

Tarefas para explorar  
o  
Pensamento Algébrico

AUTORAS  
GISELI SANGUINO E MARCELE T. MENDES

LONDRINA  
2023

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**GISELI SANGUINO**

**TAREFAS PARA EXPLORAR O PENSAMENTO ALGÉBRICO**

**TASKS TO EXPLORE ALGEBRAICAL THINKING**

Produto Educacional apresentado como requisito parcial á obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Londrina e Cornélio Procópio. Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Marcele Tavares Mendes

**LONDRINA  
2023**



**4.0 Internacional**

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Londrina



GISELI SANGUINO

INDÍCIOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E A PRÁTICA DOCENTE EM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 23 de Março de 2023

Dra. Marcele Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Cristiano Forster, Doutorado - Secretaria de Educação do Estado de Santa Catarina

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 24/03/2023.

# Sumário

Introdução

Sobre o E-book

Episódios de Resolução  
de tarefas.

Tarefas a Luz da  
Educação Matemática  
Realística

Considerações Finais

A professora antes e  
depois?

Referências

# Introdução

O e-book aqui apresentado é resultado de uma pesquisa, que teve como motivação minha prática docente que por atuar na Educação Básica, trabalhando com os anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio como professora desde o ano de 2006, busco respostas que podem me ajudar a entender práticas diferenciadas para trabalhar com os alunos de modo que os coloque como protagonistas de sua aprendizagem e que faça uma reflexão a respeito da função do professor em sala de aula.

A partir dessa motivação minha orientadora e eu decidimos utilizar Episódios de Resolução de Tarefas como estratégia de ensino. Neste contexto, a pesquisa desenvolveu-se à luz da abordagem de ensino da matemática RME (Educação Matemática Realística), nessa abordagem, a matemática é vista como uma forma de entender o mundo no qual leva-se em conta o saber fazer a matemáticas e construir o seu conhecimento no decorrer do processo de resolução.

# Introdução

A partir dessa perspectiva, temos o conjunto de cinco (5) tarefas que em suas resoluções requerem estratégias que envolvam conhecimento acerca de números inteiros e racionais, expressões numéricas com as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão), além de potenciação, raiz quadrada e equações.

Esses conhecimentos fazem parte do currículo do 7º ano e as tarefas serão resolvidas por alunos de 8º ano de uma escola pública na cidade de Londrina - PR.

No decorrer do e-book essas tarefas são apresentadas detalhadamente com orientações e observações para que possa ser reproduzido por outros professores.



# Sobre o E-Book

Caro Leitor, Este E-Book é uma proposta pedagógica para o ensino e aprendizagem da Matemática visando também a reflexão da prática pedagógica do professor que traz tarefas elaboradas à luz da Educação Matemática Realística, aplicado em episódios de resolução de tarefas e que busca apresentar estratégias para a prática do professor.

Este produto educacional é parte integrante da Dissertação de Mestrado intitulada: INDÍCIOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E A PRÁTICA DOCENTE EM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS, desenvolvida no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, UTFPR - Campus Londrina, sob orientação da Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Marcele Tavares Mendes.



## **Acesso a dissertação**

Esta proposta pedagógica enfatiza tarefas matemáticas elaboradas a luz da RME, de modo que em suas resoluções sejam capazes de mobilizar aspectos do pensamento algébrico dos alunos. Além disso, o ebook apresenta sugestões para a prática do professor, mediação que deve acontecer durante o processo de resolução.

# Sobre o E-Book

Abordamos alguns conteúdos de Matemática por meio de uma estratégia de ensino denominada EPSÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS, que coloca os alunos como sujeito ativo do processo de ensino e aprendizagem e se destaca por propor tarefas desafiadoras e, que exige a compreensão, elaboração de estratégias, execução de planos e verificação e análise crítica dos resultados, uma habilidade indispensável em qualquer atividade humana.

Se você é um professor de Matemática ou simplesmente está interessado em aprender mais sobre a Episódios de Resolução de Tarefas, este ebook é para você, esperamos que ele seja útil e que possa contribuir para a sua prática docente na promoção da aprendizagem significativa dos alunos. Obrigado por escolher nosso ebook!

Desejamos que sua experiência seja produtiva e satisfatória.

Bom trabalho!!!!

Episódios de Resolução  
de tarefas.

Episódios de Resolução de Tarefas é uma expressão adaptada de Shift Problem Lessons, proposta por Palha (2013), em que pressupõe um planejamento de ensino que considera uma parte das aulas organizada em pequenos grupos de alunos, nos quais os alunos lidam com tarefas não precedidas de exemplos, desencadeando discussões que contribuam para elaborações conceituais (TREVISAN; MENDES, 2018).

