

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**HESRRON CRYSTHOFFER PORTO SANTANA**

**TEORIA DOS QUATÉRNIOS, ROTAÇÕES E O LIVRO “ALICE NO PAÍS DAS  
MARAVILHAS”**

**CURITIBA**

**2022**

**HESRRON CRYSTHOFFER PORTO SANTANA**

**TEORIA DOS QUATÉRNIOS, ROTAÇÕES E O LIVRO “ALICE NO PAÍS DAS  
MARAVILHAS”**

**Quaternion Theory, Rotations and the book “Alice in Wonderland”**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção  
do título de Licenciado em Matemática do  
Licenciatura em Matemática da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Fabiano Steklain  
Lisbôa

**CURITIBA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**HESRRON CRYSTHOFFER PORTO SANTANA**

**TEORIA DOS QUATÉRNIOS, ROTAÇÕES E O LIVRO “ALICE NO PAÍS DAS  
MARAVILHAS”**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção  
do título de Licenciado em Matemática do  
Licenciatura em Matemática da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 12/dezembro/2022

---

André Fabiano Steklain Lisbôa  
Doutor  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Ronie Peterson Dario  
Doutor  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Adriano Verdério  
Doutor  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA**  
**2022**

Dedico este trabalho a meus pais, Hélio  
Santana e Lucineia Aparecida Porto,  
juntamente com todos aqueles que são  
importantes na minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor André Fabiano Steklain Lisbôa, por me conceber o suporte e a paciência ao auxiliar-me durante a pesquisa.

Aos meus pais por compreenderem e apoiarem meus estudos.

À Luana Fortes Santana, por caminhar do meu lado e me iluminar em momentos de escuridão.

Aos professores da UTFPR, por me apresentar e ceder todo o conhecimento que hoje carrego para si.

Ao professor Alex Brasil, por me fazer criar mais afeto que tinha pela matemática.

Ao Leonardo Tetto Martins Moreno e Gabriel Dreher Mesquita de Oliveira, por escolher ser meu amigo e estar do meu lado como um irmão.

Aos meus amigos, que estão comigo há muito tempo, e que significam muito para mim.

Daria tudo que sei pela metade do que ignoro.  
(DESCARTES, René 1950)

## RESUMO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, trago como objetivo de pesquisa definir as rotações no espaço com o conjunto dos quatérnios. E para realizar tal feito é apresentado uma revisão histórica perante o desenvolvimento dos números complexos, resultando no conjunto dos quatérnios. É desenvolvida também uma revisão conceitual e de conteúdo sobre os números complexos. E partindo dessa revisão, é definido e estruturado o conjunto dos quatérnios, indicando suas propriedades algébricas, e as definições e propriedades necessárias para realizar as tais rotações tri-dimensionais. E no processo de finalização do trabalho é indicado como os quatérnios relacionam-se de maneira lúdica com a *Festa do Chá* do livro "Alice no País das Maravilhas".

**Palavras-chave:** números complexos; quatérnios; revisão histórica.

## ABSTRACT

In this Final Paper, we bring as a research objective to define the rotations in space with the set of quaternions. Moreover, to accomplish this feat, a historical review is presented before the development of complex numbers, resulting in the set of quaternions. A conceptual and content review on complex numbers is also developed. Furthermore, starting from this review, the set of quaternions is defined and structured, indicating their algebraic properties and the definitions and properties necessary to perform such three-dimensional rotations. Furthermore, in the process of finalizing the work, it is indicated how the quaternions are related in a playful way with the *Tea Party* of the book "Alice in Wonderland."

**Keywords:** complex numbers; quaternions; historical review.



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 – Placa dedicatória a Hamilton . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>Figura 2 – Representação gráfica dos números complexos . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>Figura 3 – Acima, soma de dois números complexos no plano-z. Abaixo, diferença de dois números complexos no plano-z. . . . .</b>	<b>17</b>
<b>Figura 4 – Representação do conjugado no plano-z. . . . .</b>	<b>18</b>
<b>Figura 5 – Representação gráfica do produto números complexos . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>Figura 6 – Forma Polar . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>Figura 7 – <math>Rr</math> como resultado de <math>r</math> rotacionado <math>\alpha</math> graus pelo eixo definido por <math>n</math>. . . . .</b>	<b>37</b>
<b>Figura 8 – Sistema de coordenadas bidimensional definido como ortogonal a <math>\vec{n}</math> . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>Figura 9 – Tetraedro <math>T</math> em azul rotacionado <math>60^\circ</math> em torno do eixo <math>z</math> resultando no tetraedro <math>Rq(T)</math> em vermelho. . . . .</b>	<b>44</b>
<b>Figura 10 – Rotação de <math>60^\circ</math> do ponto <math>D</math> resultando em <math>Rq(D)</math>. . . . .</b>	<b>45</b>

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	BREVE ESTUDO HISTÓRICO . . . . .	11
3	REVISÃO NÚMEROS COMPLEXOS . . . . .	14
3.1	Estrutura e Definição . . . . .	14
3.2	Representação Geométrica . . . . .	15
3.3	Conjugado Complexo . . . . .	16
3.4	Módulo do Número Complexo . . . . .	18
3.5	Representação trigonométrica ou polar dos números complexos . . . . .	20
4	O CONJUNTO DOS QUATÉRNIOS . . . . .	23
4.1	Estrutura e Definições . . . . .	23
4.2	Estrutura algébrica dos quatérnios . . . . .	26
4.3	Rotações com os quatérnios . . . . .	31
4.4	Exemplos de Rotações com os Quatérnios . . . . .	40
5	A FESTA DO CHÁ DE ALICE . . . . .	46
6	CONCLUSÃO . . . . .	48
	REFERÊNCIAS . . . . .	49
	APÊNDICE A CÓDIGO WXMAXIMA . . . . .	51

## 1 INTRODUÇÃO

Este projeto de pesquisa, com caráter bibliográfico com ênfase nos conceitos teóricos, visa a apresentação do conjunto de números conhecido como Quatérnios, indicando seu desenvolvimento a partir do conjunto dos Números Complexos, sua importância como ferramenta para gerar rotações no espaço e sua curiosa semelhança lúdica na “Festa do Chá” do livro de Carroll, “Alice no País das Maravilhas”.

Os quatérnios foram desenvolvidos por William Roman Hamilton (1805-1865), conhecido por suas contribuições nos campos da Física e da Matemática. O conjunto dos quatérnios foi desenvolvido a partir dos números complexos, como resultado de anos de procura de um método de expandir estes números para o espaço tridimensional. Neste projeto apresentaremos alguns elementos e a estrutura dos números complexos, mostrando também suas motivações e justificativas para o seu desenvolvimento. E também é apresentado a motivação de Hamilton para desenvolver os quatérnios de forma estrutural da maneira que conhecemos os outros conjuntos numéricos.

A ideia do trabalho é apresentar a estrutura dos quatérnios, algumas teorias e possíveis aplicações de rotações no espaço, indicando o papel destes números nas rotações. E por fim, indicar a relação com a passagem lúdica do livro de Carroll e sua possível aplicação em sala de aula do Ensino Médio.

## 2 BREVE ESTUDO HISTÓRICO

Os números complexos são normalmente apresentados durante o ensino médio como ferramenta para encontrar raízes não reais de polinômios. Por não pertencerem ao conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , atribuímos o nome de números imaginários, que são parte do conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ . Esse conjunto numérico foi notado primeiramente no trabalho de *Ars Magna* de Geronimo Cardano (1501-1576), motivado e apoiado pelas equações cúbicas de Nicolo Tartaglia (1500-1557). Essa discussão trouxe nas equações as raízes quadráticas negativas, e foi percebido que não era possível realizar essa operação pois não há número da forma  $a^n$  com  $n$  par que resulte em um número negativo. (MILIES, 2004).

Esse ocorrido também envolveu alguns outros matemáticos da época, entretanto somente com o estudo e desenvolvimento da Geometria Analítica de Rene Descartes (1596 – 1650) e Pierre Fermat (1601 – 1665), Descartes ao realizar o estudo do domínio dessa geometria, estudou também as equações algébricas, trouxe a estudo novamente o caso das raízes negativas, afirmando que a raiz  $\sqrt{-1}$  é um número imaginário. Somente com Euler (1707-1773) conjecturou-se a estrutura dos números complexos atribuindo a notação  $i$  para o número complexo  $\sqrt{-1}$ , ou seja  $i^2 = -1$ . (BARREIRO, 2009).

Um nome de destaque desse estudo sobre os números complexos  $\mathbb{C}$  e posteriormente o conjunto dos quatérnios  $\mathbb{H}$ , William Roman Hamilton (1805-1865), que tem contribuições notáveis em campos de estudo da Física, Astronomia e Matemática. Seu principal feito para os números complexos foi sua definição como par ordenado  $(x,y)$  e  $x,y \in \mathbb{R}$  em que  $x$  corresponde a parte real, e  $y$  é o fator que indica o número imaginário, ou seja, a parte imaginária  $i$ . Por ser em um par ordenado é possível representá-los em um plano ordenado, que é amplamente utilizado no ensino. A motivação de Hamilton foi ao procurar um meio de expandir os números complexos para três dimensões, partindo de um par ordenado  $(x,y)$  e resultando em uma terna  $(x,y,z)$  e  $x, y, z \in \mathbb{R}$  dos quais  $x$  é real,  $y$  e  $z$  representam as partes imaginárias,  $i$  e  $j$  respectivamente. Porém, a utilização desta conjectura resultava em problemas com as propriedades multiplicativas dos números complexos, e não conseguia, utilizando a propriedade de que  $i^2 = j^2 = -1$ , concretizar a comutatividade  $ij = ji$ . Foram necessários 10 anos de estudos para localizar a fonte de sua dificuldade. (MILIES, 2004).

Um registro que temos sobre esse desenvolvimento são cartas trocadas entre ele e um de seus filhos, Archibald em outubro de 1843, essa carta aparece no artigo *The Octonions* de John Baez (2002), físico e matemático, traduzida no artigo de Milies:

Toda manhã, quando descia para o café, teu irmão William Edwin e você mesmo costumavam perguntar-me “Bem, pai, você já pode multiplicar ternas?” A isso eu sempre me via obrigado a responder, com um triste balanço de cabeça,” não, eu apenas posso somá-las e subtraí-las. (BAEZ, 2002).

Mais adiante na mesma carta ele apresenta como encontrou a solução de problema:

Mas no dia 16 do mesmo mês [outubro de 1843] - que era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, ... , embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos  $i, j, k$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

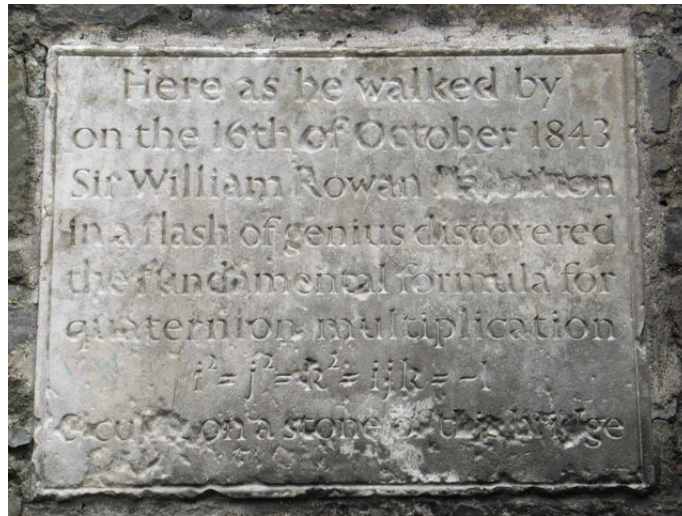
que contém a solução do Problema. (BAEZ, 2002).

Essa solução envolve a utilização de *quatro* termos, sendo um real e três imaginários, da forma  $a + bi + cj + dk$ , denominado quatérnios. Hoje a ponte que Hamilton cruzava, *Broom Bridge*, durante sua descoberta contém uma placa, dedicatória à descoberta do matemático (Figura 1). Após essa descoberta, Hamilton estabeleceu regras e desenvolveu as conjecturas matemáticas a respeito do comportamento do conjunto dos quatérnios, percebendo que a multiplicação não era comutativa, entretanto as propriedades da soma, multiplicação e consequentemente a divisão seguiam de acordo com as características dos conjuntos dos números reais, ou seja, o conjunto  $\mathbb{H}$  mais tarde seria conhecido como o primeiro exemplo de anel<sup>1</sup> não comutativo com a divisão. É interessante apontar que Hamilton tinha contato com outro matemático, John T. Graves (1806-1870), e ao escrever para ele sobre sua descoberta, o auxiliou a desenvolver sua nova teoria de álgebra 8-dimensional, denominada octônios  $\mathbb{O}$ , em dezembro do mesmo ano. No ano seguinte, em 1844, Hamilton notou que nos octônios a propriedade associativa não era válida da maneira que ocorre nos quatérnios. (BARREIRO, 2009).

