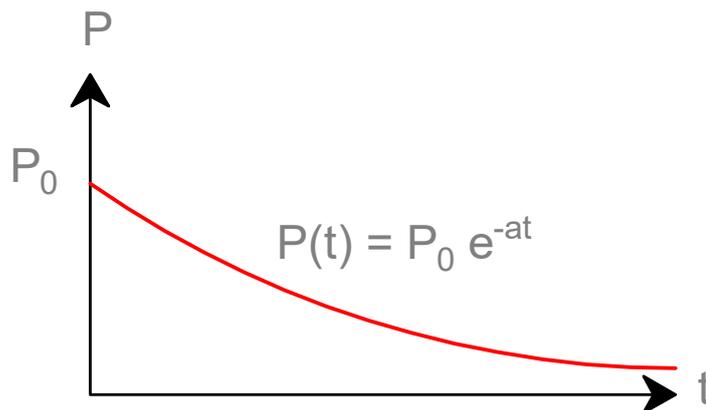
As treliças analisadas foram compostas por aço MR 250, com módulo de elasticidade E de 210 GPa e massa específica ρ de 7 850 kg/m³, conforme a ABNT NBR 8800 (2008) (Associação Brasileira de Normas Técnicas).

4.3.3 Carregamento dinâmico

Para a Trelíça 1, foi realizado apenas a análise modal com finalidade de testar o código até a solução dos autovalores e autovetores, portanto não foi adicionado carregamento dinâmico. Já para as Trelíças 2 e 3, apresentadas na Figura 11, os carregamentos dinâmicos foram escolhidos arbitrariamente da seguinte forma:

- Trelíça 2: Vibração forçada com carregamento exponencial, como mostra a Figura 12;

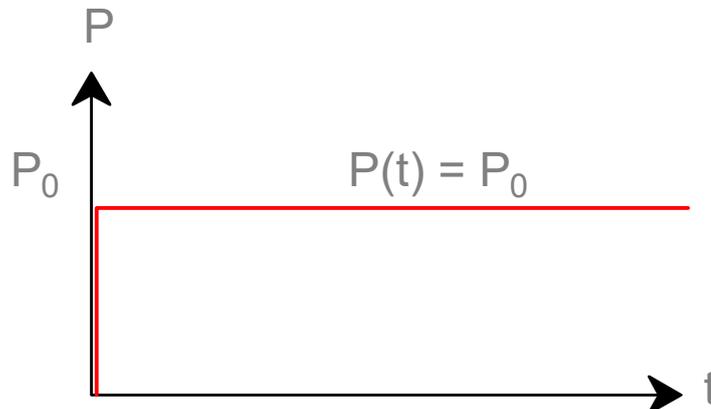
Figura 12 – Vibração forçada exponencial



Fonte: Autoria própria (2022).

- Trelíça 3: Vibração forçada com carregamento ressalto, apresentado na Figura 13.

Figura 13 – Vibração forçada ressalto



Fonte: Autoria própria (2022).

Onde $P(t)$ é o carregamento em função do tempo, P_0 é o carregamento no instante em que $t = 0$, e é o número de Euler e a uma constante arbitrária que define a suavidade da curva exponencial.

Para realizar a análise, foi adotado 5 000 N para P_0 e para a constante a foi admitido um valor de 2. Dessa forma, os carregamentos dinâmicos exponencial e ressalto foram definidos como:

$$P(t) = 5\,000 e^{-2t}$$

$$P(t) = 5\,000 ,$$

respectivamente.

Em todos os casos de carregamento, o passo de tempo foi determinado arbitrariamente como 5×10^{-5} e o tempo total de análise foi de 0,3 segundos. Esse valor definido para o passo de tempo deverá ser analisado para verificar se atende a condição de estabilidade do Método das Diferenças Finitas, expresso pela Equação (43). Caso atenda, o código continua a solução do problema utilizando o passo de tempo pré definido, caso não, deverá ser definido um novo passo de tempo que respeite a condição de estabilidade relativa ao tamanho do passo de tempo para utilização do MDF.

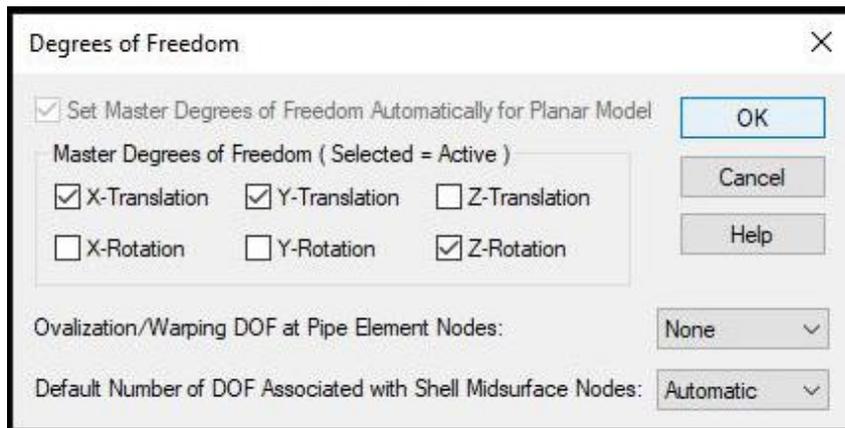
4.3.4 VALIDAÇÃO

A validação do código, apresentando no Apêndice B foi realizada através da comparação dos resultados obtidos no *software* ADINA Structures 9.6 versão 9.6 (900 nós) com licença estudantil. Para isso, seguiu-se uma ordem para construir o modelo numérico no *software* ADINA Structures.

Utilizando a Treliça 3, apresentada na Figura 11 (c), as propriedades geométrica, do material e do carregamento dinâmico do tipo ressalto, definidos nas Seções 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3 respectivamente, como exemplo, os passos para a modelagem no *software* consistiram em:

1. Definir os graus de liberdade do sistema (permitir apenas translação nos eixos x e y , e rotação no eixo z), como mostra a Figura 14;

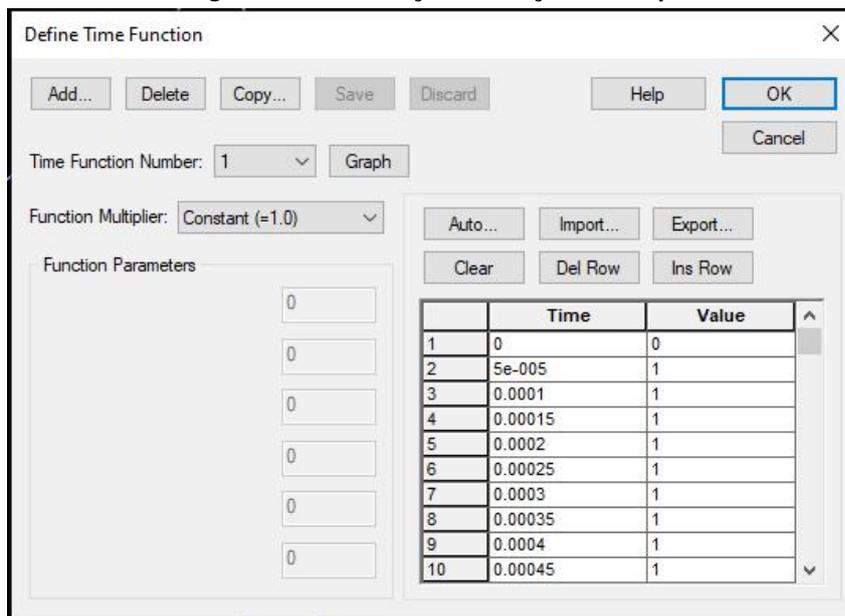
Figura 14 – Definição dos graus de liberdade do sistema



Fonte: Autoria própria (2022).

2. Construir uma função de tempo para posteriormente configurar um carregamento dinâmico, como mostra a Figura 15, onde foi configurado a função de tempo para o carregamento do tipo ressalto;

Figura 15 – Construção da função de tempo



Fonte: Autoria própria (2022).

3. Determinar a quantidade e tamanho de passos de tempo, conforme demonstrado na Figura 16;

Figura 16 – Definição da quantidade e tamanho dos passos de tempo

Define Time Step

Add... Delete Copy... Save Discard Set

Time Step Name: DEFAULT Active Time Step: DEFAULT

Auto... Import... Export... Clear Del Row Ins Row

	# of Steps	Magnitude	At Step #	Solution Time
1	6000	5e-005	6000	0.3
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

OK Cancel Help

Fonte: Autoria própria (2022).

4. Estabelecer as coordenadas dos nós da treliça em metros, como mostra a Figura 17;

Figura 17 – Definição das coordenadas dos nós da treliça

Define Geometry Points

Save Discard OK Cancel

Method: Define By Coordinates << click Discard to re-activate

Default Coordinate System: 0 ...

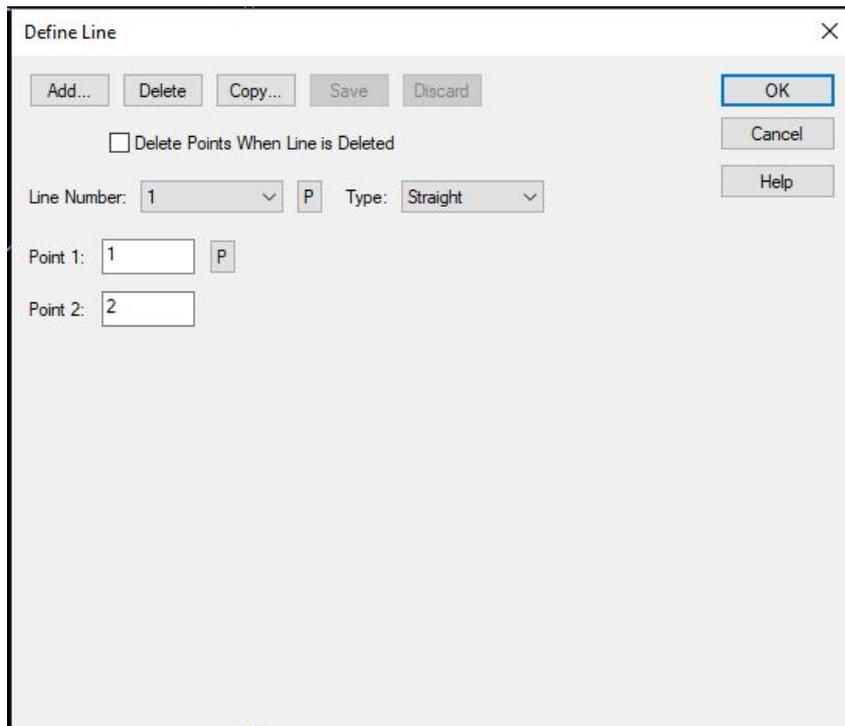
Auto... Import... Export... Clear Del Row Ins Row Help

	Point #	X1	X2	X3	System
1	1	0	1	0	0
2	2	1	1	0	0
3	3	2	1	0	0
4	4	0	0.5	0	0
5	5	1	0.5	0	0
6	6	0	0	0	0
7	7	1	0	0	0
8	8	2	0	0	0
9	9	3	0	0	0
10					

Fonte: Autoria própria (2022).