Ao propor Episódios de Resolução de Tarefas em aulas de matemática, o aluno tem a oportunidade, por meio da produção elaborada em conjunto de seus colegas, de aprender, não só no fazer, mas progressivamente no entender e no explicar suas escolhas, sendo dado a ele a oportunidade de rever os caminhos escolhidos.

O professor, ao invés de ser o mentor de explicações, é o que incentiva as discussões, é o que questiona as ideias levantadas pelos alunos, e aquele que conduz a sistematização dos conceitos subjacentes às produções realizadas pelos alunos, a partir das tarefas planejadas.

A partir desses aspectos, o professor encontra um caminho para planejar uma tarefa e sua execução em uma aula organizada para ser um Episódio de Resolução de Tarefas, por exemplo, o professor escolhe o momento adequado dentro de seu cronograma letivo, em seguida associa aos fenômenos adequados para levantar questões em que as estratégias escolhidas pelos alunos venham a ser ferramentas matemáticas para lidar com a situação, podendo ser a partir de informações baseadas no contexto escolar, do cotidiano do aluno (existência), realísticas (real imagináveis).

Tarefas a Luz da  
Educação Matemática  
Realística .

# Tarefa 01

## Faça Festa

Nesta tarefa o aluno deve analisar a produção de determinados salgados de festa para uma empresa chamada FAÇAFESTA, respondendo questões que levam em consideração informações específicas.

TEMÁTICA: Números e Álgebra - Operações com Números Inteiros

HABILIDADES ESSENCIAIS: Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos (soma, subtração); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

PROCEDIMENTOS UTILIZADOS: adição, subtração e expressões numéricas com números naturais.

A seguir o enunciado da tarefa e possíveis respostas que possam aparecer na produção dos alunos durante a aplicação em sala de aula.

# Tarefa 01

## Faça Festa



FAÇAFESTA é uma empresa que produz salgados para festas infantis. Para certa festa, a empresa recebeu uma encomenda de 200 esfirras, 120 empadas e 80 minipizzas. Sabendo que já possui congelado 168 esfirras, 95 empadas e 72 minipizzas, é preciso determinar a quantidade de cada salgado que a empresa precisa separar de uma nova produção para completar a encomenda da festa.

a) Conversem como essa empresa pode determinar o que é preciso no mínimo produzir para atender a encomenda recebida.

b) Agora escrevam brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para a empresa calcular.

c) Nessa estratégia escolhida pelo grupo foram realizadas quais operações?

d) Agora, se o comando fosse sintetizar a estratégia escolhida em uma expressão numérica como vocês a representariam.

e) O que mudaria se em vez de uma encomenda por tipos de salgado, se tivesse sido um pedido de 300 salgados no total (esfirras, empadas, mini pizzas)? Expliquem essa mudança por meio de uma expressão numérica.



# Possíveis respostas



Aqui segue algumas possíveis respostas que possa aparecer em produções dos alunos, as quais trazemos detalhadas na dissertação, segue link para acesso na imagem:



## Expectativa de resposta itens a e b da tarefa FAÇAFESTA

a e b.

Para que a empresa atenda ao pedido, a fabricação deve ser ao menos a quantidade de salgados resultante da subtração entre a soma do total de salgados pedido e a quantidade de salgado que está já pronto. O resultado será o valor que ainda falta produzir para atender ao pedido.

$$(a + b + c) - (e + f + g)$$



Outra possibilidade, calcular o que falta a ser produzido de cada tipo de salgado e somar os resultados para se ter o total a ser produzido.

$$(a - e) + (b - f) + (c - g)$$



# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta itens c e d da tarefa FAÇAFESTA

c. e d.

As operações que foram utilizadas são de adição e subtração, havendo mais de um modo de organizá-las

Esfirra:  $(200 - 168) = 32$

Empada:  $(120 - 95) = 25$

Mini pizza:  $(80 - 72) = 8$

Total a ser produzido:

$$32 + 25 + 8 = 65$$

Encomenda

$$200 + 120 + 80 = 400$$

Salgados já congelados:

$$168 + 95 + 72 = 335$$

Total a ser produzido:

$$400 - 335 = 65$$

# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item e da tarefa FAÇAFESTA

e.

Nesse caso é preciso determinar o total de salgados já congelados e subtrair o total de salgados da encomenda.

A relação associativa da adição utilizada ao longo da tarefa não é válida nesse item, uma vez que não se conhece as parcelas, já que não se sabe a quantidade específica de cada tipo de salgado. Entretanto, a mesma propriedade da adição pode ser utilizada.

Salgados já congelados:

$$(168 + 95 + 72) = 335$$

Encomenda: 300

Total a ser produzido:

$$335 - 300 = 35$$

$$168 + 95 + 72 - 300$$

$$= 263 + 72 - 300$$

$$= 335 - 300$$

$$= 35$$

$$(b + c + d) - a = b + c + d - a$$

O resultado positivo representa que não é preciso produzir salgados para atender o pedido, pois há salgado congelado suficiente.