Hamilton passou o resto de sua vida realizando estudos e aplicações dos quatérnios na geometria, mecânica e física, resultando em sua publicação, 1853 suas *Lectures on Quaternions*. Alguns anos depois, em 1866 o livro foi reeditado e publicado em dois volumes, como a publicação póstuma, *Elements of Quaternions*. (MILIES, 2004).

<sup>1</sup> Seja um conjunto  $A$ , com duas operações, soma e produto, com sua estrutura algébrica da forma  $(A, +, \cdot)$ , determina uma anel, se e somente se, a adição goza das propriedades comutativa, associativa, existência de um elemento neutro, e o elemento simétrico, já para a multiplicação é associativa, e distributiva em relação a soma. (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

**Figura 1 – Placa dedicatória a Hamilton**



Fonte: Imagens do Google.

Sua vontade era indicar a importância desse conjunto para aplicações da Física. Entretanto este objetivo não foi cumprido, pois Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903) com objetivo de simplificar o conjunto  $\mathbb{H}$ , desenvolveu sua análise vetorial, que resultou no conhecido Cálculo Vetorial que utilizamos hoje na academia como ferramenta para os cálculos da Física. Independentemente, Oliver Heaviside (1850 – 1925) publicou uma série de artigos utilizando o Cálculo Vetorial, simplificando-o para os engenheiros. Os quatérnios começaram a conquistar sua presença novamente com a teoria da relatividade especial de Albert Einstein (1879-1955), que fazia uso dos quatérnios complexificados, que haviam sido introduzidos por William Kingdon Clifford (1845 – 1879), que futuramente seria expandido e utilizado por outros físicos e matemáticos (MILIES, 2004).

As álgebras de quatérnios participaram da história matemática até os dias atuais, combinando avanços em álgebra, formas quadráticas, teoria dos números, geometria e formas modulares (VOIGHT, 2021). Até mesmo o teorema fundamental da álgebra pode ser tratado com o uso de quatérnios (EILENBERG; NIVEN, 1944). Nos dias de hoje, as álgebras de quatérnios continuam a surgir de maneiras inesperadas. No cenário aritmético, ordens de quatérnios surgem como anéis de endomorfismo de curvas elípticas supersingulares e têm sido usados em criptosistemas pós-quânticos propostos e esquemas de assinatura digital. É possível ver uma forte relação entre a rotação que iremos definir e as rotações relacionadas a partículas de *spin* 1/2. No campo de computação quântica, certas álgebras quatérnicas especiais e seus grupos aritméticos podem fornecer portas quânticas eficientes de 1 qubit (EILENBERG; NIVEN, 1944).

### 3 REVISÃO NÚMEROS COMPLEXOS

#### 3.1 Estrutura e Definição

Como apresentado anteriormente o conjunto dos números complexos é denotado por  $\mathbb{C}$ , e um número complexo  $z$  pode ser definido como um par ordenado  $(x,y)$ , ambos  $x,y \in \mathbb{R}$ . Assim de acordo com Barreiro (2009) definimos que:

$$\mathbb{C} = \{(x,y); x,y \in \mathbb{R}\}, (x,y) = (x',y') \iff x = x', y = y'. \quad (1)$$

Os números  $x$  e  $y$  são denominados respectivamente parte real ( $Re(z)$ ) e parte imaginária ( $Im(z)$ ). Assim podemos indicar que:

$$\begin{aligned} (1,0) &= 1; \\ (0,1) &= i. \end{aligned} \quad (2)$$

Os números complexos da forma  $z = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$  são a representação para os números reais  $x$ . Já os complexos da forma  $z = \{(0,y); y \in \mathbb{R}\}$  são chamados de imaginários puros. Com isso o complexo da forma  $z = (0,0)$  é denominado de complexo nulo.

Dessa forma é possível definir  $\mathbb{C}$  como:

**Definição 3.1.** *Dados  $x,y \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathbb{C}$ , descrevemos  $z$  como:*

$$z = (x,y) \quad (3)$$

*Sejam  $z_1 = (x_1,y_1)$  e  $z_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{C}$ , as operações de soma (+) e multiplicação ( $\cdot$ ) são definidas da seguinte forma:*

$$z_1 + z_2 = (z_1 + z_2) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (4)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (5)$$

Da Equação 5 é possível verificar que  $i^2 = (0,1)(0,1) = -1$ . Em geral conforme indicado por Ruel Vance Churchill (1899 - 1987) e James Ward Brown (1934 - atualmente), em sua obra *Complex Variables and Application* (BROWN; CHURCHILL, 2009), todo número complexo  $z = (x,y)$  pode ser escrito da forma:

$$z = (x,y) = (x,0) + (y,0) \cdot (0,1) = x + yi. \quad (6)$$

Com essa representação é possível definir os números complexos da seguinte forma:

**Definição 3.2.** Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , com  $i^2 = -1$  e  $z \in \mathbb{C}$ . Descrevemos  $z$  como:

$$z = x + yi = (x, y) \quad (7)$$

Utilizando essa representação a soma (+) e produto ( $\cdot$ ) entre dois complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$  são dadas por:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \quad (8)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i. \quad (9)$$

As definições de soma e produto em  $\mathbb{C}$  satisfazem as propriedades associativa, comutativa, distributiva da soma na multiplicação, existência do elemento neutro da adição  $(0,0)$ , elemento unidade da multiplicação  $(1,0)$ , o inverso aditivo e o inverso multiplicativo, este último para quaisquer elementos não nulos de  $\mathbb{C}$ . Estas propriedades caracterizam os complexos como um *corpo*.<sup>1</sup>

Pela propriedade associativa da multiplicação e as propriedades da potência é possível concluir também que:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i \quad (10)$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 \quad (11)$$

e de maneira geral é indicada no volume 6 da coleção de livros *Fundamentos da Matemática Elementar* (IEZZI, 2013), para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i \quad (12)$$

É importante ressaltar que ao realizar a análise pelos conjuntos numéricos, como qualquer número real pode ser representado como um número complexo da forma  $z = (x,0)$ , é possível indicar que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

### 3.2 Representação Geométrica

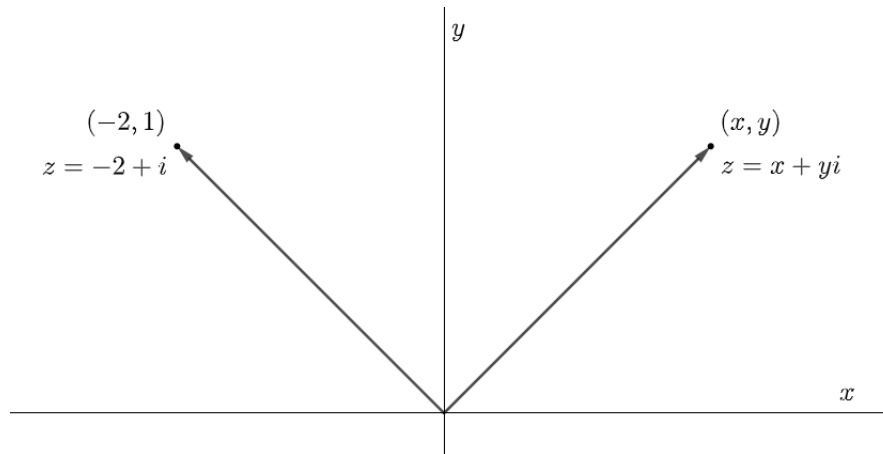
Como os números complexos são do formato de um par ordenado, é natural associá-los às coordenadas cartesianas retangulares de um ponto nos eixos coordenados  $xy$ , com  $x$  sendo

<sup>1</sup> Seja  $K$  conjunto, é denominado corpo, se e somente se, for um anel comutativo com o elemento unidade da multiplicação, ou seja, dado  $a \in K$ ,  $a \cdot 1 = a$ ,  $1$  é o elemento unidade, e todos os elementos não nulos em  $K$  possuem seus respectivos inversos multiplicativos e aditivos. (DOMINGUES; IEZZI, 2003).



o eixo dos números reais, e  $y$  o eixo dos números imaginários. Um exemplo desta representação está ilustrado na Figura 2. Neste exemplo o número  $z = -2 + i$  é indicado pelo ponto  $(-2,1)$ ,

**Figura 2 – Representação gráfica dos números complexos**



Fonte: Autoria própria (2022).

o número  $z = 0 = 0 + 0i$  é representada pelo ponto na origem  $(0,0)$ , e um complexo genérico  $z = x + yi$  no ponto  $(x,y)$ .

Essa representação geométrica de coordenadas cartesianas pode ser chamado de plano complexo ou plano- $z$ , ou ainda, plano de Argand-Gauss. É possível também associar uma direção, interpretando o número  $z = x + yi$  como o vetor que vai da origem até o ponto  $(x,y)$ . Como os números podem ser representados como ponto ou vetor, é possível que ocorram problemas de interpretação.

As definições de soma e, conseqüentemente, diferença de números complexos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  também podem ser representadas de forma vetorial, conforme ilustrado na Figura 3.

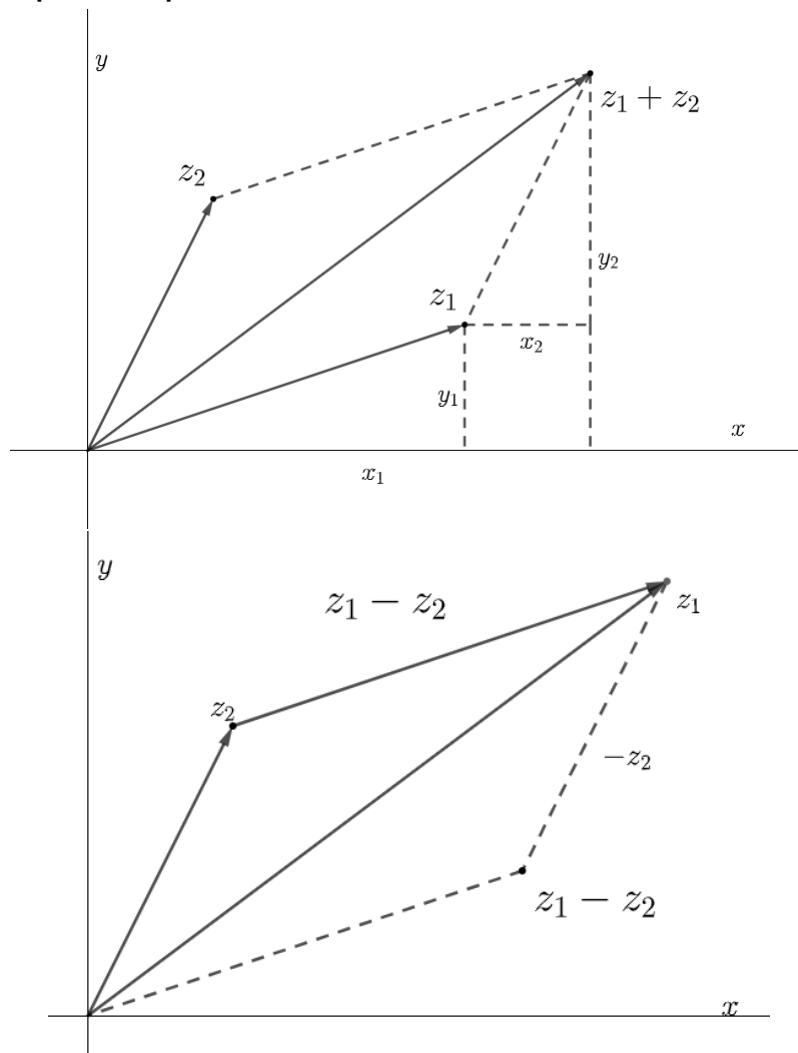
### 3.3 Conjugado Complexo

Dado um número complexo  $z = (x,y) = z + yi$  o *conjugado* desse número é o complexo  $\bar{z} = x - yi$ . A representação geométrica do conjugado de  $z$  é dada pelo ponto  $(x, -y)$ , que é a reflexão do ponto, ou vetor  $(x,y)$  pelo eixo real. Uma ilustração do número conjugado no plano- $z$  pode ser encontrada na Figura 4.

O conjugado complexo contém algumas propriedades interessantes. Dados  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , temos

$$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (13)$$

Figura 3 – Acima, soma de dois números complexos no plano-z. Abaixo, diferença de dois números complexos no plano-z.



Fonte: Autoria própria (2022).