5. Definir a posição inicial e final das barras da treliça utilizando o número atribuído aos nós das extremidades de cada barra, como mostra a Figura 18;

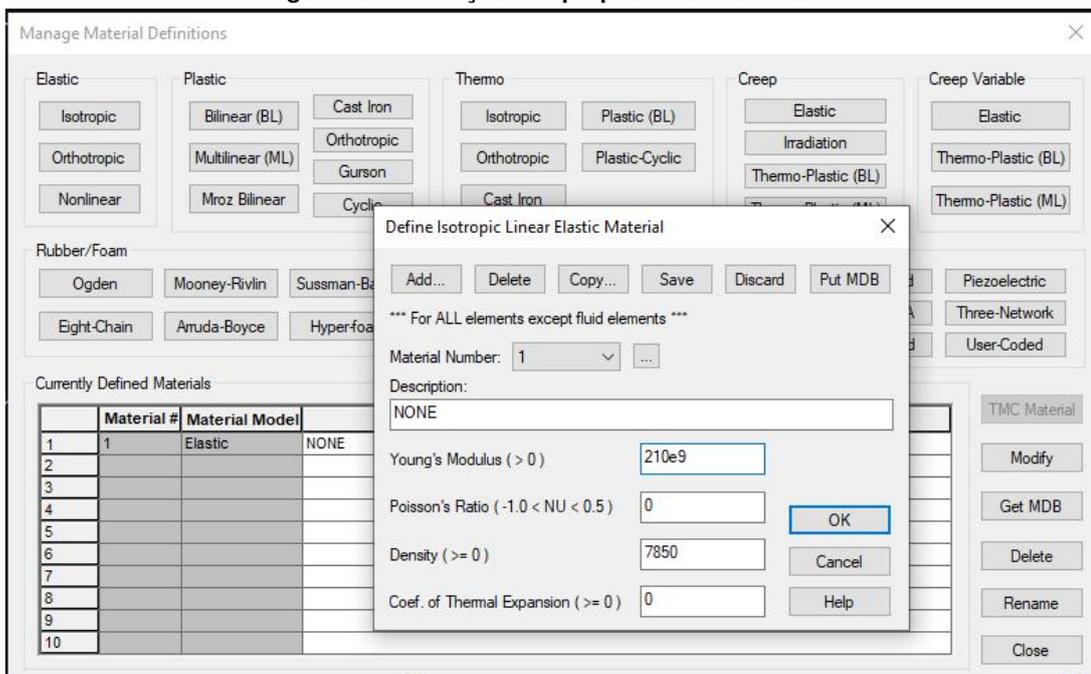
Figura 18 – Construção das barras da treliça



Fonte: Autoria própria (2022).

6. Atribuir os valores das propriedades do material, sendo a unidade do módulo de elasticidade como N/m^2 e a da densidade como kg/m^3 , como demonstra a Figura 19;

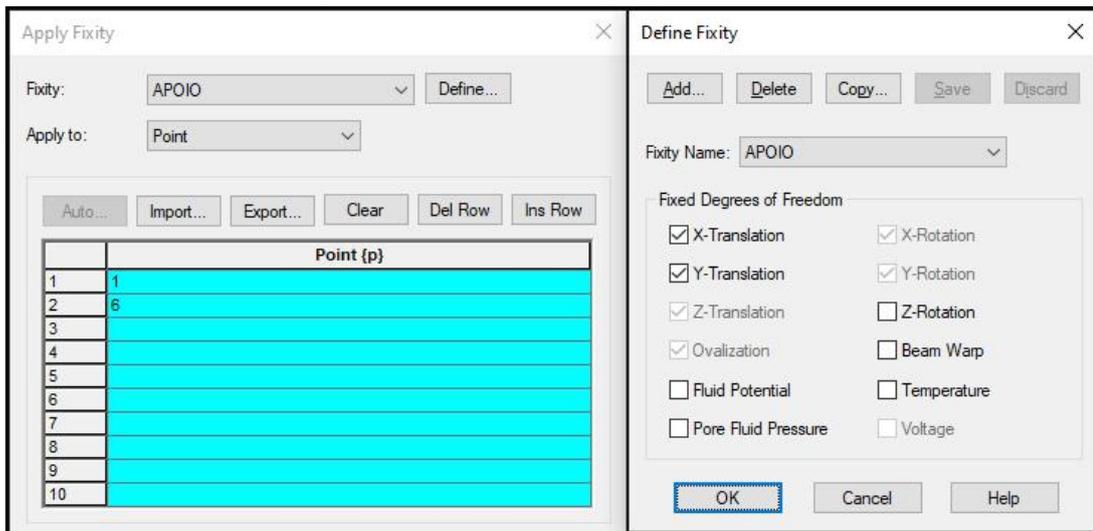
Figura 19 – Definição das propriedades do material



Fonte: Autoria própria (2022).

7. Definir as condições de contorno da estrutura (apoios fixos), de acordo a Figura 20;

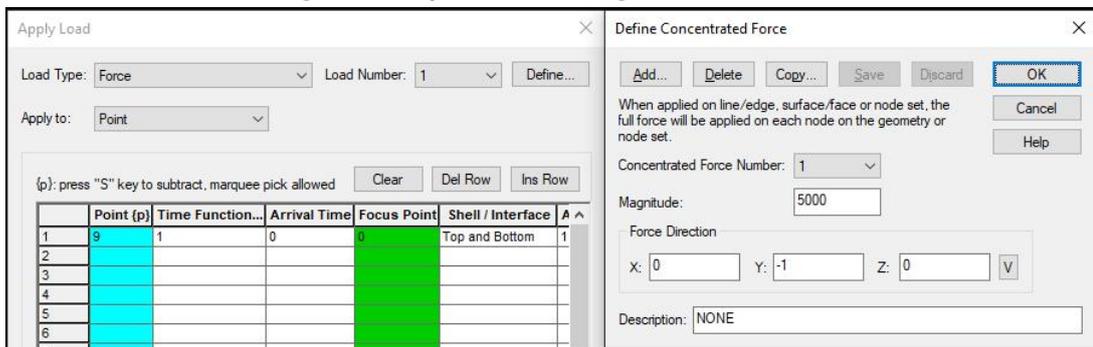
Figura 20 – Definição dos apoios da estrutura



Fonte: Autoria própria (2022).

8. Aplicar o carregamento em um nó, definindo a magnitude do carregamento, em Newton (N), e a função de tempo que ele obedecerá, como mostra a Figura 21;

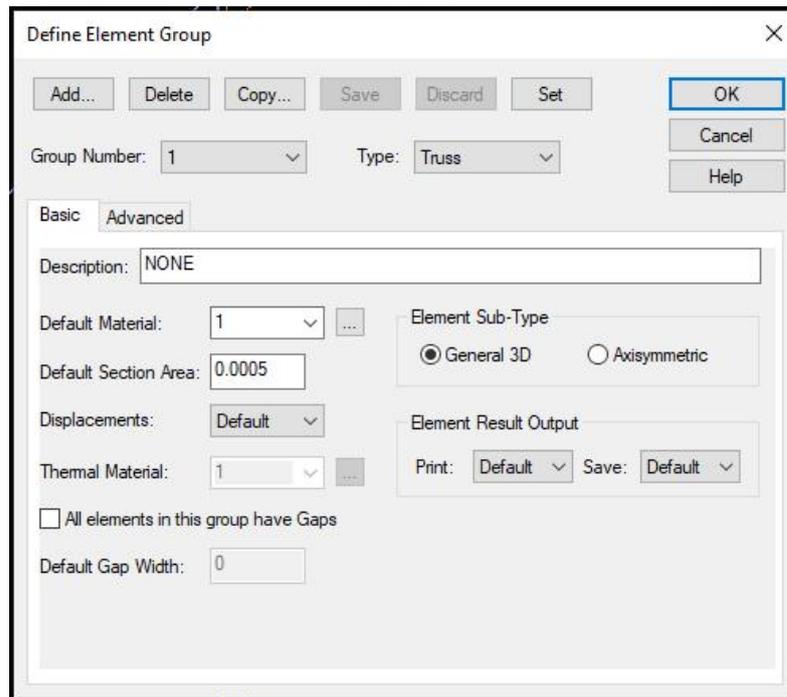
Figura 21 – Aplicando o carregamento em um nó



Fonte: Autoria própria (2022).

9. Construir um grupo de elementos de treliça definindo a área da seção da barra da treliça utilizando o tipo de elemento como "Truss" para que o ADINA Structures considere as extremidades das barras rotuladas, permita a opção de atribuir 2, 3 ou 4 nós por elemento e considere apenas a transmissão de forças axiais ao longo da barra, de acordo a Figura 22.

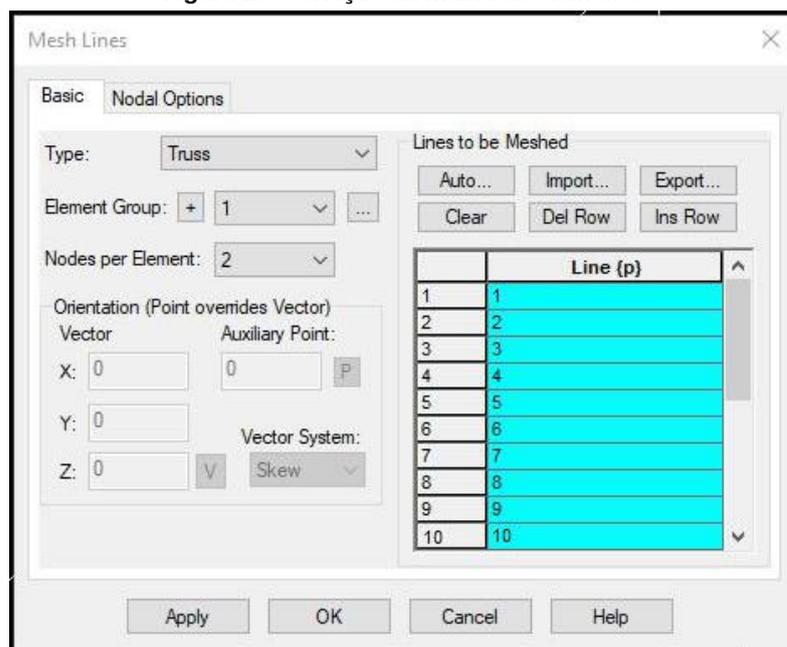
Figura 22 – Criação de um grupo para elementos de treliças



Fonte: Autoria própria (2022).

10. Criar uma malha de elementos e incluir todas as barras da treliça, estabelecendo o grupo de elementos e a quantidade de nós por elemento para cada barra (para este trabalho foi utilizado 2 nós por elemento), conforme mostra a Figura 23;

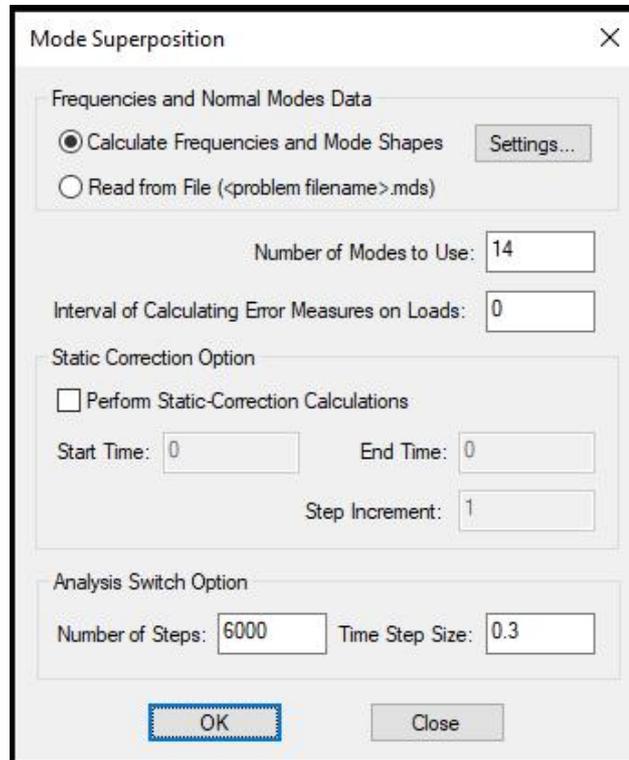
Figura 23 – Criação da malha de elementos



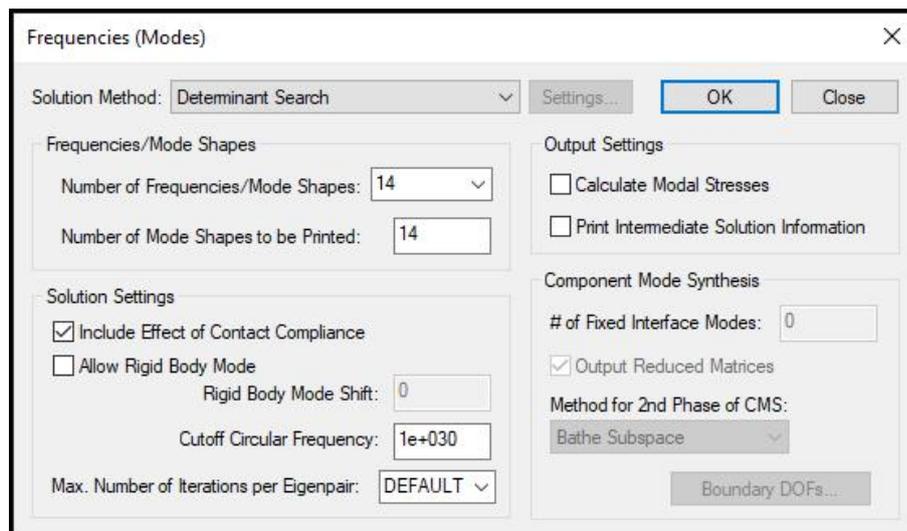
Fonte: Autoria própria (2022).

