

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

NYUANA VICTORIA PIETROBOM

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS TRAPEZOIDAIS DE CONCRETO ARMADO
SUBMETIDAS A FLEXÃO SIMPLES**

CAMPO MOURÃO

2021

NYUANA VICTORIA PIETROBOM

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS TRAPEZOIDAIS DE CONCRETO ARMADO
SUBMETIDAS A FLEXÃO SIMPLES**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso Superior em Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – DACOC - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Waidemam

Coorientadora: Profa. Dra. Tatiane Cazarin da Silva

CAMPO MOURÃO

2021



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Campo Mourão
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Coordenação de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

OTIMIZAÇÃO DE VIGAS TRAPEZOIDAIS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS A FLEXÃO SIMPLES

por

Nyuana Victoria Pietrobon

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 08h20min do dia 29 de março de 2021 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Jeferson Rafael Bueno

(UTFPR)

Profª. Drª. Lilian Caroline Xavier Candido

(UTFPR)

Profª. Drª. Tatiane Cazarin da Silva

((UTFPR)

Co-orientador

Prof. Dr. Leandro Waidemam

(UTFPR)

Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

Prof. Dr(a). Paula Cristina de Souza

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

Aos meus avós Adelaide, Dilce, João e Vítório –
que não medem esforços pela minha formação pessoal e profissional.

RESUMO

PIETROBOM, Nyuana Victoria. **Otimização de vigas trapezoidais de concreto armado submetidas a flexão simples**. 2021. 73 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2021.

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar um algoritmo computacional que retorne as dimensões e área de aço das barras longitudinais de seções transversais trapezoidais de vigas de concreto armado sujeitas a flexão simples, de maneira otimizada em termos de custo de materiais e execução, respeitando-se o estabelecido pela norma ABNT NBR 6118:2014. Tem-se também como objetivo estabelecer um comparativo entre as soluções ótimas obtidas entre as versões da norma ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6118:2003. Para a implementação computacional do algoritmo foi utilizado o software MATLAB e a rotina fmincon presente em sua biblioteca de otimização. Para os custos individuais de concreto, aço e fôrma, foi utilizada a tabela SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil, região de Curitiba e data de referência técnica em 15 de agosto de 2020. Os resultados mostram-se significativos no contexto da otimização estrutural e permitem concluir que o dimensionamento de vigas de seções transversais trapezoidais apresenta um custo um pouco mais elevado quando feito de acordo com a versão ABNT NBR 6118:2014 em relação a versão datada em 2003, além de mostrar que a verificação de flecha é mais relevante no projeto de vigas submetidas a esforços menores.

Palavras-chave: Otimização estrutural. Vigas de concreto armado. Algoritmos computacionais.

ABSTRACT

PIETROBOM, Nyuana Victoria. **Optimization of trapezoidal reinforced concrete beams subjected to simple bending**. 2021. 73 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2021.

This work had as main objective to present a computational algorithm that returns the dimensions and steel area of the longitudinal bars of trapezoidal transversal sections of reinforced concrete beams subject to simple bending, in an optimized manner in terms of material and execution cost, respecting the established by ABNT standard NBR 6118:2014. It also aims to a comparison between the optimal solutions between the versions of the standard ABNT NBR 6118:2014 and ABNT NBR 6118:2003. For the computational implementation of the algorithm, MATLAB software and the `fmincon` routine present in its optimization library were used. For the individual costs of concrete, steel and formwork, the table SINAPI – National System of Research of Costs and Indices of Civil Construction, region of Curitiba and date of technical reference on August 15, 2020, was consulted. The results are significant despite in structural optimization context and allow to conclude that the design of trapezoidal cross sections beams presents a little higher cost when done according to the ABNT NBR 6118: 2014 version compared to the version dated in 2003, in addition to showing that the arrow check is more relevant in the design of beams subjected to smaller efforts.

Keywords: Structural optimization. Reinforced concrete beams. Computational algorithms.

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – COMPARAÇÃO ENTRE OS CUSTOS TOTAIS DA ABNT NBR 6118:2003 E ABNT NBR 6118:2014, SEM A VERIFICAÇÃO DE FLECHA.....	49
GRÁFICO 2 - COMPARAÇÃO ENTRE OS ALGORITMOS IMPLEMENTADOS COM E SEM A VERIFICAÇÃO DE FLECHA, CONFORME A ABNT NBR 6118:2014.	54
GRÁFICO 3 - COMPARAÇÃO ENTRE CUSTOS INDIVIDUAIS, CONFORME A ABNT NBR 6118:2014.	55
GRÁFICO 4 - VARIÁVEIS OTIMIZADAS.	55
GRÁFICO 5 - VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A MINIMIZAÇÃO.	56

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - REPRESENTAÇÃO DOS PONTOS DE MÍNIMO LOCAL E GLOBAL DE UMA FUNÇÃO GENÉRICA F.	13
FIGURA 2 - CLASSIFICAÇÃO DAS VIGAS.....	17
FIGURA 3 - ESTÁDIOS DE COMPORTAMENTO DO CONCRETO	19
FIGURA 4 - SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA TRAPEZOIDAL.....	21
FIGURA 5 - SEÇÃO TRAPEZOIDAL COM ARMADURA DUPLA.....	22
FIGURA 6 - SEÇÃO TRAPEZOIDAL DIVIDIDA EM PARTES	23
FIGURA 7 - POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA TRAPEZOIDAL FISSURADA	30
FIGURA 8 - DESLOCAMENTOS ELÁSTICOS EM VIGAS.....	32
FIGURA 9 - TAXAS MÍNIMAS DE ARMADURA DE FLEXÃO PARA VIGAS CONFORME A ABNT NBR 6118:2003.....	35
FIGURA 10 - FLUXOGRAMA DO CÓDIGO UTILIZADO.....	44
FIGURA 11 - VIGA BIAPOIADA COM CARREGAMENTO Q (KN/M) UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO.....	46

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - CONFIGURAÇÕES UTILIZADAS NO SOFTWARE.....	39
QUADRO 2 - DADOS DE ENTRADA.....	46

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - OTIMIZAÇÃO CONFORME ABNT NBR 6118:2003 SEM VERIFICAÇÃO DE FLECHA.....	47
TABELA 2 - OTIMIZAÇÃO CONFORME ABNT NBR 6118:2014 SEM VERIFICAÇÃO DE FLECHA.....	48
TABELA 3 - RELAÇÃO ENTRE A ALTURA ÚTIL E A POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA DA SEÇÃO CONFORME A ABNT NBR 6118 DE 2003 E 2014	50
TABELA 4 - OTIMIZAÇÃO SEM VERIFICAÇÃO DA FLECHA CONFORME A ABNT NBR 6118:2014.....	52
TABELA 5 - OTIMIZAÇÃO COM VERIFICAÇÃO DA FLECHA CONFORME ABNT NBR 6118:2014.....	53
TABELA 6 - VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A MINIMIZAÇÃO.....	58

LISTA DE SÍMBOLOS

M	Momento fletor atuante na seção transversal
M_d	Momento fletor de cálculo atuante na seção transversal
M_a	Máximo momento fletor na seção crítica
M_r	Momento de fissuração
b_w	Menor largura da seção transversal da viga
b_f	Maior largura da seção transversal da viga
h	Altura da seção transversal da viga
d	Altura útil da seção transversal da viga
d'	Distância do centro de gravidade da armadura à face da seção transversal da viga
z	Distância entre a resultante de compressão proporcionada pelo concreto comprimido e a resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada
L	Comprimento da viga
A_s	Área de armadura tracionada na seção da viga
A'_s	Área de armadura comprimida na seção da viga
A_c	Área de concreto na seção da viga
$C.G.$	Centro de gravidade da seção transversal
$L.N.$	Linha neutra da seção transversal
I_c	Momento de inércia da seção bruta do concreto
I_{II}	Momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II
x	Profundidade da linha neutra
x_2	Profundidade da linha neutra em serviço
y_t	Distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada
Y_{CG}	Posição do centróide da geometria comprimida
F	Função de custo da viga, por unidade de comprimento
C_c	Custo do concreto, por unidade de volume
C_s	Custo da armadura, por unidade de massa
C_f	Custo da fôrma, por unidade de área
ρ_s	Massa específica do aço
σ_{ct}	Tensão normal de tração no concreto
σ_{cd}	Tensão normal de cálculo de compressão no concreto

σ_{cc}	Tensão normal de compressão no concreto
σ_{sd}'	Tensão normal de cálculo na armadura comprimida
σ_{sd}	Tensão normal de cálculo na armadura tracionada
f_{yk}	Resistência ao escoamento do aço
f_{ct}	Resistência do concreto à tração direta
$f_{ct,m}$	Resistência do concreto à tração média
f_{ck}	Resistência característica do concreto à compressão
f_{cc}	Resistência do concreto à compressão
f_{cd}	Resistência de cálculo do concreto à compressão
$f_{ctk,sup}$	Resistência característica superior do concreto à tração
R_{st}	Resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada
R_{cd}	Resultante de compressão proporcionada pelo concreto comprimido
R'_{sd}	Resultante de compressão proporcionada pela armadura comprimida
R_{sd}	Resultante de compressão proporcionada pela armadura tracionada
W_0	Módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto relativo à fibra mais tracionada
β_{fl}	Coefficiente que depende da forma da viga
α	Fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta
ρ'	Taxa de armadura comprimida
ρ_{min}	Taxa mínima de armadura
E	Módulo de elasticidade longitudinal do concreto
E_{CI}	Módulo de elasticidade longitudinal inicial do concreto
E_{CS}	Módulo de elasticidade longitudinal secante do concreto
E_S	Módulo de elasticidade longitudinal do aço
α_I	Flecha imediata da viga
α_f	Fator para obtenção da flecha diferida
α_T	Flecha total
$\Delta\xi$	Varição do coeficiente em função do tempo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
2 OBJETIVOS	10
2.1 Objetivo Geral	10
2.2 Objetivos Específicos	10
3 JUSTIFICATIVA	11
4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
4.1 Fundamentos da Otimização Matemática	12
4.2 MatLab	14
4.2.1 Rotina Fmincon	15
4.2.2 Método de Pontos Interiores	16
4.3 Vigas	16
4.4 Estádios de comportamento do concreto armado	18
4.5 Formulação Matemática	20
4.5.1 Função Custo	20
4.5.2 Restrições de Equilíbrio.....	21
4.5.3 Condições de Ductilidade	25
4.5.4 Dimensões Limites	25
4.5.5 Valores Limites para Armaduras Longitudinais de Vigas	26
4.5.6 Armaduras de Tração e Compressão	26
4.5.7 Instabilidade Lateral de Vigas	26
4.5.8 Deslocamentos Limites	27
4.5.9 Limites de Deformação.....	28
4.5.9.1 Momento de Fissuração (M_r)	28
4.5.9.2 Flecha Imediata em Vigas de Concreto Armado	29
4.5.9.3 Flecha Diferida no Tempo para Vigas de Concreto Armado	32
4.5.10 Comparativo entre as versões de Norma ABNT NBR 6118:2003 e ABNT NBR 6118:2014 para o dimensionamento de vigas	33
4.6 Formulação do Problema	36
5 METODOLOGIA	38
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	46
6.1 Comparativo entre a ABNT NBR 6118:2003 e ABNT NBR 6118:2014	47

6.2 Comparativo entre o dimensionamento com e sem a verificação da flecha conforme a ABNT NBR 6118:2014	51
6.3 Validação dos resultados	56
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....	61

1 INTRODUÇÃO

Numerosas decisões tomadas no dia a dia dependem de um valor máximo ou mínimo respeitando variáveis e limitações. Os responsáveis por tais decisões podem se ver confusos diante de tantas possibilidades de combinações e soluções dependendo energia para realizar a escolha ideal, levando em consideração o melhor custo-benefício. Neste sentido, a otimização é uma técnica matemática que pode ser adequada e aplicável a situações reais de modo a auxiliar e contornar casos como o supracitado.

O início dos anos 2000 consagrou o processo de otimização como de vital importância para a busca de novos paradigmas nos projetos de engenharia. O trabalho dos engenheiros não se limitou apenas a superar barreiras, mas fazê-lo de forma mais eficiente possível (TANCREDI, 2008).

Ainda sobre a perspectiva de Tancredi (2008), motivados pelo crescente avanço e pela redução dos custos dos recursos computacionais, a busca por metodologias e algoritmos de otimização tem se intensificado.

Nesse contexto tecnológico, os programas computacionais matemáticos têm se tornado um excelente guia até a solução otimizada e, assim, têm se apresentado como aliados dos engenheiros que querem potencializar seus resultados e destacar-se diante à crescente concorrência.

Em particular, o mercado da construção civil tem buscado profissionais que atendam uma maior demanda de projetos com mais eficiência, já que estarão providos de ferramentas matemáticas que agilizarão o atendimento às exigências de desempenho e segurança. Este recurso é benéfico também aos executores do projeto, pois trabalharão com estruturas padronizadas. Além disso, os usuários terão seu produto entregue com um menor custo, resultante da economia de materiais e de mão de obra, e maior garantia, resultante da automatização do processo.

Dentro desse contexto, este trabalho objetiva analisar vigas trapezoidais de concreto armado sujeitas a flexão simples sob a ótica da otimização matemática, especialmente aplicada na busca pela seção transversal mais econômica, atendendo as restrições estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014. É também objetivo estabelecer um comparativo entre as versões de norma ABNT NBR 6118:2003 e

ABNT NBR 6118:2014 visando avaliar, em termos de custo de projeto, os impactos gerados pelas mudanças apresentadas na versão atualizada.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Desenvolver um algoritmo computacional que retorne as dimensões e áreas de aço longitudinais de seções transversais trapezoidais de vigas de concreto armado sujeitas a flexão simples, de maneira otimizada em termos de custo de execução, respeitando-se o estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014.

2.2 Objetivos Específicos

- Definir a função custo de execução de uma viga trapezoidal de concreto armado;
- Apontar quais são as variáveis intervenientes do projeto;
- Construir um modelo teórico de otimização para o problema abordado;
- Apresentar as restrições estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014;
- Apresentar um algoritmo computacional aplicado ao problema;
- Estabelecer comparativos em termos de custos de execução entre vigas trapezoidais dimensionadas segundo as versões de ABNT NBR 6118:2003 para ABNT NBR 6118:2014;
- Analisar os resultados e seus empregos no contexto de projeto.

3 JUSTIFICATIVA

Apesar de todo o conhecimento que possa carregar consigo, o engenheiro civil nem sempre consegue satisfazer em seus projetos o conjunto ideal esperado pelo usuário: conforto acústico, conforto térmico, funcionalidade, boa aparência, segurança, economia, dentre outros fatores presentes nas expectativas do ser humano. Essa dificuldade surge em função das inúmeras possibilidades de soluções que podem ser adotadas, limitações criativas e pessoais e normas e restrições que impedem o projetista de ousar em suas criações ou então de executá-la de maneira mais prática e econômica dentro do prazo previamente estabelecido.

Para que essa situação seja revertida, a utilização de algoritmos computacionais pode ser explorada. Sendo assim, a existência de um algoritmo que otimize a seção de vigas de concreto armado é de bom proveito para os profissionais da área. Dessa forma, poupa-se material, em consequência há um menor custo financeiro, economiza-se tempo, antes investido em tentativas falhas, e energia do responsável possibilitando que haja uma maior dedicação de sua parte na concepção da estrutura em si e engenho de novos processos, agilizando a construção civil.

A otimização de projetos estruturais pode implicar, inclusive, em um aquecimento no mercado da construção civil. A redução do custo do empreendimento aumentará a competitividade entre os concorrentes.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

4.1 Fundamentos da Otimização Matemática

A otimização pode ser vista como um dos ramos de estudo da matemática que pode ser aplicada em diversas situações do cotidiano, tais como: maximização dos lucros de uma empresa, minimização dos custos de produção, determinação da rota ótima de um percurso, dentre outros. Teoricamente, a otimização consiste em determinar possíveis valores de máximos/mínimos de uma função de várias variáveis, com valores dentro de uma determinada região do espaço multidimensional. (MARTÍNEZ E SANTOS, 1995)

Segundo Silva (2009), a ideia de otimizar uma estrutura implica em alguma liberdade para modificá-la de forma a buscar a solução que forneça o melhor desempenho da mesma. O potencial de mudanças é tipicamente expresso em termos das variações permitidas num grupo de parâmetros. Estes são comumente chamados de variáveis de projeto e podem ser denotados, matricialmente, por um vetor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, onde n é o número total de variáveis de projeto de um dado problema.

Outro estágio da otimização é a definição das restrições que a função a ser otimizada, chamada de função objetivo, deve ser submetida. Tendo em vista um problema real, estes condicionantes podem ser originados de casos práticos ou normas técnicas. Estas podem ser: restrições de igualdade, restrições de desigualdade ou restrições mistas.

Maximizar f em uma região qualquer do espaço R^n é equivalente a minimizar $-f$ na mesma região. Portanto, ao ser abordado sobre minimizar funções, minimizadores e pontos mínimos, o mesmo é válido para maximizar funções, maximizadores e pontos máximos, respectivamente.