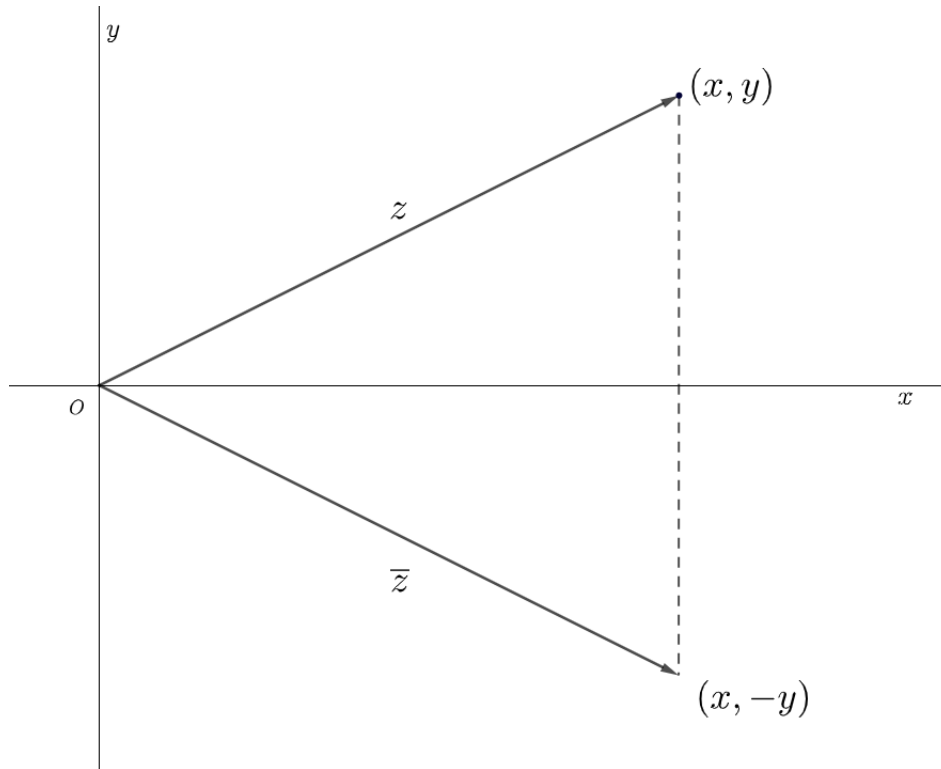
A Equação 13 indica que o conjugado da soma é a soma dos conjugados, e permite obter outras propriedades:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad (14)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad (15)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0. \quad (16)$$

Figura 4 – Representação do conjugado no plano-z.



Fonte: Autoria própria (2022).

É possível também definir algumas outras propriedades imediatas,

$$\overline{\overline{z}} = z \quad (17)$$

$$z + \overline{z} = 2x = 2(\operatorname{Re}(z)); \quad (18)$$

$$z - \overline{z} = 2yi = 2(\operatorname{Im}(z)). \quad (19)$$

Na Equação 17, temos que o conjugado do conjugado de  $z$  é o próprio  $z$ . Na Equação 18, o conjugado de um número real é ele próprio, e a soma de um número complexo e seu conjugado é um número real. Já na Equação 19 a diferença de um número complexo e seu conjugado resulta em um imaginário puro.

### 3.4 Módulo do Número Complexo

O módulo, ou valor absoluto de um complexo  $z = x + yi$ , denotado por  $|z|$ , é o número real dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (20)$$

Note que  $|z| \geq 0$ , e  $|z| = 0$  se, e apenas se,  $z = 0$ .

Geometricamente enunciar que  $|z_1| > |z_2|$  significa que o ponto  $z_1$  está mais distante da origem quando comparado ao ponto  $z_2$ , ou também que o comprimento do vetor que representa  $z_1$  é maior que o comprimento de  $z_2$ . Esta afirmação é lastreada no fato que os números reais formam um corpo *ordenado*, ou seja, entre dois números reais  $a$  e  $b$  podemos estabelecer se  $a > b$ ,  $b > a$  ou  $a = b$ . Entretanto mesmo com o conceito de módulo não é possível afirmar, por exemplo, que  $z_1 > z_2$ , uma vez que podemos ter  $z_1 \neq z_2$  tais que  $|z_1| = |z_2|$ . Em outras palavras, é possível demonstrar que o corpo dos números complexos não é ordenado. (BROWN; CHURCHILL, 2009).

Geometricamente, o módulo de  $z$  é a distância entre a origem e o ponto  $(x,y)$ , ou ainda, é o comprimento do vetor  $(x,y)$  que representa  $z$ . Existem propriedades interessantes relacionadas ao valor absoluto de um número complexo. Essas propriedades são demonstradas na tradução realizada por Tadao Yoshioka e Alfredo Alves de Farias do livro *Complex Variables and Applications* de Ruel V. Churchill (YOSHIOKA T; FARIAS, 1975).

A distância entre dois números complexos pode ser definida como

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (21)$$

Essa equação nos aponta a distância entre os pontos  $z_1$  e  $z_2$ .

Dados  $z = (x,y) = x + yi$ , e seu conjugado  $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$ , é simples observar que:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = (x^2 + y^2) = |z|^2; \quad (22)$$

$$|\bar{z}| = |(x - yi)| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \quad (23)$$

Utilizando das definições de quociente e produto, é possível verificar que os valores absolutos são distributivos em relação ao produto e ao quociente, ou seja,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad (24)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0. \quad (25)$$

As desigualdades triangulares também são válidas para os complexos:

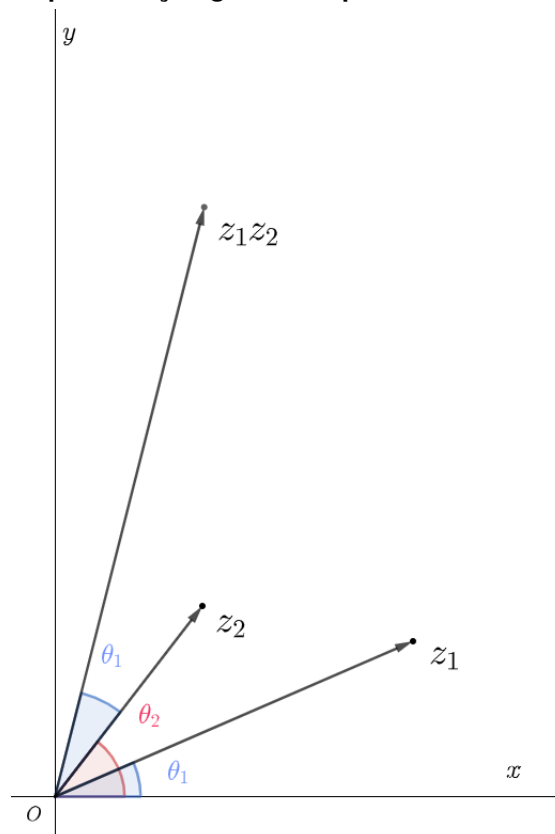
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (26)$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (27)$$

### 3.5 Representação trigonométrica ou polar dos números complexos

Apesar de a soma funcionar da mesma forma que a soma vetorial, o resultado da multiplicação de números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , é um número complexo, também representado por um vetor no plano- $z$ , que também é o plano de  $z_1$  e  $z_2$ . Esta operação evidentemente não ocorre em espaços vetoriais, objetos de estudo da Álgebra Linear (BROWN; CHURCHILL, 2009). De fato, a multiplicação pode ser interpretada como uma rotação no plano complexo, conforme ilustrado na Figura 5. Esta propriedade foi a motivação principal para o desenvolvimento dos quatérnios.

**Figura 5 – Representação gráfica do produto números complexos**



Fonte: Autoria própria (2022).

Nesta representação, temos o produto dos complexos  $z_1$  e  $z_2$ , ambos na forma polar, que contém um ângulo referente a cada complexo,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  respectivamente, ao realizarmos a operação, obtemos um vetor  $z_1 z_2$  que é igual a ao comprimento de  $z_1$  e  $z_2$  e o ângulo desse novo vetor é dado por  $\theta_1 + \theta_2$  em relação ao eixo real, resultando em uma rotação, nesse caso no sentido anti-horário. E para formalizar essa representação é necessário denotar de argumento de um número complexo  $z = x + yi$  com  $z \neq 0$  de forma que o ângulo  $\theta$  seja defenido por:

$$\cos \theta = \frac{x}{a}, \text{sen } \theta = \frac{y}{a}, a = |z| \quad (28)$$

ou ainda:

$$x = a \cdot \cos \theta, y = a \cdot \text{sen } \theta, a = |z| \quad (29)$$

É possível notar que:

- Se  $z \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ;
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} = \frac{\frac{y}{a}}{\frac{x}{a}} = \frac{y}{x}$ ;
- Há pelo menos um ângulo que satisfaz a definição, pois:

$$\operatorname{cos}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$$

da definição de módulo, temos que  $a = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , logo  $(|z|)^2 = x^2 + y^2$ , dessa forma:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1;$$

- Ao fixar o número complexo  $z \neq 0$ , são fixados  $\operatorname{cos} \theta$  e  $\operatorname{sen} \theta$ , entretanto o ângulo  $\theta$  pode assumir infinitos valores, congruentes de módulo  $2\pi$ . Ou seja, o complexo  $z \neq 0$  tem como argumento:

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

de forma de que  $\theta_0$  é chamado de argumento principal de  $z$ , denotado por  $\operatorname{Arg}(z)$ , de forma que:

$$\operatorname{cos} \theta_0 = \frac{x}{a}, \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{y}{a}, 0 \leq \theta_0 < 2\pi.$$

No plano de Argand-Gauss na Figura 6 tomando o número complexo  $z = x + yi$  que é representado como um vetor partindo da origem até o ponto  $P = (x, y)$ , com  $\theta_0$  sendo seu argumento principal, utilizando a definição 29 é possível afirmar que o complexo  $z$  pode ser representado da forma polar ou trigonométrica (SANTOS, 2013):

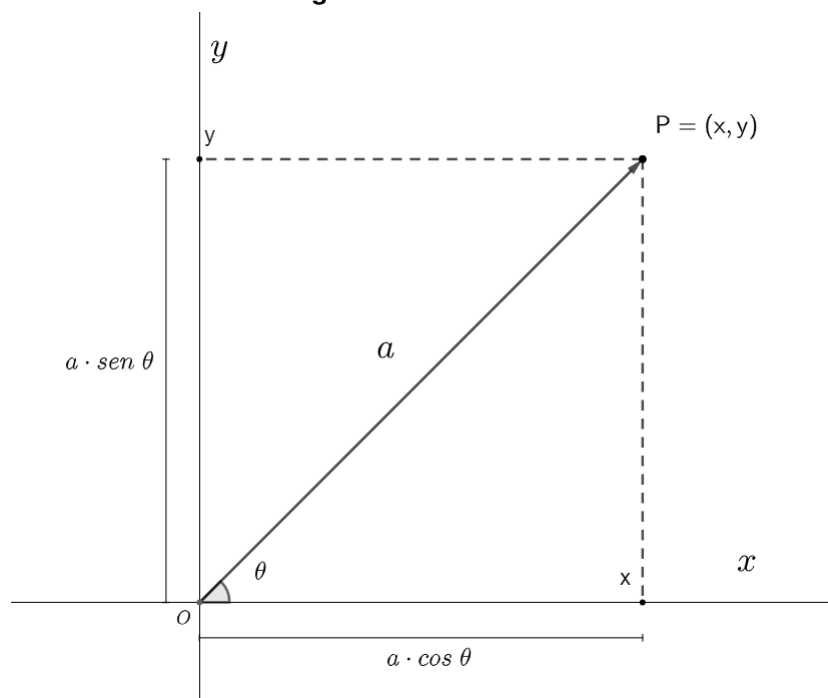
$$z = a \cdot \operatorname{cos} \theta + ia \cdot \operatorname{sen} \theta = a \cdot (\operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (30)$$

como o ângulo  $\theta$  pode assumir infinitos valores, tomando então  $\operatorname{arg}(z) = \theta + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{R}$  também representa o complexo  $z$ , dessa forma, um número complexo pode ser representado de infinitas formas trigonométricas representadas por:

$$z = a \cdot [\operatorname{cos} (\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} (\theta + 2k\pi)], k \in \mathbb{R} \quad (31)$$

Com isso conclui o estudo a respeito do conjunto dos números complexos e suas propriedades.

Figura 6 – Forma Polar



Fonte: Autoria própria (2022).

## 4 O CONJUNTO DOS QUATÉRNIOS

### 4.1 Estrutura e Definições

Durante essa sessão apresento as estruturas necessárias para desenvolver o trabalho, indicando as propriedades do conjunto.

O conjunto dos quatérnios é denotado por  $\mathbb{H}$ , e um quatérnio  $q$  é definido como uma quádrupla ordenada  $[a, (x, y, z)]$  e suas propriedades, de forma que  $a, x, y, z \in \mathbb{R}$  e o vetor  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Dessa forma, temos que:

$$\mathbb{H} = \{[a, (x, y, z)]; a, x, y, z \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\},$$

$$q = q' \Leftrightarrow [a, (x, y, z)] = [a', (x', y', z')] \Leftrightarrow a = a', x = x', y = y', z = z'. \quad (32)$$

O elemento  $a$  é denominado parte real ( $Re(q)$ ) e o vetor  $\vec{v} = (x, y, z)$  é denominado como parte imaginária ( $Im(q)$ ).

Considero importante ressaltar a passagem de Barreiro (2009) que define os números imaginários e as suas representações como quádruplas ordenadas no conjunto  $\mathbb{H}$ :

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0) &= 1; \\ (0, 1, 0, 0) &= i; \\ (0, 0, 1, 0) &= j; \\ (0, 0, 0, 1) &= k. \end{aligned} \quad (33)$$

Os quatérnios da forma  $q = \{[a, (0, 0, 0)]; a \in \mathbb{R}\}$  são os números reais, se  $q = \{[0, (x, y, z)]; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$  ele é chamado de quatérnio imaginário puro. Assim podemos definir também o quatérnio nulo, que é da forma  $q = [0, (0, 0, 0)]$ , contendo tanto a parte real quanto a imaginária nulas.