## Sugestões para o Professor

**Professor, além de organizar os espaços, com a intenção de intervir e acompanhar o desenvolvimento de cada grupo, a professora deve caminhar pela sala e realizar questionamentos que direcionem as discussões, linguagens e produções dos alunos. Na tarefa FAÇAFESTA, a professora pode realizar questões como:**

- Qual é a encomenda que FAÇAFESTA recebeu para cada salgado?
- Quantas esfirras, empadas e minipizzas já estão prontas?
- O que você precisa responder no problema?
- Qual operação será necessária utilizar?
- Qual é a expressão numérica para solucionar esse problema?
- Qual a quantidade de cada salgado que precisa produzir?
- Caso estivessem prontos apenas 20 salgados, quantos, ao todo, ainda teria que fazer para atender ao pedido?

**Se achar necessário elabore outras questões direcionadoras !!!!**

# Tarefa 02

## Escolha de Combustível

Nessa tarefa apresentamos a possibilidade dos alunos calcularem o consumo de combustível necessário para que seja feita uma viagem e a partir dessa ideia responder questões direcionadas sobre o assunto.

TEMÁTICA: Números e Álgebra - Operações com Números Inteiros

HABILIDADES ESSENCIAIS : Ler, interpretar e resolver um problema utilizando diferentes algoritmos (multiplicação, divisão); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; compreender e utilizar cálculos de média com base no contexto e em um conjunto de dados; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

PROCEDIMENTOS UTILIZADOS: Multiplicação, divisão, média simples e expressões numéricas com números racionais.

A seguir o enunciado da tarefa e possíveis respostas que possam aparecer na produção dos alunos durante a aplicação em sala de aula.



## Tarefa 02

### Escolha de Combustível



Lucas quer fazer uma viagem para uma cidade que está a uma distância de 288 km de sua casa. A capacidade do tanque de combustível do carro é de 50 litros e, seu carro desloca em média 12 km com um litro de álcool.

a) Conversem como vocês podem explicar para o Lucas quantos litros de álcool o tanque deve ter, no mínimo, para que ele possa fazer essa viagem.

b) Agora escrevam, brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para Lucas calcular e, em seguida, apresentem esse cálculo.

c) Nessa estratégia escolhida pelo grupo foram realizadas quais operações? Foi a única estratégia pensada ou pensaram em outras? Apresente todas as estratégias pensadas.

d) Depois de Lucas pensar sobre a quantidade de álcool que precisaria colocar para viajar, decidiu estimar sobre a quantidade de álcool que tem gastado por mês, uma vez que ele percorre de carro em média 2400 quilômetros por mês. Ele obteve que a estimativa é de 4 tanques de 50 litros de álcool. Vocês concordam? Apresentem argumentos que confirmem ou não o resultado estimado que Lucas encontrou.

e) Façam uma consulta ao google do valor do litro de álcool e estimem qual o percentual em relação a um salário mínimo Lucas gasta por mês com combustível?



# Possíveis respostas



Aqui segue algumas possíveis respostas que possa aparecer em produções dos alunos, as quais trazemos detalhadas na dissertação, segue link para acesso na imagem:



## **Expectativa de resposta item a da tarefa A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL.**

a) Para saber a quantidade mínima de álcool que Lucas precisa para a viagem, a principio deve-se fazer a divisão entre a quantidade total de km á serem percorridos pela quantidade de km que se pode percorrer com 1 litro de combustível, o resultado será a quantidade mínima a ser utilizada para a viagem.



Ou ainda pode pensar em qual número multiplicado por 12 resulta em um número próximo a 288.



Os resultados de qualquer uma dessas operações determinam a proporção direta de litros de gasolina para 288 km

## Possíveis respostas

**Expectativa de resposta item b da tarefa  
A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL.**

b) Como se sabe a cada 12 Km percorridos é necessário usar 1 litro de combustível portanto:

$$\begin{array}{r} 288 \overline{) 12} \\ \underline{24} \phantom{0} \\ 48 \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$$

Será necessário pelo menos 24 litros de combustível.

# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item c da tarefa A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL.

c) Para descobrir a quantidade de litros pode-se usar a operação de divisão, foi pensado também em outras estratégias como regra de três, na qual temos além da divisão a multiplicação.

litros		km
1	-----	12
X	-----	288

$$12X = 288$$

$$X = \frac{288}{12}$$

$$X = 24 \text{ litros}$$



# Possíveis respostas

**Expectativa de resposta item d da tarefa  
A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL.**

d) Sim, concordamos já que a cada 12KM utilizamos 1 litro de combustível e como o tanque do carro cabe 50 litros teremos:

$$2400 : (50 \cdot 12)$$

$$2400 : 600$$

4

Ou, também...

$$50$$

$$\times 12$$

$$\hline 100$$

$$50+$$

$$\hline 600$$

$$\begin{array}{r} 2400 \overline{) 600} \\ \underline{24} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$

Logo Lucas tem razão em sua estimativa.

# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item e da tarefa A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL.

e) O preço do álcool está em torno de R\$ 4,89 por litro, visto que Lucas gasta 4 tanques de 50 litros cada, temos:

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 4 \\ \hline 200 \text{ litros} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 200 \\ \times 4,89 \\ \hline 1800 \\ 1600+ \\ 800++ \\ \hline 978,00 \end{array}$$

 Gasto de Lucas

Salário Mínimo Vigente R\$ 1212,00 utilizando Regra de Três

$$\begin{array}{r} 1212 \text{ ----- } 100\% \\ 978 \text{ ----- } X \end{array}$$



$$1212X = 97800$$

$$X = \frac{97800}{1212}$$

$$X = 80,69\%$$

Portanto Lucas gasta mensalmente  
80,69% de um salário mínimo.

## Sugestões para o Professor

**Na tarefa, A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL, a professora pode realizar questões direcionadoras como:**

- Qual é a distância da viagem que Lucas pretende fazer?
- O que significa afirmar que um carro desloca em média 12 km com 1 litro de álcool?
- O que você precisa responder na tarefa?
- Quais operações serão necessárias utilizar?
- Qual é a expressão numérica para solucionar esse problema?
- O que significa o valor de 2.400 km citado no problema?
- Como você faria para ter certeza de que a quantidade de 4 tanques de combustível é suficiente para Lucas utilizar durante o mês?

**Se achar necessário elabore outras questões direcionadoras !!!!**

## Tarefa 03

### Crise Econômica

Nessa tarefa apresentamos a possibilidade dos alunos calcularem como deve ser o pagamento de uma dívida, que 4 sócios de um mercado, possuem com o banco, para isso devem levar em consideração algumas possibilidades de divisão de valores entre os sócios.

TEMÁTICA: Números e Álgebra - Operações com Números Inteiros

HABILIDADES ESSENCIAIS : Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos (soma, subtração, multiplicação e divisão); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; reconhecer e resolver situações em que operações com números negativos; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

PROCEDIMENTOS UTILIZADOS: adição, subtração, multiplicação, divisão, expressões numéricas com números inteiros.

A seguir o enunciado da tarefa e possíveis respostas que possam aparecer na produção dos alunos durante a aplicação em sala de aula.

# Tarefa 03

## Crise Econômica

Em meio a pandemia COVID-19, diversas empresas se viram obrigadas a ajustar ou paralisar suas produções. Como consequência, algumas dessas empresas decidiram fechar, e outras, para continuar funcionando, dividiram as dívidas e custos entre os sócios nesse período. Um mercado pequeno da região em que quatro irmãos são sócios (João, Marcos, Alfredo e Rita) tem uma dívida de R\$ 36.000,00 reais com o Banco do Brasil. Para o pagamento dessa dívida os 4 irmãos decidiram por cada um responsabilizar-se por uma parte (partes iguais).

a) Sabendo que João pagou R\$ 5.000,00 reais de sua parte da dívida diretamente ao banco, conversem como vocês podem determinar quanto cada irmão ainda precisa pagar.

b) Agora escrevam sem usar simbologia matemática como vocês podem determinar o valor que ainda falta para ser pago ao banco e quanto cada um dos sócios teriam que pagar? Depois de descrever, apresente os cálculos que descrevem a estratégia escolhida.

c) De acordo com a estratégia que vocês escolheram para resolver, qual conclusão chegaram, qual o valor individual da dívida, qual o montante que falta pagar ao banco?

d) E se, ao invés de quatro irmãos se responsabilizar pela dívida, apenas três fossem pagar a dívida. Sem saber quais são os irmãos, apresente possibilidades de para essa nova situação?

# Possíveis respostas



**Aqui segue algumas possíveis respostas que possa aparecer em produções dos alunos, as quais trazemos detalhadas na dissertação, segue link para acesso na imagem:**



## **Expectativa de resposta item a da tarefa CRISE ECONÔMICA.**

a) Sabendo que a dívida total dos irmãos é de R\$ 36000,00 e que esse valor deverá ser dividido igualmente entre os 4, primeiramente deve-se dividir o total devido por 4, após isso subtrair da parte de João o valor já pago ao banco de R\$ 5000,00 desse modo poderá determinar a parte de cada um.

$$\text{Valor da dívida de João} \\ (-36000 : 4) - 5000 =$$

$$\text{Valor da dívida dos outros} \\ 36000 : 4 =$$

# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item b da tarefa CRISE ECONÔMICA.

b) Para saber o valor da dívida que ainda precisa ser paga, basta fazer uma divisão entre os 4 irmãos e depois subtrair os R\$ 5000,00 já pagos da parte de João.