Formalmente, um problema de otimização pode ser representado por

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & f(x) \\
 \text{s.a.} & h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \\
 & x \in \Omega \subset R^n.
 \end{array} \tag{1}$$

Matematicamente, diz-se que a função objetivo f está sujeita a restrições de igualdade, $h_i(x) = 0$ com $i = 1, 2, \dots, m$, e a restrições de desigualdade, $g_j(x) \leq 0$ com $j = 1, 2, \dots, p$, as quais são contínuas e contidas em um conjunto viável Ω e x é o vetor das variáveis de projeto. O problema devolverá uma grandeza que respeite as condições impostas.

As soluções $x_* \in \Omega$ do problema (1) serão chamadas pontos de mínimo e os valores correspondentes $f(x_*)$ são os mínimos do problema.

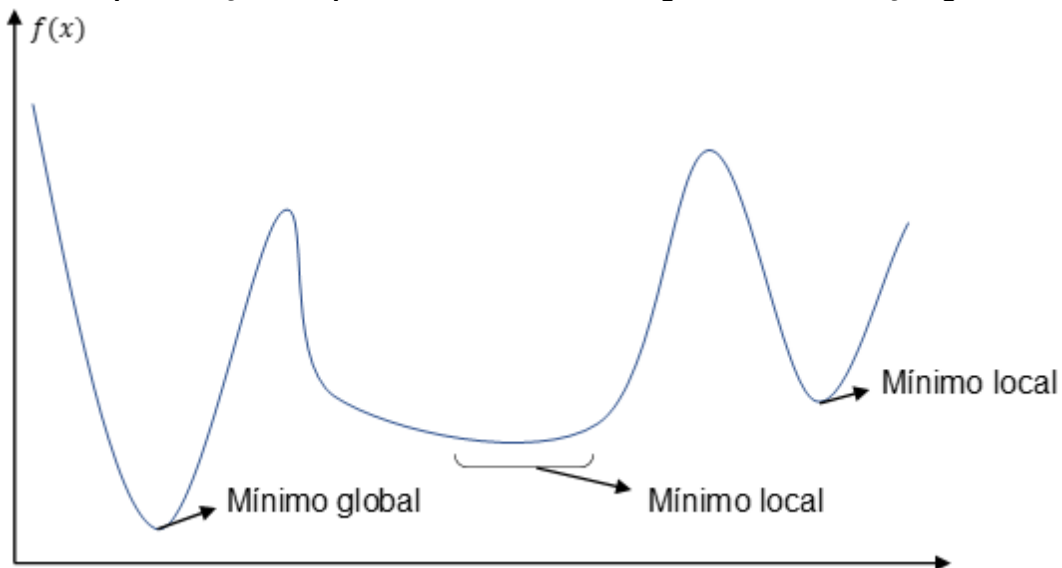
Como definido por Martínez e Santos (1998):

- a) x_* é minimizador global de (1) se $f(x_*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Neste caso, $f(x_*)$ é chamado mínimo de f em Ω .
- b) x_* é minimizador local de (1) se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$ tal que $0 < ||x - x_*|| \leq \varepsilon$.

Todos os minimizadores globais também são minimizadores locais. Por outro lado, apesar de poder admitir muitos minimizadores globais, o valor do mínimo global deve ser sempre o mesmo.

Tal situação está ilustrada na Figura 1.

Figura 1 - Representação dos pontos de mínimo local e global de uma função genérica f .



Fonte: Adaptada de Spazzapan (2018).

Os mínimos locais são resultados significativos que satisfazem a função objetivo para pontos próximos, já o mínimo global é o melhor resultado numérico para todo o conjunto viável para o qual o problema está definido.

Os problemas de otimizações ainda podem ser caracterizados em classes de programação matemática de acordo com as particularidades da sua função objetivo e restrições.

Definido por Mineiro (2007), uma função é considerada linear quando todas as suas variáveis possuem relações proporcionais entre si. Por isso, sua representação gráfica é um hiperplano. Do mesmo modo, uma função é considerada não linear quando uma ou mais de suas variáveis possuem relações desproporcionais entre si. Ambas as funções utilizam-se dos mesmos conceitos (otimização, função-objetivo, variáveis e restrições), porém os procedimentos matemáticos empregados na solução são diferentes.

Segundo Brooke et al (1997), existe uma dificuldade maior em encontrar soluções para problemas não-lineares, pois quando encontrada uma solução, esta pode não ser única (um mínimo local) e outra solução melhor pode existir (mínimo global).

De acordo com Medeiros (2012), a utilização de técnicas numéricas de otimização aplicadas ao problema teórico, permite encontrar a melhor solução entre as disponíveis, por meio de um método de busca sistemática, fundamentado num modelo matemático bem definido, através da definição da função objetivo, parâmetros e restrições.

Para a resolução numérica do problema de otimização a ser abordado neste trabalho, de natureza não linear, torna-se necessário o uso de ferramentas computacionais aliadas a aplicação de métodos teóricos de otimização. Tais conceitos serão brevemente apresentados a seguir.

4.2 MatLab

O MatLab (Matrix Laboratory) é um programa muito utilizado para cálculos numéricos, principalmente na manipulação e operacionalização de dados matriciais. Por dispor de diversas funções, pode auxiliar diretamente o usuário na agilidade das implementações.

De acordo com Champman (2016), o MatLab transformou-se em um sistema computacional flexível, capaz de auxiliar essencialmente na resolução de qualquer

problema técnico, com sintaxe simplificada e popular, tornando as tarefas de programação técnica mais fáceis e eficientes.

A próxima subseção tratará, especificamente, de uma das bibliotecas auxiliares que contém funções e comandos específicos aplicados na minimização de problemas não lineares. Tal biblioteca, utilizada neste trabalho, é a rotina `fmincon`.

4.2.1 Rotina `Fmincon`

Descrita pelo MathWorks (2018) como um solucionador de programação não linear, a rotina `fmincon` encontra o mínimo local de um problema modelado como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(x) \\
 &\text{s.a.} && c(x) \leq 0 \\
 &&& ceq(x) = 0 \\
 &&& A \cdot x < b \\
 &&& Aeq \cdot x = beq \\
 &&& lb \leq x \leq ub,
 \end{aligned} \tag{2}$$

em que, b e beq são vetores, A e Aeq , são matrizes, c e ceq são funções que retornam vetores e f é uma função que retorna um escalar. Podemos definir f , c e ceq como funções não lineares e x , lb e ub podem ser definidos como vetores ou matrizes.

Para a minimização desse problema, utilizando a rotina, ainda é possível definir o método de otimização interna, que pode ser: Pontos Interiores, Região de Confiança Reflexiva, Programação Quadrática Sequencial e Conjuntos Ativos. Para este trabalho, por desempenho numérico, optamos pelo uso do default da rotina `fmincon`, o Método de Pontos Interiores. Além de ser utilizado como opção padrão inicial, o método se mostrou numericamente mais eficaz, quando comparado aos demais métodos disponíveis na rotina. A seguir, é apresentada uma breve discussão sobre esse método.

4.2.2 Método de Pontos Interiores

De acordo com MathWorks (2018), o Método de Pontos Interiores para a minimização restrita resolve uma sequência de problemas aproximados de minimização. Para um problema original definido por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{s.a.} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

o Método de Pontos Interiores consiste em resolver um problema aproximado, dado por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_{\mu}(x, s) = f(x) - \mu \sum_i \ln(s_i) \\ &\text{s.a.} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) + s = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

em que s é denominada variável de folga e o termo $\mu \sum_i \ln(s_i)$ é denominado função de barreira logarítmica. Este subproblema tem a característica de possuir apenas restrições de igualdade, o que pode ser resolvido pela minimização da função Lagrangeana:

$$L(x, s, \lambda, \phi) = f(x) - \mu \sum_i \ln(s_i) + \lambda^t h(x) + \phi^t (g(s) + s), \tag{5}$$

e definindo $\mu \geq 0$, conforme μ decresce para zero, o mínimo de f_{μ} deve se aproximar do mínimo de f , o que resolve o problema original (3).

4.3 Vigas

Conforme a ABNT NBR 6118:2014, vigas são elementos lineares em que a flexão é preponderante. Como elementos lineares, definimos aqueles em que o comprimento longitudinal supera em três vezes a maior dimensão da seção transversal.

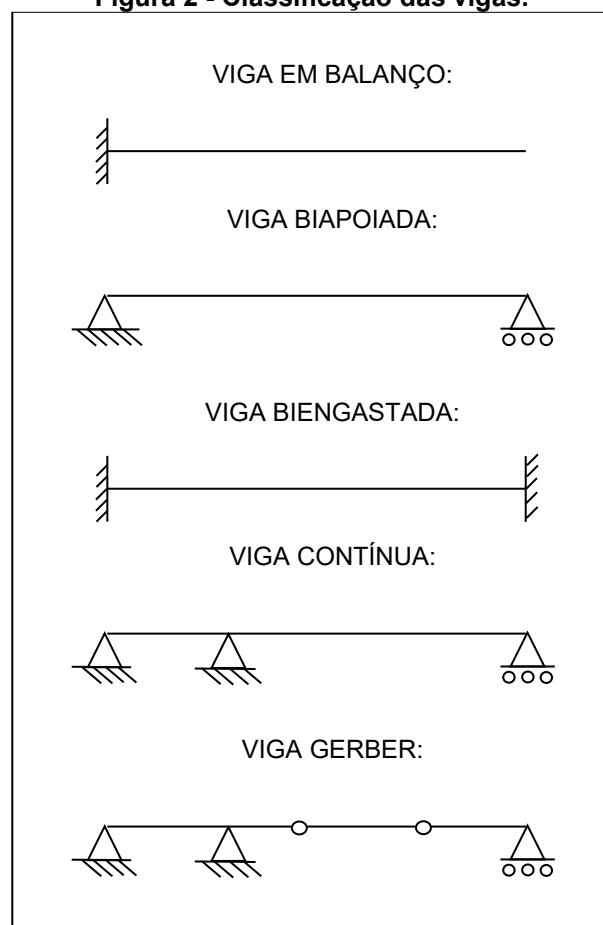
Sua principal função é vencer vãos e transmitir as cargas para os apoios, geralmente pilares. Juntamente com as lajes e pilares, compõem a estrutura de contraventamento responsável por proporcionar a estabilidade global dos edifícios às ações verticais e horizontais (BASTOS, 2019).

As vigas podem ser classificadas conforme a maneira que estão apoiadas, sendo:

- a) Viga em balanço: possui apenas uma extremidade apoiada, sendo o apoio obrigatoriamente um engaste;
- b) Viga biapoiada: possui apoios, fixos ou móveis, em suas extremidades;
- c) Viga biengastada: apoiada por engastes em ambas as extremidades;
- d) Viga contínua: possui vários apoios ao longo da viga, sejam eles fixos ou móveis;
- e) Viga Gerber: viga contínua com uma ou mais rótulas ao longo da viga;

A representação gráfica dessas vigas pode ser visualizada na Figura 2.

Figura 2 - Classificação das vigas.



Fonte: Autoria própria (2020).

De acordo com Santos (1983), as vigas são elementos estruturais submetidos à flexão normal simples, embora possam também estarem submetidos à flexão composta. Por isso, o dimensionamento de seções sob flexão normal simples é a atividade diária mais comum aos engenheiros projetistas de estruturas de concreto armado.

Segundo Carvalho (2014), uma viga está submetida à flexão normal quando o plano do carregamento da sua resultante é perpendicular à linha neutra (local da seção transversal em que a tensão normal é nula) ou, em outras palavras, quando o plano de carregamento contém um dos eixos principais de inércia da seção. No caso de seções transversais simétricas (um eixo de simetria é sempre um eixo principal de inércia), o momento fletor atua no plano de simetria. Adicionalmente, uma flexão é dita simples quando não há esforço normal atuando na seção ($N = 0$).

4.4 Estádios de comportamento do concreto armado

Os estádios de comportamento do concreto armado são definidos por Nogueira (2010) como configurações específicas de tensões ao longo de uma seção transversal de concreto armado, provenientes da solicitação provocada pelas ações externas. De acordo com Junges (2011), em uma viga submetida à flexão com carga crescente até sua ruptura, podem-se observar três estádios de comportamento do elemento.

No Estádio I-a, a tensão normal de tração devido a flexão que a viga está submetida é menor que a resistência à tração do concreto, não havendo necessidade de armadura e sem ocasionar fissuras na peça. Dessa forma, o diagrama de tensões e a relação tensão/deformação mantém a proporcionalidade.

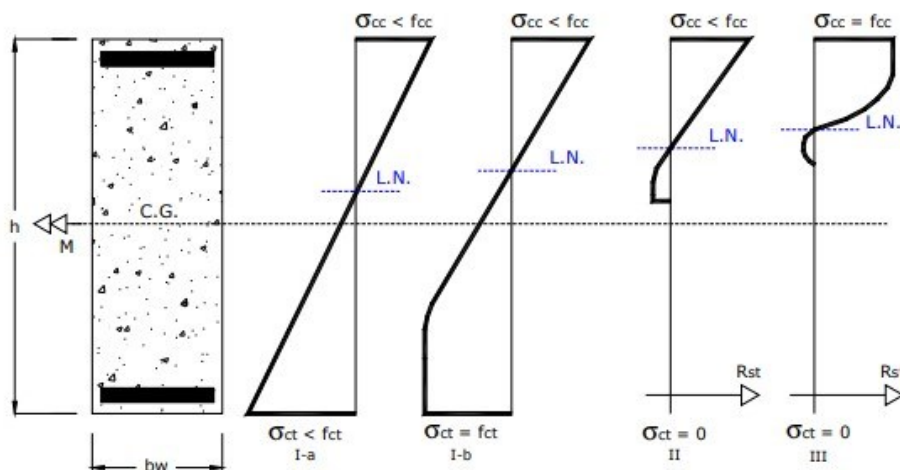
Assim que a solicitação aumenta e a tensão de flexão na fibra mais tracionada atinge a resistência do concreto à tração, aparecem as primeiras fissuras no trecho caracterizando o início do Estádio I-b. Apesar do concreto começar a danificar na região tracionada, ele ainda contribui na resistência.

No Estádio II, admite-se que a tensão de tração no local da fissura é resistida completamente pela armadura pois o concreto abaixo da linha neutra já se encontra totalmente fissurado, sem contribuir na resistência à tração.

Há ainda o Estádio III, caracterizado pela plastificação do concreto ou do aço, ou ambos, em que a peça encontra-se bastante fissurada (JUNGES, 2011). Neste caso, o módulo da tensão na fibra mais comprimida de concreto atinge o valor da resistência máxima à compressão; é o estado de ruptura do concreto comprimido. No Estádio III, se a peça é descarregada surgem deformações residuais. A verificação de segurança é feita admitindo-se que o esgotamento da capacidade resistente possa ocorrer tanto pela ruptura do concreto comprimido, quanto pela deformação excessiva da armadura tracionada.

Os estádios de comportamento do concreto armado em uma seção transversal retangular estão representados na Figura 3, em que:

Figura 3 - Estádios de comportamento do concreto.



Fonte: Nogueira (2010).

M é o momento fletor que a seção transversal está submetida;

$C.G.$ é o centro de gravidade da seção transversal;

h é a altura da seção transversal;

b_w é a largura da seção transversal;

$L.N.$ é a linha neutra da seção transversal;

σ_{ct} é a tensão normal de tração no concreto;

f_{ct} é a resistência do concreto à tração;

σ_{cc} é a tensão normal de compressão no concreto;

f_{cc} é a resistência do concreto à compressão;

R_{st} é a resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada.

4.5 Formulação Matemática

Nos itens que seguem são apresentadas a função custo e as condições de restrição necessárias à elaboração do problema de otimização matemática em questão.

4.5.1 Função Custo

A função custo será utilizada a fim de se determinar o menor custo de produção da viga de concreto armado de seção transversal trapezoidal por unidade de comprimento. Nela são consideradas o volume de concreto, a área de aço e a área de formas utilizadas para a construção de tal elemento. Será apresentada como:

$$F(b_w, b_f, d, h, A_S, A'_S) = \left[\frac{(b_f + b_w) \cdot h}{2} \right] \cdot C_C + (A_S + A'_S) \cdot \rho_S \cdot C_S + \left[b_w + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{b_f - b_w}{2} \right)^2 + h^2} \right] \cdot C_f, \quad (6)$$

na qual,

F é a função de custo da viga, por unidade de comprimento;

C_C é o custo do concreto, por unidade de volume;

C_S é o custo da armadura, por unidade de massa;

C_f é o custo da forma, por unidade de área;

b_w é a menor largura da seção transversal da viga;

b_f é a maior largura da seção transversal da viga;

h é a altura da seção transversal da viga;

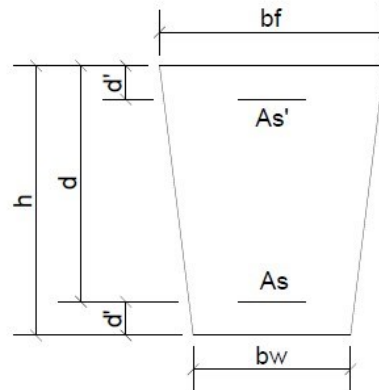
ρ_S é a massa específica do aço;

A_S é a área de armadura tracionada na seção da viga;

A'_S é a área de armadura comprimida na seção da viga.

Algumas variáveis apresentadas na função podem ser visualizadas na Figura 4, para uma viga trapezoidal.

Figura 4 - Seção transversal de uma viga trapezoidal



Fonte: Corelhamo (2018).

A altura da viga (h), conforme a Figura 4, pode ser definida como

$$h = d + d', \quad (7)$$

em que,

d é a altura útil da seção transversal da viga;

d' é a distância do centro de gravidade da armadura à face da seção.