11. Definir o número de modos, número de passos e tempo limite, de acordo a Figura 24 (a) e a forma de realizar o cálculo das frequências, como mostra a Figura 24 (b).

**Figura 24 – Definição dos métodos de solução
(a) Superposição modal**



(b) Frequências de vibração



Fonte: A autoria própria (2022).

Na definição do método de cálculo é possível escolher diferentes algoritmos para a solução do problema de autovetores e autovalores em que se deseja que o *software* ADINA Struc-

tures utilize. Dessa forma a comparação fica mais fidedigna, já que foi possível selecionar o mesmo método aplicado no código do MATLAB.

Para calcular as frequências naturais de vibração, utilizou-se o método da matriz determinante, apresentado na Equação (15). Também foi possível selecionar a forma de solução através da superposição modal, método também utilizado no código.

Seguindo os passos apresentados e determinando os métodos de solução para o *software*, foi possível executar a análise para obtenção dos resultados e validação do código desenvolvido.

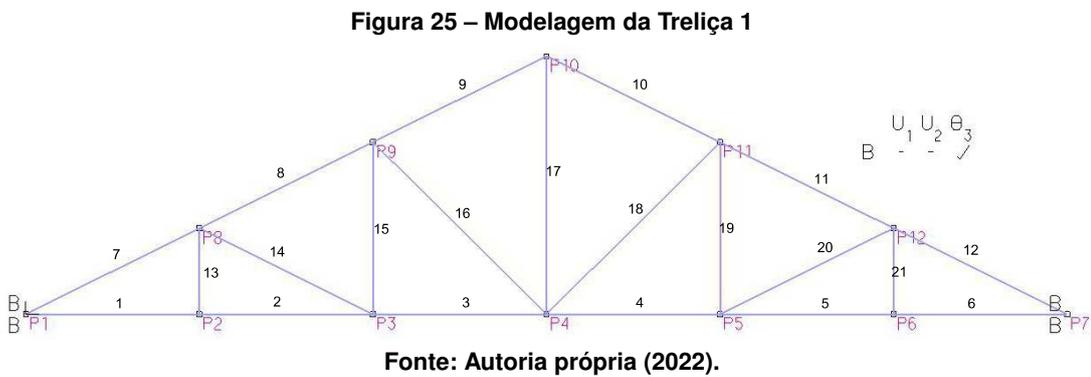
5 COMPILAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A validação do código construído no MATLAB foi realizada através da comparação dos resultados obtidos no *software* ADINA Structures versão 9.6 (900 nós) com licenciamento estudantil.

Dada as soluções do *software* e do código, foi utilizado a Equação (106) para encontrar os erros relativos a fim de comparação.

5.1 Treliça 1

Para a Treliça 1, foi realizada a modelagem no *software*, como mostra a Figura 25.

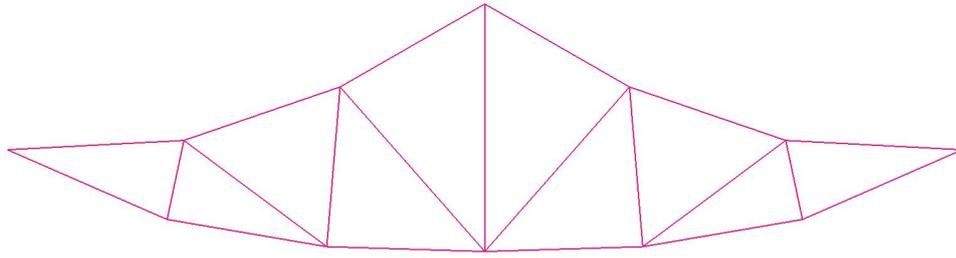


onde a letra B representa as condições de contorno da estrutura.

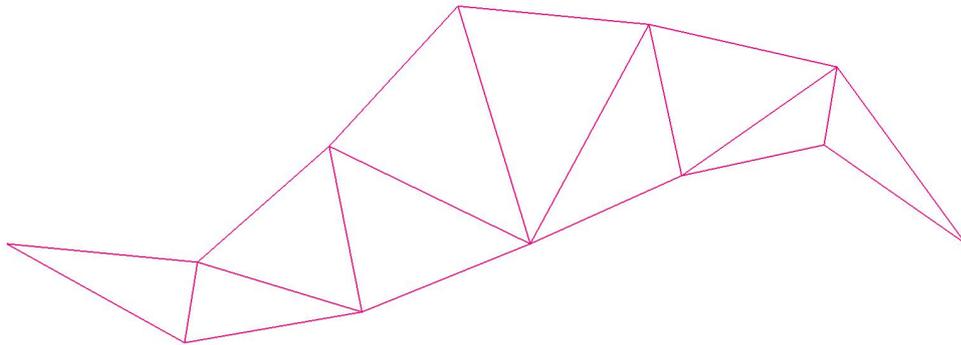
A modelagem consistiu em uma estrutura com 12 nós e 21 elementos de treliça, resultando em 24 graus de liberdade, sendo 4 deles restringidos pelos apoios fixos nos nós P1 e P7.

Após a solução realizada pelo *software*, foi obtido as 20 formas modais e suas respectivas frequências naturais de vibração. As primeiras 3 formas modais são apresentadas na Figura 26.

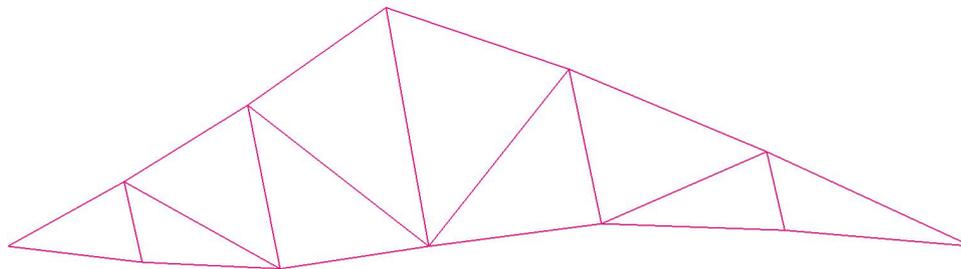
Figura 26 – Modos de vibração da Treliza 1
(a) Primeiro modo



(b) Segundo modo



(c) Terceiro modo



Fonte: Autoria própria (2022).

Os autovetores referentes as formas modais apresentadas na Figura 26 foram obtidos do *software* e do código, em seguida ambos foram normalizados para uma comparação. Os autovetores e seus respectivos erros relativos são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Comparação dos autovetores normalizados da Trelça 1

Primeiro modo			Segundo modo			Terceiro modo		
ADINA Structures	Código	Erro (%)	ADINA Structures	Código	Erro (%)	ADINA Structures	Código	Erro (%)
5,60E-03	5,60E-03	1,87E-04	1,81E-01	-1,81E-01	3,19E-04	-2,54E-01	-2,54E-01	2,33E-04
-6,85E-01	-6,85E-01	2,24E-04	-1	1	0	-1,56E-01	-1,56E-01	9,49E-05
1,11E-02	1,11E-02	1,15E-04	3,57E-01	-3,57E-01	2,17E-04	-4,72E-01	-4,72E-01	2,75E-04
-9,53E-01	-9,53E-01	1,89E-04	-6,89E-01	6,89E-01	4,14E-04	-2,19E-01	-2,19E-01	2,89E-04
0	0	0	4,41E-01	-4,41E-01	2,82E-04	-5,88E-01	-5,88E-01	5,42E-05
-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
-1,11E-02	-1,11E-02	1,15E-04	3,57E-01	-3,57E-01	2,17E-04	-4,72E-01	-4,72E-01	2,75E-04
-9,53E-01	-9,53E-01	1,89E-04	6,89E-01	-6,89E-01	4,14E-04	2,19E-01	2,19E-01	2,89E-04
-5,60E-03	-5,60E-03	1,87E-04	1,81E-01	-1,81E-01	3,19E-04	-2,54E-01	-2,54E-01	2,33E-04
-6,85E-01	-6,85E-01	2,24E-04	1	-1	0	1,56E-01	1,56E-01	9,49E-05
1,69E-01	1,69E-01	1,41E-04	3,11E-01	-3,11E-01	1,91E-04	-4,28E-01	-4,28E-01	2,51E-04
-6,82E-01	-6,82E-01	2,25E-04	-9,87E-01	9,87E-01	3,22E-04	-1,46E-01	-1,46E-01	1,52E-04
1,40E-01	1,40E-01	4,18E-04	2,85E-02	-2,85E-02	2,39E-04	-7,85E-01	-7,85E-01	2,70E-05
-9,31E-01	-9,31E-01	4,89E-05	-6,16E-01	6,16E-01	2,09E-04	-1,75E-01	-1,75E-01	3,44E-04
0	0	0	-2,84E-01	2,84E-01	2,95E-04	-1	-1	0
-8,90E-01	-8,90E-01	1,98E-04	0	0	0	0	0	0
-1,40E-01	-1,40E-01	4,18E-04	2,85E-02	-2,85E-02	2,39E-04	-7,85E-01	-7,85E-01	2,70E-05
-9,31E-01	-9,31E-01	4,89E-05	6,16E-01	-6,16E-01	2,09E-04	1,75E-01	1,75E-01	3,44E-04
-1,69E-01	-1,69E-01	1,41E-04	3,11E-01	-3,11E-01	1,91E-04	-4,28E-01	-4,28E-01	2,51E-04
-6,82E-01	-6,82E-01	2,25E-04	9,87E-01	-9,87E-01	3,22E-04	1,46E-01	1,46E-01	1,52E-04

Fonte: Autoria própria (2022).

A comparação dos resultados das frequências naturais de vibração é apresentada na Tabela 2 juntamente com os valores dos erros relativos entre eles.