Com essa estrutura do conjunto realizada e a descoberta de Hamilton a respeito do conjunto, utilizaremos a definição apresentada no trabalho *Quaternions, Interpolation and Animation* (DAM; KOCH; LILLHOLM, 1998):

**Definição 4.1.** Dados  $a, x, y, z \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , seja  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ ,  $ij = k, ji = -k, ki = j, ik = -j, jk = i, kj = -i$  e  $q \in \mathbb{H}$ . É possível descrever  $q$  como:

$$q = a + xi + yj + zk = [a, (x, y, z)] = [a, \vec{v}] \quad (34)$$



E sejam  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2] \in \mathbb{H}$ , as operações de soma (+) e multiplicação ( $\cdot$ ) são definidas da seguinte forma:

$$q_1 + q_2 = [a_1 + a_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2] \quad (35)$$

$$q_1 \cdot q_2 = [a_1 a_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + a_1 \cdot \vec{v}_2 + a_2 \cdot \vec{v}_1] \quad (36)$$

Dessa forma, com as definições das operações apresentadas, suas demonstrações são, conseqüentemente, a Proposição 4.1 e a Proposição 4.2 a seguir:

**Proposição 4.1.** *Sejam  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  em que  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , então a soma entre eles é dada por  $q_1 + q_2 = [a_1 + a_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2]$ .*

**Demonstração.** Dados  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , temos que sua soma é:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] + [a_2, (x_2, y_2, z_2)] \\ &= (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= (a_1 + a_2) + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2) \\ &= [a_1 + a_2, (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] \end{aligned}$$

■

**Proposição 4.2.** *Sejam  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  em que  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , então a multiplicação entre eles é dada por:  $q_1 \cdot q_2 = [a_1 a_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + a_1 \cdot \vec{v}_2 + a_2 \cdot \vec{v}_1]$ , sabendo que  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk - 1$ .*

**Demonstração.** Dados  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , sua multiplicação é dada por:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] \cdot [a_2, (x_2, y_2, z_2)] \\ &= (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \cdot (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= a_1 a_2 + a_1 x_2 i + a_1 y_2 j + a_1 z_2 k + x_1 i a_2 + x_1 i x_2 i + x_1 i y_2 j + x_1 i z_2 k \\ &\quad + y_1 j a_2 + y_1 j x_2 i + y_1 j y_2 j + y_1 j z_2 k + z_1 k a_2 + z_1 k x_2 i + z_1 k y_2 j + z_1 k z_2 k \\ &= a_1 a_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + i(a_1 x_2 + a_2 x_1 + y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ &\quad + j(a_1 y_2 - x_1 z_2 + a_2 y_1 + z_1 x_2) + k(a_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + a_2 z_1) \\ &\quad + i(y_1 z_2 - z_1 y_2) + j(z_1 x_2 - x_1 z_2) + k(x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 a_2 - [\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle] + a_1(x_2 i + y_2 j + z_2 k) + a_2(x_1 i + y_1 j + z_1 k) \\
&+ (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) \\
&= [a_1 a_2 - [\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle], (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) \\
&+ a_1 \cdot (x_2, y_2, z_2) + a_2 \cdot (x_1, y_1, z_1)] \\
&= [a_1 a_2 - [\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle], \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + a_1 \cdot \vec{v}_2 + a_2 \cdot \vec{v}_1]
\end{aligned}$$

■

Assim como os números complexos, definimos o conjugado de um quatérnio como:

**Definição 4.2.** *Seja  $q = [a, \vec{v}] \in \mathbb{H}$ , seu conjugado é o quatérnio  $\bar{q} = [a, -\vec{v}]$ .*

Essa definição traz consigo algumas propriedades, sejam  $q_1$  e  $q_2 \in \mathbb{H}$ :

$$\overline{(\bar{q}_1)} = q_1 \quad (37)$$

$$\overline{(q_1 q_2)} = \bar{q}_2 \bar{q}_1 \quad (38)$$

$$\overline{(q_1 + q_2)} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 \quad (39)$$

$$q_1 \bar{q}_1 = \bar{q}_1 q_1 \quad (40)$$

**Definição 4.3.** *Seja  $q = [a, \vec{v}] \in \mathbb{H}$  e a operação  $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$  é chamada de norma, e  $\|q\|$  é a norma de  $q$ , em que o produto entre  $q$  e seu conjugado é dado por:*

$$\begin{aligned}
q\bar{q} &= [a, \vec{v}] \cdot [a, -\vec{v}] \\
&= [aa - (\langle \vec{v}, -\vec{v} \rangle), a\vec{v} + a(-\vec{v}) + \vec{v} \times (-\vec{v})] \\
&= [a^2 - (-|\vec{v}|^2), a\vec{v} - a\vec{v} - \vec{v} \times \vec{v}] \\
&= [a^2 + |\vec{v}|^2, 0]
\end{aligned}$$

Dados  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1], q_2 = [a_2, \vec{v}_2] \in \mathbb{H}$  e a operação de norma definido anteriormente, é possível indicar algumas propriedades:

$$\|q_1\| = \sqrt{a_1^2 + |\vec{v}_1|^2} \quad (41)$$

$$\|\bar{q}_1\| = \|q_1\| \quad (42)$$

$$\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\| \quad (43)$$

**Definição 4.4.** Sejam  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2] \in \mathbb{H}$ . Definimos o produto interno  $\bullet : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  através da expressão

$$q_1 \bullet q_2 = a_1 a_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \quad (44)$$

**Proposição 4.3.** Seja  $q = [a, \vec{v}] \in \mathbb{H}$ , sua norma é dada por:  $\|q\| = \sqrt{q \bullet q} = \sqrt{a^2 + |\vec{v}|^2}$ .

## 4.2 Estrutura algébrica dos quatérnios

Com as definições que formam a estrutura do conjunto dos quatérnios, irei nessa sessão demonstrar que o conjunto  $\mathbb{H}$  é um anel não comutativo, ou seja, demonstrar que em  $\mathbb{H}$  são válidas as seguintes propriedades: Associatividade da soma e da multiplicação; comutatividade da soma; existência de elementos neutros tanto da soma quanto da multiplicação; existência de elementos nulos da soma e da multiplicação; e por fim a existência do inverso multiplicativo e do simétrico da soma, e por fim a distributiva da multiplicação em relação a soma.

Irei iniciar essa seção apresentando o conjunto dos quatérnios não nulos, denotado como  $\mathbb{H}^0$ .

**Definição 4.5.** O conjunto dos quatérnios  $\mathbb{H} \setminus [0, (0,0,0)]$  é representado por  $\mathbb{H}^0$ . Logo que  $\mathbb{H}^0 \subset \mathbb{H}$ , e  $q = [0, (0,0,0)]$  é o quatérnio nulo.

Com isso definido, segue as demonstrações das propriedades da operação de soma (+).

**Proposição 4.4. (Comutatividade da Soma)** Sejam  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  em que  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , temos que:  $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ .

**Demonstração.** Sejam  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  e  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , ao soma-los obtemos que:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] + [a_2, (x_2, y_2, z_2)] \\ &= (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= a_1 + a_2 + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2) \\ &= a_2 + a_1 + i(x_2 + x_1) + j(y_2 + y_1) + k(z_2 + z_1) \\ &= (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) + (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= q_2 + q_1 \end{aligned}$$

■

**Proposição 4.5. (Associatividade da Soma)** Sejam  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$  em que  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$ ,  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$  e  $q_3 = [a_3, \vec{v}_3]$ . Determinamos que:  $(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3)$ .

**Demonstração.** Sejam  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$ ,  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$  e  $q_3 = [a_3, \vec{v}_3]$ , ao soma-los de forma ordenada obtemos:

$$\begin{aligned}
(q_1 + q_2) + q_3 &= ([a_1, (x_1, y_1, z_1)] + [a_2, (x_2, y_2, z_2)]) + [a_3, (x_3, y_3, z_3)] \\
&= [(a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k)] + a_3 + x_3i + y_3j + z_3k \\
&= [a_1 + a_2 + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2)] + a_3 + x_3i + y_3j + z_3k \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + i(x_1 + x_2 + x_3) + j(y_1 + y_2 + y_3) + k(z_1 + z_2 + z_3) \\
&= a_1 + x_1i + y_1j + z_1k + [a_2 + a_3 + i(x_2 + x_3) + j(x_2 + x_3) + k(x_2 + x_3)] \\
&= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] + [(a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) + (a_3 + x_3i + y_3j + z_3k)] \\
&= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] + ([a_2, (x_2, y_2, z_2)] + [a_3, (x_3, y_3, z_3)]) \\
&= q_1 + (q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

■

**Proposição 4.6. (Elemento Neutro da Soma)** Para todo  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1] \in \mathbb{H}$  existe um  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2] \in \mathbb{H}$ , correspondente, tal que:  $q_1 + q_2 = q_1$ .

**Demonstração.** Somando  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  a um concorrente genérico a elemento neutro da soma  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , obtemos que:

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] + [a_2, (x_2, y_2, z_2)] \\
&= (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\
&= a_1 + a_2 + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2) \\
\Rightarrow &\begin{cases} a_1 + a_2 = a_1 \Leftrightarrow a_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = x_1 \Leftrightarrow x_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = y_1 \Leftrightarrow y_2 = 0 \\ z_1 + z_2 = z_1 \Leftrightarrow z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_2 = 0 + 0i + 0j + 0k = [0, (0, 0, 0)]
\end{aligned}$$

Dessa forma,  $q_2$  é o quatérnio nulo, e age como o elemento neutro da soma do conjunto  $\mathbb{H}$ . ■

**Proposição 4.7. (Elemento Simétrico da Soma)** Para todo  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1] \in \mathbb{H}$ , existe um  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2] \in \mathbb{H}$  correspondente, de forma que:  $q_1 + q_2 = 0$

**Demonstração.** Somando  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  com um conorrente genérico a elemento simétrico  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$ , é possível observar que:

$$\begin{aligned}
 q_1 + q_2 &= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] + [a_2, (x_2, y_2, z_2)] \\
 &= (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\
 &= a_1 + a_2 + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2) = 0 \\
 \Rightarrow &\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -a_1 \\ x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 \\ y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -y_1 \\ z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1 \end{cases} \Rightarrow q_2 = -a_1 - x_1 - y_1 - z_1 \\
 &= -1 \cdot (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) = -1 \cdot [a_1, (x_1, y_1, z_1)] \\
 &= -1 \cdot q_1 = -q_1
 \end{aligned}$$

Dessa forma,  $-q_1$  é chamado de elemento simétrico de  $q_1$ , agindo também como elemento nulo da soma no conjunto  $\mathbb{H}$ . ■

As demonstrações das propriedades da operação de multiplicação  $(\cdot)$  vêm a seguir.

**Proposição 4.8.** (Associatividade da Multiplicação) *Sejam  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$  em que  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$ ,  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$  e  $q_3 = [a_3, \vec{v}_3]$ . Temos que:  $(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3)$*

**Demonstração.** Sejam  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$ ,  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$  e  $q_3 = [a_3, \vec{v}_3]$ , ao multiplica-los obtemos que:

$$\begin{aligned}
 (q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 &= [a_1a_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, a_1\vec{v}_2 + a_2\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2] \cdot (a_3, \vec{v}_3) \\
 &= [(a_1a_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle) \cdot a_3 - \langle (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + a_1\vec{v}_2 + a_2\vec{v}_1), \vec{v}_3 \rangle, \\
 &\quad (a_1a_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle) \cdot \vec{v}_3 + (a_1\vec{v}_2 + a_2\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot a_3 \\
 &\quad + (a_1\vec{v}_2 + a_2\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3] \\
 &= [a_1a_2a_3 - a_3 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle - a_1 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle - a_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle - \langle (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2), \vec{v}_3 \rangle, \\
 &\quad a_1a_2 \cdot \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \cdot \vec{v}_3 + a_3(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) + a_1a_3 \cdot \vec{v}_2 + a_2a_3 \cdot \vec{v}_1 \\
 &\quad + (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 + (a_1\vec{v}_2) \times \vec{v}_3 + (a_2\vec{v}_1) \times \vec{v}_3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [a_1(a_2a_3 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle - \langle \vec{v}_1, (a_2\vec{v}_3 + a_3\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \rangle, \\
&\quad a_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 + a_2\vec{v}_3 + a_3\vec{v}_2) + \vec{v}_1 \cdot (a_2a_3 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle) \\
&\quad + \vec{v}_1 \times (a_2\vec{v}_3 + a_3\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3)] \\
&= (a_1, \vec{v}_1) \cdot [a_2a_3 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle, a_2\vec{v}_3 + a_3\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3] \\
&= q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3)
\end{aligned}$$

■

**Proposição 4.9.** (Elemento Neutro da Multiplicação) Para todo  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1] \in \mathbb{H}$ , existe um  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2] \in \mathbb{H}$  correspondente, de forma que:  $q_1 \cdot q_2 = q_1$ .