O custo total do elemento pode ser obtido multiplicando-se a função (6) pelo comprimento total (L).

4.5.2 Restrições de Equilíbrio

O estado limite último (ELU), diz respeito a capacidade máxima da estrutura antecedente à ruína e é pensando nesse momento que o elemento é dimensionado, ou seja, de maneira que a seção mais solicitada atinja as deformações do ELU.

O item 10.3 da ABNT NBR 6118:2014 estabelece que a segurança das estruturas de concreto deve sempre ser verificada em relação aos seguintes estados-limites últimos:

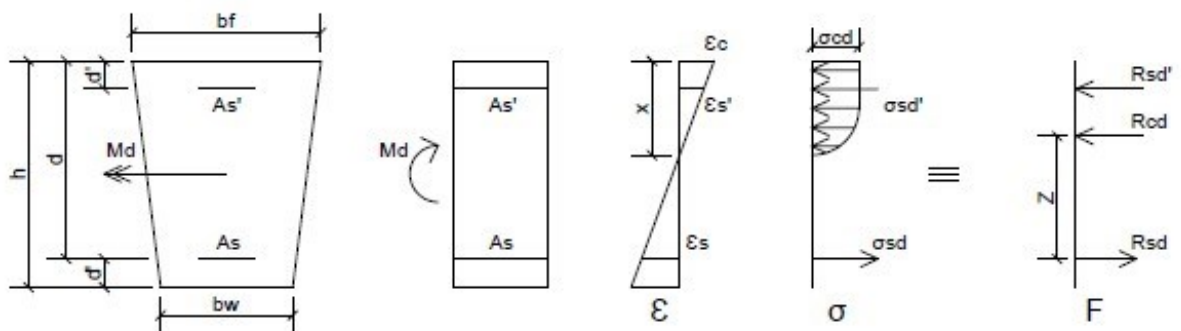
- c) Estado-limite último da perda de equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- d) Estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, devido às solicitações normais e tangenciais;

- e) Estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando os efeitos de segunda ordem;
- f) Estado-limite último provocado por solicitações dinâmicas;
- g) Estado-limite de colapso progressivo;
- h) Estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando exposição ao fogo;
- i) Estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, considerando ações sísmicas;
- j) Outros estados-limites últimos que eventualmente possam ocorrer em casos especiais.

Neste trabalho será abordado o dimensionamento considerando o estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, devido às solicitações normais, particularmente restrito a análise de vigas sujeitas à flexão simples. Portanto o dimensionamento é feito estabelecendo-se que na seção mais solicitada sejam alcançadas as deformações específicas limites dos materiais.

O equilíbrio de forças em uma seção de viga genérica está representado na Figura 5.

Figura 5 - Seção trapezoidal com armadura dupla.



Fonte: Corelhan (2018).

Escrevendo-se as equações de equilíbrio estático a partir do momento solicitante e das forças resultantes ilustradas na Figura 5, tem-se:

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_{sd} - R'_{sd} - R_{cd} = 0 \quad (8)$$

$$\Sigma M = 0 \quad M_d = R'_{sd} \cdot (d - d') + R_{cd} \cdot z, \quad (9)$$

em que,

R_{cd} é a resultante de compressão proporcionada pelo concreto comprimido;

R'_{sd} é a resultante de compressão proporcionada pela armadura comprimida;

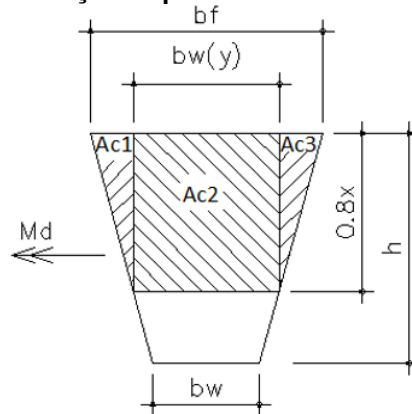
R_{sd} é a resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada;

M_d é o momento de cálculo atuante na seção transversal;

z é a distância entre a resultante de compressão proporcionada pelo concreto comprimido e a resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada; sendo a somatória de momentos calculada em relação ao ponto que passa a força resultante da armadura tracionada.

A resultante de compressão no concreto R_{cd} , pode ser escrita como a soma de R_{cd1} , R_{cd2} e R_{cd3} , sendo estas, respectivamente, as resultantes na área de concreto 1 ($Ac1$), área de concreto 2 ($Ac2$) e área de concreto 3 ($Ac3$), como ilustrado na Figura 6.

Figura 6 - Seção trapezoidal dividida em partes.



Fonte: Adaptada de Corelhan (2018).

Portanto, as resultantes R_{cd} , R'_{sd} e R_{sd} são dadas por:

$$R_{cd} = R_{cd1} + R_{cd2} + R_{cd3} \quad (10)$$

$$R_{sd}' = A'_s \cdot \sigma_{sd}' \quad (11)$$

$$R_{sd} = A_s \cdot \sigma_{sd}, \quad (12)$$

em que,

σ_{sd}' é a tensão de cálculo na armadura comprimida;

σ_{sd} é a tensão de cálculo na armadura tracionada.

As distribuições de tensões no concreto resultam em um diagrama parábola-retângulo, entretanto permite-se a substituição dessa representação por um retângulo de altura $0,8 \cdot x$, onde x é a profundidade da linha neutra (Carvalho, 2014).

Fazendo-se o uso de algumas propriedades geométricas, a partir da Figura 6 obtém-se as equações:

$$R_{cd1} = R_{cd3} = A_{c1} \cdot \sigma_{cd} = \left(\frac{b_f - b_w(y)}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \quad (13)$$

$$R_{cd2} = A_{c2} \cdot \sigma_{cd} = b_w(y) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \quad (14)$$

$$b_w(y) = b_f - (0,8 \cdot x) \cdot \left(\frac{b_f - b_w}{h} \right), \quad (15)$$

em que,

$b_w(y)$, b_f e b_w são dimensões apresentadas na Figura 6;

σ_{cd} é a tensão de cálculo de compressão no concreto, sendo utilizado como $0,85 \cdot f_{cd}$, em que f_{cd} é a resistência de cálculo à compressão do concreto.

Substituindo em $\Sigma F_X = 0$ e $\Sigma M = 0$, dados nas equações (8) e (9), as expressões de R_{cd1} , R_{cd2} , R_{cd3} , R_{sd} e R_{sd}' , apresentadas em (10), (11), (12) e (13), define-se as equações (16) e (17), como sendo:

$$A_S \cdot \sigma_{sd} - A'_S \cdot \sigma'_{sd} - 2 \cdot \left[\left(\frac{b_f - b_w(y)}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \right] - b_w(y) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} = 0 \quad (16)$$

e

$$M_d = (A'_S \cdot \sigma'_{sd}) \cdot (d - d') + 2 \cdot \left(\frac{b_f - b_w(y)}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot z_1 + b_w(y) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot z_2, \quad (17)$$

em que:

$$z_1 = z_3 = d - \frac{0,8 \cdot x}{3} \quad (18)$$

$$z_2 = d - \frac{0,8 \cdot x}{2}. \quad (19)$$

4.5.3 Condições de Ductilidade

Conforme a ABNT NBR 6118:2014, é necessário garantir boas condições de ductilidade nas vigas, responsáveis pela capacidade de rotação dos elementos estruturais, respeitando-se os limites da posição da linha neutra. Quanto menor for a relação $\frac{x}{d}$, maior será essa capacidade. Para um comportamento dútil adequado, a posição da linha neutra deve obedecer aos seguintes limites:

- a) $\frac{x}{d} \leq 0,45$, para concretos com $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$;
- b) $\frac{x}{d} \leq 0,35$, para concretos com $50 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$.

Importante destacar que, para a implementação computacional do algoritmo desenvolvido neste trabalho, limitou-se a resistência do concreto em 50 MPa , trabalhando-se, assim, com a relação $\frac{x}{d} \leq 0,45$.

4.5.4 Dimensões Limites

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, a prescrição de valores limites mínimos para as dimensões de elementos estruturais de concreto armado tem como objetivo evitar um desempenho inaceitável para os mesmos e propiciar condições de execução adequadas.

Sendo assim, a seção transversal das vigas não pode apresentar largura menor que 12 cm. Para casos excepcionais, pode ser utilizado um mínimo absoluto de 10 cm. Para viga-paredes, o limite mínimo é de 15 cm.

A norma ainda impõe que vigas isostáticas devem obedecer a relação $\frac{L}{h} \geq 2,0$ e as vigas contínuas a relação $\frac{L}{h} \geq 3,0$, em que L é o comprimento do vão teórico (ou o dobro do comprimento teórico, no caso de balanço) e h é a altura total da viga. Vigas com relações $\frac{L}{h}$ menores devem ser tratadas como vigas-parede ou consolos.

4.5.5 Valores Limites para Armaduras Longitudinais de Vigas

A ABNT NBR 6118:2014 estabelece que a armadura mínima de tração em elementos estruturais deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo dado pela equação (20), sendo respeitada a taxa mínima absoluta de 0,15% da área de concreto.

$$Md_{min} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk,sup}, \quad (20)$$

sendo,

$f_{ctk,sup}$ a resistência característica superior do concreto à tração;

e W_0 o modulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada, dado pela equação :

$$W_0 = \frac{I_c}{y_t}, \quad (21)$$

em que,

I_c é o momento de inércia da seção bruta do concreto;

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada.

4.5.6 Armaduras de Tração e Compressão

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, a soma das armaduras de tração (A_s) e compressão (A'_s) não pode ser maior que 4% da área de concreto (A_c) calculada na região fora da zona de emendas, devendo ser garantidas as condições de utilidade requeridas.

4.5.7 Instabilidade Lateral de Vigas

A ABNT NBR 6118:2014 estabelece que para garantir a segurança relativa a instabilidade lateral das vigas, deve-se garantir as seguintes condições:

- a) $b_f \geq \frac{L}{50}$
- b) $b_f \geq \beta_{fl} \cdot h$,

em que β_{fl} é o coeficiente que depende da forma da viga.

Analisando a expressão e percebendo que o β_{fl} relativo à seção retangular leva a um dimensionamento a favor da segurança, na falta de um coeficiente específico para seções transversais trapezoidais, será adotado neste trabalho o mesmo coeficiente determinado na ABNT NBR 6118:2014 para vigas retangulares, ou seja, $\beta_{fl} = 0,4$.

4.5.8 Deslocamentos Limites

Deslocamentos limites são valores práticos definidos pela ABNT NBR 6118:2014 e utilizados para verificação em serviço do Estado Limite de Deformações Excessivas da estrutura. São classificados em quatro grupos:

- a) Aceitabilidade sensorial, caracterizada por vibrações ou efeitos visuais indesejáveis;
- b) Efeitos específicos que impossibilitem a utilização adequada da construção;
- c) Efeitos em elementos não estruturais;
- d) Efeitos em elementos estruturais.

Para garantir a aceitabilidade sensorial visual, usa-se o deslocamento limite de $\frac{L}{250}$, sendo L o comprimento do vão considerando que o elemento é apoiado em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Tratando-se de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.

4.5.9 Limites de Deformação

4.5.9.1 Momento de Fissuração (M_r)

De acordo com Pfeil (1989) e como exposto anteriormente, as vigas de concreto armado são dimensionadas no estado-limite último, o qual garante um coeficiente de segurança adequado contra o colapso.

Além disso, é necessário que as vigas apresentem um bom comportamento sob ações das cargas em serviço, sendo que esse comportamento é assegurado através da verificação dos estados-limites. Dentre eles, encontra-se as aberturas de fissuras, limitadas a valores admissíveis de modo a garantir proteção das armaduras contra corrosão, e ainda evitar efeitos estéticos desagradáveis provocados por uma fissuração muito acentuada.

Estado limite de formação de fissuras é o estado em que há uma grande probabilidade de iniciar-se a formação de fissuras de flexão. Este estado ocorre quando a tensão de tração máxima na seção transversal for igual à resistência à tração do concreto na flexão (CAMACHO, 2005).

Conforme a ABNT NBR 6118:2014, nos estados-limites de serviço as estruturas trabalham parcialmente no estágio I e parcialmente no estágio II. O limite entre esses dois estágios é estabelecido pelo momento de fissuração, definido pela expressão:

$$M_r = \frac{f_{ct} \cdot \alpha \cdot I_c}{y_t}, \quad (22)$$

sendo:

α o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta;

com I_c e y_t , dados respectivamente pelas expressões:

$$I_c = \frac{h^3 \cdot (b_f^2 + 4 \cdot b_f \cdot b_w + b_w^2)}{36 \cdot (b_f + b_w)} \quad (23)$$

e

$$y_t = h \cdot \frac{(b_f - b_w) \cdot \frac{h}{3} + \frac{(b_w \cdot h)}{2}}{\frac{(b_f - b_w)}{2} + b_w}, \quad (24)$$

de variáveis já conhecidas.

Analisando a expressão (22) percebe-se que o α relativo à seção retangular leva a um dimensionamento a favor da segurança, na falta de um coeficiente específico para seções transversais trapezoidais, será adotado neste trabalho o mesmo coeficiente determinado na ABNT NBR 6118:2014 para vigas retangulares, ou seja, $\alpha = 1,5$.

4.5.9.2 Flecha Imediata em Vigas de Concreto Armado

De acordo com Kemczinski (2015), a flecha elástica é calculada para verificar o estado-limite de deformações excessivas. Para tal fim, usa-se o módulo de elasticidade secante do concreto, além de considerar os efeitos de fissuração e fluência. Portanto, é necessário calcular a rigidez equivalente, que considera o elemento parcialmente no estágio I e parcialmente no estágio II.

Conforme a ABNT NBR 6118:2014, o cálculo de rigidez à flexão equivalente pode ser definido pela expressão a seguir:

$$(EI)_{eq,t0} = E_{CS} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_C + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{CS} \cdot I_C, \quad (25)$$

na qual:

I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, calculado com $\alpha_e = \frac{E_S}{E_{CS}}$ de maneira que ocorra a homogeneização da seção, substituindo-se a área de aço por uma área correspondente de concreto;

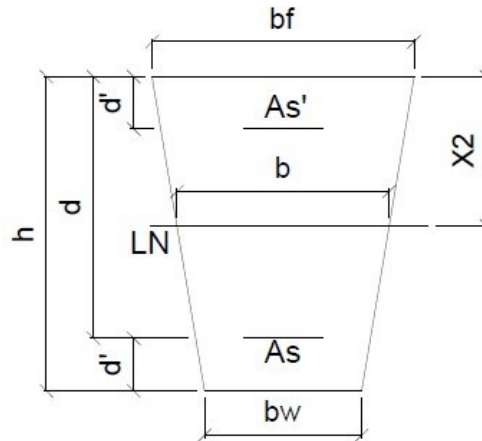
M_a é o máximo momento fletor positivo em vigas biapoiadas ou contínuas para combinação quase permanente, ou então, o máximo momento fletor negativo em vigas em balanço para combinação quase permanente;

M_r é o momento de fissuração do elemento estrutural, cujo valor deve ser reduzido à metade no caso de utilização de barras lisas;

E_{CS} é o módulo de elasticidade secante do concreto.

Para o cálculo do momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, é preciso encontrar a posição da linha neutra x_2 , ilustrada na Figura 7.

Figura 7 - Posição da linha neutra de uma seção transversal de uma viga trapezoidal fissurada.



Fonte: Autoria Própria (2020).

Por semelhança de triângulos, definimos b em função de x_2 , por:

$$b = b_f - x_2 \cdot \left(\frac{b_f - b_w}{h} \right). \quad (26)$$

De maneira semelhante ao cálculo de y_t , pode ser encontrado o centróide da área trapezoidal total comprimida.

Dessa forma, a expressão que leva a da posição do centróide da geometria comprimida resulta em:

$$Y_{CG} = x_2 \cdot \frac{(b_f - b) \cdot \frac{x_2}{3} + \frac{(b \cdot x_2)}{2}}{\frac{(b_f - b)}{2} + b}. \quad (27)$$

Com o intuito de calcular o momento de inércia através de geometrias já conhecidas, a seção pode ser dividida como feito anteriormente na Figura 6. O momento de inércia I_{II} é dado pela inércia de cada área somada com o produto da área com o quadrado do transporte do respectivo centróide, portanto:

$$I_{II} = \frac{b \cdot x_2^3}{12} + (b \cdot x_2) \cdot \left(Y_{CG} - \frac{x_2}{2}\right)^2 +$$

$$+ 2 \cdot \left[\frac{(bf - b)}{2} \cdot \frac{x_2^3}{12} + \left(\frac{(bf - b)}{2} \cdot \frac{x_2}{2}\right) \cdot \left(Y_{CG} - \frac{2 \cdot x_2}{3}\right)^2 \right] + \alpha_e \cdot A_S \cdot (d - x_2). \quad (28)$$

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, quando não forem realizados ensaios, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade e módulo de elasticidade secante usando as expressões a seguir:

$$E_{CI} = \alpha_e \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad \text{para } f_{ck} \text{ de 20 MPa a 50 MPa}; \quad (29)$$

$$E_{CI} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_e \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{1/3} \quad \text{para } f_{ck} \text{ de 55 MPa a 90 MPa}. \quad (30)$$

sendo:

$$\alpha_e = 1,2 \quad \text{para basalto e diabásio};$$

$$\alpha_e = 1,0 \quad \text{para granito e gnaisse};$$

$$\alpha_e = 0,9 \quad \text{para calcário};$$

$$\alpha_e = 1,0 \quad \text{para arenito}.$$

onde E_{CI} e f_{ck} são dados em megapascal (MPa).