Tabela 2 – Resultados das frequências naturais da Trelça 1

Forma Modal	Frequência Natural (rad/s) Código	ADINA Structures	Erro Relativo (%)
1	441,5244118	441,5244581	1,05E-05
2	829,4501804	829,4495756	7,29E-05
3	1697,391841	1697,389944	1,12E-04
4	1972,058324	1972,05939	5,41E-05
5	2851,686304	2851,686484	6,30E-06
6	3390,430077	3390,431924	5,45E-05
7	3795,897069	3795,898439	3,61E-05
8	4045,559269	4045,560807	3,80E-05
9	5522,484936	5522,486345	2,55E-05
10	5879,392358	5879,39012	3,81E-05
11	6574,525428	6574,53661	1,70E-04
12	6871,752259	6871,731275	3,05E-04
13	7031,381838	7031,387014	7,36E-05
14	7455,902068	7455,879013	3,09E-04
15	8536,499988	8536,524054	2,82E-04
16	9015,166423	9015,177111	1,19E-04
17	10219,87711	10219,85223	2,43E-04
18	10794,88906	10794,88935	2,64E-06
19	11170,44461	11170,43533	8,30E-05
20	11184,53991	11184,50967	2,70E-04

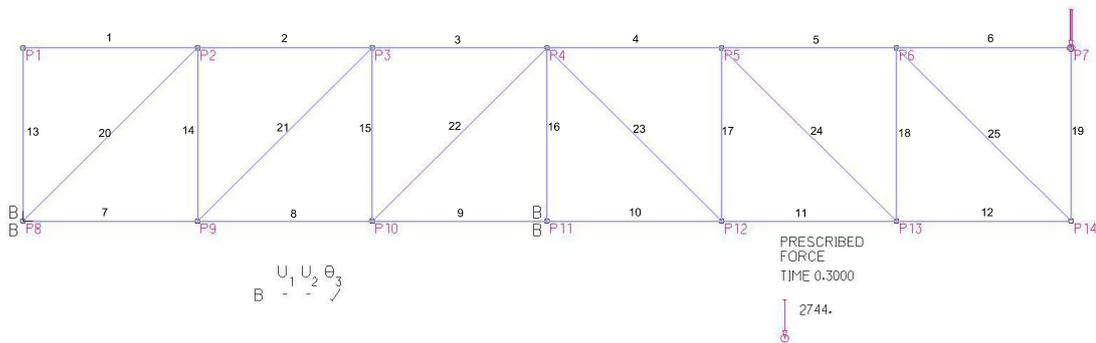
Fonte: Autoria própria (2022).

5.2 Treliça 2

Para a Treliça 2, a estrutura foi construída com 14 nós e 25 elementos de treliça, resultando em 28 graus de liberdade, sendo 4 deles restringidos pelos apoios fixos nos nós P8 e P11. O carregamento dinâmico do tipo exponencial foi aplicado no nó 9 com direção negativa em relação ao eixo y do plano de coordenadas cartesianas.

A modelagem realizada no *software* é apresentada na Figura 27.

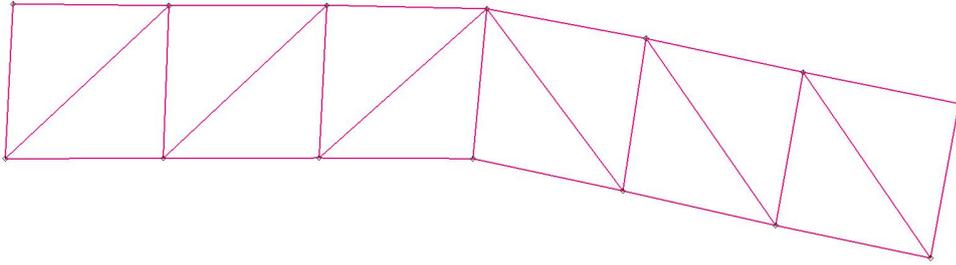
Figura 27 – Modelagem da Treliça 2



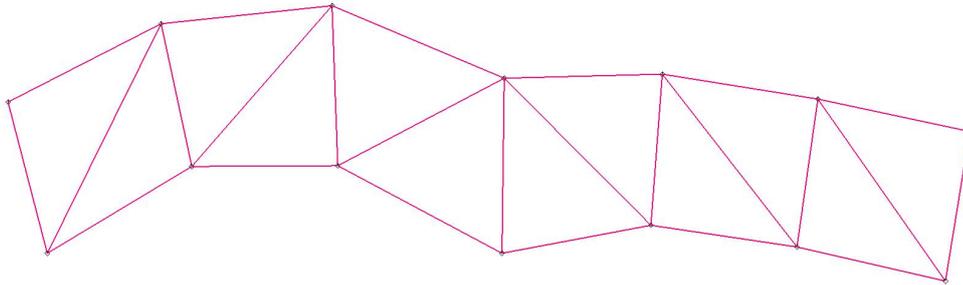
Fonte: Autoria própria (2022).

Na configuração do método de solução foi considerado 24 modos na superposição modal. Com os resultados da solução foram obtidas as 24 formas modais e suas respectivas frequências naturais de vibração. A Figura 28 apresenta as 3 primeiras formas modais da estrutura.

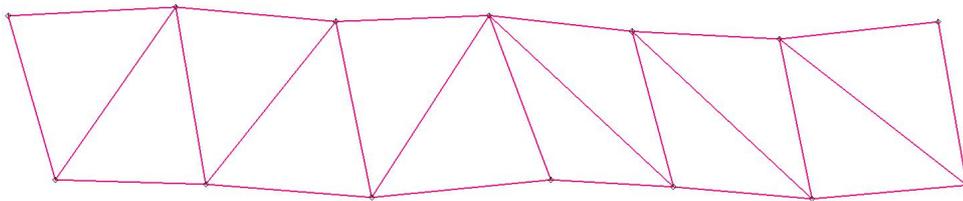
Figura 28 – Modos de vibração da Treliza 2
(a) Primeiro modo



(b) Segundo modo



(c) Terceiro modo



Fonte: Autoria própria (2022).

Os autovetores obtidos pelo *software* ADINA Structures e pelo código do MATLAB referentes as formas modais apresentadas na Figura 28, foram normalizados e apresentados na Tabela 3 juntamente com seus respectivos erros relativos.

Tabela 3 – Comparação dos autovetores normalizados da Treliça 2

Primeiro modo			Segundo modo			Terceiro modo		
ADINA Structures	Código	Erro (%)	ADINA Structures	Código	Erro (%)	ADINA Structures	Código	Erro (%)
7,79E-02	7,79E-02	1,11E-04	-4,02E-01	-4,02E-01	7,33E-05	-4,36E-01	4,36E-01	1,52E-04
-1,17E-05	-1,17E-05	1,58E-04	6,48E-03	6,48E-03	3,90E-06	8,84E-04	-8,84E-04	2,32E-04
7,76E-02	7,76E-02	7,26E-05	-3,87E-01	-3,87E-01	2,72E-06	-4,14E-01	4,14E-01	1,57E-04
-1,82E-02	-1,82E-02	2,21E-05	8,14E-01	8,14E-01	1,76E-04	8,24E-02	-8,24E-02	1,05E-04
9,78E-02	9,78E-02	2,37E-04	-1,88E-01	-1,88E-01	7,86E-05	-4,61E-01	4,61E-01	1,69E-04
-1,36E-02	-1,36E-02	8,68E-05	1	1	0	-5,19E-02	5,19E-02	8,58E-05
1,38E-01	1,38E-01	8,92E-05	2,30E-02	2,30E-02	2,93E-05	-5,71E-01	5,71E-01	1,57E-04
-4,92E-02	-4,92E-02	4,53E-05	2,52E-01	2,52E-01	1,39E-04	4,07E-03	-4,07E-03	1,44E-04
1,72E-01	1,72E-01	1,76E-04	8,94E-02	8,94E-02	1,48E-04	-7,76E-01	7,76E-01	3,25E-04
-3,47E-01	-3,47E-01	1,15E-04	2,94E-01	2,94E-01	1,05E-05	-1,44E-01	1,44E-01	6,55E-05
1,83E-01	1,83E-01	8,76E-05	1,30E-01	1,30E-01	2,30E-04	-9,42E-01	9,42E-01	1,03E-05
-6,85E-01	-6,85E-01	3,20E-05	3,73E-02	3,73E-02	7,73E-05	-2,15E-01	2,15E-01	1,15E-04
1,84E-01	1,84E-01	7,55E-05	1,34E-01	1,34E-01	7,93E-05	-1	1	0
-1	-1	0	-2,98E-01	-2,98E-01	7,42E-05	-5,48E-02	5,48E-02	8,98E-05
2,15E-02	2,15E-02	4,06E-05	-7,22E-02	-7,22E-02	3,82E-04	-1,36E-01	1,36E-01	4,53E-05
2,97E-03	2,97E-03	1,07E-04	8,95E-01	8,95E-01	1,95E-04	-4,14E-02	4,14E-02	1,43E-04
2,15E-02	2,15E-02	3,82E-06	-1,29E-01	-1,29E-01	7,38E-05	-1,30E-01	1,30E-01	8,46E-05
7,63E-03	7,63E-03	1,98E-04	9,03E-01	9,03E-01	6,66E-05	-1,64E-01	1,64E-01	2,63E-04
-5,87E-02	-5,87E-02	3,21E-04	-2,74E-02	-2,74E-02	1,06E-04	-3,93E-01	3,93E-01	1,55E-04
-3,23E-01	-3,23E-01	1,17E-04	2,89E-01	2,89E-01	1,54E-04	-6,58E-02	6,58E-02	4,13E-05
-9,02E-02	-9,02E-02	8,55E-05	-8,39E-02	-8,39E-02	7,25E-05	-6,40E-01	6,40E-01	3,24E-04
-6,69E-01	-6,69E-01	7,85E-05	6,50E-02	6,50E-02	2,49E-04	-1,77E-01	1,77E-01	1,75E-04
-1,00E-01	-1,00E-01	1,63E-05	-1,16E-01	-1,16E-01	1,64E-05	-7,36E-01	7,36E-01	1,87E-04
-9,96E-01	-9,96E-01	4,26E-05	-2,86E-01	-2,86E-01	2,55E-05	-4,98E-02	4,98E-02	1,70E-04

Fonte: Autoria própria (2022).

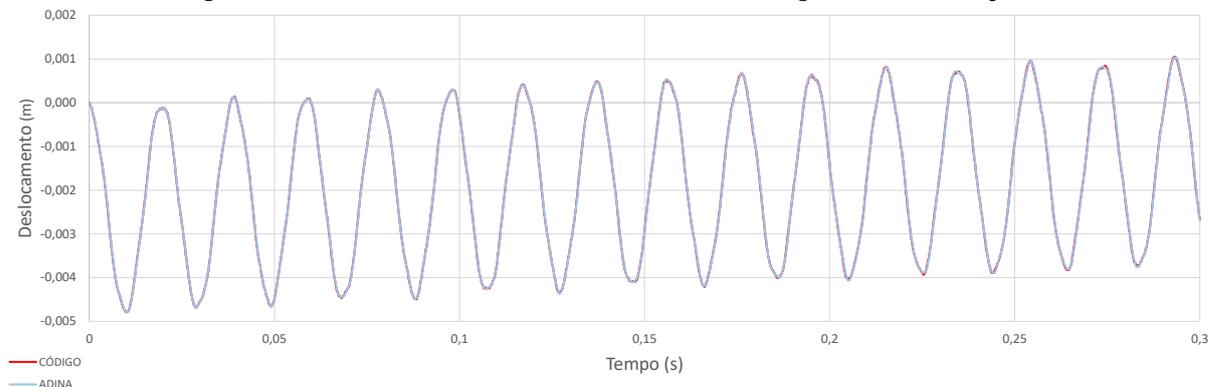
A Tabela 4 apresenta as frequências naturais de vibração e os erros relativos como comparação entre os resultados do *software* ADINA Structures e do código elaborado no MATLAB.