**Demonstração.** Ao multiplicar Sejam  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  com um concorrente genérico a elemento neutro da multiplicação  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$  obtemos que:

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 &= [a_1, (x_1, y_1, z_1)] \cdot [a_2, (x_2, y_2, z_2)] \\
&= (a_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \cdot (a_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\
&= a_1a_2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + i(a_1x_2 + a_2x_1 + y_1z_2 - z_1y_2) \\
&\quad + j(a_1y_2 - x_1z_2 + a_2y_1 + z_1x_2) + k(a_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + a_2z_1) \\
&\Rightarrow \begin{cases} a_1a_2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = a_1 \\ a_1x_2 + a_2x_1 + y_1z_2 - z_1y_2 = x_1 \\ a_1y_2 - x_1z_2 + a_2y_1 + z_1x_2 = y_1 \\ a_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + a_2z_1 = z_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_2 = 1 + 0i + 0j + 0k = [1, (0, 0, 0)]
\end{aligned}$$

Dessa forma,  $q_2 = [1, 0]$  é o único elemento neutro da multiplicação em  $\mathbb{H}$ . ■

**Proposição 4.10.** (Elemento Inverso da Multiplicação) Para todo  $q \in \mathbb{H}^0$ , existe um único  $q^{-1} \in \mathbb{H}$ , correspondente, de forma que:  $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ .

E  $q^{-1}$  é dado por:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$$

**Demonstração.** Multiplicando  $q = [a, \vec{v}]$  com seu inverso  $\frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ , obtemos que:

$$\begin{aligned} q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} &= (a, \vec{v}) \cdot (a, -\vec{v}) \cdot \frac{1}{\|q\|^2} \\ &= [(a^2 - (-\vec{v}^2), a \cdot \vec{v} + a \cdot (-\vec{v}) + \vec{v} \times (-\vec{v}))] \cdot \frac{1}{\|q\|^2} \\ &= (a^2 + \vec{v}^2, 0) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a^2 + \vec{v}^2})^2} \\ &= \frac{a^2 + \vec{v}^2}{a^2 + \vec{v}^2} = 1 \end{aligned}$$

Então dado um  $q \in \mathbb{H}^0$  qualquer, sempre é possível indicar seu inverso. ■

**Proposição 4.11.** (*Distributiva da Multiplicação em Relação à Soma*) Sejam  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$  em que  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$ ,  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2]$  e  $q_3 = [a_3, \vec{v}_3]$ . Determinamos que:  $q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3$ .

**Demonstração.** Ao multiplicar  $q_1 = [a_1, \vec{v}_1]$  à soma  $q_2 = [a_2, \vec{v}_2] + q_3 = [a_3, \vec{v}_3]$ , obtemos que:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot (q_2 + q_3) &= (a_1, \vec{v}_1) \cdot (a_2 + a_3, \vec{v}_2 + \vec{v}_3) \\ &= [a_1 \cdot (a_2 + a_3) - [\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)], a_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + (a_2 + a_3) \cdot \vec{v}_1 \\ &\quad + \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)] \\ &= [a_1 a_2 + a_1 a_3 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3), a_1 \cdot \vec{v}_2 + a_1 \cdot \vec{v}_3 + a_2 \cdot \vec{v}_1 + a_3 \cdot \vec{v}_1 \\ &\quad + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3] \\ &= [a_1 a_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, a_1 \cdot \vec{v}_2 + a_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2] \\ &\quad + [a_1 a_3 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3, a_1 \cdot \vec{v}_3 + a_3 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3] \\ &= q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3 \end{aligned}$$

■

A definição de produto de quatérnios não necessariamente é comutativa, é possível A verificar isso a partir da Definição 4.1, em que é dado um contra exemplo:  $ij = k$ , entretanto  $ji = -k$ .

Assim com as demonstrações realizadas identificamos que o conjunto dos quatérnios é munido das propriedades da Adição (+) e da Multiplicação ( $\cdot$ ), exceto a comutatividade da multiplicação, logo o conjunto  $\mathbb{H}$  é por definição, um anel não-comutativo.(GARCIA; LEQUAIN, 2006).

### 4.3 Rotações com os quatérnios

Durante essa sessão vamos introduzir as definições necessárias para futuramente definir as rotações utilizando os quatérnios. Início apresentando e definindo o conjunto dos quatérnios unitários que definem uma esfera unitária no espaço quadridimensional, e será denominado por  $\mathbb{H}_1$ .

**Definição 4.6.** *Seja  $q \in \mathbb{H}$ , de forma que  $\|q\| = 1$ ,  $q$  então é chamado de quatérnio unitário, e o conjunto dos quatérnios unitários será representado por  $\mathbb{H}_1$ .*

O conjunto  $\mathbb{H}_1$  é subconjunto de  $\mathbb{H}$ . E para o conjunto dos quatérnios unitários temos mais duas propriedades a respeito da norma e o conjugado do quatérnio, que serão definidas na seguinte proposição:

**Proposição 4.12.** *Dados  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$ , é válido que:*

$$i) \quad \|q_1 q_2\| = 1$$

$$ii) \quad q_1^{-1} = \bar{q}_1$$

**Demonstração.** *i)  $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\| = 1$ , como  $\|q_1\| = \|q_2\| = 1$ . (Propriedade 43)*

$$ii) \quad q_1^{-1} = \frac{\bar{q}_1}{\|q_1\|^2} = \bar{q}_1, \text{ pois } \|q\| = 1.$$

■

Esse conjunto tem um papel importante para as rotações gerais como será apresentado posteriormente.

Os quatérnios assim como os números complexos tem uma representação trigonométrica, atrelando ângulos aos quatérnios, como pode ser observado na seguinte proposição:

**Proposição 4.13.** *Seja  $q = [a, \vec{v}] \in \mathbb{H}_1$ . Então existe  $\vec{v}' \in \mathbb{R}^3$  e  $\alpha \in (-\pi, \pi]$ , de forma que  $q = [\cos \alpha, \vec{v}' \cdot \text{sen} \alpha]$*

**Demonstração:** *Essa demonstração é dividida em dois casos, se  $q = [1, 0]$  ou se  $q \neq [1, 0]$ .*

*Se  $q = [1, 0]$ , indica que  $\alpha = 0$ , e  $\vec{v}'$  pode ser escolhido livremente no  $\mathbb{R}^3$ .*

*Já se  $q \neq [1, 0]$ , selecionamos  $k = |\vec{v}|$  e  $\vec{v}' = \frac{1}{k} \vec{v}$ , então  $\text{Vecv} = k \vec{v}'$ ,  $\vec{v}'$  é um vetor unitário no  $\mathbb{R}^3$ , como  $q$  é um quatérnio unitário, temos que*

$$1 = \|q\|^2 = a^2 + \vec{v} \cdot \vec{v} = a^2 + k^2 \vec{v}' \cdot \vec{v}' = a^2 + k^2$$

Dessa forma, a equação  $a^2 + k^2 = 1$  estabelece uma circunferência no plano, que também é descrita pela equação  $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ , assim existe  $\alpha \in (-\pi, \pi]$ , de forma que



$a = \cos \alpha$  e  $k = \text{sen} \alpha$ . Logo,

$$q = [a, \vec{v}] = [a, k\vec{v}] = [\cos \alpha, \vec{v} \text{sen} \alpha]$$

■

Partindo da representação trigonométrica, definimos a representação logarítmica, e da logarítmica definimos a representação exponencial, e como deve ser operada uma potenciação com quatérnios.

**Definição 4.7.** *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ , em que  $q = [\cos \alpha, \vec{v} \cdot \text{sen} \alpha]$ . A representação logarítmica é definida por:*

$$\log q = [0, \alpha \vec{v}]$$

**Definição 4.8.** *Para um quatérnio da forma  $q = [0, \alpha \vec{v}]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  e  $|\vec{v}| = 1$ , a representação exponencial de  $q$  é definida de como:*

$$\exp q = [\cos \alpha, \text{sen} \alpha \cdot \vec{v}]$$

**Definição 4.9.** *Dados  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , a potenciação  $q^t$  é:*

$$q^t = \exp(t \log q)$$

Assim como em  $\mathbb{R}$ , as propriedades de potência a seguir são válidas em  $\mathbb{H}_1$ .

**Proposição 4.14.** *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , então  $\log(q^t) = t \log q$ .*

*Demonstração.*

$$\log(q^t) = \log(\exp(t \log q)) = t \log q$$

■

**Proposição 4.15.** *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $q = [\cos \alpha, \vec{v} \cdot \text{sen} \alpha]$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Logo:*

$$q^a \cdot q^b = q^{a+b}$$

**Demonstração.** Realizando a multiplicação de  $q^a \cdot q^b$ , obtemos que:

$$\begin{aligned}
q^a \cdot q^b &= \exp(a \log q) \cdot \exp(b \log q) \\
&= \exp(a[0, \vec{v}]) \cdot \exp(b[0, \vec{v}]) \\
&= [\cos(a\alpha), \vec{v} \operatorname{sen}(a\alpha)] \cdot [\cos(b\alpha), \vec{v} \operatorname{sen}(b\alpha)] \\
&= [\cos(a\alpha) \cos(b\alpha) - \operatorname{sen}(a\alpha) \operatorname{sen}(b\alpha)(\vec{v} \cdot \vec{v}), \cos(a\alpha)\vec{v} \operatorname{sen}(b\alpha) + \cos(b\alpha)\vec{v} \operatorname{sen}(a\alpha) \\
&\quad + \operatorname{sen}(a\alpha) \operatorname{sen}(b\alpha)(\vec{v} \times \vec{v})] \\
&= [\cos(a\alpha) \cos(b\alpha) - \operatorname{sen}(a\alpha) \operatorname{sen}(b\alpha), \vec{v} \cdot (\cos(a\alpha) \operatorname{sen}(b\alpha) + \cos(b\alpha) \operatorname{sen}(a\alpha))] \\
&= [\cos(\alpha(a+b)), \operatorname{sen}(\alpha(a+b))\vec{v}] \\
&= \exp[0, \alpha(a+b)\vec{v}] \\
&= \exp((a+b) \log q) \\
&= q^{a+b}
\end{aligned}$$

■

**Proposição 4.16.** *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ , e  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que  $(q^a)^b = q^{ab}$*

**Demonstração.** Utilizando a Proposição 4.13, obtemos que:

$$(q^a)^b = \exp(b \log(\exp(a \log q))) = \exp(ba \log q) = q^{ab}$$

■

Como visto, Hamilton buscava uma extensão aos números complexos do plano para o espaço com o conjunto dos quatérnios, e assim como os números complexos descreviam rotações no plano, os quatérnios deveriam descrever rotações no espaço.

E os quatérnios realmente produzem tais rotações, e para mostrar isso irei introduzir como é o funcionamento das rotações tridimensionais com o uso dos quatérnios utilizando algumas definições e proposições apresentadas anteriormente, e também algumas que irei apresentar. Esses teoremas foram demonstrados no trabalho: *Quaternions, Interpolation and Animation* (DAM; KOCH; LILLHOLM, 1998).

Iniciaremos com a apresentação e demonstração da validade da operação que realiza a rotação com os quatérnios.