Enfim, o módulo de deformação E_{CS} pode ser estimado pela expressão:

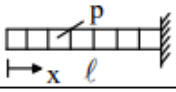
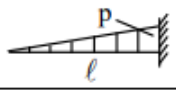
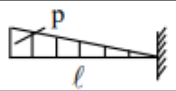
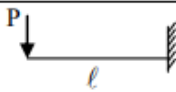
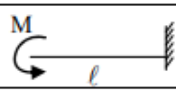
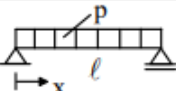
$$E_{CS} = \alpha_i \cdot E_{CI}, \quad (31)$$

na qual:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0. \quad (32)$$

O cálculo da flecha imediata (α_I) pode ser feito por expressões em função do carregamento a que está submetido o elemento, como exemplificado para alguns casos na Figura 8.

Figura 8 - Deslocamentos elásticos em vigas.

	$\frac{1}{8} \frac{p\ell^4}{EI}$
	$\frac{1}{30} \frac{p\ell^4}{EI}$
	$\frac{11}{120} \frac{p\ell^4}{EI}$
	$\frac{1}{3} \frac{P\ell^3}{EI}$
	$\frac{1}{2} \frac{M\ell^2}{EI}$
	$\frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI}$

Fonte: Adaptada de Pinheiro et al (2010).

Sendo EI igual ao EI_{eq} definido pela equação (25), p o carregamento que a viga está submetida, M o momento fletor e l o comprimento da viga.

4.5.9.3 Flecha Diferida no Tempo para Vigas de Concreto Armado

A ABNT NBR 6118:2014 define e justifica a flecha diferida como decorrência das cargas de longa duração em função da fluência, sendo aproximadamente o produto da flecha imediata (α_I) pelo fator α_f definido como segue:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} \quad (33)$$

em que a taxa de armadura comprimida é definida como:

$$\rho' = \frac{A'_s}{A_c} \quad (34)$$

sendo:

A'_s a área de armadura comprimida;

A_c a área de concreto.

A variação do coeficiente em função do tempo é dada pela equação

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (35)$$

sendo $\xi(t)$ dado por:

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (36)$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses} \quad (37)$$

com,

t o tempo em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

t_0 a idade, em meses, relativa à data de aplicação de carga de longa duração.

Multiplicando a flecha imediata por $(1 + \alpha_f)$, encontra-se a flecha total (α_t).

4.5.10 Comparativo entre as versões de Norma ABNT NBR 6118:2003 e ABNT NBR 6118:2014 para o dimensionamento de vigas

Conforme definido pela própria ABNT NBR 6118, a norma estabelece os requisitos básicos exigíveis para o projeto de estruturas de concreto simples, armado e protendido, garantindo, desta maneira, qualidade e segurança nos projetos da construção civil.

Com o passar do tempo, pode acontecer que os métodos construtivos se alterem por motivos culturais ou técnicos, e que o estabelecido em norma deixe de fazer sentido perante aos novos hábitos. Dessa maneira, surge a necessidade de uma atualização de norma, cancelando e substituindo a versão anterior, para atender a demanda do mercado da construção civil.

Em 2007, a ABNT NBR 6118 – Projetos de Estruturas de Concreto, sofreu alterações, porém, os itens significativos para as análises apresentadas neste trabalho permaneceram conforme a ABNT NBR 6118:2003, portanto, a nível de comparação, será trabalhado apenas com as versões 2003 e 2014 da referida norma.

Dito isso, as atualizações relacionadas ao cálculo de dimensionamento de vigas feitas na ABNT NBR 6118:2014 em comparação com a ABNT NBR 6118:2003, estão relatadas a seguir.

De acordo com a ABNT NBR 6118:2003, a posição da linha neutra no ELU, diferentemente do que tratado no item 4.5.3 deste trabalho que tem como referência a ABNT NBR 6118:2014, deve obedecer os seguintes limites:

- a) $\frac{x}{d} \leq 0,50$ para concretos com $f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$;
- b) $\frac{x}{d} \leq 0,40$ para concretos com $f_{ck} > 35 \text{ MPa}$.

A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU, ou seja, quanto menor for $\frac{x}{d}$, tanto maior será essa capacidade. Como visto anteriormente, a ABNT NBR 6118:2014 restringe essa relação a um menor valor, logo, atua de maneira mais rígida contra o movimento de rotação dos elementos do que a versão mais antiga da norma.

De acordo com a ABNT NBR 6118:2003, quando efetuada uma redistribuição, reduzindo-se um momento fletor M para δM , em uma determinada seção transversal, a relação entre o coeficiente de redistribuição δ e a posição da linha neutra nessa seção $\frac{x}{d}$, para o momento reduzido δM , deve ser dada por:

- a) $\delta \geq 0,44 + 1,25 \frac{x}{d}$ para concretos com $f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$; ou
- b) $\delta \geq 0,56 + 1,25 \frac{x}{d}$ para concretos com $f_{ck} > 35 \text{ MPa}$.

Em 2014, as relações acima mencionadas foram atualizadas para:

- a) $\delta \geq 0,44 + 1,25 \frac{x}{d}$ para concretos com $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$; ou
- b) $\delta \geq 0,56 + 1,25 \frac{x}{d}$ para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$;

O coeficiente de redistribuição deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:

- a) $\delta \geq 0,90$ para estrutura de nós móveis;
- b) $\delta \geq 0,75$ em qualquer outro caso,

permanecendo inalterado na ABNT NBR 6118:2014.

Da mesma forma que apresentado no item 4.5.5, a ABNT NBR 6118:2003 expõe que a armadura mínima de tração em elementos estruturais armados ou protendidos, pode ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo dado pela expressão (20), respeitando a taxa mínima absoluta de 0,15%. Apesar disso, a Figura 9 retirada da ABNT NBR 6118:2003, sofreu uma redução na

versão mais recente da norma, que passou a trazer apenas as taxas mínimas de armadura de flexão para vigas de seção transversal retangular.

Figura 9 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas conforme a ABNT NBR 6118:2003.

Forma da seção	Valores de $\rho_{\min}^{1)}$ ($A_{s,\min}/A_c$) %							
	f_{ck} ω_{\min}	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288
T (mesa comprimida)	0,024	0,150	0,150	0,150	0,150	0,158	0,177	0,197
T (mesa tracionada)	0,031	0,150	0,150	0,153	0,178	0,204	0,229	0,255
Circular	0,070	0,230	0,288	0,345	0,403	0,460	0,518	0,575

¹⁾ Os valores de ρ_{\min} estabelecidos nesta tabela pressupõem o uso de aço CA-50, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$. Caso esses fatores sejam diferentes, ρ_{\min} deve ser recalculado com base no valor de ω_{\min} dado.

NOTA Nas seções tipo T, a área da seção a ser considerada deve ser caracterizada pela alma acrescida da mesa colaborante.

Fonte: ABNT NBR 6118:2003.

Neste trabalho optou-se por realizar os estudos considerando um concreto comum de $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$. Além disso, como a seção transversal trapezoidal estudada não é apresentada, para efeitos de simulação numérica e de maneira a se trabalhar a favor da segurança foi utilizada a maior taxa (0,23%) referente ao f_{ck} estudado, quando utilizada a ABNT NBR 6118:2003 como referência.

Também, na ABNT NBR 6118:2003, a resistência à tração média é dada por:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (38)$$

para todas as classes de concreto, com $f_{ct,m}$ e f_{ck} em megapascal (MPa), enquanto na ABNT NBR 6118:2014 essa expressão é válida somente para concretos de classes até C50, sendo utilizada a expressão:

$$f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) \quad (39)$$

para concretos de classes C55 até C90, com $f_{ct,m}$ e f_{ck} em MPa.

Outra atualização ocorrida na norma trata do valor do módulo de elasticidade, anteriormente estimado por:

$$E_{CI} = 5600 \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

e o módulo de elasticidade secante (E_{CS}) por:

$$E_{CS} = 0,85 \cdot E_{CI} \quad (41)$$

nos quais f_{ck} , E_{CS} e E_{CI} são dados em *MPa*.

O módulo de elasticidade inicial e o módulo de elasticidade secante dados pela ABNT NBR 6118:2014, estão relacionados no item 4.5.9.2 deste trabalho.

Algumas atualizações apresentadas não influenciam na análise de vigas realizadas nesse trabalho, podendo ocasionar pouca diferença entre os resultados das situações simuladas para comparar as versões em questão da ABNT NBR 6118 – Projetos de Estruturas de Concreto.

Vale ressaltar que, para o comparativo entre as duas versões da norma, não serão realizadas verificações de flecha.

4.6 Formulação do Problema

Após o exposto para a função objetivo e restrições de equilíbrio e da versão de norma ABNT NBR 6118:2014, é possível apresentar matematicamente a formalização do problema da otimização matemática da seção transversal de vigas trapezoidais de concreto armado, dado por:

Minimizar:

$$F(b_w, b_f, h, A_S, A'_S) = \left[\frac{(b_f + b_w) \cdot h}{2} \right] \cdot C_C + (A_S + A'_S) \cdot \rho_S \cdot C_S + \left[b_w + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{b_f - b_w}{2} \right)^2 + h^2} \right] \cdot C_f \quad (42)$$

Sujeito a:

$$A_S \cdot \sigma_{sd} - A'_S \cdot \sigma'_{sd} - 2 \cdot \left[\left(\frac{b_f - b_w(y)}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \right] - b_w(y) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} = 0 \quad (43)$$

$$M_d = (A'_S \cdot \sigma'_{sd}) \cdot (d - d') + 2 \cdot \left(\frac{b_f - b_w(y)}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot z_1 + b_w(y) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot z_2 \quad (44)$$

$$\frac{x}{d} \leq 0,45 \quad (45)$$

$$b_w > 12 \text{ cm} \quad (46)$$

$$\frac{L}{h} \geq 2 \quad (47)$$

$$A_S \geq \rho_{min} \cdot A_C \quad (48)$$

$$A_S + A'_S \leq 4\% \cdot A_C \quad (49)$$

$$bf \geq \frac{L}{50} \quad (50)$$

$$bf \geq \beta_{fl} \cdot h. \quad (51)$$

sendo (43) e (44) restrições de equilíbrio estático, (45) relacionada às condições de ductilidade e (46), (47), (48), (49), (50) e (51) associadas às dimensões e valores limites para vigas. Vale destacar que com a inclusão das restrições associadas às restrições de equilíbrio e condições de ductilidade, o problema passou a ser definido por um problema não linear definido por 6 variáveis.

5 METODOLOGIA

Para alcançar o menor custo de produção da viga de concreto armado de seção transversal trapezoidal, alguns estágios foram concluídos.

A princípio foi definida a função custo, que corresponde a função a ser minimizada neste trabalho. A partir desta, expôs-se as variáveis envolvidas no cálculo do custo de produção da viga de concreto armado da seção em pauta e que foram computadas no programa implementado.

Posteriormente, foram definidas, a partir da ABNT NBR 6118:2014, limitações que se apliquem ao problema estudado, que foram escritas como equações e/ou inequações matemáticas, de maneira a respeitar o estabelecido pela norma.

Os custos individuais de concreto, aço e fôrma foram definidos a partir da tabela SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil, região de Curitiba e data de referência técnica em 15 de agosto de 2020.

Para os gastos com concreto, foi adotado o valor de R\$347,68/m³ encontrado no item “concretagem de vigas e lajes com fck de 20 MPa, para lajes maciças ou nervuradas com uso de bomba em edificação com área média de lajes maior que 20 m² - lançamento, adensamento e acabamento”.

Já para o custo do aço, foi empregado o item “armação de pilar ou viga de uma estrutura convencional de concreto armado em um edifício de múltiplos pavimentos utilizando aço CA-50 - montagem”, porém devido ao custo variar em função dos diâmetros, sendo o menor 6,3 mm e o maior 25,0 mm, houve a necessidade de calcular a média entre os valores apresentados, obtendo o custo de R\$6,63/kg.

Em se tratando das formas, o item “montagem e desmontagem de forma de viga, escoramento com pontalete de madeira, pé-direito simples, em madeira serrada, 4 utilizações” apresenta o valor de R\$87,91/m².

Então, realizou-se um estudo bibliográfico a respeito dos métodos de minimização matemática com o objetivo de escolher o que melhor atenda às necessidades da otimização em questão. Concluiu-se que a implementação computacional seria feita usando a rotina fmincon presente na biblioteca de otimização do software Matlab, sendo o Método de Pontos Interiores definido como o método de otimização interna da rotina utilizada.

A otimização foi obtida através de uma solução iterativa, criando estimativas refinadas até encontrar a solução apropriada.

As configurações utilizadas no software estão apresentadas no Quadro 1. Tais parâmetros se mostraram satisfatórios em testes numéricos, e foram fixados no programa.

Quadro 1 - Configurações utilizadas no software.

Configurações	Valores atribuídos
Número máximo de avaliações de funções	30000
Número máximo de iterações	10000
Tolerância mínima	1,00E-10

Fonte: Autoria própria (2020).

Para a implementação computacional usando a rotina fmincon, as variáveis foram renomeadas de tal maneira:

$x_1 = b_f$ maior largura da seção transversal da viga;

$x_2 = b_w$ menor largura da seção transversal da viga;

$x_3 = d$ altura útil da seção transversal da viga;

$x_4 = A_s$ área de armadura tracionada na seção da viga;

$x_5 = A'_s$ área de armadura comprimida na seção da viga;

$x_6 = x$ profundidade da linha neutra;

e como variáveis auxiliares:

$x_7 = z_1$ distância vertical entre a resultante de compressão proporcionada pelo concreto comprimido na área A_{c1} da seção transversal e a resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada;

$x_8 = z_2$ distância vertical entre a resultante de compressão proporcionada pelo concreto comprimido na área A_{c2} da seção transversal e a resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada;

$x_9 = b_w(y)$ dimensão da seção transversal dependente da altura da linha neutra.

Logo, tem-se que a função custo pode ser escrita como segue:

Minimizar:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left[\frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + d')}{2} \right] \cdot C_C + (x_4 + x_5) \cdot \rho_S \cdot C_S + \left[x_2 + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2 + (x_3 + d')^2} \right] \cdot C_f \quad (52)$$

Sujeito à:

$$x_4 \cdot \sigma_{sd} - x_5 \cdot \sigma'_{sd} - 2 \cdot \left[\left(\frac{x_1 - x_9}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x_6 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \right] - x_9 \cdot 0,8 \cdot x_6 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} = 0 \quad (53)$$

$$(x_5 \cdot \sigma'_{sd}) \cdot (x_3 - d') + 2 \cdot \left(\frac{x_1 - x_9}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x_6 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot x_7 + x_9 \cdot 0,8 \cdot x_6 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot x_8 - M_d = 0 \quad (54)$$

$$\frac{x_6}{x_3} \leq 0,45 \quad (55)$$

$$x_2 > 12 \text{ cm} \quad (56)$$

$$\frac{L}{(x_3 + d')} \geq 2 \quad (57)$$

$$x_4 \geq \rho_{\min} \cdot \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + d')}{2} \quad (58)$$

$$x_4 + x_5 \leq 4\% \cdot \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + d')}{2} \quad (59)$$

$$x_1 \geq \frac{L}{50} \quad (60)$$

$$x_1 \geq \beta_{fl} \cdot (x_3 + d'). \quad (61)$$

Ao solucionar o problema matemático, computacionalmente, o software retorna como solução ótima do problema um ponto de mínimo local, satisfazendo as restrições.

Para efeitos comparativos, foram implementados três algoritmos na realização deste trabalho. Primeiramente, dois algoritmos desconsiderando as verificações de flecha impostas pelas versões de norma, sendo um deles de acordo com as restrições estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2003 e o outro pela versão mais recente ABNT NBR 6118:2014, com o intuito de fazer uma análise entre as variáveis otimizadas pelas duas versões distintas.

Posteriormente, foi realizada uma terceira implementação abordando novamente as restrições impostas pela versão ABNT NBR 6118:2014, porém, agora implementando as restrições e verificações de flecha.

Pode-se dizer que este último trata-se do algoritmo mais completo, pois além de considerar uma versão mais atual da ABNT NBR 6118, é acrescido da verificação de flecha. Logo, na sequência, é descrito apenas o terceiro algoritmo implementado.

Para que sejam feitas as verificações de flecha, os valores de x_1 , x_2 e x_3 , foram fixados respectivamente como *sol1*, *sol2* e *sol3*.

A partir da seção transversal, agora já otimizada, o valor da flecha total é calculado e verificado de acordo com as subseções 4.5.9.2 (Flecha Imediata em Vigas de Concreto Armado) e 4.5.9.3 (Flecha Diferida no Tempo para Vigas de Concreto Armado). Caso o valor de flecha total seja menor que o valor da flecha permitida, encerra-se o algoritmo e os valores das variáveis já encontrados são retornados pelo programa, admitindo-se que esses são os valores otimizados para a viga trapezoidal submetida ao momento solicitante em questão. Caso contrário, o software inicia um novo processo iterativo no qual permanecem fixados os valores de *sol1* e *sol2* enquanto que para *sol3* é incrementado um centímetro a cada iteração para que uma nova otimização seja realizada.