Tabela 4 – Resultados das frequências naturais da Treliza 2

Forma Modal	Frequência Natural (rad/s)		Erro Relativo (%)
	Código	ADINA Structures	
1	321,2882743	321,2881674	3,33E-05
2	1112,943794	1112,946897	2,79E-04
3	1285,268837	1285,269537	5,44E-05
4	1458,167456	1458,17023	1,90E-04
5	2317,902637	2317,904759	9,15E-05
6	2717,969733	2717,967734	7,36E-05
7	2994,14244	2994,145144	9,03E-05
8	3795,984337	3795,986403	5,44E-05
9	3968,170034	3968,170813	1,96E-05
10	4624,357746	4624,355271	5,35E-05
11	5234,100413	5234,100706	5,59E-06
12	6017,578367	6017,576215	3,58E-05
13	6210,290334	6210,287791	4,10E-05
14	6467,759553	6467,785292	3,98E-04
15	7086,13979	7086,113558	3,70E-04
16	7174,639579	7174,643639	5,66E-05
17	7577,921795	7577,898472	3,08E-04
18	7642,241783	7642,238289	4,57E-05
19	7695,215411	7695,205541	1,28E-04
20	8908,943219	8908,928447	1,66E-04
21	9190,669309	9190,666476	3,08E-05
22	9434,932843	9434,956721	2,53E-04
23	9830,560701	9830,546068	1,49E-04
24	10407,81099	10407,7823	2,76E-04

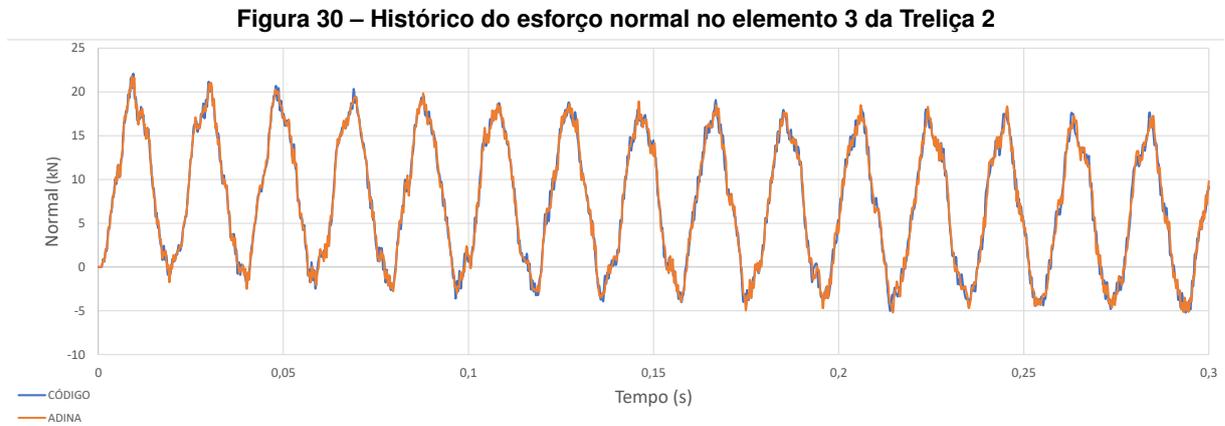
Fonte: Autoria própria (2022).

Devido a estrutura da Treliza 2 ser solicitada por um carregamento dinâmico do tipo exponencial, apresentado na Figura 12, também foi realizado a comparação do deslocamento da estrutura no tempo. O carregamento foi pré definido na Seção 4.3.3 e os gráficos provenientes do *software* ADINA Structures e do código desenvolvido foram agrupados no Microsoft Excel e é apresentado na Figura 29.

Figura 29 – Histórico do deslocamento no nó do carregamento da Treliza 2

Fonte: Autoria própria (2022).

Foi escolhido arbitrariamente o elemento de barra número 3 da treliça apresentada na Figura 27 para análise do esforço normal ao longo do tempo. Utilizando o Microsoft Excel, os resultados foram sobrepostos em um gráfico a fim de comparação, como mostra a Figura 30.



Fonte: Autoria própria (2022).

Os valores máximos de esforço normal atuantes no elemento 3 retirados do gráfico são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Esforço normal máximo no elemento 3 da Treliza 2

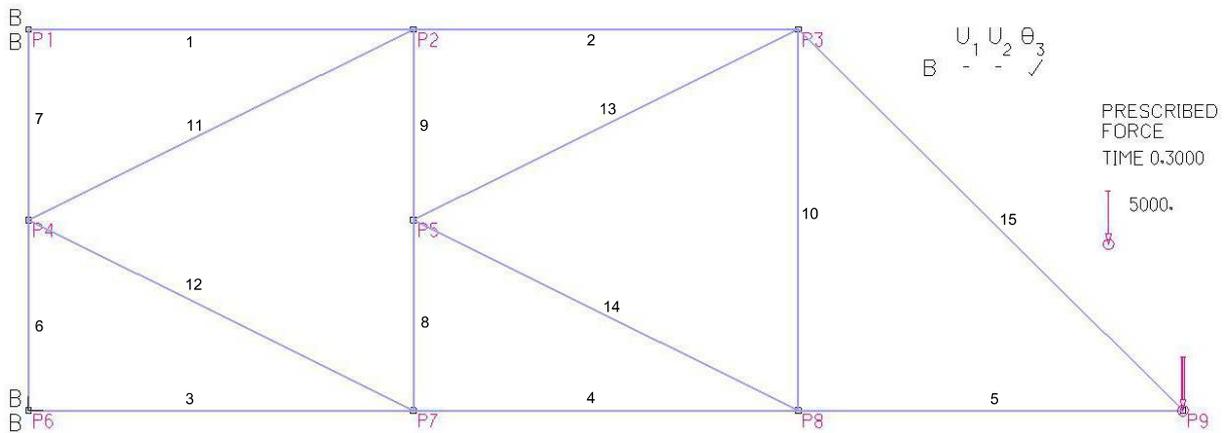
	Tração		Compressão	
	Tempo (s)	Normal (kN)	Tempo (s)	Normal (kN)
Código		22,098		-5,208
ADINA Structures	9,45E-03	21,798	2,94E-01	-5,187
Erro Relativo (%)		1,3785		0,4027

Fonte: Autoria própria (2022).

5.3 Treliza 3

A modelagem da Treliza 3, apresentada na Figura 31, foi elaborada com 9 nós e 15 elementos, resultando em 18 graus de liberdade, sendo 4 deles restringidos pelos apoios fixos nos nós 1 e 6. O carregamento dinâmico do tipo ressalto foi aplicado no nó 9 com direção negativa em relação ao eixo y do plado de coordenadas cartesianas.

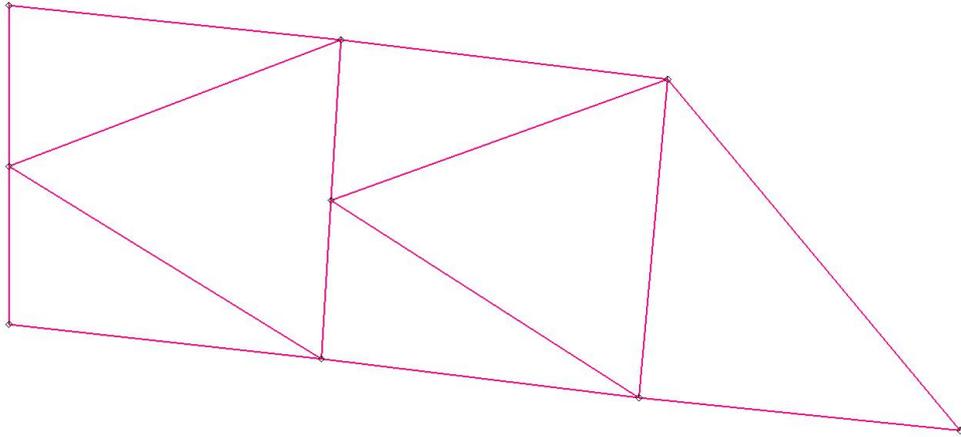
Figura 31 – Modelagem da Treliça 3



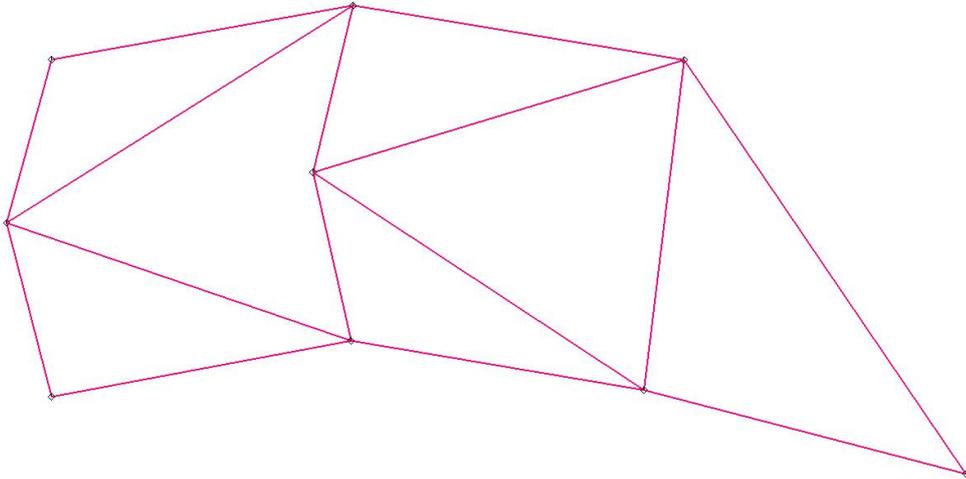
Fonte: Autoria própria (2022).

No menu de configuração da solução, foi definido 14 modos para superposição modal. Através dos resultados dados pelo ADINA Structures, foram obtidas as 14 formas modais e suas frequências naturais de vibração. As primeiras 3 formas modais são apresentadas na Figura 32.

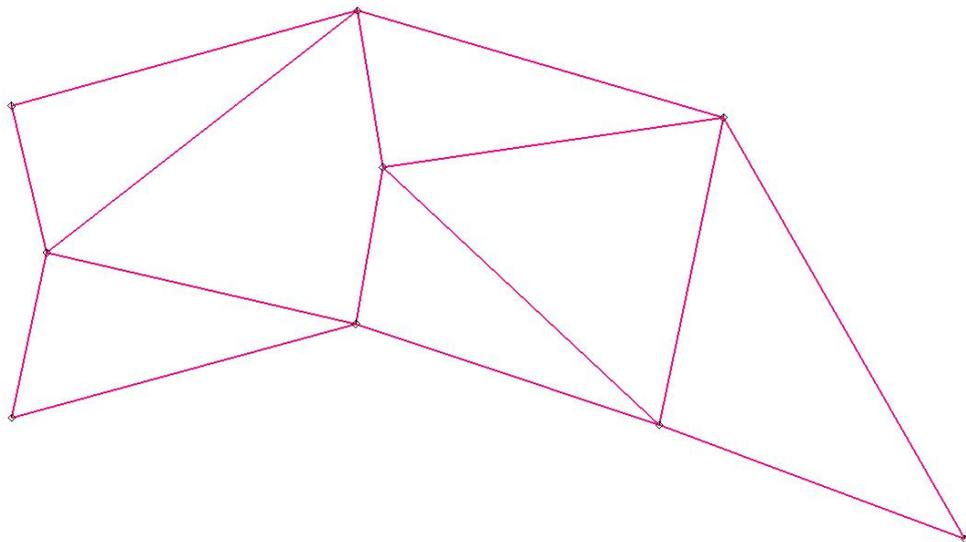
Figura 32 – Modos de vibração da Treliza 3
(a) Primeiro modo



(b) Segundo modo



(c) Terceiro modo



Fonte: Autoria própria (2022).

Para as formas modais apresentadas na Figura 32, os resultados obtidos referentes aos seus autovetores no ADINA Structures e no código desenvolvido no MATLAB foram normalizados e são apresentados na Tabela 6 juntamente com seus respectivos erros relativos.