3 - Irmãos      Marcos  
-36000:4      Alfredo  
- 9000      Rita

→ 9000 será o valor da dívida dos 3 irmãos

Já a parte de João:

$(-36000:4) + 5000 =$   
 $-9000 + 5000$   
 $-4000$

→ Portanto, a parte da dívida que cabe á João será de R\$4000,00

# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item c da tarefa CRISE ECONÔMICA.

c) Ao utilizar a divisão como estratégia, conclui-se que Marcos, Alfredo e Rita devem R\$ 9.000,00 e João, como já pagou R\$ 5.000,00 adiantado, agora deve R\$ 4.000,00.

Já em relação ao montante que falta pagar ao banco, após o adiantamento de João, temos:

$$\begin{array}{r} (9000 \cdot 4) + 5000 \\ - 36000 + 5000 \\ - 31000 \end{array}$$



# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item d da tarefa CRISE ECONÔMICA.

d) Se agora fossem 3 irmãos, haveria algumas possibilidades para o cálculo:

1º Opção

Se considerarmos a possibilidade em que João não esteja presente:

$$\begin{aligned} (-36000 : 3) = \\ -12000 \end{aligned}$$



Cada um teria uma dívida de R\$ 12000,00

2º Opção

Se considerarmos qualquer possibilidade em que João esteja entre as partes:

$$\begin{aligned} (-36000 : 3) + 5000 \\ -12000 + 5000 \\ -7000 \end{aligned}$$



A dívida de João R\$ 7000,00 e dos irmãos R\$ 12000,00

## Sugestões para o Professor

**Na tarefa, CRISE ECONÔMICA , a professora pode realizar questões direcionadoras como:**

- Qual é a ideia principal da tarefa?
- O que significa João ter adiantado o valor de R\$ 5.000,00 em relação aos outros sócios?
- O que você precisa responder no problema?
- Qual operação será necessário utilizar?
- Qual é a expressão numérica que você pode utilizar para solucionar esse problema?
- O que significa mudar a qualidade de sócios para 3 pessoas?
- Com a nova situação proposta com 3 sócios aumenta ou diminui a participação de cada um na dívida?
- Os valores da dívida individual serão iguais para todos quando forem 3 sócios?

**Se achar necessário elabore outras questões direcionadoras !!!!**

# Tarefa 04

## Desafio do Quebra-Cabeça

Nesta tarefa apresentamos a possibilidade dos alunos construírem um quadrado utilizando peças de quebra cabeça distribuídos em quantidades diferentes, em forma de desafio devem seguir as regras propostas para isso de modo a fomentar discussões de como e quando se torna possível essa construção em cada caso.

TEMÁTICA: Números e Álgebra - Raiz Quadrada Exata de Números Racionais

HABILIDADES ESSENCIAIS: Ler, interpretar e resolver problemas, que envolvam cálculos de raiz quadrada utilizando-se de diversos procedimentos; resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência, reconhecer a relação entre quadrado perfeito e raiz quadrada aplicado em situações contextualizadas; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

PROCEDIMENTOS UTILIZADOS: multiplicação, potenciação e raiz quadrada exata.

## Tarefa 04

# Desafio do Quebra-Cabeça



Paulo, João, Pedro e Léo adoram brincar com peças de quebra cabeça, em um determinado dia resolveram fazer um desafio e montar figuras geométricas com essas peças, para isso eles juntaram suas peças em 4 mesas diferentes. Em cada mesa foi colocado quantidades diferentes de peças com formatos variados e uma base para montagem. Para a utilização das peças foi decidido que deveria ser seguido a regra de que, sobre a base, todos construísem quadrados, e ser utilizado apenas as peças da mesa. A distribuição das peças seguiu a seguinte quantidade:

1º MESA: 25 PEÇAS    2º MESA: 49 PEÇAS    3º MESA: 81 PEÇAS    4º MESA: 42 PEÇAS

Agora responda:

a) Conversem como é possível construir o desejado em todas as mesas conforme o desafio pede? Em todas as mesas será possível usar todas as peças para lidar com o desafio.

b) Apresenta todas as soluções possíveis de cada mesa.

c) Nas soluções encontradas para o desafio há algum elemento que pode justificar uma resposta mais geral, de tal forma que se mudar o número de peças vocês já saberão as possíveis soluções.



# Possíveis respostas



**Aqui segue algumas possíveis respostas que possa aparecer em produções dos alunos, as quais trazemos detalhadas na dissertação, segue link para acesso na imagem:**



## **Expectativa de resposta itens a e b da tarefa DESAFIO DO QUEBRA - CABEÇA.**

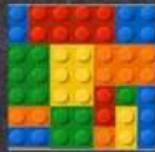
a) De acordo com as peças utilizadas, mesmo utilizando várias formas de encaixe diferente, não será possível construir os quadrados, conforme se pede em todas as mesas, pois para que seja um quadrado os lados devem ter exatamente o mesmo número de peças e na mesa com 42 peças isso não se faz possível.

b) Como demonstrado nas imagens:

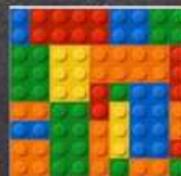
1º



2º



3º



4º) Nessa mesa não é possível formar um quadrado.