Portanto, nessa segunda fase da otimização, três variáveis passam a ser constantes no problema:

$$b_f = sol1 \quad (62)$$

$$b_w = sol2 \quad (63)$$

$$sol3 = sol3 + 0,01, \quad (64)$$

e a função a ser minimizada nesse processo iterativo passa a ser escrita como:

Minimizar:

$$F(y_1, y_2, y_3) = \left[\frac{(sol1 + sol2) \cdot (sol3 + d')}{2} \right] \cdot C_c + (y_1 + y_2) \cdot \rho_s \cdot C_s$$

$$+ \left[sol2 + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{sol1 - sol2}{2} \right)^2 + (sol3 + d')^2} \right] \cdot C_f$$
(65)

Sujeito à:

$$y_1 \cdot \sigma_{sd} - y_2 \cdot \sigma'_{sd} - 2 \cdot \left[\left(\frac{sol1 - y_6}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot y_3 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \right] - y_6 \cdot 0,8 \cdot y_3 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} = 0$$
(66)

$$M_d = (y_2 \cdot \sigma'_{sd}) \cdot (sol3 - d') + 2 \cdot \left(\frac{sol1 - y_6}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot y_3 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot y_4 + y_6 \cdot 0,8 \cdot y_3 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot y_5$$
(67)

$$\frac{y_3}{sol3} \leq 0,45$$
(68)

$$sol2 > 12 \text{ cm}$$
(69)

$$\frac{L}{(sol3 + d')} \geq 2$$
(70)

$$y_1 \geq \rho_{min} \cdot \frac{(sol1 + sol2) \cdot (sol3 + d')}{2}$$
(71)

$$y_1 + y_2 \leq 4\% \cdot \frac{(sol1 + sol2) \cdot (sol3 + d')}{2}$$
(72)

$$sol1 \geq \frac{L}{50}$$
(73)

$$sol1 \geq \beta_{fl} \cdot (sol3 + d'),$$
(74)

sendo y_1, y_2, y_3 as variáveis antes representadas por x_4, x_5, x_6 e as variáveis auxiliares x_7, x_8, x_9 representadas por y_4, y_5, y_9 , respectivamente.

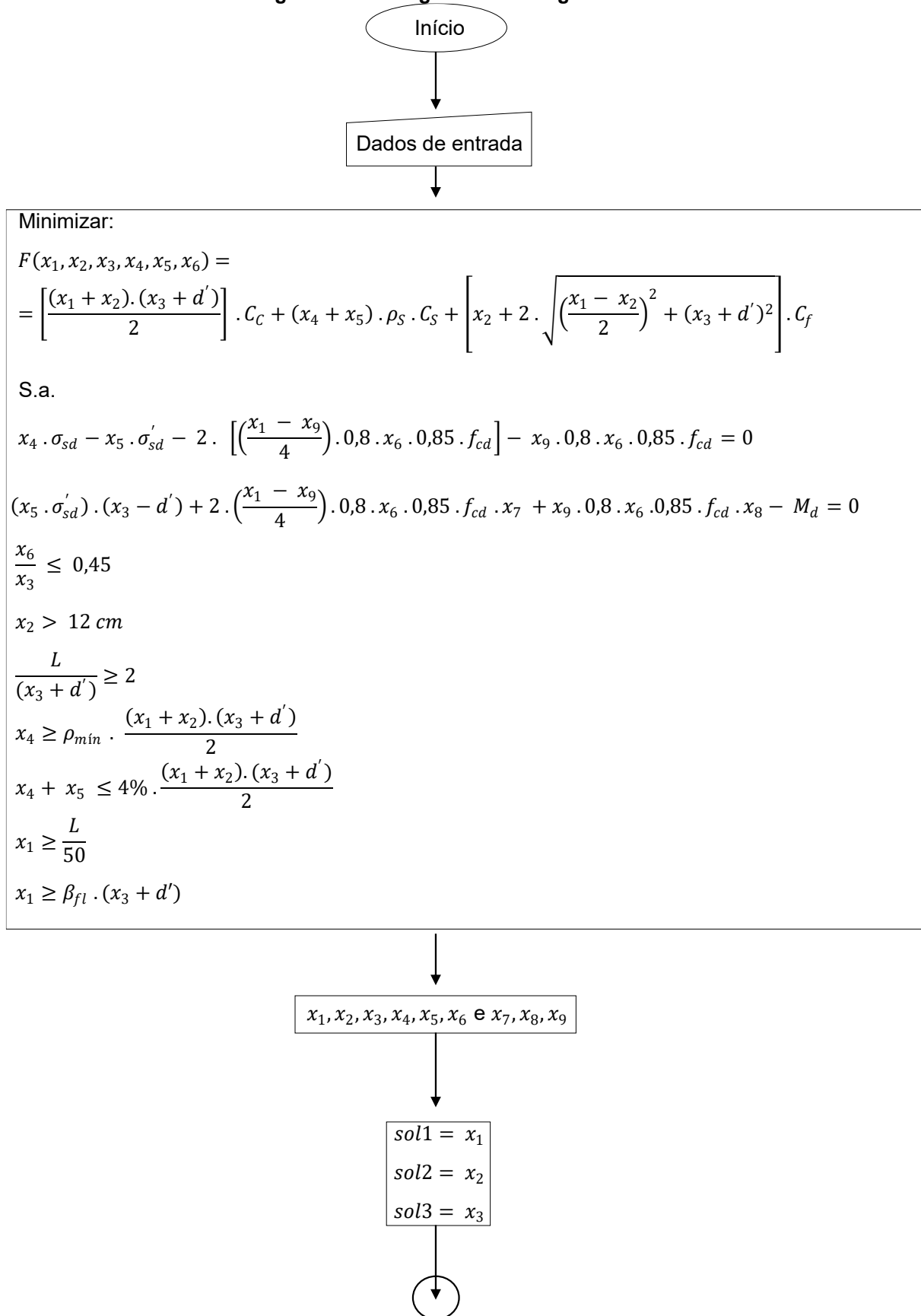
Este processo iterativo é executado pelo programa até que se defina a solução ótima que satisfaça a verificação da flecha, atendendo as restrições pré estabelecidas.

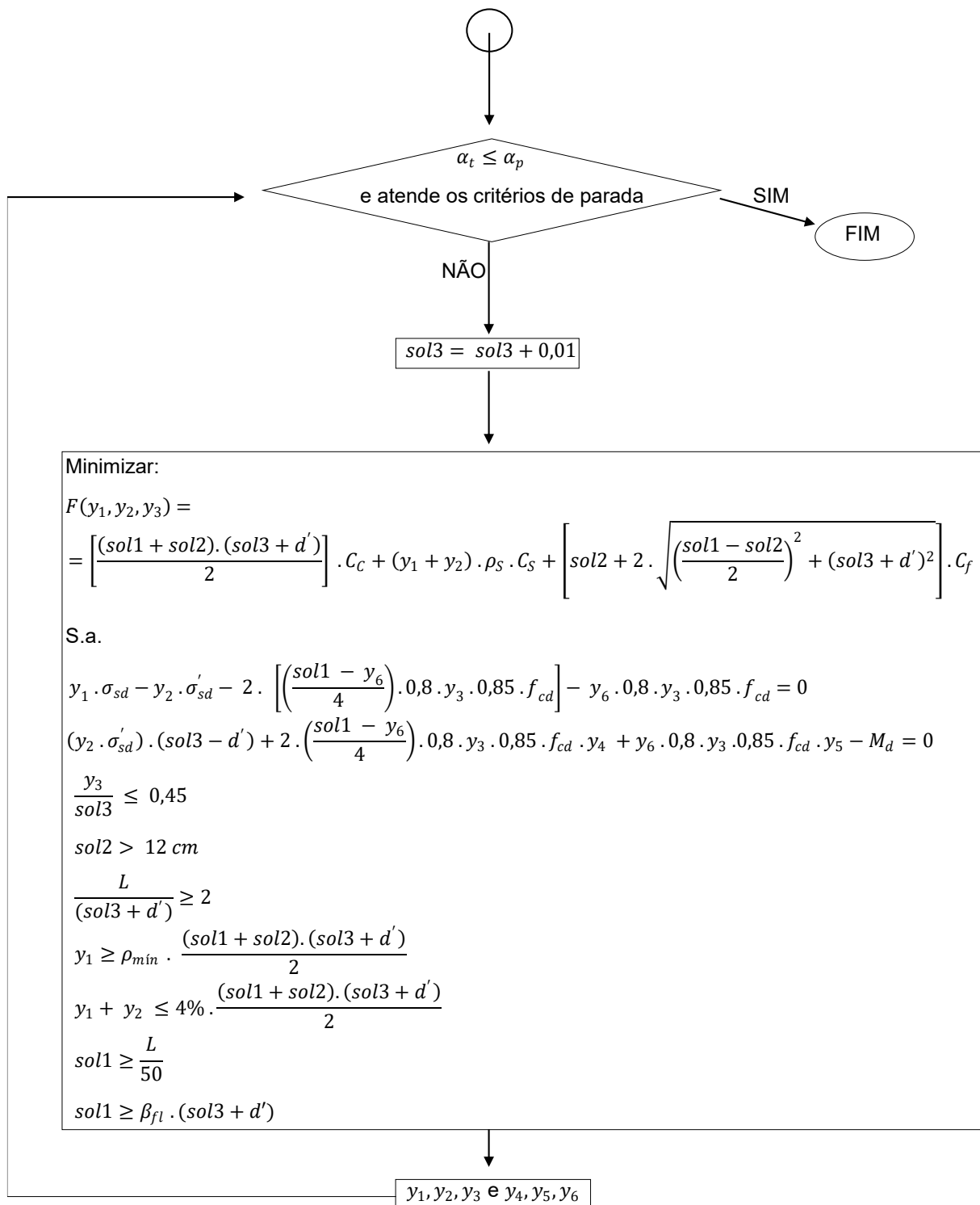
O procedimento descrito pode ser melhor visualizado no fluxograma apresentado na Figura 10.

Vale destacar que com o intuito de padronização dos resultados, o algoritmo implementado respeita o Sistema Internacional de Unidades, sendo unidades de kilonewton (kN) para forças e metro (m) para as medidas de comprimento.

O algoritmo está disponível no Apêndice A deste trabalho.

Figura 10 - Fluxograma do código utilizado.





Fonte: Autoria própria (2020).

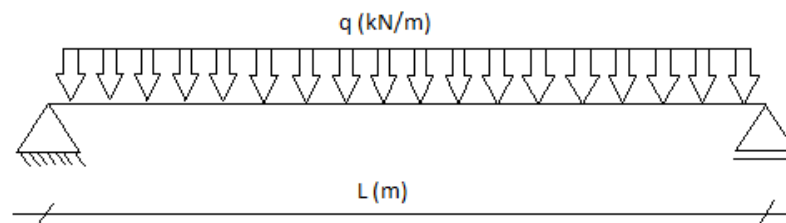
Quando todas as equações e inequações de restrições e as verificações necessárias são satisfeitas, assume-se os valores finalmente encontrados como sendo referentes à seção ótima da viga de seção trapezoidal de concreto armado.

Considerando os fatos mencionados é ainda válido ressaltar que todo o projeto está vinculado com a ABNT NBR 6118:2014, assegurando que a estrutura atenda o desempenho esperado.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados aqui apresentados são referentes a simulações numéricas realizadas em uma viga biapoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído em todo o seu comprimento, como ilustrado pela Figura 11.

Figura 11 - Viga biapoiada com carregamento q (kN/m) uniformemente distribuído.



Fonte: Autoria própria (2020).

Os dados de entrada utilizados na implementação estão apresentados no Quadro 2.

Quadro 2 - Dados de entrada.

Parâmetros	Valores atribuídos
L	6 m
f_{ck}	20 MPA
E_S	210000 MPA
Tipo de aço	CA-50
ρ_s	7859 kg/m ³
f_{yk}	500 MPA
d'	3 cm

Fonte: Autoria própria (2020).

6.1 Comparativo entre a ABNT NBR 6118:2003 e ABNT NBR 6118:2014

Para a obtenção dos resultados apresentados neste item, foram implementados dois algoritmos no software matemático, sendo um deles de acordo com a ABNT NBR 6118:2003 e o outro em consonância com a versão atualizada, ABNT NBR 6118:2014.

Também, para este comparativo, foram utilizados os mesmos valores de custos individuais com referência já citados neste trabalho.

Cabe o ressaltado que, nesta etapa, as verificações de flecha não foram implementadas. Dito isso, segue na Tabela 1 os resultados encontrados com o dimensionamento ótimo, feito de acordo com a ABNT NBR 6118:2003, usando o algoritmo proposto. Os dados se referem à variação de M_d entre 50 e 1200, com intervalos de 50kN.m. Vale destacar que o tempo de execução das rotinas, para cada caso, foi relativamente pequeno, sendo em média de 12 segundos.

Tabela 1 - Otimização conforme ABNT NBR 6118:2003 sem verificação de flecha.

M_d (kN.m)	b_f (cm)	b_w (cm)	d (cm)	A_s (cm ²)	A'_s (cm ²)	Armadura total (cm ²)	Custo total (R\$/m)
50	21,45	12	25,42	5,61	4,41E-06	5,61	106,96
100	23,12	12	34,80	8,19	1,11E-07	8,19	143,46
150	23,98	12	41,94	10,19	1,05E-07	10,19	171,44
200	24,53	12	47,96	11,88	4,44E-06	11,88	195,04
250	24,91	12	53,26	13,37	4,44E-08	13,37	215,83
300	25,2	12	58,06	14,71	2,22E-07	14,71	234,63
350	25,95	12	61,89	16,10	8,60E-07	16,10	251,93
400	27,13	12	64,84	17,56	4,07E-08	17,56	268,12
450	28,22	12	67,55	18,95	7,76E-07	18,95	283,40
500	29,25	12	70,14	20,25	3,77E-06	20,25	297,94
550	30,27	12	72,68	21,44	3,58E-08	21,44	311,82
600	31,23	12	75,09	22,58	7,20E-07	22,58	325,14
650	32,15	12	77,38	23,69	3,53E-06	23,69	337,97
700	33,02	12	79,55	24,76	6,95E-07	24,76	350,35
750	33,85	12	81,63	25,80	3,42E-08	25,80	362,64
800	34,65	12	83,62	26,81	6,75E-07	26,81	373,97
850	35,59	12	85,90	27,56	4,21E-03	27,56	385,29
900	36,15	12	87,38	28,77	3,29E-08	28,77	396,31
950	36,86	12	89,16	29,72	3,26E-06	29,72	407,06
1000	37,55	12	90,88	30,65	1,59E-07	30,65	417,56
1050	38,21	12	92,54	31,57	1,56E-07	31,57	427,83
1100	38,86	12	94,16	32,46	1,56E-07	32,46	437,88
1150	39,49	12	95,73	33,34	1,57E-05	33,34	447,74
1200	40,11	12	97,29	34,18	1,45E-05	34,18	457,40

Fonte: Autoria própria (2020).

Do mesmo modo, agora seguindo as exigências da ABNT NBR 6118:2014, tem-se os resultados apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Otimização conforme ABNT NBR 6118:2014 sem verificação de flecha.

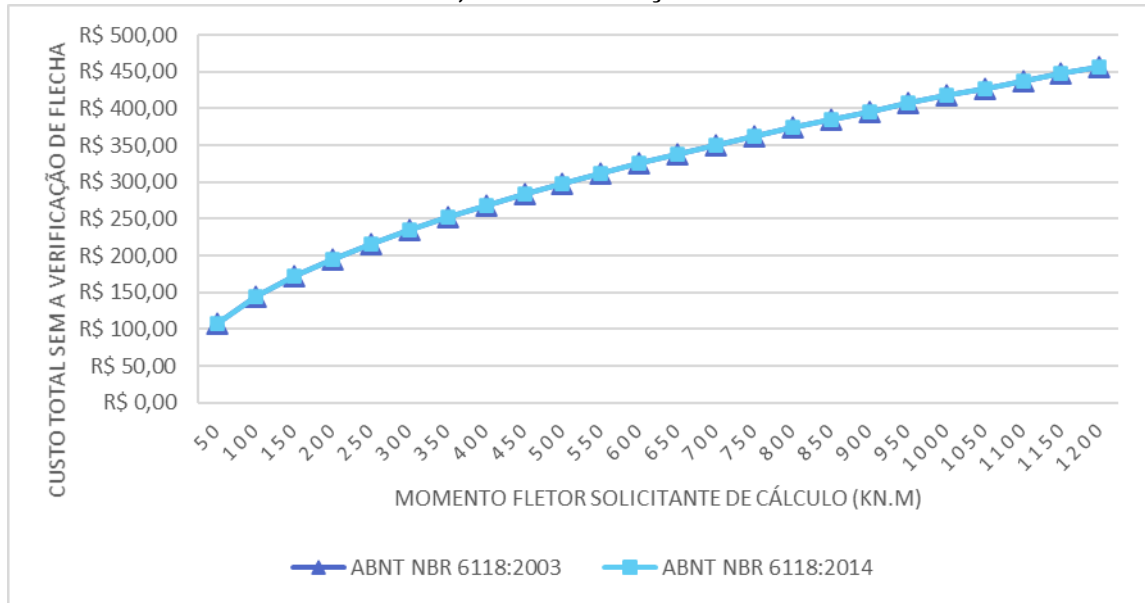
M_d (kN.m)	b_f (cm)	b_w (cm)	d (cm)	A_s (cm ²)	A'_s (cm ²)	Armadura total (cm ²)	Custo total (R\$/m)
50	22,55	12	25,78	5,40	2,41E-07	5,40	107,43
100	24,45	12	35,18	7,91	2,37E-07	7,91	143,97
150	25,44	12	42,33	9,86	2,34E-07	9,86	171,99
200	26,07	12	48,35	11,51	2,32E-07	11,51	195,61
250	26,52	12	53,65	12,97	4,63E-06	12,97	216,42
300	26,85	12	58,44	14,28	4,62E-08	14,28	235,23
350	27,11	12	62,85	15,49	4,61E-08	15,49	252,54
400	27,78	12	66,45	16,74	2,24E-05	16,74	268,66
450	28,89	12	69,23	18,08	4,26E-08	18,08	283,87
500	29,92	12	71,80	19,36	2,03E-05	19,36	298,32
550	30,88	12	74,21	20,60	1,09E-07	20,60	312,14
600	31,79	12	76,48	21,81	3,80E-08	21,81	325,40
650	32,65	12	78,62	22,98	3,70E-08	22,98	338,17
700	33,46	12	80,66	24,12	3,61E-06	24,12	350,50
750	34,24	12	82,60	25,23	3,53E-06	25,23	362,46
800	34,98	12	84,46	26,31	3,46E-06	26,31	374,06
850	35,69	12	86,24	27,38	3,40E-06	27,38	385,35
900	36,38	12	87,96	28,42	3,34E-06	28,42	396,35
950	37,04	12	89,61	29,44	3,27E-08	29,44	407,08
1000	37,68	12	91,20	30,45	3,17E-08	30,45	417,57
1050	38,30	12	92,75	31,43	3,02E-08	31,43	427,83
1100	38,90	12	94,26	32,40	2,84E-08	32,40	437,88
1150	39,50	12	95,76	33,32	2,78E-08	33,32	447,74
1200	40,10	12	97,26	34,20	2,86E-08	34,20	457,41

Fonte: Autoria própria (2020).

