

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUIZ EDUARDO GONÇALVES DE MATTOS

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS EM AÇO TRELIÇADAS

APUCARANA

2021

LUIZ EDUARDO GONÇALVES DE MATTOS

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS EM AÇO TRELIÇADAS

Steel Trusses Structures Optimization

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Krul Tessari

APUCARANA

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es).

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Apucarana
COECI – Coordenação do Curso de Engenharia Civil



FOLHA DE APROVAÇÃO

Otimização de Estruturas em Aço Treliçadas

por

Luiz Eduardo Gonçalves de Mattos

Esta monografia foi apresentada aos quatorze dias do mês de maio do ano de 2021, às dez horas, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel do Curso Superior em Engenharia Civil da UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Rodolfo Krul Tessari – ORIENTADOR

UTFPR – Câmpus Apucarana

Profª. Tamara Angélica Baldo – EXAMINADORA

UTFPR – Câmpus Apucarana

Prof. Luiz Antonio Farani de Souza – EXAMINADOR

UTFPR – Câmpus Apucarana

“A FOLHA DE APROVAÇÃO assinada eletronicamente encontra-se em arquivo digital na Coordenação do Curso”.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus pela vida, pela oportunidade em poder cursar a graduação que sempre sonhei e por todas as conquistas até agora alcançadas.

Em especial, agradeço à minha família que sempre me incentivou e acreditou no meu potencial. Agradeço à minha mãe, Letícia, que teve não só o papel de mãe, mas também o de professora ao cobrar resultados cada vez melhores, pois confia e sabe que posso evoluir cada vez mais. Dedico este trabalho à meu pai, Eduardo, que sempre me encorajou diante das dificuldades e me aconselhou sabiamente sempre que me senti inseguro. Ao meu querido irmão, Lucas, pelo amor e preocupação que teve comigo durante os anos que estive distante de casa. Dedico também à minha tia Karen, e meus avós Luís Antônio e Marisa, que sempre se mostraram orgulhosos com meus estudos. Agradeço aos meus já falecidos avós, Deolindo e Odete, e minha falecida tia Rosângela, que deixaram tantas saudades.

Agradeço à todos meus colegas de classe e de curso, com quem pude compartilhar de momentos que levarei carinhosamente por toda vida e que me ajudaram em diversas dificuldades durante a graduação. Agradeço em especial, meu amigo André Chiaramonte, com quem dividi moradia durante toda a graduação, e se mostrou companheiro em todas as horas, sempre com muita paciência e compaixão, se tornando um irmão de coração.

Ao professor e amigo, Rodolfo K. Tessari, que acreditou em meu potencial e me orientou da melhor forma possível, tanto no presente trabalho, quanto em outras ocasiões (Iniciação Científica, disciplinas do curso e monitoria), se tornando não só meu orientador, mas minha principal referência profissional em que me inspiro e almejo um dia alcançar. Agradeço aos professores Luiz Farani e Tamara Baldo, por contribuírem com as correções e considerações feitas. Agradeço ao meu orientador de Iniciação Científica, professor Cosmo D. Santiago, que foi o primeiro a me proporcionar a oportunidade de realizar pesquisas, despertando assim, a paixão e o desejo em me tornar um dia um professor pesquisador.

Aos professores da Coordenação do Curso de Engenharia Civil, por cada aprendizado ao longo de cada semestre da graduação.

Obrigado a todos que diretamente ou indiretamente colaboraram para que eu chegasse até aqui.

Muito obrigado a todos!

"Não fui eu que ordenei a você? Seja forte e corajoso! Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar" (BÍBLIA, Josué, 1:9).

RESUMO

MATTOS, L. E. G. **Otimização de Estruturas em Aço Treliçadas**. 2021. 106 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, 2021

Na maior parte dos casos, o engenheiro estrutural define uma configuração inicial baseada em suas experiências para o sistema estrutural a ser projetado e, por meio de processos iterativos, verifica se as condições previstas em normas técnicas para a segurança e serviço são atendidas. No entanto, mesmo que a solução proposta respeite as condições exigidas, essa pode não ser a melhor em termos de consumo de materiais. Para a obtenção da solução ótima, é necessária a utilização de técnicas de otimização estrutural, capazes de proporcionar o dimensionamento de estruturas cada vez mais leves, alinhadas à economia de materiais e tempo. O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de algoritmos de minimização do peso de estruturas em aço treliçadas, baseados em diferentes métodos de otimização (matemáticos e heurísticos). Compara-se a eficiência entre o algoritmo de Programação Quadrática Sequencial (PQS) e o Algoritmo Genético, levando em consideração a qualidade das soluções encontradas, a complexidade de implementação e do custo computacional exigido. Os resultados mostram que, ao utilizar as restrições normativas para barras comprimidas, é necessário adotar barras com seções transversais mais robustas quando comparadas às soluções cujas restrições derivam da formulação clássica da carga crítica de Euler. Observa-se uma similaridade entre os resultados obtidos pelo algoritmo de PQS e pelo Algoritmo Genético, mas devido à natureza combinatória do último, o método heurístico exige maior tempo de processamento. Além disso, os resultados obtidos pelo Algoritmo Genético se mostram aleatórios no decorrer das iterações, podendo convergir em soluções ligeiramente mais conservadoras que o algoritmo de PQS. Justificados pelos resultados apresentados, afirma-se que os algoritmos desenvolvidos são boas ferramentas de otimização estrutural e podem ser utilizados em projetos reais de treliças em aço.