Tabela 6 – Comparação dos autovetores normalizados da Trelça 3

Primeiro modo			Segundo modo			Terceiro modo		
ADINA Structures	Código	Erro (%)	ADINA Structures	Código	Erro (%)	ADINA Structures	Código	Erro (%)
9,04E-02	-9,04E-02	1,79E-04	-3,64E-01	3,64E-01	1,99E-04	2,54E-01	2,54E-01	1,21E-05
-3,25E-01	3,25E-01	2,02E-04	5,11E-01	-5,11E-01	7,83E-05	7,89E-01	7,89E-01	1,29E-04
1,33E-01	-1,33E-01	2,72E-04	-4,51E-01	4,51E-01	1,91E-04	6,75E-01	6,75E-01	2,80E-04
-6,96E-01	6,96E-01	2,11E-04	-3,93E-03	3,93E-03	2,79E-04	-9,72E-02	-9,72E-02	2,41E-05
-9,18E-02	9,18E-02	4,82E-06	-3,81E-01	3,81E-01	1,81E-04	2,41E-01	2,41E-01	7,06E-05
-3,25E-01	3,25E-01	1,36E-04	5,29E-01	-5,29E-01	2,21E-04	7,76E-01	7,76E-01	2,25E-04
-1,36E-01	1,36E-01	2,33E-04	-8,26E-01	8,26E-01	1,14E-05	1,48E-01	1,48E-01	1,23E-04
-6,91E-01	6,91E-01	5,86E-05	6,34E-02	-6,34E-02	3,86E-04	-5,80E-02	-5,80E-02	3,50E-04
-1,45E-01	1,45E-01	2,50E-04	-1	1	0	7,26E-02	7,26E-02	1,48E-04
-1	1	0	-7,27E-01	7,27E-01	1,71E-04	-1	-1	0
-6,66E-04	6,66E-04	1,89E-04	-4,21E-01	4,21E-01	2,57E-04	2,87E-01	2,87E-01	2,16E-05
-1,20E-02	1,20E-02	2,83E-04	5,02E-02	-5,02E-02	2,15E-04	7,61E-02	7,61E-02	2,88E-04
-2,61E-03	2,61E-03	1,98E-04	-7,37E-01	7,37E-01	3,94E-04	4,63E-01	4,63E-01	3,98E-04
-3,34E-01	3,34E-01	1,99E-04	5,27E-01	-5,27E-01	5,94E-04	7,82E-01	7,82E-01	4,98E-05

Fonte: Autoria própria (2022).

A Tabela 7 apresenta as frequências naturais de vibração e os erros relativos entre os resultados obtidos pelo *software* e pelo código do MATLAB.

Tabela 7 – Resultados das frequências naturais da Trelça 3

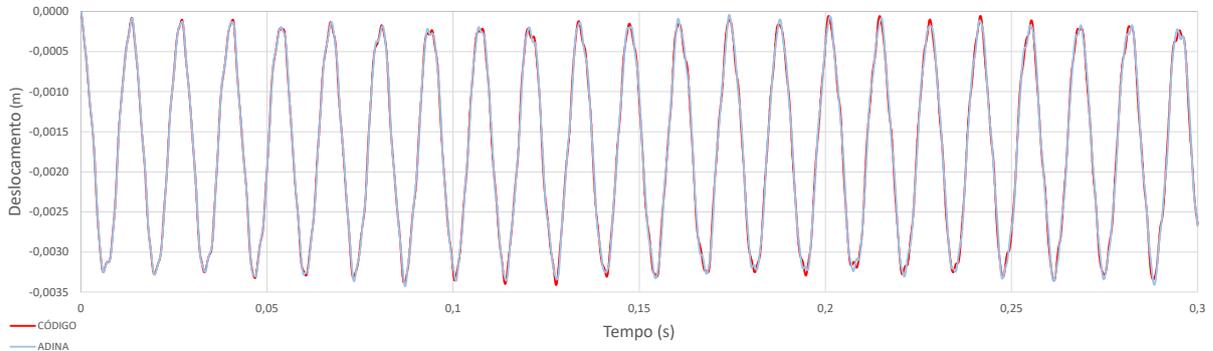
Forma Modal	Frequência Natural (rad/s)		Erro Relativo (%)
	Código	ADINA Structures	
1	468,5247972	468,524562	5,02E-05
2	1692,210866	1692,2126	1,02E-04
3	1842,96404	1842,965065	5,56E-05
4	3658,105852	3658,108185	6,38E-05
5	4394,928132	4394,931043	6,62E-05
6	5034,69114	5034,691254	2,26E-06
7	5769,013897	5769,013404	8,55E-06
8	6709,286323	6709,310935	3,67E-04
9	8048,70967	8048,697547	1,51E-04
10	9019,842043	9019,826668	1,70E-04
11	9590,635052	9590,654053	1,98E-04
12	10700,97938	10700,95573	2,21E-04
13	11398,75746	11398,76629	7,75E-05
14	13541,6014	13541,58381	1,30E-04

Fonte: Autoria própria (2022).

Como a Trelça 3 foi solicitada por um carregamento dinâmico do tipo ressalto, representado na Figura 13, além de comparar as frequências de vibração, também foi comparado os deslocamentos da estrutura no tempo. Para isso, o carregamento foi configurado conforme pré

definido na Seção 4.3.3 e, com o gráfico do deslocamento obtidos pelo código e pelo *software*, foi agrupado ambos os gráficos através do Microsoft Excel e apresentado na Figura 33.

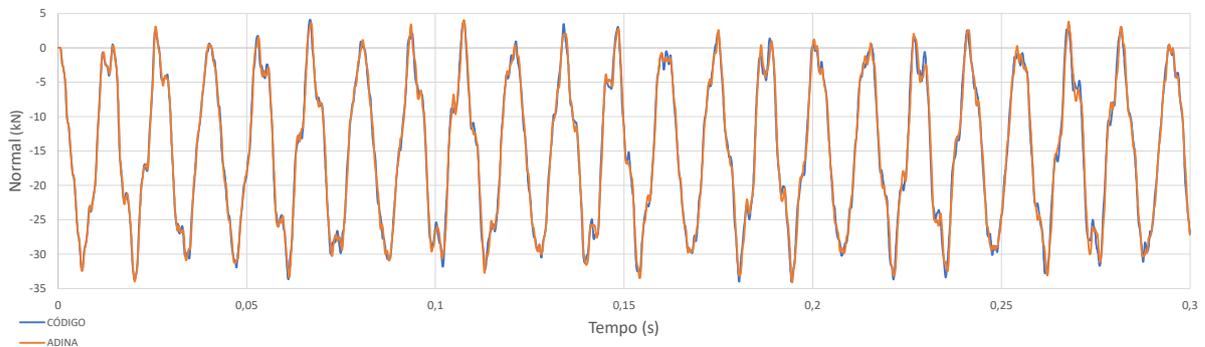
Figura 33 – Deslocamentos no nó do carregamento da Treliça 3



Fonte: Autoria própria (2022).

Para a última comparação, o elemento de barra número 3, mostrado na Figura 31, foi escolhido para apresentar os resultados de força normal atuante ao longo do tempo da análise. Através do Microsoft Excel, os resultados obtidos pelo ADINA Structures e pelo código foram agrupados em um gráfico, como mostra a Figura 34.

Figura 34 – Histórico de esforço normal no elemento 3 da Treliça 3



Fonte: Autoria própria (2022).

Dados os valores apresentados na Figura 34, os valores máximos de esforço normal atuante no elemento 3 foram obtido e apresentado na Tabela 8.

Tabela 8 – Esforço normal máximo no elemento 3 da Treliça 3

	Tração		Compressão	
	Tempo (s)	Normal (kN)	Tempo (s)	Normal (kN)
Código		4,115		-34,022
ADINA Structures	6,68E-02	4,020	1,94E-01	-34,087
Erro Relativo (%)		2,3650		0,1885

Fonte: Autoria própria (2022).

5.4 Análise dos resultados

A partir dos resultados obtidos e organizados nas tabelas foi possível a obtenção das comparações apresentadas na Seção 5.3 juntamente com seus erros relativos.

Para a comparação dos autovetores relativos as primeiras três formas modais, apresentadas nas Figuras 26, 28 e 32, foi obtido os valores provenientes do ADINA Structures e do código. Para uma comparação adequada foi necessário normalizar os autovetores, tanto do ADINA Structures quanto do MATLAB, pela máxima amplitude modal para uma comparação fidedigna dos resultados. Por fim chegou-se as comparações apresentadas nas Tabelas 1, 3 e 6, apresentando um erro relativo entre as diferenças dos autovetores tendendo a zero.

Através das Tabelas 2, 4 e 7, obteve-se uma precisão significativa nos resultados das frequências naturais de vibração das treliças, onde nos casos de maiores discrepâncias para as Treliças 1, 2 e 3, foram obtidos erros relativos desprezíveis.

Analisando os gráficos apresentados nas Figuras 29 e 33, observa-se um deslocamento ao longo do tempo de análise coincidente entre os valores obtidos pelo *software* e pelo código, visível pela sobreposição dos gráficos com uma diferença pequena dos pontos do deslocamento em cada passo de tempo. Essa pequena diferença apresentada na sobreposição do gráfico também pode ser visualizado na comparação dos resultados dos esforços normais no elemento 3 das Treliças 2 e 3, apresentado nas Figuras 30 e 34, escolhido arbitrariamente para verificar os resultados máximos de tração e compressão dentro do tempo de análise.

Os valores máximos dos esforços, apresentados nas Tabelas 5 e 8, também apresentam erros relativos pequenos, entre 0 e 2,4%. Para a Treliça 2 foi verificado valores máximos de tração próximos a 22 kN no tempo de $9,42 \times 10^{-3}$ s e de compressão próximos a 5,2 kN no tempo de $2,94 \times 10^{-1}$ s. Já para a Treliça 3, os valores máximos de tração ficaram próximos a 4,1 kN no tempo de $6,68 \times 10^{-2}$ s e os de compressão ficaram em torno de 34,05 kN no tempo de $1,94 \times 10^{-1}$ s.

6 CONCLUSÃO

Através do desenvolvimento deste trabalho, foi possível compreender de forma mais aprofundada a formulação do Método dos Elementos Finitos aplicado em treliças planas, principalmente no processo para modelagem da estrutura, tendo em vista que o tempo para abordagens do assunto durante as disciplinas de Análise Dinâmica das Estruturas e Método das Diferenças Finitas foi pequeno e os conteúdos abordados foram problemas dinâmicos de no máximo 2 graus de liberdade. Dessa forma, o trabalho contribuiu para a análise de problemas mais complexos e com múltiplos graus de liberdade.

O aprendizado adquirido com este trabalho também se estendeu para a compreensão da linguagem de programação do *software* MATLAB aplicado na construção de um algoritmo para solução de problemas dinâmicos de estruturas através do Método dos Elementos Finitos. O código implementado apresentou resultados coerentes e significativamente próximos a resultados provenientes de um *software* comercial, retornando para o usuário valores com erros relativos pequenos.

O código desenvolvido neste trabalho possibilita a análise dinâmica linear de qualquer estrutura de treliça plana sob vibrações livre ou forçada e não amortecidas pelo método da superposição modal apenas com a inserção dos nós, barras, propriedades geométricas, do material e o carregamento. Atribuindo passos de tempo e um tempo limite de análise, o código retorna informações sobre os autovetores e autovalores, possibilitando a verificação das formas modais e as respectivas frequências naturais de vibração. Também é possível obter, através de gráficos ou tabelas, o histórico do deslocamento a cada instante de tempo em um nó pré-especificado e o histórico de esforço normal num elemento pré determinado no início do código.

Apesar do *software* profissional possibilitar respostas mais gráficas, interativas e de fácil entendimento, as respostas apresentadas pelo código desenvolvido no MATLAB foram satisfatórias e compreensíveis, sendo desta forma suficientes para uma análise dinâmica estrutural de treliças planas.