É possível verificar, a partir dos resultados apresentados na Tabela 1 e Tabela 2 que, em média, o dimensionamento das vigas segundo a versão ABNT NBR 6118:2003 é 0,1% mais econômico que o dimensionamento realizado considerando o exposto na versão de norma mais recente. Vale ressaltar que, neste trabalho, a disposição das barras na seção transversal necessárias para se alcançar a área de aço projetada não foi analisada.

Os custos totais apresentados nas Tabelas 1 e 2, foram organizados no Gráfico 1, para uma melhor visualização referente ao baixo índice de economia.

Gráfico 1 – Comparação entre os custos totais da ABNT NBR 6118:2003 e ABNT NBR 6118:2014, sem a verificação de flecha.



Fonte: Autoria própria (2020).

Nota-se que a diferença entre as duas versões da norma nas simulações realizadas neste trabalho é baixa a ponto da linha representativa da ABNT NBR 6118:2003 quase ocultar-se por completo pela linha que representa a versão mais recente da norma.

Como exposto no item 4.5.10, a ABNT NBR 6118:2003 traz uma relação $\frac{x}{d}$ superior ao recomendado na sua versão atualizada, ou seja, o dimensionamento com data mais recente exige uma altura útil da peça (d) maior, com uma altura menor de área comprimida (x), de maneira que a capacidade de compressão do concreto seja menos explorada havendo a necessidade de maior uso de concreto e fôrma.

A Tabela 3 apresenta um comparativo entre as posições da linha neutra encontradas pelo algoritmo, conforme as duas versões de norma utilizadas.

Tabela 3 - Relação entre a altura útil e a posição da linha neutra da seção conforme a ABNT NBR 6118 de 2003 e 2014.

M_d (kN.m)	ABNT NBR 6118:2003			ABNT NBR 6118:2014		
	x (cm)	d (cm)	$\frac{x}{d}$	x (cm)	d (cm)	$\frac{x}{d}$
50	12,71	25,42	0,50	11,60	25,78	0,45
100	17,40	34,80	0,50	15,83	35,18	0,45
150	20,97	41,94	0,50	19,05	42,33	0,45
200	23,98	47,96	0,50	21,75	48,35	0,45
250	26,63	53,26	0,50	24,14	53,65	0,45
300	29,03	58,06	0,50	26,30	58,44	0,45
350	30,94	61,89	0,50	28,28	62,85	0,45
400	32,42	64,84	0,50	29,90	66,46	0,45
450	33,77	67,55	0,50	31,15	69,23	0,45
500	34,92	70,14	0,50	32,31	71,80	0,45
550	35,79	72,68	0,49	33,39	74,21	0,45
600	36,59	75,09	0,49	34,41	76,48	0,45
650	37,32	77,38	0,48	35,38	78,62	0,45
700	38,01	79,55	0,48	36,29	80,66	0,45
750	38,67	81,63	0,47	37,17	82,60	0,45
800	39,30	83,62	0,47	38,00	84,46	0,45
850	39,29	85,90	0,46	38,81	86,47	0,45
900	40,46	87,38	0,46	39,54	87,98	0,45
950	41,01	89,16	0,46	40,32	89,61	0,45
1000	41,54	90,88	0,46	41,04	91,20	0,45
1050	42,04	92,54	0,45	41,73	92,75	0,45
1100	42,53	94,16	0,45	42,32	94,29	0,45
1150	43,00	95,73	0,45	42,96	95,76	0,45
1200	43,40	97,29	0,45	43,45	97,26	0,45

Fonte: Autoria própria (2020).

Através do comparativo entre as duas normas utilizadas, proporcionado pela Tabela 3, percebe-se a menor relação $\frac{x}{d}$, em maioria, apresentada pela versão mais recente da norma. Isso implica em um menor aproveitamento de área de resistência aos esforços solicitantes de compressão, ocasionando maiores dimensões na seção transversal e, dessa forma, um maior custo com insumos, conforme destacado anteriormente.

6.2 Comparativo entre o dimensionamento com e sem a verificação da flecha conforme a ABNT NBR 6118:2014

Neste item é realizada uma comparação entre os resultados obtidos a partir do dimensionamento ótimo considerando e não considerando a verificação de flecha, atendendo ao exposto na versão de norma atual.

Como já exposto anteriormente, a verificação de flecha no algoritmo se dá através de um processo iterativo, após a primeira fase da otimização concluída. Inicialmente é determinada a seção ótima da viga e, caso as características dessa seção não atendam à verificação de flecha, o algoritmo proposto incrementa o valor da altura útil da seção transversal em um centímetro e redimensiona a seção. Uma nova verificação de flecha é realizada ao final do procedimento. Esse processo é continuado até que todas as condições sejam atendidas.

Os valores alcançados com a minimização de acordo com ABNT NBR 6118:2014, antes da flecha ser verificada já apresentados anteriormente, estão complementados na Tabela 4 com os dados que se referem à $M_d < 50kN.m$, para uma melhor análise da verificação de flecha. Já que, posteriormente, verificou-se que a flecha é um condicionante relevante para momentos solicitantes inferiores aos valores analisados no item 6.1.

Tabela 4 - Otimização sem verificação da flecha conforme a ABNT NBR 6118:2014.

M_d (kN.m)	b_f (cm)	b_w (cm)	d (cm)	A_s (cm ²)	A'_s (cm ²)	Armadura total (cm ²)	Custo total (R\$/m)
5	16,36	12	9,39	1,48	1,64E-06	1,48	46,53
10	18,02	12	12,73	2,19	2,07E-07	2,19	58,34
15	19,11	12	15,19	2,75	2,25E-07	2,75	67,33
20	19,91	12	17,23	3,24	2,33E-07	3,24	74,88
25	20,55	12	18,99	3,67	2,37E-07	3,67	81,51
30	21,08	12	20,58	4,06	2,39E-07	4,06	87,49
35	21,52	12	22,02	4,43	2,41E-05	4,43	92,99
40	21,91	12	23,36	4,77	2,41E-05	4,77	98,10
45	22,25	12	24,61	5,09	2,41E-05	5,09	102,90
50	22,55	12	25,78	5,40	2,41E-07	5,40	107,43
100	24,45	12	35,18	7,91	2,37E-07	7,91	143,97
150	25,44	12	42,33	9,86	2,34E-07	9,86	171,99
200	26,07	12	48,35	11,51	2,32E-07	11,51	195,61
250	26,52	12	53,65	12,97	4,63E-06	12,97	216,42
300	26,85	12	58,44	14,28	4,62E-08	14,28	235,23
350	27,11	12	62,85	15,49	4,61E-08	15,49	252,54
400	27,78	12	66,45	16,74	2,24E-05	16,74	268,66
450	28,89	12	69,23	18,08	4,26E-08	18,08	283,87
500	29,92	12	71,80	19,36	2,03E-05	19,36	298,32
550	30,88	12	74,21	20,60	1,09E-07	20,60	312,14
600	31,79	12	76,48	21,81	3,80E-08	21,81	325,40
650	32,65	12	78,62	22,98	3,70E-08	22,98	338,17
700	33,46	12	80,66	24,12	3,61E-06	24,12	350,50
750	34,24	12	82,60	25,23	3,53E-06	25,23	362,46
800	34,98	12	84,46	26,31	3,46E-06	26,31	374,06
850	35,69	12	86,24	27,38	3,40E-06	27,38	385,35
900	36,38	12	87,96	28,42	3,34E-06	28,42	396,35
950	37,04	12	89,61	29,44	3,27E-08	29,44	407,08
1000	37,68	12	91,20	30,45	3,17E-08	30,45	417,57
1050	38,30	12	92,75	31,43	3,02E-08	31,43	427,83
1100	38,90	12	94,26	32,40	2,84E-08	32,40	437,88
1150	39,50	12	95,76	33,32	2,78E-08	33,32	447,74
1200	40,10	12	97,26	34,20	2,86E-08	34,20	457,41

Fonte: Autoria própria (2020).

Já os valores otimizados de maneira a atender as verificações de flecha, respeitando o estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014 seguem na Tabela 5.

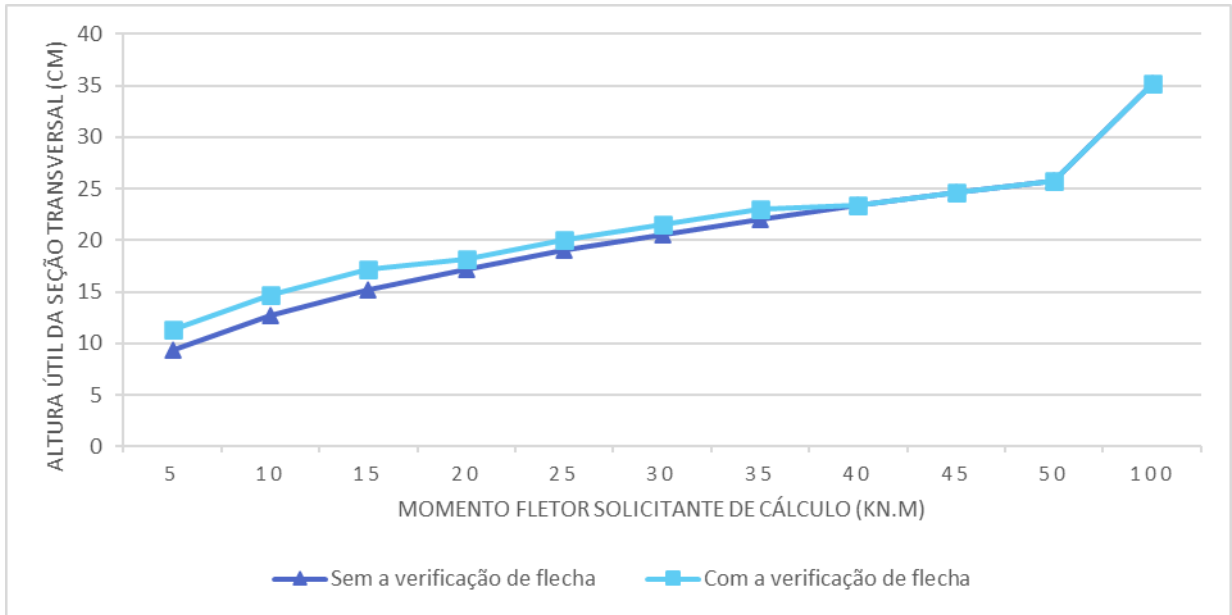
Tabela 5 - Otimização com verificação da flecha conforme ABNT NBR 6118:2014.

M_d (kN.m)	b_f (cm)	b_w (cm)	d (cm)	A_s (cm ²)	A'_s (cm ²)	Armadura total (cm ²)	Custo total (R\$/m)
5	16,36	12	11,39	1,55	2,02E-06	1,55	51,32
10	18,02	12	14,73	2,37	2,18E-06	2,37	63,79
15	19,11	12	17,19	3,03	2,26E-06	3,03	73,33
20	19,91	12	18,23	3,72	3,00E-01	4,02	81,25
25	20,55	12	19,99	4,22	3,63E-01	4,58	88,58
30	21,08	12	21,58	4,68	4,21E-01	5,10	95,20
35	21,52	12	23,02	5,10	4,74E-01	5,57	101,28
40	21,91	12	23,36	4,77	2,41E-05	4,77	98,10
45	22,25	12	24,61	5,09	2,41E-05	5,09	102,90
50	22,55	12	25,78	5,40	2,41E-07	5,40	107,43
100	24,45	12	35,18	7,91	2,37E-07	7,91	143,97
150	25,44	12	42,33	9,86	2,34E-07	9,86	171,99
200	26,07	12	48,35	11,51	2,32E-07	11,51	195,61
250	26,52	12	53,65	12,97	4,63E-06	12,97	216,42
300	26,85	12	58,44	14,28	4,62E-08	14,28	235,23
350	27,11	12	62,85	15,49	4,61E-08	15,49	252,54
400	27,78	12	66,45	16,74	2,24E-05	16,74	268,66
450	28,89	12	69,23	18,08	4,26E-08	18,08	283,87
500	29,92	12	71,80	19,36	2,03E-05	19,36	298,32
550	30,88	12	74,21	20,60	1,09E-07	20,60	312,14
600	31,79	12	76,48	21,81	3,80E-08	21,81	325,40
650	32,65	12	78,62	22,98	3,70E-08	22,98	338,17
700	33,46	12	80,66	24,12	3,61E-06	24,12	350,50
750	34,24	12	82,60	25,23	3,53E-06	25,23	362,46
800	34,98	12	84,46	26,31	3,46E-06	26,31	374,06
850	35,69	12	86,24	27,38	3,40E-06	27,38	385,35
900	36,38	12	87,96	28,42	3,34E-06	28,42	396,35
950	37,04	12	89,61	29,44	3,27E-08	29,44	407,08
1000	37,68	12	91,20	30,45	3,17E-08	30,45	417,57
1050	38,30	12	92,75	31,43	3,02E-08	31,43	427,83
1100	38,90	12	94,26	32,40	2,84E-08	32,40	437,88
1150	39,50	12	95,76	33,32	2,78E-08	33,32	447,74
1200	40,10	12	97,26	34,20	2,86E-08	34,20	457,41

Fonte: Autoria própria (2020).

Até que o momento solicitante de cálculo atinja o valor de 40 kN.m, as dimensões otimizadas não satisfazem a verificação da flecha, ocasionando uma variação nos valores otimizadas até que tal condição seja suprida. No entanto, a partir dessa solicitação, a solução ótima já satisfaz automaticamente as condições de flecha, e, assim, a segunda fase da otimização não é empregada. O Gráfico 2 ilustra a situação supracitada.

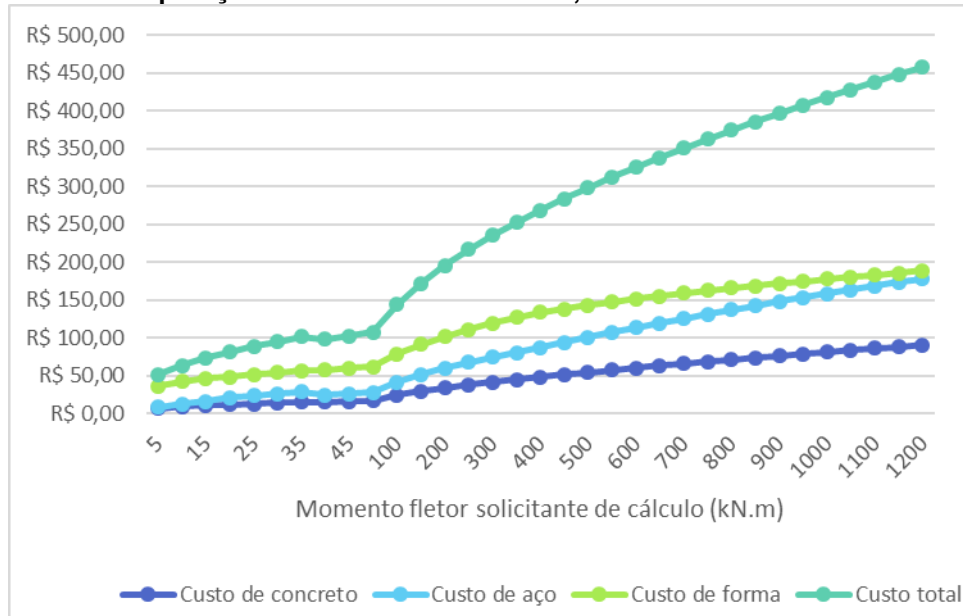
Gráfico 2 - Comparação entre os algoritmos implementados com e sem a verificação de flecha, conforme a ABNT NBR 6118:2014.