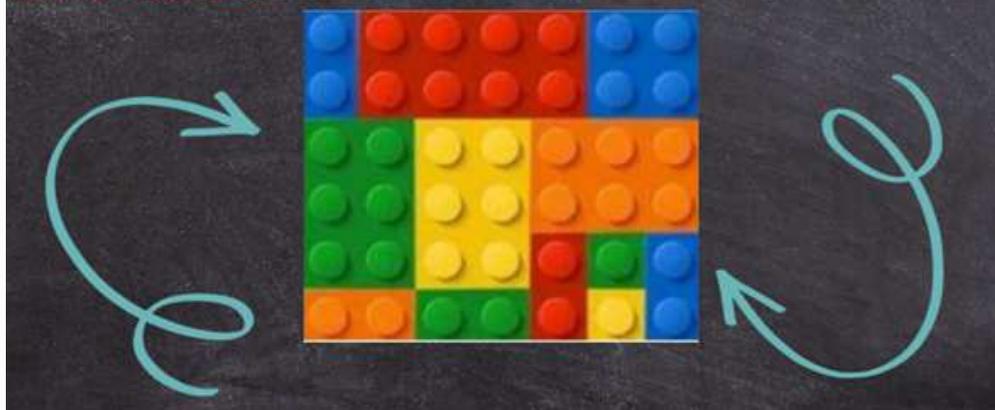


Aqui observa-se que, apenas quando temos números que são quadrados perfeitos, conseguimos formar o desenho do quadrado, ou seja, apenas valores que possuem raiz quadrada exata

# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item c da tarefa DESAFIO DO QUEBRA - CABEÇA.

c) Depois de pensar nas possibilidades e nos cálculos, verificamos que apenas uma das mesas possui peças que não satisfazem as exigências da tarefa, e isso se dá porque com 42 peças apenas formamos um retângulo, visto que o número 42 não é um quadrado perfeito, ou seja, não tem raiz quadrada exata.



## Sugestões para o Professor

**Na tarefa, DESAFIO DO QUEBRA-CABEÇA, a professora pode realizar questões direcionadoras como:**

- Qual é o objetivo dessa Tarefa?
  - O que você precisa saber em relação às exigências do desafio?
  - Qual é a forma geométrica utilizada no desafio?
  - O que esse formato pode influenciar na resposta da Tarefa?
  - Qual operação será necessária utilizar?
  - Como você poderia me explicar a sua resolução? Todas as opções foram possíveis?
  - O que significa não ser possível completar o desafio com determinadas quantidades?
  - Como você faria para ter certeza de que com a quantidade de peças seria possível construir uma divisória quadrada?
- Formalize essa ideia.

**Se achar necessário elabore outras questões direcionadoras !!!!**

# Tarefa 05

## Crescimento de Bactérias

Nesta tarefa apresentamos a possibilidade dos alunos construírem um quadrado utilizando peças de quebra cabeça distribuídos em quantidades diferentes, em forma de desafio devem seguir as regras propostas para isso de modo a fomentar discussões de como e quando se torna possível essa construção em cada caso.

TEMÁTICA: Números e Álgebra - Raiz Quadrada Exata de Números Racionais

HABILIDADES ESSENCIAIS: Ler, interpretar e resolver problemas, que envolvam cálculos de raiz quadrada utilizando-se de diversos procedimentos; resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência, reconhecer a relação entre quadrado perfeito e raiz quadrada aplicado em situações contextualizadas; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

PROCEDIMENTOS UTILIZADOS: multiplicação, potenciação e raiz quadrada exata.



## Tarefa 05

# Crescimento de Bactérias



Determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias E. Coli, responsáveis por doenças do intestino, se reproduzem por divisão celular. Cada célula divide-se em duas em intervalos regulares de tempo. Se começarmos uma população de 1024 bactérias e pensarmos que esta população se dobre a cada 20 minutos. Após terem se passado 3 horas, responda:

a) Em discussão com seu grupo escrevam a respeito de qual seria o objetivo da situação problema e explique como você poderia chegar a uma solução?

b) Quais as operações matemáticas você usaria na resolução da tarefa, houve consenso em como resolver? Quais caminhos vocês encontraram, mesmo que não seja o escolhido para a versão final da tarefa?

c) Utilizem da situação para explorar o conceito de uma multiplicação e por meio de uma potência, explorando as equivalências entre multiplicação e potência? A partir do que vocês exploraram é possível estimar esse número de bactérias depois de 1 dia?