**Proposição 4.17.** *Seja  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = [a, \vec{v}]$  e  $p \in \mathbb{H}^0$ , se dado um  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então  $(rq)p(rq)^{-1} = qpq^{-1}$*

**Demonstração.** Seja  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , o inverso de  $rq$  é  $q^{-1}r^{-1}$ . Como o escalar  $r$  é real, sua multiplicação é comutativa, sendo assim ao manipular a operação obtemos que:

$$(rq)p(rq)^{-1} = rqpq^{-1}r^{-1} = qpq^{-1}$$

Logo  $qpq^{-1}$  é inalterado quando multiplicado por qualquer escalar diferente de zero. ■

Nas proposições a seguir, irei realizar suas demonstrações utilizando somente os quatérnios unitários, pois os resultados exibidos para  $q \in \mathbb{H}_1$  é geral para qualquer  $q \in \mathbb{H}^0$

**Proposição 4.18.** *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $p = [a, \vec{v}] \in \mathbb{H}$ . Então  $qpq^{-1} = p'$ , de forma que  $p' = [a, \vec{v}']$ , com  $|\vec{v}| = |\vec{v}'|$ .*

**Demonstração.** Relembrando que por definição a parte escalar de  $q$  é denotada por  $Re(q)$  e dividir a demonstração em três partes:

- $Re(p') = Re(p), p \in \{[a, 0]; a \in \mathbb{R}\}$
- $Re(p') = Re(p), p \in \{[0, \vec{v}]; \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$
- Utilizar os dois itens acima para mostrar a proposição para  $p \in \mathbb{H}$

Para o caso em que  $p$  é um escalar escrito como um quatérnio  $p = [a, 0]$ , mostrar que  $Re(p') = Re(p)$  é simples pois,

$$qpq^{-1} = q[a, 0]q^{-1} = [a, 0]qq^{-1} = [a, 0]$$

E se  $p$  é um vetor  $\vec{v}$  representado como um quatérnio  $p = [0, \vec{v}]$ , sabendo que a parte escalar  $Re(q), q \in \mathbb{H}_1$  pode ser indicada por  $2Re(q) = q + \bar{q} = [a, \vec{v}] + [a, -\vec{v}] = [a, 0]$ , logo  $2Re(p)$  será:

$$\begin{aligned} 2Re(qpq^{-1}) &= (qpq^{-1}) + \overline{(qpq^{-1})} \\ &= (qp\bar{q}) + \overline{(qp\bar{q})} \\ &= qp\bar{q} + \overline{qp\bar{q}} \text{ (distributiva da multiplicação em relação a soma)} \\ &= q(p + \bar{p})\bar{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q(2\text{Re}(p))\bar{q} \\
&= 2\text{Re}(p)q\bar{q} \text{ (Proposição 4.11)} \\
&= 2\text{Re}(p)q \\
&= 0
\end{aligned}$$

Agora, seja  $p \in \mathbb{H}$ ,  $p = [a, \vec{v}] = [a, 0] + [0, \vec{v}]$ , temos que:

$$\begin{aligned}
qpq^{-1} &= q([a, 0] + [0, \vec{v}])q^{-1} \\
&= q[a, 0]q^{-1} + q[0, \vec{v}]q^{-1} \\
&= [a, 0] + [0, \vec{v}'] \\
&= [a, \vec{v}']
\end{aligned}$$

Em todos quatérnios  $p$  em que  $\text{Re}(p) = \text{Re}(p')$ , com  $q \in \mathbb{H}_1$ , e a equação 43 temos que  $\|p'\| = \|qp'q^{-1}\| = \|q\| \|p\| \|q^{-1}\| = \|p\|$ , como  $a$  é fixo, temos somente o caso em que  $|\vec{v}| = |\vec{v}'|$ . ■

A partir dessa demonstração é possível verificar a seguinte propriedade,

**Corolário 4.1.** *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$  e  $p = [a, b\vec{v}]$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . Se  $q[a, v]\bar{q} = [a, \vec{v}']$ , então  $q[a, b\vec{v}]\bar{q} = [a, b\vec{v}']$ .*

**Demonstração.** Operando  $qp\bar{q}$  da hipótese, temos que:

$$\begin{aligned}
qp\bar{q} &= q[a, b\vec{v}]\bar{q} \\
&= \frac{b}{b}q \left[ \frac{b}{b}a, \frac{b^2}{b}\vec{v} \right] \bar{q} \\
&= bq \left[ \frac{a}{b}, \vec{v} \right] \bar{q} \\
&= b \left[ \frac{a}{b}, \vec{v}' \right] \\
&= [a, b\vec{v}']
\end{aligned}$$

■

**Proposição 4.19.** *Dados  $q, p \in \mathbb{H}_1$ , de forma que  $p = [\cos \alpha, \text{sen} \alpha \vec{v}]$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Logo  $qp^t\bar{q} = (qp\bar{q})^t$ .*

**Demonstração.** Pelo corolário 4.1, há um vetor  $\vec{v}'$  pertencente ao  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $qp\bar{q} = [\cos \alpha, \text{sen}\alpha\vec{v}']$ . Assim é obtido que:

$$\begin{aligned}
 qp^t\bar{q} &= q(\exp(t \log p))\bar{q} \\
 &= q(\exp(t[0, \alpha\vec{v}]))\bar{q} \\
 &= q(\cos t\alpha, \text{sen}t\alpha\vec{v}')\bar{q} \\
 &= [\cos t\alpha, \text{sen}t\alpha\vec{v}'] \\
 &= \exp(t[0, \alpha\vec{v}']) \\
 &= \exp(t \log[\cos \alpha, \text{sen}\alpha\vec{v}']) \\
 &= \exp(t \log(qp\bar{q})) \\
 &= (qp\bar{q})^t
 \end{aligned}$$

■

Com todas essas definições e proposições é possível apresentar o teorema principal no que diz respeito a rotações no conjunto dos quatérnios na seguinte proposição.

**Proposição 4.20.** *Seja  $q = [\cos \alpha, \text{sen}\alpha \cdot \vec{n}] \in \mathbb{H}_1$ , em que  $n$  é um vetor unitário e  $\alpha \in (-\pi, \pi]$ . Seja  $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e também o quatérnio  $p = [0, \vec{r}] \in \mathbb{H}$ . Então  $p' = qpq^{-1}$  é  $p$  rotacionado  $2\alpha$  pelo eixo de  $n$ .*

**Demonstração.** Início a demonstração mostrando como o vetor  $\vec{r}$  é rotacionado  $\alpha$  graus pelo eixo definido por  $\vec{n}$ , de maneira usual, observe na Figura 7.

A rotação de  $r$  pode ser indicada como soma de duas componentes,  $\vec{r}_{\parallel}$  e  $\vec{r}_{\perp}$ , que são consequentemente, a projeção de  $\vec{r}$  em  $\vec{n}$  e o vetor ortogonal a  $\vec{n}$  como é possível observar na Figura 8. Logo,  $\vec{r}_{\parallel}$  e  $\vec{r}_{\perp}$ , uma vez que  $\vec{n}$  é unitário, podem ser escritos como:

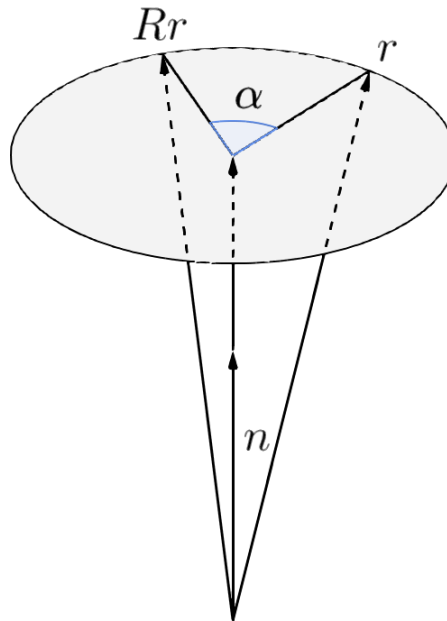
$$\vec{r}_{\parallel} = \text{proj}_{\vec{n}} \vec{r} = \frac{\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} = \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n}$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n}$$

Para sabermos como a rotação afeta  $\vec{r}$ , precisamos primeiramente definir um sistema de coordenadas bidimensional no plano ortogonal a  $n$  que contém  $\vec{r}$  e  $R\vec{r}$ . E para estabelecer esse plano precisamos de um vetor  $v$  que é ortogonal a  $\vec{n}$  e  $\vec{r}_{\perp}$ , logo pelo produto vetorial, podemos definir  $\vec{v}$  como

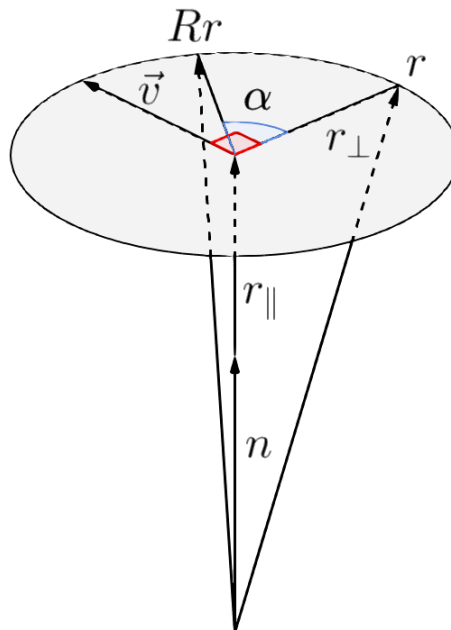
$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{r}_{\perp} = \vec{n} \times (\vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n}) = \vec{n} \times (\vec{r} - \vec{n}) \times (\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n}) = \vec{n} \times \vec{r} - \vec{0} = \vec{n} \times \vec{r}$$

Figura 7 –  $Rr$  como resultado de  $r$  rotacionado  $\alpha$  graus pelo eixo definido por  $n$ .



Fonte: Autorial própria (2022).

Figura 8 – Sistema de coordenadas bidimensional definido como ortogonal a  $\vec{n}$



Fonte: Autorial própria (2022).

Observando a figura, podemos indicar que esse sistema de coordenadas bi-dimensional a  $\vec{n}$  compõe qualquer vetor nesse espaço vetorial pela equação  $r_{\perp} \cos \alpha + \vec{v} \sin \alpha$ , especificamente,  $(R\vec{r})_{\perp}$  que é ortogonal a  $\vec{n}$  pode ser escrito como:  $(R\vec{r})_{\perp} = r_{\perp} \cos \alpha + \vec{v} \sin \alpha$ .

Da mesma forma que o vetor  $\vec{r}$  pode ser decomposto por duas componentes, iremos decompor também o vetor  $R\vec{r}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
R\vec{r} &= (R\vec{r})_{\parallel} + (R\vec{r})_{\perp} \\
&= \vec{r}_{\parallel} + r_{\perp} \cos \alpha + \vec{v} \operatorname{sen} \alpha \\
&= \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n} + (\vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n}) \cos \alpha + \vec{v} \operatorname{sen} \alpha \\
&= \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n} - \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n} \cos \alpha + \vec{r} \cos \alpha + \vec{v} \operatorname{sen} \alpha \\
&= (1 - \cos \alpha) \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \cdot \vec{n} + \vec{r} \cos \alpha + (\vec{n} \times \vec{r}) \operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}$$

Para verificar se encontramos o mesmo resultado da rotação se aplicarmos um quatérnio a um vetor, vamos iniciar observando a equação  $R_q(\vec{p}) = qpq^{-1}$ , lembrando que  $q$  é um quatérnio unitário  $[a, \vec{v}]$  e que  $p$  é um quatérnio imaginário puro  $[0, \vec{r}]$ :

$$\begin{aligned}
R_q(\vec{p}) &= [a, \vec{v}][0, \vec{r}][a, \vec{v}]^{-1} \\
&= [a, \vec{v}][0, \vec{r}][a, -\vec{v}] \\
&= [a, \vec{v}][\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle, a \cdot \vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}] \\
&= [a \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle - \langle \vec{v}, (a \cdot \vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) \rangle, a(a \cdot \vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) \\
&\quad + \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \cdot \vec{v} + \vec{v} \times (a \cdot \vec{r} - \vec{r} \times \vec{v})] \\
&= [0, a^2 \cdot \vec{r} - a(\vec{r} \times \vec{v}) + \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \vec{v} + \vec{v} \times (a \cdot \vec{r}) - \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v})] \\
&= [0, a^2 \cdot \vec{r} + \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \vec{v} - \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - 2a(\vec{r} \times \vec{v})] \\
&= [0, a^2 \cdot \vec{r} + \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \vec{v} - (\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle) \vec{r} + (\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle) \vec{v} + 2a(\vec{v} \times \vec{r})] (*) \\
&= [0, (a^2 - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle) \vec{r} + 2(\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle) \vec{v} + 2a(\vec{v} \times \vec{r})]
\end{aligned}$$

(\*) foi utilizada a identidade  $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = (\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle) \vec{v}_2 - (\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle) \vec{v}_3$ .

Como  $q$  é um quatérnio unitário, ele pode ser representado como enunciado na Proposição 4.19,  $q = [\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha \cdot \vec{n}]$ , e  $|\vec{n}| = 1$ , substituindo-os em  $R_q(\vec{p})$ , obtemos que:

$$\begin{aligned}
R_q(\vec{p}) &= [0, (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle) \cdot \vec{r} + 2(\operatorname{sen} \alpha \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) (\operatorname{sen} \alpha) \vec{n} \\
&\quad + 2 \cos \alpha ((\operatorname{sen} \alpha) \vec{n} \times \vec{r})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [0, (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \vec{r} + (2\vec{n} \sin^2 \alpha) \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \\
&\quad + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\vec{n} \times \vec{r})] \\
&= [0, \vec{r} \cdot \cos(2\alpha) + (1 - \cos(2\alpha)) \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{r}) \sin(2\alpha)]
\end{aligned}$$

Disso, é possível reparar que o resultado é o mesmo obtido quando rotacionado de maneira usual sem os quatérnios, há somente uma diferença, quando rotacionado com os quatérnios, a rotação é de  $2\alpha$  invés de  $\alpha$ . Dessa forma, se dado um vetor unitário  $\vec{n}$ , um ângulo de rotação  $\alpha$ , um quatérnio unitário  $q$  rotaciona  $\vec{r}$  pelo ângulo de  $2\alpha$  em torno de  $\vec{n}$ , no sentido anti-horário. ■

Com isso, qualquer rotação tri-dimensional  $\alpha$  pelo eixo de  $\vec{n}$ ,  $|\vec{n}| = 1$ , pode ser determinada por um quatérnio unitário, basta selecionar um quatérnio  $q \in \mathbb{H}_1$  de forma que  $q = [\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \vec{n}]$ , e realizar a operação  $qpq^{-1}$ , em que  $p$  é um quatérnio da forma  $p = [0, \vec{r}]$  e a rotação no sentido anti-horário do objeto  $r \in \mathbb{R}^3$  será obtida.