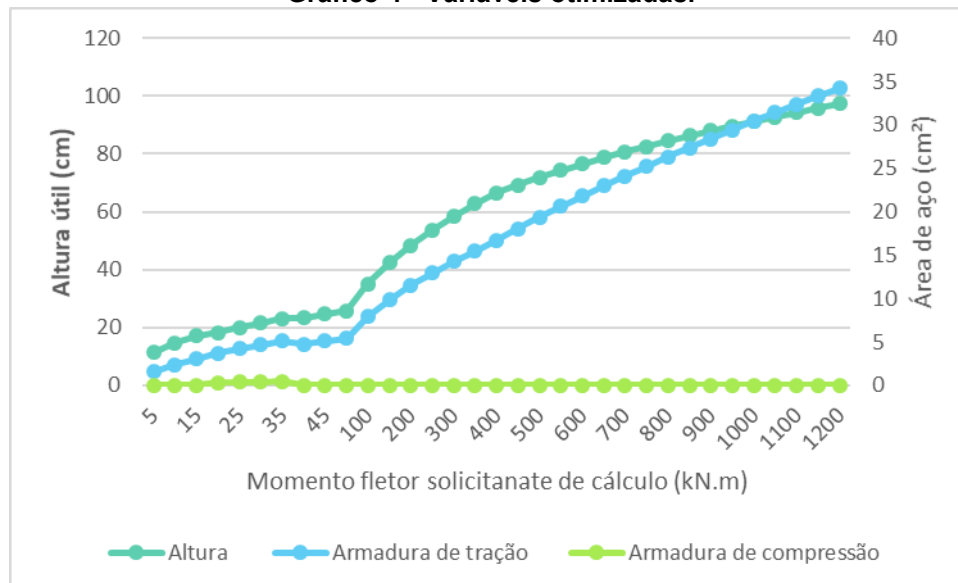
Fonte: Autoria própria (2020).

Nas simulações numéricas realizadas, a verificação da flecha é um condicionante relevante para momentos solicitantes inferiores, porém, conforme o carregamento aumenta, a solução ótima com e sem verificação da flecha passa a ser a mesma. Ou seja, a condição é satisfeita automaticamente e a verificação da flecha não interfere mais nos resultados.

O Gráfico 3, a seguir, apresenta os custos individuais de cada insumo e o custo total de produção da viga em função do momento fletor de cálculo solicitante. Já o Gráfico 4 ilustra a altura útil e a área de aço total em função do momento fletor de cálculo solicitante.

Gráfico 3 - Comparação entre custos individuais, conforme a ABNT NBR 6118:2014.

Fonte: Autoria própria (2020).

Gráfico 4 - Variáveis otimizadas.

Fonte: Autoria própria (2020).

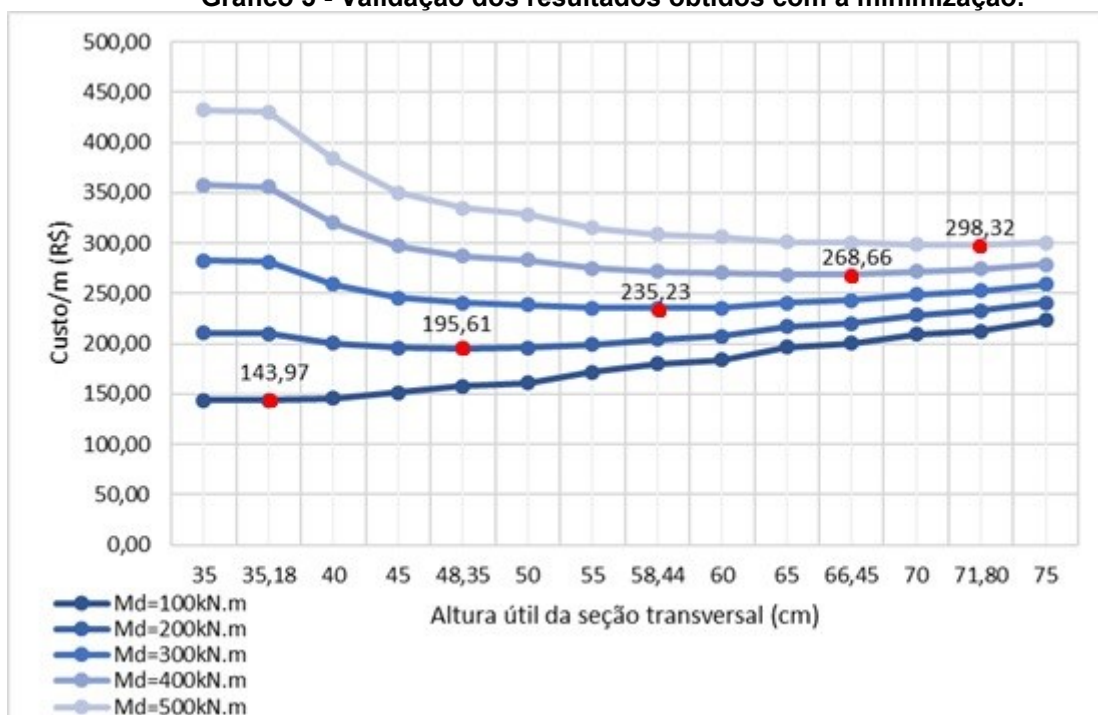
No Gráfico 3 está explícito a contribuição de cada insumo no custo total da execução da viga biapoiada de seção transversal trapezoidal. Fica em evidência o elevado custo de formas na composição do custo total. É um insumo que, tratando-se de concreto armado, não tem como ser descartado, pois há a necessidade de que o elemento seja moldado conforme pré estabelecido em projeto. Em especial nesse caso, uma viga de seção transversal trapezoidal, que por si só já não é uma geometria

usual e popularizada. Vale ressaltar que o item referente a formas retirado da tabela SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil, considera a reutilização do insumo por 4 vezes. Este fato não foi considerado neste trabalho, já que consideramos o custo obtido por uma modelagem inicial.

6.3 Validação dos resultados

Para a validação dos resultados obtidos neste trabalho, observou-se os valores das alturas úteis otimizadas sem verificação da flecha conforme a ABNT NBR 6118:2014 (Tabela 2 e 4) para os momentos de cálculo entre 100 e 500 kN.m. Para cada momento fletor foram simuladas diversas alturas úteis variando de 35 a 75 cm em incrementos de 5cm. A altura útil foi estabelecida como dado de entrada no software implementado que, após sua execução, retornou as demais dimensões da seção transversal, áreas de aço e o custo total para cada seção. O Gráfico 5 apresenta o custo total de acordo com a altura pré-estabelecida da seção transversal da viga em cada momento determinado, sendo destacado, em vermelho, o custo mínimo para cada curva.

Gráfico 5 - Validação dos resultados obtidos com a minimização.



Fonte: Autoria própria (2020).

Validando a proposta deste trabalho, para cada momento de cálculo solicitado, existe apenas um ponto mínimo demonstrado no Gráfico 5, ou seja, cada seção transversal trapezoidal apresenta apenas um ponto de custo mínimo que atenda as restrições estabelecidas.

Para uma melhor visualização, os dados foram também organizados na Tabela 6 que, além de apresentar o valor numérico do ponto de custo mínimo das seções transversais demonstrados pelo Gráfico 5, também detalha as dimensões geométricas e áreas de aço das mesmas e das seções transversais obtidas.

Tabela 6 - Validação dos resultados obtidos com a minimização.

M_d (kN.m)	b_f (cm)	b_w (cm)	d (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	A'_s (cm ²)	Custo total (R\$/m)
100	24,72	12	35,00	38,00	7,95	2,39E-05	R\$ 143,98
100	24,45	12	35,18	38,18	7,91	2,37E-07	R\$ 143,97
100	18,43	12	40,00	43,00	6,98	2,08E-05	R\$ 145,44
100	19,20	12	45,00	48,00	5,83	7,50E-09	R\$ 151,60
100	21,20	12	50,00	53,00	5,03	8,62E-08	R\$ 160,90
100	23,20	12	55,00	58,00	4,46	1,94E-05	R\$ 171,74
100	25,20	12	60,00	63,00	4,02	1,30E-06	R\$ 183,63
100	27,20	12	65,00	68,00	3,67	2,27E-07	R\$ 196,32
100	29,20	12	70,00	73,00	3,38	7,66E-07	R\$ 209,69
100	31,20	12	75,00	78,00	3,14	6,10E-09	R\$ 223,65
200	51,63	12	35,00	38,00	15,85	6,45E-07	R\$ 210,47
200	39,07	12	40,00	43,00	13,89	2,24E-06	R\$ 200,28
200	30,43	12	45,00	48,00	12,36	2,87E-07	R\$ 196,23
200	26,07	12	48,35	51,35	11,51	2,32E-07	R\$ 195,61
200	24,24	12	50,00	53,00	11,14	2,26E-05	R\$ 195,74
200	23,20	12	55,00	58,00	9,76	2,00E-06	R\$ 199,30
200	25,20	12	60,00	63,00	8,56	9,65E-06	R\$ 207,25
200	27,20	12	65,00	68,00	7,69	3,07E-07	R\$ 217,23
200	29,20	12	70,00	73,00	7,01	3,72E-07	R\$ 228,56
200	31,20	12	75,00	78,00	6,45	1,46E-06	R\$ 240,91
300	78,54	12	35,00	38,00	23,75	2,15E-05	R\$ 282,81
300	59,64	12	40,00	43,00	20,79	3,25E-02	R\$ 258,92
300	46,76	12	45,00	48,00	18,50	3,36E-07	R\$ 245,65
300	37,48	12	50,00	53,00	16,67	1,35E-04	R\$ 238,74
300	30,61	12	55,00	58,00	15,17	3,14E-07	R\$ 235,74
300	26,85	12	58,44	61,44	14,28	4,62E-08	R\$ 235,23
300	25,37	12	60,00	63,00	13,92	3,19E-07	R\$ 235,33
300	27,20	12	65,00	68,00	12,19	8,91E-06	R\$ 240,65
300	29,20	12	70,00	73,00	10,94	9,49E-08	R\$ 249,05
300	31,20	12	75,00	78,00	9,98	4,56E-05	R\$ 259,28
400	81,22	12	35,00	38,00	31,01	6,47E+00	R\$ 357,61
400	80,34	12	40,00	43,00	27,71	6,46E-04	R\$ 320,38
400	63,09	12	45,00	48,00	24,64	8,60E-04	R\$ 297,09
400	50,73	12	50,00	53,00	22,19	7,79E-07	R\$ 283,08
400	41,56	12	55,00	58,00	20,19	2,06E-08	R\$ 274,90
400	34,58	12	60,00	63,00	18,52	2,38E-07	R\$ 270,53
400	29,14	12	65,00	68,00	17,12	1,66E-05	R\$ 268,79
400	27,78	12	66,45	69,45	16,74	2,24E-05	R\$ 268,66
400	29,20	12	70,00	73,00	15,31	1,13E-05	R\$ 271,77
400	31,20	12	75,00	78,00	13,78	1,00E-05	R\$ 279,05
500	81,22	12	35,00	38,00	38,20	13,65	R\$ 432,42
500	100,95	12	40,00	43,00	34,62	1,08E-02	R\$ 383,99
500	79,42	12	45,00	48,00	30,78	1,15E-06	R\$ 350,21
500	63,97	12	50,00	53,00	27,72	4,04E-07	R\$ 328,62
500	52,52	12	55,00	58,00	25,21	7,96E-07	R\$ 314,87
500	43,80	12	60,00	63,00	23,12	1,23E-02	R\$ 306,33
500	37,00	12	65,00	68,00	21,37	1,36E-04	R\$ 301,25
500	31,60	12	70,00	73,00	19,86	2,26E-06	R\$ 298,74
500	29,92	12	71,80	74,80	19,36	2,03E-05	R\$ 298,32
500	31,20	12	75,00	78,00	17,95	4,46E-07	R\$ 300,73

Fonte: Autoria própria (2020).

Conforme exposto anteriormente, o algoritmo retornou os resultados esperados e cumpriu com o projetado no início da execução deste trabalho, mostrando numericamente sua viabilidade em fornecer seções transversais otimizadas em concordância com as normas técnicas brasileiras.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise proposta pelo item 6.1, mostra a maior economia trazida pela versão anterior da ABNT NBR 6118, apesar de, como dito anteriormente, algumas atualizações apresentadas não influenciarem na análise de vigas realizadas nesse trabalho, diminuindo a diferença entre os resultados das situações simuladas. As alterações ocorridas na norma são favoráveis à segurança, implicando em um maior custo com materiais que antes eram considerados excessivos.

A verificação de flecha mostra-se relevante para vigas submetidas a carregamentos mais baixos (momentos de cálculo inferiores a 40kN.m), porém, a partir de certo ponto, a otimização já satisfaz automaticamente as verificações de flecha, sem a necessidade de um aumento na altura útil da seção.

Através de uma análise das tabelas e gráficos apresentados anteriormente, observa-se que os objetivos pré estabelecidos foram atingidos. O trabalho apresentou, por meio de exemplos simulados no programa utilizado, a otimização das vigas trapezoidais de concreto armado submetidas a flexão simples.

Também, com a validação dos resultados é possível visualizar o ponto mínimo da função custo, sendo neste trabalho, o menor custo de uma seção transversal com determinado carregamento distribuído aplicado.

Portanto, considera-se que a atuação do algoritmo implementado é de grande valia para a produtividade na execução de projetos. Porém, problemas de execução não são analisados nesse estudo, cabendo ao profissional se atentar se a geometria encontrada pelo programa é executável, podendo fazer adaptações conforme suas necessidades e experiências práticas.

Por fim, conclui-se que a otimização matemática, aliada ao desenvolvimento de softwares, permite bons feitos dentro do mercado da construção civil. Por meio do algoritmo implementado apresentado neste trabalho, é possível padronizar processos, diminuir tempo investido pelo projetista para o dimensionamento da estrutura em questão, reduzir custos desnecessários, tanto de projeto superdimensionado quanto de execução, além de ter a segurança de atender as condições estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014. Em um mercado competitivo, a utilização da ferramenta apresentada pode ser um fator determinante para a execução de um projeto estrutural.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NOMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto** – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BASTOS, Prof. Dr. Paulo S. dos S. **Fundamentos do Concreto Armado**. Disciplina de Estruturas de Concreto I, Graduação em Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia, da Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2019. Notas de Aula.
- BROOKE, Anthony; KENDRIK, David; MEERAUS, Alexander. **Gams – Sistema Geral de Modelagem Algébrica**. 1 ed. São Paulo, EDITORA EDGARD BLUCHER LTDA, 1997.
- CAMACHO, Prof. Jefferson S. **Concreto Armado: Estados Limites de Utilização**. 2005. Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005. Tópicos especiais em concreto armado.
- CARVALHO, Roberto C. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado: Segundo a NBR 6118:2014**. 4. ed. São Carlos: Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2014.
- CHAMPMAN, Stephen J. **Programação em MatLab para Engenheiros** – Tradução da 5 edição norte-americana. 3. ed. brasileira. São Paulo, Tradução: Noveritis do Brasil, 2016.
- CORELHANO, Angelo G. B. **Flexão Simples para Vigas de Concreto Armado**. Disciplina de Concreto Armado, Graduação em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2019. Notas de Aula.
- JUNGES, Elisabeth. **Estudo Comparativo entre Métodos Simplificados e Modelos de Elementos Finitos Não Lineares para Cálculo de Flecha Imediata em Vigas de Concreto Armado**. 2011. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- KEMCZINSKI, Pedro G. **Cálculo e Detalhamento de Estrutura de Concreto Armado de um Edifício Residencial**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.
- MARTÍNEZ, José M.; SANTOS, Sandra A. **Métodos Computacionais de Otimização**. 20º Colóquio Brasileiro de Matemática – IMPA. Rio de Janeiro, 1995.
- MathWorks. **Constrained Optimization: fmincon**. 2018. Disponível em: https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html?s_tid=srchtitle#. Acesso em: nov. 2020.

MINEIRO, Andréa A. da C. **Aplicação de Programação Não-Linear como Ferramenta de Auxílio à Tomada de Decisão na Gestão de um Clube de Investimento**. 2007. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2007.

NOGUEIRA, Caio G. **Desenvolvimento de Modelos Mecânicos de Confiabilidade e de Otimização para Aplicação em Estruturas de Concreto Armado**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

PALOSCHI, Lucas. **Estudo Comparativo de Métodos para Cálculo de Flecha em Vigas de Concreto Armado**. 2014. Pesquisa (Programa de Educação Tutorial do Curso de Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2014.

PFEIL, Walter. **Concreto Armado: Dimensionamento**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, 1989.

PINHEIRO, Libânio M.; CATOIA, Bruna; CATOIA, Thiago. **Tabelas de Vigas: Deslocamentos e Momentos de Engastamento Perfeito**. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

REVISTA DE CIÊNCIAS EXATAS APLICADAS E TECNOLOGIAS DA UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO – CIATEC - UPF. **Algumas Aplicações de Métodos Eurísticos na Otimização de Estruturas**. Passo Fundo, 2012. ISSN 2176-4565.