# Possíveis respostas



*Aqui segue algumas possíveis respostas que possa aparecer em produções dos alunos, as quais trazemos detalhadas na dissertação, segue link para acesso na imagem:*



## **Expectativa de resposta item a da tarefa CRESCIMENTO DE BACTÉRIAS.**

a) Na tarefa proposta o objetivo seria encontrar o valor da população de bactérias E.Coli em um tempo de 3 horas (180 min). Para isso temos que encontrar o crescimento a cada 20 minutos, começando da população inicial de 1024 bactérias e ir aumentando até chegar ao tempo de 180 minutos.



# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item b da tarefa CRESCIMENTO DE BACTÉRIAS.

b) Na resolução usa-se cálculos, como: soma, subtração e multiplicação. Para se chegar a um consenso, utilizou-se a seguinte estratégia:

Iniciando com 1024 bactérias.

<b>BACTÉRIAS</b>	1021	2048	4096	8182	16384	32768	65536	131072	262144	524288
<b>TEMPO</b>	0 min	20 min	40 min	60 min	80 min	100 min	120 min	140 min	160 min	180 min
<b>POSIÇÃO</b>	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

ou  
Colocando de forma Geral:

$$A_n = 2(a_{n-1})$$

$A_n$  → Termo Procurado  
 $n$  → Posição do termo  
 $n-1$  → Posição anterior

# Possíveis respostas

## Expectativa de resposta item c da tarefa CRESCIMENTO DE BACTÉRIAS.

c) Se utilizar a ideia de potência para representar a multiplicação e levar em conta a equivalência, ou seja, para que ao trilhar caminhos diferentes possa obter o mesmo resultado, inicialmente substituiremos 1024 bactérias por  $2^{10}$ . Então:

BACTÉRIAS	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$	$2^{13}$	$2^{14}$	$2^{15}$	$2^{16}$	$2^{17}$	$2^{18}$	$2^{19}$
TEMPO	0 min	20 min	40 min	60 min	80 min	100 min	120 min	140 min	160 min	180 min
POSIÇÃO	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

Usando base 2, conclui-se que aos 180 minutos a quantidade de bactérias será equivalente à potência

$$2^{19}$$

De forma geral:

$$A_n = 2^{10} \cdot 2^{n-1}$$

$$A_n = 2^{10+(n-1)}$$

# Possíveis respostas

Continuação da expectativa de resposta item c da tarefa  
**CRESCIMENTO DE BACTÉRIAS.**

Para projeção em 1 dia seria 24 h  $\rightarrow$  1440 min, e  
então 72 intervalos de 20 minutos cada, somados ao  
valor inicial, então:

$$A_n = (a)_{n-1}$$

$$A_{73} = 2 \cdot (a)_{72}$$

População de bactérias após 1 Dia

## Sugestões para o Professor

**Na tarefa, CRESCIMENTO DE BACTÉRIAS, a professora pode realizar questões direcionadoras como:**

- Qual é o objetivo dessa tarefa?
- O que você precisa saber em relação ao que a tarefa está te propondo?
- Qual é o caminho que você pode seguir para chegar a essa resposta?
- Qual operação será necessária utilizar?
- Como você poderia me explicar a sua resolução? Todas as opções foram possíveis?
- O que significa explorar multiplicações por meio de potências?
- Com base no que você resolveu até agora, é possível calcular o número de bactérias em outros períodos?
- Como você faria para ter certeza de que pode explorar o número de bactérias por outros períodos?

**Se achar necessário elabore outras questões direcionadoras !!!!**

# Sugestões para o Professor

**Professor, ao planejar sua aula para aplicar as tarefas, tenha organização!!!!**

## **Organização da sala de Aula**

- Os alunos devem ser dispostos em grupos de 4 integrantes.
- Os grupos devem ser distribuídos de forma a deixar espaços para que o professor possa caminhar entre eles.
- Cada grupo deve eleger uma versão final da tarefa para entregar, porém cada um pode fazer suas versões em seus cadernos para discussão entre o grupo e posterior.

## **Ação do professor na aplicação da Tarefa**

- A professora deve entregar as tarefas aos alunos e inicialmente dar orientações de como os alunos devem proceder para que a tarefa seja realizada.
- Durante a realização da tarefa a professora pode dar orientações que estimulem o pensar investigativo dos alunos (conforme perguntas norteadoras da professora).
- Ao término da tarefa a professora recolhe as resoluções de cada grupo e analisar de modo a identificar indícios do Pensamento Algébrico presente em cada item e inventariar dificuldades apresentadas pelos alunos.
- Após a realização da análise (APE) a professora poderá organizar sua prática de modo que contemple as dúvidas e principais dificuldades percebidas na resolução das tarefas.