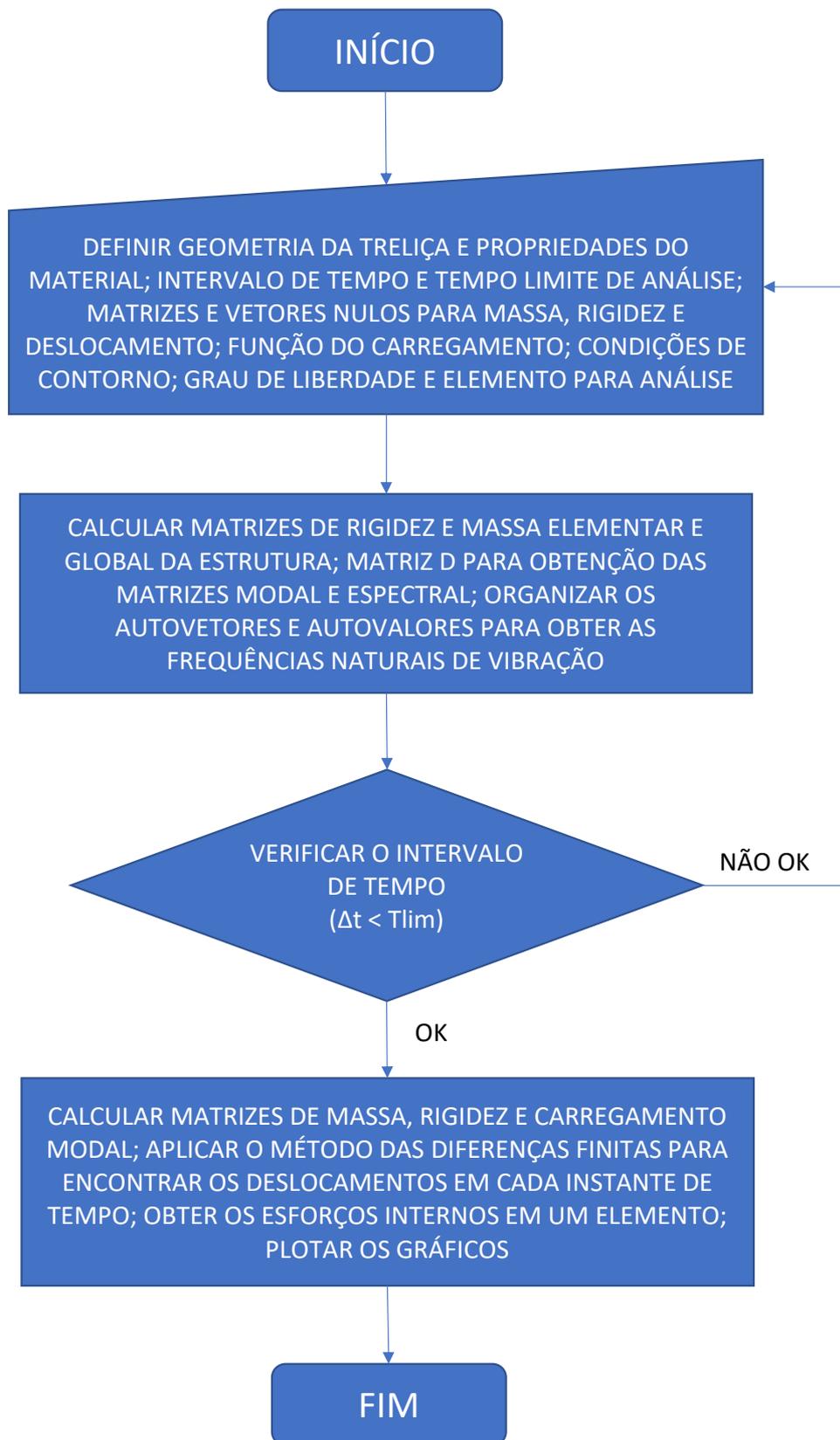
Através das comparações realizadas neste trabalho, fica visível que o código desenvolvido foi validado com um *software* comercial e, portanto, poderá ser utilizado como ferramenta para análise dinâmica de treliças planas.

REFERÊNCIAS

- ABNT NBR 8800. **Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro, RJ, 2008. 237 p.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2nd. ed. Watertown, MA: Pearson Prentice Hall, 2014.
- CARREIRA, M. R. **Análise dinâmica de estruturas: conceitos básicos**. Campo Mourão, PR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018. Notas de aula. 34 p.
- CARREIRA, M. R. **Sistemas discretos com dois graus de liberdade: sistema sem amortecimento - vibração livre e forçada**. Campo Mourão, PR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018. Notas de aula. 84 p.
- CARREIRA, M. R. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Campo Mourão, PR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019. Não publicado. 344 p.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 2nd. ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1993.
- FELIPPA, C. A. **Introduction to finite element methods**. Boulder, CO: Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures - University of Colorado, 2004.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A first course in finite elements**. Chichester, UK: John Wiley and Sons Ltd, 2007.
- FONTANA, E. **Introdução ao método de diferenças finitas com aplicações em engenharia química**. Curitiba, PR: Universidade Federal do Paraná, 2019. Notas de aula. 84 p.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7th. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010.
- HUTTON, D. V. **Fundamentals of finite element analysis**. 1st. ed. New York, NY: McGraw-Hill New, 2004.
- JUSTO, D. A. R. e. a. **Cálculo numérico - um livro colaborativo versão python**. Porto Alegre, RS: Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2020. 373 p.
- KARNOVSKY, I. A.; LEBED, O. **Advanced methods of structural analysis**. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2010.
- LIMA, S. S.; SANTOS, S. H. C. **Análise dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008.
- LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method**. 4th. ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2006.
- NUNES, F. M. **Textos**. Campo Mourão, PR: Editor Antonio Padilha Afonso, 2001. 267 p.
- PETYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. 2nd. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2010.

SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier Editora Ltda, 2014. v. 1.

APÊNDICE A – Fluxograma para desenvolvimento do código



APÊNDICE B – Estrutura do código desenvolvido

```

1 % TRABALHO DE CONCLUSAO DE CURSO
2 % ENGENHARIA CIVIL
3 % ALUNO: ANDRE CHIULLO DOS SANTOS
4 % ORIENTADOR: PROF. DR. MARCELO RODRIGO CARREIRA
5 % UNIVERSIDADE TECNOLOGICA FEDERAL DO PARANA - UTFPR
6 % CAMPUS CAMPO MOURAO - PR
7 clear
8 clc
9 close all
10 format shortg %bank; shortg; longg (casas decimais: poucas, medio e muitas,
    respectivamente)
11 tic % temporizador
12 %NAO UTILIZAR ACENTOS OU CARACTERES ESPECIAIS PARA EVITAR CONFLITO COM
13 %LATEX
14
15 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INICIO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
16 % NOS DA TRELICA %
17
18 % posicao do no, n_xy = [numero-do-no posicao-em-x posicao-em-y]
19 % exemplo: no 1, posicao em x,y (2,3) -> n_xy = [1 2 3];
20 n_xy = [0 1.2;
21         1.2 1.2;
22         2.4 1.2;
23         3.6 1.2;
24         0 0;
25         1.2 0;
26         2.4 0];
27 mensagem=('Nos da trelica (x,y)')
28 disp(n_xy)
29 % NUMERO DE NOS %
30
31 n_n = size(n_xy,1);
32
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34 % ELEMENTO %
35
36 % criar um elemento de ligacao entre os nos, id = [no-1 no-2; no-3 no-4];
37 % exemplo: elemento entre o no 1 e 2, e outro elemento entre o no 3 e 4 ->
38 % id = [1 2;3 4];

```

```

39 id = [1 2;
40       2 3;
41       3 4;
42       5 6;
43       6 7;
44       2 6;
45       3 7;
46       2 5;
47       3 6;
48       4 7];
49 mensagem=('Conectividade das barras')
50 disp(id)
51 % NUMERO DE ELEMENTOS %
52
53 n_e = size(id,1);
54
55 % DESLOCAMENTO DOS 4 GDL %
56
57 for i = 1:n_e
58     U_global(i,1) = 2*id(i,1)-1;
59     U_global(i,2) = 2*id(i,1);
60     U_global(i,3) = 2*id(i,2)-1;
61     U_global(i,4) = 2*id(i,2);
62 end
63
64 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
65 % DEFINICAO DAS PROPRIEDADES GEOMETRICAS E DO MATERIAL %
66
67 % area do elemento A = [area-do-element-1 area-do-elemento-2
68 % area-do-elemento-n];
69 % exemplo: elemento 1,2,3 com area 2,4,6 mm2 -> A = [2 4 6];
70 A = 5e-4*ones(1,n_e); % m2
71 % modulo de Young do material
72 % para o aco: E = 210e9 N/m2
73 E = 210e9*ones(1,n_e); % N/m2
74 % massa especifica do material
75 rho = 7850*ones(1,n_e); % kg/m3
76
77 DeltaT = 5e-5; %intervalo de tempo para analise

```

```

78 tempo = 0.3; %tempo de analise em segundos
79 gdl = 6; %coordenada do grau de liberdade LIVRE para analise (desconsiderar
    os apoios)
80 %intervalo = 1e-4; %intervalo de tempo para analise
81 ele = 3; %elemento para ser analisado as forcas internas
82
83 mensagem=('Area (m), Modulo de elasticidade(N/m ), Massa especifica(kg/m
    ), intervalo de tempo(s), tempo (s) e grau de liberdade para analise')
84 disp(A(1))
85 disp(E(1))
86 disp(rho(1))
87 disp(DeltaT)
88 disp(tempo)
89 disp(gdl)
90
91 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
92 % MATRIZES E VETORES INICIAIS %
93 np = round(tempo/DeltaT)+1;
94 %U = sym('U', [2*n_n 1]); %Cria um vetor com incognita U
95 U = ones(2*n_n,1); %cria um vetor unitario
96 K = zeros(2*n_n); %cria um vetor nulo
97 M = zeros(2*n_n);
98 P = zeros(2*n_n,np);
99
100 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
101 %ESFORCOS NA TRELICA%
102
103 P = zeros(2*n_n,np);
104 %P(x) = y, onde x é o grau de liberdade do no e y é o esforco %valores em N
105 %P(x,:) = -5000; %carregamento na linha x de todas as colunas da matriz
106 %for i=2:np
107 %     P(14,i) = -5000*exp(-2*DeltaT*i); %utilizar por funcao ou do excel
108 %end
109 P(8,:) = -5000;
110
111 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
112 % CONDICÕES DE CONTORNO E CONDICÕES INICIAIS %
113
114 % Dado a matriz U(n,m), U(x,y) = 0 zera a linha da coluna y

```

```

115 U(1) = 0;
116 U(2) = 0;
117 U(9) = 0;
118 U(10) = 0;
119
120 for i=1:length(U)
121     if U(i) == 0
122         NR(i)=1;
123     else
124         NR(i)=0;
125     end
126 end
127
128 CC=zeros(2*n_n,1); %cria um vetor de condicao de contorno para esforcos
129 for i=1:2*n_n
130     if U(i,1) == 0
131         CC(i,1) = 1;
132     end
133 end
134
135 mensagem=('Graus de liberdades restringidos (1 = restringido, 0 = nao
           restringido)')
136 disp(NR)
137
138 GV = 0; %graus vinculados
139
140 for i = 1:length(U)
141     if U(i,1) == 0
142         GV = GV + 1;
143     end
144 end
145
146 GFL = 2*n_n-GV;
147
148 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
149 % CONDICAOES DE CONTORNO NO CARREGAMENTO %
150
151 Uo = zeros(2*n_n,1);
152 Vo = zeros(2*n_n,1);