SANTOS, Lauro M. dos. **Cálculo de Concreto Armado**. Vol 1. São Paulo: Editora LMS, 1983.

SILVA, Elivaldo E. da. **Otimização de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

SILVA, Marcelo F. da. **Estratégias de Aproximação para a Otimização Estrutural**. 2009. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ciências em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Pernambuco, Pernambuco, 2009.

SINAPI – **Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil**. Caixa Econômica Federal, Curitiba, 2020.

SPAZZAPAN, Aline A. **Otimização de Vigas Retangulares de Concreto Armado**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2018.

TANCREDI, Thiago P. **Otimização Multidisciplinar Distribuída Aplicada a Projetos de Engenharia**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

**APÊNDICE A – CÓDIGO FONTE DO PROGRAMA COMPUTACIONAL
APRESENTADO**

Algoritmo implementado para a otimização de vigas trapezoidais de concreto armado de acordo com a ABNT NBR 6118:2014 com a verificação dos limites de deformação.

1 – Rotina auxiliar da otimização.

```
clear all
clc
global Cc p1 Cs dl Cf L fck fyk bfl Tsd Tsd1 Md fcd alfa Ecs Es Eci fctm
fct sol1 sol2 sol3 Ic yt Et Et0
% Dados de entrada do programa
Cc = 347.68; % Custo do Concreto- 347.68 (reais)
p1 = 7850; % Massa específica do aço(kg/m3)
Cs = 6.63; % Custo do aço - 6.63 (reais)
dl = 0.03; % distância do centro de gravidade da armadura
à face da seção (metros)
Cf = 87.91; % Custo da fôrma - 87.91 (reais)
L = 6; % Comprimento da viga (metros)
fck = 20000; % Resistência característica a compressão do
concreto (N/m2)
fyk = 500000; % Resistência ao escoamento do aço (N/m2)
bfl = 0.4; % Coeficiente que depende da forma da viga
Et = 3; %o tempo em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida
(escolher)
Et0 = 2; %a idade em meses, relativa a data de aplicação de carga de longa
duração (escolher)
alfaEdoECI = 1.2; %1,2 para basalto e diabásio
%1,0 para granito e gnaisse
%0,9 para calcário
%0,7 para arenito
Md =40 ; % Momento solicitante de cálculo (N*m)
Ma = Md/1.4; % Momento fletor na seção crítica na
combinação quase permanente
if fck<= 50000
    fctm = 0.3 * (fck/1000)^(2/3); % Resistência média do concreto à
tração direta (MPa)
else
    fctm = 2.12*log(1+0.11*fck/1000);
end
```

```

fct= fctm*1000;           % Resistência do concreto à tração direta
fcd = fck/1.4;           % Resistência de cálculo à compressão do
concreto
alfa= 1.5;               % fator que correlaciona aproximadamente a
resistência à tração
                           % na flexão com a resistência à tração direta
                           % (1,5 utilizado de maneira mais crítica)

if fck<=50000
    Eci = alfaEdoECI * 5600 * (fck/1000)^(1/2); % Módulo de
elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial do concreto(MPa)
else if 55000<=fck<=90000
    Eci=21.5*10^3*alfaEdoECI*(((fck/1000)/10)+1.25)^(1/3);
end
end

alfaI=0.8+0.2*fck/(1000*80);

if alfaI<=1
    alfaIdoECS=alfaI;
else
    alfaIdoECS=1;
end

Ecs= alfaIdoECS*Eci*1000;           % Módulo de elasticidade secante do
concreto
Es= 2100000000;                     % Módulo de elasticidade do aço

Tsd = (fyk/1.15);                   % Tensão normal solicitante de cálculo
TsdI= (fyk/1.15);                   % Tensão normal solicitante de cálculo

Tipovinc= 0;%0 apoio/apoio
           %1 apoio/engaste
           %2 engaste/engaste
           %3 engaste/livre

fun = @(x) (((x(1)+x(2)) * (x(3)+dl))/2)*Cc + (x(4)+x(5)) *p1*Cs +
(x(2)+2*sqrt((((x(1)-x(2))/2)^2) + ((x(3)+dl)^2)))*Cf;
x0 = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];

```



```

%inserir a condição para a constante k em função do tipo de vínculo
    if Tipovinc==0 | Tipovinc==3
        k=2;
    else
        k=3;
    end

%Restrições lineares de desigualdade em função de do Tipovinc e fck
if 50000<=fck & fck<=90000
    A= [0,0,k,0,0,0,0,0,0 ; 0,0,-0.35,0,0,1,0,0,0 ; -
1,0,bf1,0,0,0,0,0,0];
    else
        A= [0,0,k,0,0,0,0,0,0 ; 0,0,-0.45,0,0,1,0,0,0 ; -
1,0,bf1,0,0,0,0,0,0];
    end

%Definição do vetor b
b = [(L-(k*dl)); 0; -(bf1*dl)];

%Restrições lineares de igualdade
Aeq = [0 0 1 0 0 -0.8/3 -1 0 0; 0 0 1 0 0 -0.8/2 0 -1 0];
beq = [0 0];
lb = [(L/5000) 0.12 0 0 0 0 0 0 0];
ub = [];

%Rotina fmincon para problemas não lineares
options = optimset('fmincon');
options = optimset (options,'MaxFunEvals',50000, 'MaxIter',20000,'TolX',1e-
10);
[x,~,exitflag] = (fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub,
@nlcon_comflecha, options));
disp(['Variáveis x1=bf x2=bw x3=d x4=As x5=Asl x6=x x7=z1 x8=z2 x9=bw(y),
respectivamente: ' num2str(x)]);
disp(['Custo Total: ' num2str(fun(x))]);
disp(['Encerrado um problema.'])
disp([' #####'])

%Definição dos novos parâmetros para as restrições de flecha Ic e yt
Ic = (((x(3)+dl)^3)*(x(1)^2 + 4*x(1)*x(2) + x(2)^2))/(36*(x(1)+x(2)));
%inércia da seção bruta de concreto

```

```

yt = (((((x(1)-x(2))*(x(3)+dl)/3)+(x(2)*(x(3)+dl)/2))/((x(1)-
x(2))/2)+x(2)))*(x(3)+dl)); %centroide da seção bruta de concreto
Mr= (alfa*fct*Ic)/yt;          % Momento de fissuração
alfae=Es/Ecs;                % relação entre Es e Ecs

p = [(-((x(1)-x(2))/(6*(x(3)+dl))), (x(1)/2), (x(4)*alfae+x(5)*alfae), (-
x(4)*alfae*x(3)-x(5)*alfae*dl) ];

zeros= sort(roots(p)); %sort ordena os elementos das raízes na forma
crescente, e roots calcula as raízes do polinômio
% o comando zeros(1) retorna a posição 1 do vetor zeros
    if zeros(1)>=0
        x2aux = zeros(1);
    elseif zeros(2)>=0
        x2aux = zeros(2);
    else
        x2aux = zeros(3);
    end

ycg = x2aux*(((x(1)-(x(1)-((x(1)-x(2))*x2aux)/(x(3)+dl)))*(x2aux/3) +
((x(1)-((x(1)-x(2))*x2aux)/(x(3)+dl))*x2aux/2))/(((x(1)-(x(1)-((x(1)-
x(2))*x2aux)/(x(3)+dl)))/2)+(x(1)-((x(1)-x(2))*x2aux)/(x(3)+dl))));
%centroide da geometria comprimida

I2= ((x(1)-((x(1)-x(2))*x2aux)/(x(3)+dl))*x2aux^3)/12 + (x(1)-((x(1)-
x(2))*x2aux)/(x(3)+dl))*x2aux*(ycg-(x2aux/2))^2+2*(((x(1)-(x(1)-((x(1)-
x(2))*x2aux)/(x(3)+dl)))/2)*x2aux^3)/12+(x(1)-(x(1)-((x(1)-
x(2))*x2aux)/(x(3)+dl)))/2*x2aux/2*(ycg-2*x2aux/3)^2+alfae*x(4)*(x(3)-
x2aux); %inércia segunda

EIeq= Ecs*((Mr/Ma)^3*Ic+(1-(Mr/Ma)^3)*I2); %Rigidez equivalente

    if Ma>Mr
        if EIeq<=Ecs*Ic
            EI=EIeq;
        else
            EI=Ecs*Ic;
        end
    else

```

```

    EI=Ecs*Ic;
end

%Escolha do tipo de vinc
if Tipovinc==0
    alfafi= 5/48;
elseif Tipovinc==1
    alfafi=1/23.08;
elseif Tipovinc==2
    alfafi=1/16;
elseif Tipovinc==3
    alfafi=1/4;
end

fi= (alfafi*Md*L^2)/EI; %Flecha inicial

%Escolha do Et0
if Et0<=70 % Coeficiente relativo a data de aplicação da carga de longa
duração, em meses
    alfaf0= 0,68*(Et0^0.32)*(0.996^Et0);
else
    alfaf0=2;
end

%Escolha do Et
if Et<=70 % Coeficiente relativo a data de aplicação da carga de longa
duração, em meses
    alfaf= 0,68*(Et^0.32)*(0.996^Et);
else
    alfaf=2;
end

deltaE=alfaf-alfaf0; % Coeficiente função do tempo

Ac = ((x(1)+x(2))*(x(3)+d1))/2; %área de concreto
rol=x(5)/Ac;
fd=deltaE/(1+50*rol); % Flecha diferida
ft = fi*(1+fd);
fpermitida = L/250;

```

```

%Fixa as variáveis x1, x2 e x3, definidas por bf, bw e d, respectivamente
para
%análise das restrições de flecha
sol3=x(3);
sol2=x(2);
sol1=x(1);

if ft<=fpermitida
    disp(['Solução atende as restrições de flecha, programa encerrado,
pois ft<=fpermitida']);
    disp(['Variáveis bf, bw, d, As, Asl, x, z1, z2, bw(y) são
respectivamente, : ' num2str(x)]);
    disp(['Custo Total: ' num2str(fun(x))]);
    disp(['Encerrado um problema.'])
    disp([' #####'])
end

while ft>fpermitida && sol3<=(1/k)*(L-k*d1)
    disp([' '])
    disp(['O programa não atendeu as restrições de flecha, incrementando
x3=d: '])
    sol3=sol3+0.01;
    sol2=sol2;
    sol1=sol1;

%nova função não linear com 6 variáveis
fun1 = @(y) (((sol1+sol2)*(sol3+d1))/2)*Cc + (y(1)+y(2))*p1*Cs +
(sol2+2*sqrt((((sol1-sol2)/2)^2 + ((sol3+d1)^2)))*Cf;
y0 = [0,0,0,0,0,0];
A=[];
b=[];
%inclusão das 2 restrições que são lineares
Aeq=[0 0 0.8/3 1 0 0;0 0 0 0.8/2 1 0];
%beq=[];
beq=[sol3 sol3];

lb = [0 0 0 0 0 0];

if 50000<=fck & fck<=90000
    ub = [1 1 (0.35*sol3) 1 1 1];

```

```

else
    ub = [1 1 (0.45*sol3) 1 1 1];
end
%Rotina fmincon para o novo problema
[y,~,exitflag] = (fmincon(fun1, y0, A, b, Aeq, beq, lb, ub,
@nlcon_comflecha2, options));

if exitflag~=1
    disp('Iteração não converge para um mínimo local')
end

%atualização dos calculos após o incremento
Ic=((((sol3+dl)^3)*(sol1^2 + 4*sol1*sol2 + sol2^2))/(36*(sol1+sol2)));
%inerçia da seção bruta de concreto
yt=((((sol1-sol2)*(sol3+dl)/3)+(sol2*(sol3+dl)/2))/(((sol1-
sol2)/2)+sol2))*(sol3+dl)); %centroide da seção bruta de concreto
Mr= (alfa*fct*Ic)/yt;
alfae=Es/Ecs;

p = [(-((sol1-sol2)/(6*(sol3+dl))), (sol1/2), (y(1)*alfae+y(2)*alfae), (-
y(1)*alfae*sol3-y(2)*alfae*dl) ];

zeros= sort(roots(p)); %sort ordena os elementos das raizes na forma
crescente, e roots calcula as raizes do polinômio
% o comando zeros(1) retorna a posição 1 do vetor zeros
if zeros(1)>=0
    x2aux = zeros(1);
elseif zeros(2)>=0
    x2aux = zeros(2);
else
    x2aux = zeros(3);
end

ycg = x2aux*(((sol1-(sol1-((sol1-sol2)*x2aux)/(sol3+dl)))*(x2aux/3) +
((sol1-((sol1-sol2)*x2aux)/(sol3+dl))*x2aux/2))/(((sol1-(sol1-((sol1-
sol2)*x2aux)/(sol3+dl)))/2)+(sol1-((sol1-sol2)*x2aux)/(sol3+dl))));
I2= ((sol1-((sol1-sol2)*x2aux)/(sol3+dl))*x2aux^3)/12 + (sol1-((sol1-
sol2)*x2aux)/(sol3+dl))*x2aux*(ycg-(x2aux/2))^2+2*(((sol1-(sol1-((sol1-
sol2)*x2aux)/(sol3+dl)))/2)*x2aux^3)/12+(sol1-(sol1-((sol1-

```

```

sol2)*x2aux)/(sol3+d1))/2*x2aux/2*(ycg-2*x2aux/3)^2)+alfae*y(1)*(sol3-
x2aux); %inércia segunda
EIeq= Ecs*((Mr/Ma)^3*Ic+(1-(Mr/Ma)^3)*I2) %Rigidez equivalente

if Ma>Mr
    if EIeq<=Ecs*Ic
        EI=EIeq;
    else
        EI=Ecs*Ic;
    end
else
    EI=Ecs*Ic;
end

    if Tipovinc==0
        alfafi= 5/48;
    elseif Tipovinc==1
        alfafi=1/23.08
    elseif Tipovinc==2
        alfafi=1/16;
    elseif Tipovinc==3
        alfafi=1/4;
    end

    fi= (alfafi*Md*L^2)/EI;

%Escolha do Et0
if Et0<=70 % Coeficiente relativo a data de aplicação da carga de longa
duração, em meses
    alfaf0= 0,68*(Et0^0.32)*(0.996^Et0);
else
    alfaf0=2;
end

%Escolha do Et
if Et<=70 % Coeficiente relativo a data de aplicação da carga de longa
duração, em meses
    alfaf= 0,68*(Et^0.32)*(0.996^Et);
else
    alfaf=2;
end

```

```

end

deltaE=alfaf-alfaf0; % Coeficiente função do tempo

Ac = ((sol1+sol2)*(sol3+d1))/2; %área de concreto
rol=y(2)/Ac;
fd=deltaE/(1+50*rol); % Flecha diferida
ft = fi*(1+fd);
fpermitida = L/250;

    if sol3>0.5*(L-2*d1)
        disp(['Não pode continuar, pois atingiu o valor limite de x2.
Não pode ser resolvido com flecha'])
        pause
    else
        disp(['Valor de x1=bf fixado: ' num2str(sol1)]);
        disp(['Valor de x2=bw fixado: ' num2str(sol2)]);
        disp(['Valor de x3=d após incremento: ' num2str(sol3)]);
        disp(['Novas variáveis, respectivamente, As, Asl, x, z1,
z2, bw(y) : ' num2str(y)]);
        disp(['Custo Total: ' num2str(fun1(y))]);
        disp(['Encerrado um laço.'])
        disp([' #####'])
    end

end

end

```

2 – Rotina auxiliar da otimização.

```

function [c, ceq] = nlcon_comflecha (x)
global dl Tsd Tsd1 Md fcd;
    ceq(1) = x(5)*Tsd1*(x(3)-dl) + 2*0.8*x(6)*0.85*fcd*x(7)*(x(1)-x(9))/4 +
0.8*x(6)*0.85*fcd*x(8)*x(9) - Md; %somatório de momento
    ceq(2) = x(4)*Tsd - x(5)*Tsd1 - 2*0.8*x(6)*0.85*fcd*(x(1)-x(9))/4 -
0.8*0.85*x(6)*fcd*x(9); %somatório de força
    ceq(3) = (x(1)-(0.8*x(6)*(x(1)-x(2))/(x(3)+dl)))-x(9); %bw(y)
    c(1) = +(0.0015 *(x(1)+x(2))*(x(3)+dl))/2-x(4); %Armadura mín
    c(2) = +x(4)+x(5)-(0.04*(x(1)+x(2))*(x(3)+dl))/2); %Armadura máx

```

3 – Rotina auxiliar da otimização.

```
function [c, ceq] = nlcon_comflecha2 (y)
global dl Tsd Tsd1 Md fcd sol1 sol2 sol3;
    ceq(1) = y(2)*Tsd1*(sol3-dl) + 2*0.8*y(3)*0.85*fcd*y(4)*(sol1-y(6))/4 +
0.8*y(3)*0.85*fcd*y(5)*y(6) - Md; %somatório de momento
    ceq(2) = y(1)*Tsd - y(2)*Tsd1 - 2*0.8*y(3)*0.85*fcd*(sol1-y(6))/4 -
0.8*0.85*y(3)*fcd*y(6); %somatório de força
    ceq(3) = (sol1-(0.8*y(3)*(sol1-sol2)/(sol3+dl)))-y(6); %bw(y)
    c(1) = +(0.0015 * ((sol1+sol2)*(sol3+dl))/2)-y(1); %Armadura mín
    c(2) = +y(1)+y(2)-(0.04*((sol1+sol2)*(sol3+dl))/2); %Armadura máx
```