Uma propriedade importante da rotação é que é uma transformação linear. De fato, temos que dados o vetor normal  $\vec{n}$ , os vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  e um número real  $\lambda$  temos, tomando respectivamente os quatérnios  $q = [\cos \alpha, \sin \alpha \cdot \vec{n}]$ ,  $p_1 = [0, \vec{r}_1]$ ,  $p_2 = [0, \vec{r}_2]$

$$q(p_1 + p_2)q^{-1} = qp_1q^{-1} + qp_2q^{-1}, \quad (45)$$

$$q(\lambda p_1)q^{-1} = \lambda qp_1q^{-1}. \quad (46)$$

Para concluir as propriedades e proposições irei apresentar que a composição de rotações é resultado de multiplicações dos quatérnios correspondentes na seguinte proposição.

**Proposição 4.21.** *sejam  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$ , a rotação por  $q_1$  seguida pela rotação de  $q_2$  é equivalente a realizar a rotação  $q_1q_2$ .*

**Demonstração.** Dado  $p \in \mathbb{H}$ , realizando sua rotação obtemos que:

$$\begin{aligned}
q_2(q_1p q_1^{-1})q_2^{-1} &= (q_2q_1)p(q_1^{-1}q_2^{-1}) \\
&= (q_2q_1)p(\overline{q_1q_2}) \\
&= (q_2q_1)p(\overline{q_2q_1}) \\
&= (q_2q_1)p(q_2q_1)^{-1}
\end{aligned}$$

■



Assim as definições e propriedades do conjunto dos quatérnios necessárias para compreender e utilizar as rotações no espaço foram apropriadamente apresentadas e demonstradas.

#### 4.4 Exemplos de Rotações com os Quatérnios

Iremos apresentar aqui alguns exemplos de rotações de objetos no espaço utilizando as definições previamente apresentadas.

Partindo do básico iremos apresentar uma rotação de  $90^\circ$  do ponto  $P = (0,0,1)$  em torno do eixo  $x$ , para fazermos isso devemos identificar o quatérnio  $p \in \mathbb{H}$  de forma que  $p = [0, \vec{r}]$  em que  $r$  é o objeto a ser rotacionado, nesse exemplo,  $\vec{r} = (0,0,1)$ , e como devemos girar em torno do eixo  $x$ , o eixo de rotação é o vetor  $\vec{n}_1 = (1,0,0)$ . Dessa forma podemos identificar o quatérnio  $q_1 \in \mathbb{H}_1$ ,  $q_1 = [\cos(45^\circ), \vec{n}_1 \sin(45^\circ)]$  e seu inverso  $q_1^{-1} = [\cos(45^\circ), -\vec{n}_1 \sin(45^\circ)]$ , utilizamos metade do ângulo de rotação, pois quando realizada a operação da rotação de  $p$  que é  $Rq(p) = pq_1^{-1}$ , são feitas duas rotações, por  $q$  e  $q^{-1}$ . E realizando a rotação obtemos:

$$q_1 p q_1^{-1} = [\cos(45^\circ), \vec{n}_1 \sin(45^\circ)] [0, \vec{r}] [\cos(45^\circ), -\vec{n}_1 \sin(45^\circ)]$$

Porém como visto na Proposição 4.19, a rotação é descrita por  $Rq_1(p) = [0, \vec{r} \cdot \cos(2\alpha) + (1 - \cos(2\alpha))(\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{r}) \sin(2\alpha))]$ , por conta disso, em nosso exemplo obtemos:

$$\begin{aligned} Rq_1(p) &= [0, (0,0,1) \cos(2 \cdot 45^\circ) + (1 - \cos(2 \cdot 45^\circ))(\langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle (1,0,0) \\ &\quad + ((1,0,0) \times (0,0,1)) \sin(2 \cdot 45^\circ)] \\ &= [0, (0,0,1) \cos(90^\circ) + (0, -1,0) \sin(90^\circ)] \\ &= [0, (0, -1,0)] \end{aligned}$$

Dessa forma, o ponto  $P$  rotacionado  $90^\circ$  em torno do eixo  $x$ , resulta no ponto  $Rq_1(P) = (0, -1,0)$ .

É interessante observar que essa rotação de  $90^\circ$  que foi composta por  $q_1$  e  $q_1^{-1}$ , da maneira que ambos  $q_1 = [\cos(45^\circ), \vec{n} \sin(45^\circ)]$  e  $q_1^{-1} = [\cos(45^\circ), -\vec{n} \sin(45^\circ)]$ , aplicam uma rotação de  $45^\circ$  no ponto.

E também é possível realizar uma rotação de um ponto já rotacionado, vamos aplicar uma rotação de  $90^\circ$  no ponto  $R(P) = (0, -1,0)$  em torno do eixo  $z$ , dessa forma o quatérnio  $q_2 \in \mathbb{H}_1$ ,  $q_2 = [\cos(45^\circ), \vec{n}_2 \sin(45^\circ)]$  e seu inverso  $q_2^{-1} = [\cos(45^\circ), -\vec{n}_2 \sin(45^\circ)]$  que irão

rotacionar quatérnio  $p = [0, \vec{r}]$ , em que  $\vec{n}_2 = (0,0,1)$  é o eixo  $z$ , e  $\vec{r} = R(P) = (0, -1,0)$ . Logo a rotação é obtida por:

$$\begin{aligned} Rq_2(p) &= [0, (0, -1,0) \cos(2 \cdot 45^\circ) + (1 - \cos(2 \cdot 45^\circ))(\langle (0,0,1), (0, -1,0) \rangle)(0,0,1) \\ &\quad + ((0,0,1) \times (0, -1,0)) \operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ)] \\ &= [0, (0, -1,0) \cos(90^\circ) + (-1,0,0) \operatorname{sen}(90^\circ)] \\ &= [0, (1,0,0)] \end{aligned}$$

Com isso, o ponto  $Rq_2(P)$  rotacionado  $90^\circ$  ao redor do eixo  $z$  resulta no ponto  $Rq_2(Rq_1(P)) = (1,0,0)$ .

Porém, como de acordo com a Proposição 4.20, para encontrar  $R(R(P))$  partindo de  $P$  bastaria somente realizar a multiplicação  $q_1q_2$  e utilizar o quatérnio resultante e seu inverso para rotacionar o quatérnio  $p = [0, \vec{r}]$ , em que  $\vec{r} = (0,0,1)$ . Dessa forma a multiplicação dos quatérnios é:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= [\cos(45^\circ), \vec{n}_1 \operatorname{sen}(45^\circ)][\cos(45^\circ), \vec{n}_2 \operatorname{sen}(45^\circ)] \\ &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, (1,0,0) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, (0,1,0) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0,0 \right) \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0,0 \right) + \left( 0,0, \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2}, \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Dessa forma  $q_1q_2 = \left[ \frac{1}{2}, \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]$  pode ser escrito da forma  $q_1q_2 = [\cos(60^\circ), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{sen}(60^\circ)]$ , que juntamente com seu inverso  $q_1q_2^{-1} = [\cos(60^\circ), -\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{sen}(60^\circ)]$  quando realizada a operação  $(q_1q_2)p(q_1q_2)^{-1}$ , rotaciona o quatérnio  $p = [0, \vec{r}]$  por  $120^\circ$  em torno do eixo  $\vec{n} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ , com  $\vec{r} = (0,0,1)$  que é o ponto  $P$ . Com a utilização do mwMáxima para auxiliar nos cálculos com o código que consta no Apêndice A, observamos que a rotação é descrita por:

$$\begin{aligned}
(q_1 q_2) p (q_1 q_2)^{-1} &= [0, (0, 0, 1) \cos(2 \cdot 60^\circ) + (1 - \cos(2 \cdot 60^\circ)) \left( \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), (0, 0, 1) \right\rangle \right) \\
&\quad + \left( \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \times (0, 0, 1) \right) \text{sen}(2 \cdot 60^\circ)] \\
&= [0, (1, 0, 0)]
\end{aligned}$$

Com isso, vemos que rotacionar o ponto  $P$  com  $q_1$  e rotacionar o resultado dessa rotação  $R_{q_1}(P)$  com  $q_2$  é o mesmo resultado que rotacionar o ponto  $P$  com o quatérnio  $q_1 q_2$

Para um último exemplo iremos rotacionar um tetraedro nomeado  $T$ , formado pelos pontos  $A = (-2, 4, 0)$ ,  $B = (1, 4, 0)$ ,  $C = (0, 0, -2)$  e  $D = (0, 1, 1)$ ,  $60^\circ$  em torno de  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ , que é o eixo  $z$ . Logo o quatérnio que irá rotacionar os pontos será  $p = [0, \vec{n}]$ , de forma que  $r = \{A, B, C, D\}$  realizando a operação  $qpq^{-1}$ , com  $q = [\cos(30^\circ), \vec{n} \text{sen}(30^\circ)]$  e seu inverso  $q^{-1} = [\cos(30^\circ), -\vec{n} \text{sen}(30^\circ)]$ . Os cálculos foram feitos utilizando o software wxMáxima com o código que consta no Apêndice A.

Realizando as rotações de  $A = (-2, 4, 0)$ ,  $B = (1, 4, 0)$ ,  $C = (0, 0, -2)$  e  $D = (0, 1, 1)$  obtemos que:

$$\begin{aligned}
Rq(A) &= [0, (-2, 4, 0) \cos(60^\circ) + (1 - \cos(60^\circ)) \left( \left\langle (0, 0, 1), (-2, 4, 0) \right\rangle (0, 0, 1) \right) \\
&\quad + ((-2, 4, 0) \times (0, 0, 1)) \text{sen}(60^\circ)] \\
&= [0, (-4.464101615137754, 0.2679491924311226, 0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rq(B) &= [0, (1, 4, 0) \cos(60^\circ) + (1 - \cos(60^\circ)) \left( \left\langle (0, 1, 0), (1, 4, 0) \right\rangle (0, 0, 1) \right) \\
&\quad + ((1, 4, 0) \times (0, 0, 1)) \text{sen}(60^\circ)] \\
&= [0, (-2.964101615137754, 2.866025403784438, 0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rq(C) &= [0, (0, 0, -2) \cos(60^\circ) + (1 - \cos(60^\circ)) \left( \left\langle (0, 0, 1), (0, 0, -2) \right\rangle (0, 0, 1) \right) \\
&\quad + (0, 0, -2) \times (0, 0, 1) \text{sen}(60^\circ)] \\
&= [0, (0, 0, -2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rq(D) &= [0, (0,1,1)) \cos(60^\circ) + (1 - \cos(60^\circ))(\langle (0,1,0), (0,1,1) \rangle)(0,0,1) \\
&\quad + (0,1,1) \times (0,0,1) \operatorname{sen}(60^\circ)] \\
&= [0, (-0.8660254037844386, 0.5, 1)]
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$Rq(A) = (-4.464101615137754, 0.2679491924311226, 0)$$

$$Rq(B) = (-2.964101615137754, 2.866025403784438, 0)$$

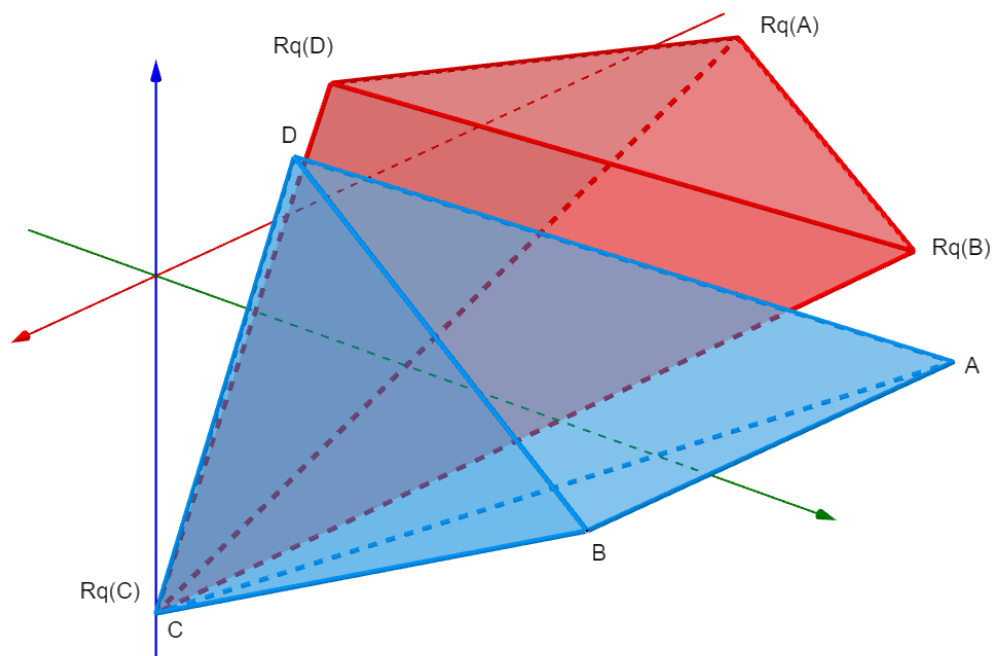
$$Rq(C) = (0, 0, -2)$$

$$Rq(D) = (-0.8660254037844386, 0.5, 1)$$

Com a rotação dos pontos de  $T$  realizadas obtemos novos pontos que definem um novo tetraedro nomeado de  $Rq(T)$ , constituído pelos pontos  $Rq(A), Rq(B), Rq(C)$  e  $Rq(D)$ . É interessante reparar que a rotação de  $C$  em torno do eixo  $z$  não alterou o ponto pois  $C \in O_z$ . E  $Rq(T)$  é  $T$  rotacionado  $60^\circ$  em torno do eixo  $z$ , como é possível observar na Figura 9 e 10.