**A quantidade de alunos podem variar de acordo com as especificidades da turma!!!!**

## Sugestões para o Professor

**Professor, no link abaixo você pode imprimir as tarefas prontas para seu aluno resolver veja!!!!**

**Clique na Imagem**



**Bom Trabalho !!!!!**

# Considerações Finais

Em toda a organização da pesquisa buscou-se por alunos protagonistas em uma sala de aula, e o que se percebeu foi que para se ter alunos corresponsáveis pelos seus processos de aprendizagem, o professor tem um papel-chave, daquele que questiona, intervém, ou seja, daquele que acompanha e guia todo o desenvolvimento de seus alunos.

A partir de tarefas matemáticas contextualizadas em que os alunos consigam imaginar e envolver-se nos episódios de resolução, foi possível reconhecer estratégias e processos utilizados por eles para lidar com os contextos, de um modo que a matemática é uma ferramenta e, que resolver tarefas vai muito além de um domínio de operações aritméticas básicas, uma vez que é preciso reconhecer padrões, estabelecer relações entre situações e generalizar resultados.

Ancorados na fundamentação apresentada no estudo e no desenvolvimento dos Episódios de Resolução de Tarefas, ressaltamos a necessidade de os alunos serem incentivados a explorar o pensamento algébrico em tarefas que vão além da simples resolução mecânica, de modo a compreender a matemática como uma ferramenta potente para lidar com situações de seu dia a dia.

# Considerações Finais

Os resultados deste estudo sugerem que é importante para os professores de matemática dedicarem tempo e recursos para ajudar os alunos a desenvolverem seu pensamento algébrico, por meio de estratégias pedagógicas que enfatizem a resolução de tarefas de cunho mais aberto e a construção de modelos matemáticos.

Também é importante que os professores reconheçam a diversidade de abordagens que os alunos podem ter para suas resoluções e que valorizem e incentivem essa diversidade.

Em última consideração, a resolução de tarefas matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico são habilidades importantes que devem ser valorizadas e cultivadas em todos os alunos. Esperamos que este E-BOOK e a dissertação a qual ele integra contribua para a compreensão dessas habilidades, para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas potentes e que seja de algum modo ferramenta ou inspiração para que professores possam rever sua prática pedagógica, seus questionamentos e caminhos para seus desenvolvimentos profissionais.

# A professora antes e depois?

Sempre procurei inovar minhas aulas, porém um pouco apreensiva a respeito de práticas docentes que para mim ainda eram pouco conhecidas, no decorrer do meu estudo, ao presenciar novas ideias e práticas educacionais, houveram mudanças significativas na minha abordagem de ensino.

Ao incorporar novas estratégias em minha aula, como o uso de tarefas matemáticas contextualizadas, e o trabalho colaborativo consegui tornar o processo de aprendizado mais relevante para meus alunos.

A partir dessa experiência, meus conhecimentos e habilidades pedagógicos, foram aperfeiçoados, o que pode levar a melhores resultados de aprendizagem para os alunos.

Antes da experiência:

- Ensino centrado no professor, com foco na transmissão de conteúdo e na resolução de exercícios;
- Pouca conexão entre a matemática ensinada em sala de aula e o mundo real;
- Poucas oportunidades para que os alunos trabalhem juntos e colaborem.

# A professora antes e depois?

Depois da experiência:

- Ensino centrado no aluno, com ênfase em promover a participação ativa e engajada no processo de aprendizagem;
- Utilização de tarefas matemáticas contextualizadas que conectam a matemática com o mundo real e proporcionam uma experiência de aprendizagem mais significativa e relevante;
- Promoção do trabalho colaborativo dos alunos, com tarefas que incentivam a discussão, a exploração conjunta de ideias e a construção de conhecimento em grupo;
- Utilização de tecnologias educacionais e outras ferramentas que permitem aos alunos experimentarem e visualizarem conceitos matemáticos de forma mais dinâmica e interativa.

Essas mudanças podem ter um impacto positivo significativo na aprendizagem dos alunos, tornando a matemática mais acessível, e relevante para suas vidas. Além disso, a experiência de trabalhar com tarefas matemáticas contextualizadas e de promover o trabalho colaborativo ajudou a me tornar mais reflexiva e adaptável em minha prática docente, buscando sempre novas formas de melhorar a aprendizagem dos meus alunos.

***Hoje me sinto melhor preparada para ser a professora que meus alunos***

***precisam ter !!!!!***

# Referências

- MENDES, M. T. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo.** 2014. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.
- PALHA, S. A. G. **Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms.** **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.
- PALHA, S. **O efeito das aulas de problemas de turnos na sala de aula de matemática.** *Revista Internacional de Ciências e Educação Matemática*, [s. l.], abr. 2014.
- PONTE, J. P. **Gestão Curricular em Matemática.** In: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005. p. 11-34. 2005.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática.** In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Lisboa, 2014.
- TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. **Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de Tarefas: uma proposta de caracterização.** *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 11, p. 209-227, 2018.