```

```

153
154 PC = zeros(GFL,np);
155 ii = 0;
156 for i=1:(2*n_n)
157     if NR(i)==0
158         if ii==GFL
159             ii = 0;
160         end
161         ii = ii + 1;
162         for j=1:np
163             PC(ii,j) = P(i,j);
164             UoC(ii,1) = Uo(i,1);
165             VoC(ii,1) = Vo(i,1);
166         end
167     end
168 end
169
170
171 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
172 % COMPRIMENTO DO ELEMENTO,  NGULO  ENTRE OS ELEMENTOS,
173 % MATRIZ DE RIGIDEZ E DE MASSA
174
175 for e = 1:n_e
176     L(e) = sqrt((n_xy(id(e,2),1) - n_xy(id(e,1),1))^2 + (n_xy(id(e,2),2) -
n_xy(id(e,1),2))^2); %determina o comprimento do elemento
177     C = (n_xy(id(e,2),1) - n_xy(id(e,1),1))/L(e); %cosseno entre a
coordenada local do elemento e a coordenada global
178     S = (n_xy(id(e,2),2) - n_xy(id(e,1),2))/L(e); %seno entre a coordenada
local do elemento e a coordenada global
179     ke = (A(e)*E(e)/L(e) * [C^2 C*S -C^2 -C*S;C*S S^2 -C*S -S^2;-C^2 -C*S C
^2 C*S; -C*S -S^2 C*S S^2]); %matriz de rigidez de cada elemento
180     me = (rho(e)*A(e)*L(e)/6 * [2 0 1 0;0 2 0 1;1 0 2 0;0 1 0 2]); %matriz
de massa de cada elemento
181     U_global_gdl = U_global(e,:);
182
183     if e == ele %guarda as matrizes do elemento a ser analisado o esforco
interno
184         Kele = ke;
185         Mele = me;

```

```

186     end
187
188     for i = 1:4
189         for j = 1:4
190             K(U_global_gdl(1,i),U_global_gdl(1,j)) = K(U_global_gdl(1,i),
191 U_global_gdl(1,j)) + ke(i,j); %matriz de rigidez global
192             M(U_global_gdl(1,i),U_global_gdl(1,j)) = M(U_global_gdl(1,i),
193 U_global_gdl(1,j)) + me(i,j); %matriz de massa global
194         end
195     end
196 end
197 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
198 % REMOVENDO AS LINHAS E COLUNAS ONDE O DESLOCAMENTO E NULO (APOIOS) %
199
200 u_desl = U; %cria uma variavel descartavel com os valores de U
201 k_desl = K; %cria uma variavel descartavel com os valores de K
202 p_desl = P; %cria uma variavel descartavel com os valores de P
203 m_desl = M; %cria uma variavel descartavel com os valores de m
204
205 for i = 1:2*n_n
206     if u_desl(i,1) == 0
207         k_desl(:,i) = "A"; %"A" gera um valor NaN
208         k_desl(i,:) = "A";
209         p_desl(i,:) = "A";
210         m_desl(:,i) = "A";
211         m_desl(i,:) = "A";
212     end
213 end
214
215 k_desl(all(isnan(k_desl),2),:) = []; %apaga as linhas com NaN
216 k_desl(:,all(isnan(k_desl),1)) = []; %apaga as colunas com NaN
217 p_desl(all(isnan(p_desl),2),:) = [];
218 m_desl(all(isnan(m_desl),2),:) = [];
219 m_desl(:,all(isnan(m_desl),1)) = [];
220
221 mensagem=('Matriz de massa')
222 disp(m_desl)
223 mensagem=('Matriz de rigidez')

```

```

223 disp(k_desl)
224
225 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
226 % ENCONTRANDO OS DESLOCAMENTOS %
227
228 u_desl = linsolve(k_desl,p_desl); %resolve o sistema linear Ax=B (x=
      linsolve(A,B))
229 u_desc = u_desl; %cria uma variavel descartavel com os %valores de
      deslocamento em mm
230 for i = 1:2*n_n %loop para atribuir os valores de deslocamentos no vetor
      deslocamento global
231     if U(i,1) == 1
232         U(i,1) = u_desc(1,1);
233         u_desc(1,:) = [];
234     end
235 end
236
237 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
238 % ENCONTRANDO AS REACOES DE APOIO%
239 R = transpose(K*U-P); %encontra as reacoes %valores em N
240
241 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
242 % MATRIZES ESPECTRAL (AUTOVALOR) E MODAL (AUTOVETOR) %
243
244 D = inv(m_desl)*k_desl; %encontra a matriz D
245 [modal,espectral] = eig(D); %obtem os valores de autovetor e autovalor
246
247 % ORGANIZANDO EM ORDEM CRESCENTE A MATRIZ ESPECTRAL E A MODAL
248 % RESPECTIVAMENTE %
249 espectral_d = diag(espectral); %obtem a diagonal da matriz espectral em
      vetor
250 espectral_ds = sort(espectral_d); %organiza em ordem crescente o vetor
251 espectral_c = diag(espectral_ds); %coloca o vetor organizado em uma matriz
      diagonal
252
253 for i = 1:length(espectral) %lê as linhas e colunas e organiza a matriz
      modal em relacao a espectral
254     for j = 1:length(espectral)
255         if espectral_d(j) == espectral_ds(i)

```

```

256         modal_c(:,i) = modal(:,j);
257     end
258 end
259 end
260
261 freq_nat = diag(sqrt(espectral_c)); %obtem as frequências naturais através
    do autovalor
262
263 mensagem=('Matriz dinamica')
264 disp(D)
265 mensagem=('Matriz espectral')
266 disp(espectral_c)
267 mensagem=('Matriz modal')
268 disp(modal_c)
269 mensagem=('Vetor de frequências naturais (rad/s)')
270 disp(freq_nat)
271 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
272 % VERIFICAR INTERVALO DE TEMPO %
273 Tn = 2*pi/freq_nat(1,1);
274 Tlimite = 0.318*Tn;
275 if DeltaT <= Tlimite
276     message = sprintf('Intervalo de tempo ok')
277 else
278     message = sprintf('Intervalo de tempo deve ser menor do que'),Tlimite
279 end
280
281 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
282 % MATRIZES DE MASSA MODAL, RIGIDEZ MODAL E CARREGAMENTO MODAL %
283
284 M_modal = modal_c.'*m_desl*modal_c;
285 K_modal = modal_c.'*k_desl*modal_c;
286 P_modal = modal_c.'*p_desl;
287
288 for i = 1:length(M_modal) %loop para anular valores extremamente pequenos
289     for e = 1:length(M_modal)
290         if M_modal(i,e) <= 1e-6
291             M_modal(i,e) = 0;
292         end
293         if K_modal(i,e) <= 1e-6

```

```

294         K_modal(i,e) = 0;
295     end
296 end
297 end
298
299 mensagem=('Matriz de massa modal')
300 disp(M_modal)
301 mensagem=('Matriz de rigidez modal')
302 disp(K_modal)
303
304 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305 % METODO DAS DIFERENCAS FINITAS %
306
307 for i=1:GFL
308     m=M_modal(i,i);
309     k=K_modal(i,i);
310     qu0 = inv(modal_c)*UoC;
311     qv0 = inv(modal_c)*VoC;
312     u0 = qu0(i,1);
313     v0 = qv0(i,1);
314     for j=1:np
315         p(j)=P_modal(i,j);
316     end
317
318     [qu,qv,qa]=MDF(m,k,p,u0,v0,DeltaT,tempo);
319     for j=1:np
320         Qu(i,j)=qu(j);
321         Qv(i,j)=qv(j);
322         Qa(i,j)=qa(j);
323     end
324 end
325
326 U=modal_c*Qu;
327 V=modal_c*Qv;
328 Ac=modal_c*Qa;
329
330 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
331 % ESFORCOS INTERNOS DO ELEMENTO %
332 Udes = zeros(2*n_n,np);

```

```

333 a=1;
334 for i=1:2*n_n
335     if CC(i) == 0
336         for j=1:np
337             Udes(i,j) = U(a,j);
338         end
339         a = a + 1;
340     end
341 end
342 for k=1:np
343     Uele = zeros(4);
344     Uele(1)=Udes(id(ele,1)*2-1,k);
345     Uele(2)=Udes(id(ele,1)*2,k);
346     Uele(3)=Udes(id(ele,2)*2-1,k);
347     Uele(4)=Udes(id(ele,2)*2,k);
348
349     fex=Kele*Uele;
350     for n=1:4
351         fe(n,k)=fex(n);
352     end
353 end
354
355 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
356 % PLOTAGEM GRAFICO DO DESLOCAMENTO %
357 Nmax=0;
358 Nmin=0;
359 tnma=0;
360 tnmi=0;
361
362 for j=1:np
363     X(j)=(j-1)*DeltaT;
364     Y(j)=-fe(1,j)*1e-3; %forca normal no nona barra
365
366     %salvar valores extremos na barra
367     if Y(j) > Nmax
368         Nmax = Y(j);
369         tnma = j*DeltaT;
370     end
371     if Y(j) < Nmin

```

```

372     Nmin = Y(j);
373     tnmi = j*DeltaT;
374     end
375 end
376
377
378
379 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
380 % PLOTAGEM DA TRELICA PARA VERIFICACAO DA GEOMETRIA %
381 %geometria da trelica
382 for e=1:n_e
383     x=[n_xy(id(e,1),1) n_xy(id(e,2),1)];
384     y=[n_xy(id(e,1),2) n_xy(id(e,2),2)];
385 plot(x,y,'b')
386 title('Geometria da Trelica') %insere titulo no grafico
387 xlabel('X') %insere texto no eixo x
388 ylabel('Y') %insere texto no eixo y
389 ax = gca;
390 ax.FontSize = 12;
391 hold on
392 grid on
393 end
394 figure; %finaliza um grafico para iniciar outro sem conflito de informacao
        entre as configuracoes de ambos
395
396 %grafico de deslocamentos
397 for j=1:np
398     x(j)=(j-1)*DeltaT;
399     y(j)=U(gdl,j);
400 end
401 plot(x,y)
402 title(strcat('Historico de deslocamento no GDL ', num2str(gdl))) %insere
        titulo no grafico
403 xlabel('t(s)') %insere texto no eixo x
404 ylabel('U(m)') %insere texto no eixo y
405 ax = gca;
406 ax.FontSize = 12;
407 grid on
408 figure;

```

```

409
410 %grafico de esforcos
411 for i=1:np
412     x(i)=X(i);
413     y(i)=Y(i);
414 end
415 plot(x,y)
416 title(strcat('Historico de esforco normal no elemento ', num2str(ele))) %
    insere titulo no grafico
417 xlabel('t(s)') %insere texto no eixo x
418 ylabel('N(kN)') %insere texto no eixo y
419 ax = gca;
420 ax.FontSize = 12;
421 grid on
422
423 toc % finaliza o temporizador
424
425 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
426 % MDF %
427
428 function [u,v,a] = MDF(m,k,p,uo,vo,DeltaT,tempo)
429     u(1) = uo;
430     v(1) = vo;
431
432     alpha = (m/DeltaT^2); %constante a - nao possui amortecimento
433     beta = k - (2*m/(DeltaT^2)); % constate b
434     kb = (m/(DeltaT^2)); %constante k barra - nao possui amortecimento
435     passos = round(tempo/DeltaT);
436
437     a(1) = (p(1)-(k*u(1)))/m;
438     uh = u(1) - (v(1)*DeltaT) + ((a(1)/2)*(DeltaT^2));
439     u(2) = (p(1)-(alpha*uh)-(beta*u(1)))/kb;
440
441     i = 1;
442     t = 0;
443
444     while i <= passos
445         i = i+1;
446         u(i+1) = (p(i) - alpha*u(i-1) - beta*u(i))/kb;

```

```
447     v(i) = (u(i+1) - u(i-1))/(2*DeltaT);
448     a(i) = (u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))/(DeltaT^2);
449     end
450 end
```