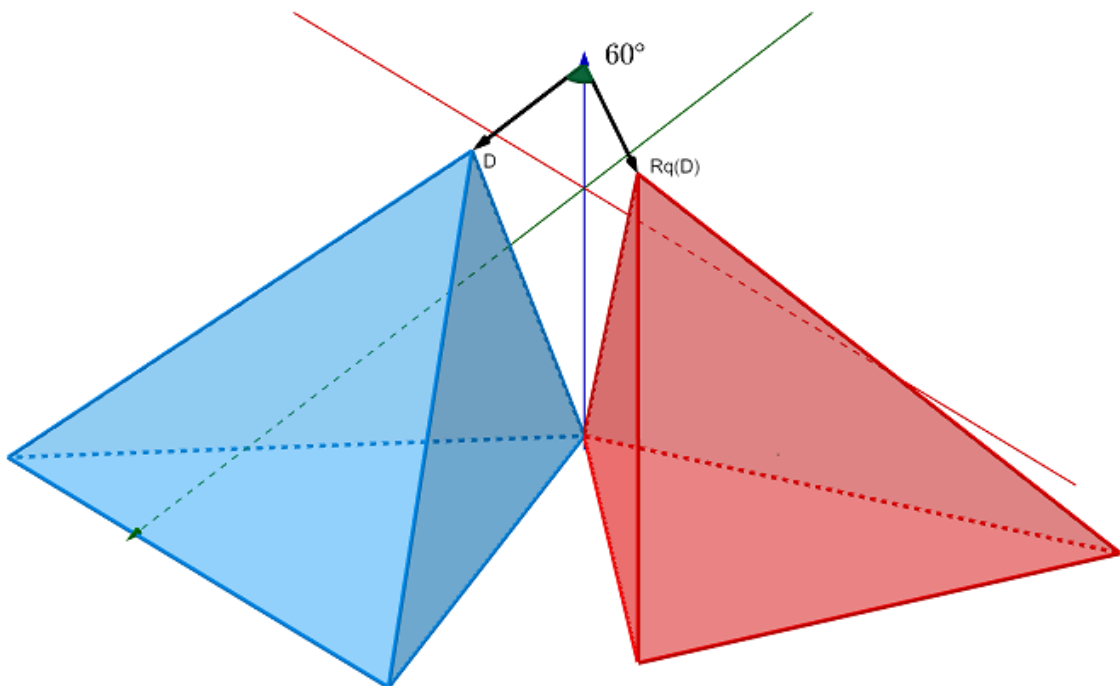
Esses são alguns exemplos das rotações que podem ser feitas no espaço utilizando quatérnios, considero que são operações simples com resultados claros e de visualização tangível.

Figura 9 – Tetraedro  $T$  em azul rotacionado  $60^\circ$  em torno do eixo  $z$  resultando no tetraedro  $Rq(T)$  em vermelho.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 10 – Rotação de  $60^\circ$  do ponto  $D$  resultando em  $Rq(D)$ .



Fonte: Autoria própria (2022).

## 5 A FESTA DO CHÁ DE ALICE

No livro "Alice no País das Maravilhas", Alice encontra Chapeleiro Maluco, a Lebre de Março e a Arganaz, durante a Festa do Chá. O Chapeleiro Maluco explica que havia brigado com o Tempo, que não estava presente na Festa, por isso, estavam presos na hora do Chá e por isso precisavam ficar rodando em torno da mesa fazendo adivinhas sem sentido. Segundo a dissertação de Melanie Bayley, neste trecho Carroll fez uma relação com a teoria dos quatérnios. Hamilton explicou que se você remover esse parâmetro desses números, os quatérnios iam simplesmente ficar rodando no espaço. Ao traduzir essa informação para o conto, seria como se os personagens estivessem presos na festa, rodeando a mesa para encontrar uma xícara de chá (NEWS, 2010).

A relação do livro de Lewis Carroll com matemática não é inesperada, uma vez que Charles Lutwidge Dodgson (seu verdadeiro nome) lecionou Matemática no Christ College, em Oxford Inglaterra. Vários matemáticos apontam que há muito contexto algébrico contemplado no desenvolvimento do livro. Sua obra já foi objeto de dissertação de estudantes da Oxford (NEWS, 2010).

No mesmo momento que o autor escrevia sua obra, o matemático e físico Hamilton estava desenvolvendo os quatérnios. Carroll não gostava da teoria, pois não eram números para contar as coisas, e sim para entender as rotações. Na procura de entender essa sua aritmética em termos da física, é inevitável interagir com esse quarto termo do novo conjunto, como sendo um termo que relaciona as três dimensões juntas, e tinha de ser a variável tempo (NEWS, 2010).

E essa relação com o tempo é perceptível quando analisado o resultado de realizar as rotações com os quatérnios, que sempre é um quatérnio em que sua parte real é zero, ou seja um quatérnio da forma  $q = [0, \vec{v}]$ . Se compararmos a parte real com o tempo, o resultado de uma rotação está parada no tempo pois sua parte real é zero, que é exatamente o que ocorre na *Festa do chá*, todos eles estão parados no tempo, rotacionando ao redor da mesa.

De maneira mais matemática, o eixo de rotação seria a mesa de chá, a Alice e seus companheiros seriam os elementos a serem rotacionados por um ângulo ao redor da mesa de chá. E quando realizada a rotação com quatérnios, resulta na Alice e seus companheiros em um outro lugar da mesa, porém no mesmo tempo que o lugar anterior, pois estavam presos no tempo.

Com o objetivo de utilizar dessa relação como uma ferramenta lúdica para introduzir uma discussão a respeito do conjunto dos quatérnios, foram analisados alguns meios de iniciar essa conversa com os alunos. Entretanto, todos partem do princípio de que o aluno deve compreender a estrutura dos números complexos, saber que ele tem uma representação geométrica como ponto ou vetor no plano de Argand-Gauss, e que o plano é um caso particular do espaço.

O que não é realidade do ensino hoje, em vista da atual ausência do conteúdo de números complexos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), - (BRASIL, 2018) - que é o documento que norteia os currículos do ensino no Brasil. Isso pode ser resultado de o tema

ser proposto até então de maneira mais teórica, sem aplicações, isso é perceptível nos livros didáticos que tratavam do assunto, que sua abordagem com definições e propriedades não abre caminhos para possíveis aplicabilidades. Dessa forma, não conseguimos atingir esse objetivo previamente proposto (CEDRON, 2021).

Acredito que seria possível comentar com os alunos que existem números que não servem para contabilizar as coisas, mas sim para fazer rotações, que é um número que existe na quarta dimensão. Isso poderia despertar curiosidades nos alunos, e talvez isso poderia ser comentado durante as aulas de geometria analítica que os alunos tem no ensino médio, pois naquele momento eles estão trabalhando ideias superficiais sobre o espaço tri-dimensional.



## 6 CONCLUSÃO

Com desenvolvimento do trabalho é possível perceber que há uma necessidade humana de desenvolver a matemática, pois os números complexos foram desenvolvidos para suprir uma problemática matemática da época. Os quatérnios também teve sua necessidade humana percebida depois de serem desenvolvidos, por ser aquele que foi base para a construção do cálculo vetorial que atua como um dos campos mais amplos do cálculo, não deixando de lado a importância para definir as rotações em três dimensões. É interessante o fato de que a Matemática está em um constante processo de desenvolvimento e evolução de seus conceitos.

Apesar do conjunto dos quatérnios aparentar ser muito elaborado, sua compreensão como uma estrutura algébrica, que foi definida como um anel não-comutativo, nos auxilia a observá-lo com olhares mais simples, focando somente nas novas regras algébricas a serem seguidas e respeitadas. E também ao compreendê-lo como uma extensão dos números complexos facilita no processo de estudar esse conjunto.

As rotações tri-dimensionais quando realizadas com os quatérnios ocorrem de maneira simples, quando comparado com as rotações usuais utilizando matrizes como base de rotação. Possibilitando a facilidade de realizar qualquer rotação para os objetos 3D. Isso traz aplicações quando é necessário realizar animações em três dimensões, entre outras aplicações na matemática quando é necessário rotacionar objetos, vetores e pontos no espaço ou no plano.

Um dos anseios do trabalho era utilizar relação com o conto "Alice no País das Maravilhas" como uma ferramenta lúdica para apresentar um conceito inicial do conjunto dos quatérnios no Ensino Médio. Porém, tendo em vista que para compreender o conceito dos quatérnios é necessário saber que os números complexos são pontos ou um vetores em um plano complexo, que a multiplicação desses números resulta em uma rotação no plano e que a generalização de um plano é o espaço. Logo, em vista o novo modelo do EM, a ausência do conteúdo na BNCC, e a situação do ensino de matemática nas escolas, tanto em institutos públicos quanto nos privados, não conseguimos encontrar um meio de levar isso pra sala de aula de maneira mais específica e não somente como um tópico de curiosidade.(BRASIL, 2018)

Gostaria de ampliar os estudos desse trabalho, compreender de forma mais aprofundada o conjunto, e analisar a possibilidade de inseri-lo como um objeto de estudo na graduação de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, para dessa forma poder utilizar a ferramenta lúdica como um meio de introduzir o assunto em uma sala de aula da graduação.

## REFERÊNCIAS

- BAEZ, J. The octonions. **Bulletin of the american mathematical society**, v. 39, n. 2, p. 145–205, 2002.
- BARREIRO, R. C. **Quatérnios, um ensaio sobre a regularidade e hiperperiodicidade de funções quaterniônicas, e o Teorema de Cauchy**. 2009. 87 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, São Paulo, 2009.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 10 nov. 2022.
- BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Complex variables and applications eighth edition**. New York: McGraw-Hill Book Company, 2009.
- CEDRON, L. W. **Números complexos: um estudo de suas aplicações**. Universidade Federal da Fronteira Sul, 2021.
- DAM, E. B.; KOCH, M.; LILLHOLM, M. **Quaternions, interpolation and animation**. Denmark: Citeseer, 1998. v. 2.
- DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. Brasil: Atual reform. São Paulo, 2003.
- EILENBERG, S.; NIVEN, I. The “fundamental theorem of algebra” for quaternions. **Bulletin of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 50, n. 4, p. 246 – 248, 1944.
- GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de álgebra**. Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.
- IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações**. Atual, 2013. ISBN 9788535717525. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=I1iZDAEACAAJ>.
- MILIES, C. P. Breve história da álgebra abstrata. **Minicurso apresentado na II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática–SBM**. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004.
- NEWS, N. **The Mad Hatter’s Secret Ingredient: Math**. Washington, D.C.: NPR, 2010. Disponível em: <https://www.npr.org/templates/story/story.php?storyId=124632317>.
- SANTOS, M. A. d. **Dos números complexos aos quatérnios: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2013.
- VOIGHT, J. **Quaternion Algebras**. Cham: Springer, 2021.
- YOSHIOKA T; FARIAS, A. A. **Variáveis complexas e suas aplicações**. Brasil: McGraw-Hill do Brasil, 1975.

## **APÊNDICE A – Código wxMaxima**

Neste apêndice apresentamos um código simples para utilização no *wxMaxima* para tratamento de quatérnios. Neste código são definidas algumas operações básicas, tais como multiplicação, norma, conjugado e inversão. Com estas operações então, dado dois um vetor  $\vec{r}$ , um vetor unitário  $\vec{n}$  e um ângulo  $\alpha$  o código faz a rotação de  $\vec{r}$  de um ângulo  $2\alpha$  ao redor de  $\vec{n}$  utilizando quatérnios.

```
(% i1) norm(quat) := quat[1]^2 + quat[2].quat[2]$
      quatbar(quat) := [quat[1],-quat[2]]$
      quatinv(quat) := quatbar(quat) / norm(quat)$

      cross(u, v) := [u[2] * v[3] - v[2] * u[3],
      v[1] * u[3] - u[1] * v[3], u[1] * v[2] - v[1] * u[2]]$
      multquat(quat1,quat2) := [ quat1[1].quat2[1]-quat1[2].quat2[2],
      quat1[1].quat2[2]+quat2[1].quat1[2]+cross(quat1[2],quat2[2]) ]$

      Rot1(quat1,quat2) := multquat(multquat(quat1,quat2),quatinv(quat1))$

(% i2) alpha: %pi /6$
      r : [x2,y2,z2]$

      theta: %pi/2$
      /*phi: 3.0235*%pi/4$
      n: [sin(theta)*cos(phi),sin(theta)*sin(phi),cos(theta)]$*/

      n:[x1,y1,z1];

      p:[0,r]$
      q:[cos(alpha),sin(alpha)*n]$
```