Palavras-chaves: Otimização estrutural. Treliças em aço. Solução ótima. Métodos matemáticos. Métodos Heurísticos.

ABSTRACT

MATTOS, L. E. G. **Steel trusses structures optimization**. 2021. 106 p. Monography (Graduation in Civil Engineering) – Federal Technological University of Parana (UTFPR), Apucarana, 2021.

In the most cases, the structural engineer defines an initial configuration based on yours experiences for the structural system to be designed and, through iteratives processes, check if the technical standarts conditions for the security and service are satisfy. Even though the propused solution satisfies the the conditions, it may not be the best in consumption of materials terms. For the optimal solution, is necessary to use structural optimization technics, able to provide designs increasingly lighter and time and materials savings. The objective of the present work is the development of algorithms for minimizing the weight of trussed steel structures, based on differents optimization methods (mathematics and heuristics). Compare the efficiency between the Sequential Quadratic Programming (SQP) and the Genetic Algorithm, taking into account the quality of the solutions found, the complexity of implementation and the computational cost required. The results show that, when using the technical standarts for compressed bars, it is necessary to adopt bars with more robust cross sections when compared to solutions whose restrictions derive from the classic formulation of Euler's critical load. A similarity between the results obtained by the SQP and the Genetic Algorithm is observed, but due to the combinatorial nature of the latter, the heuristic method requires longer processing time. In addition, the results obtained by the Genetic Algorithm are shown to be random during the iterations, and may converge in slightly heavier solutions than the SQP. Justified by the results presented, it is stated that the developed algorithms are good tools for structural optimization and can be used in real steel truss designs.

Keywords: Structural Optimization. Steel trusses. Optimal solution. Mathematical methods. Heuristic methods.

Lista de Figuras

Figura 1.1	– Mina de extração da Serra dos Carajás.	14
Figura 1.2	– Estrutura treliçada metálica utilizada na Arena Corinthians.	16
Figura 2.1	– Fluxograma de comparação dos processos iterativos de dimensionamento estrutural: convencional (esquerda); otimizado (direita).	20
Figura 2.2	– Restrições ativas e inativas.	22
Figura 2.3	– Pontos de mínimo de uma função.	23
Figura 2.4	– Domínio viável: (a) convexo; (b) não convexo.	23
Figura 2.5	– Otimização dimensional de uma treliça.	27
Figura 2.6	– Otimização de forma de uma treliça.	27
Figura 2.7	– Otimização topológica de uma treliça.	28
Figura 2.8	– Fluxograma da sequência operacional dos Algoritmos Genéticos.	39
Figura 2.9	– Roleta de Indivíduos com suas respectivas parcelas.	40
Figura 2.10	– Aplicação do <i>crossover</i> pelo método de corte em um ponto.	41
Figura 2.11	– Aplicação do <i>crossover</i> pelo método de corte em dois pontos.	42
Figura 2.12	– Aplicação do operador de mutação.	42
Figura 2.13	– Fluxograma do funcionamento do método de otimização <i>Simulated Annealing</i>	47
Figura 3.1	– Variação das tensões axiais de estruturas metálicas submetidas à tração.	56
Figura 3.2	– Comportamento da instabilidade de uma barra sujeita a compressão. (a) Instabilidade por flexão. (b) Instabilidade por flexo-torção	58
Figura 3.3	– Instabilidade local de uma barra sujeita a compressão. (a) Instabilidade do componente AL. (b) Instabilidade do componente AA	59
Figura 3.4	– Fluxograma de determinação da resistência de cálculo axial à compressão ($N_{c,Rd}$).	63
Figura 4.1	– Elemento de treliça plana - coordenadas locais e globais.	64
Figura 5.1	– Processo iterativo de otimização de treliças via MEF.	68
Figura 5.2	– Treliça plana de 18 barras (Caso 1).	72
Figura 5.3	– Esforços normais atuantes na treliça plana de 18 barras (Caso 1).	74
Figura 5.4	– Cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).	79
Figura 5.5	– Esforços normais atuantes na cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).	82
Figura 5.6	– Treliça plana de 6 barras (Caso 4).	84
Figura 5.7	– Esforços normais atuantes na treliça plana de 6 barras (Caso 4).	87
Figura 5.8	– Solução das variáveis ao decorrer das iterações para o Algoritmo de PQS (a) e Algoritmo Genético (b) - Situação 1 (Caso 4).	88
Figura 5.9	– Solução das variáveis ao decorrer das iterações para o Algoritmo de PQS (a) e Algoritmo Genético (b) - Situação 2 (Caso 4).	89

Figura 5.10 – Solução das variáveis ao decorrer das iterações para o Algoritmo de PQS (a) e Algoritmo Genético (b) - Situação 3 (Caso 4).	90
Figura 5.11 – Peso Total da estrutura ao decorrer das iterações - Situação 1 (Caso 4).	91
Figura 5.12 – Peso Total da estrutura ao decorrer das iterações - Situação 2 (Caso 4).	91
Figura 5.13 – Peso Total da estrutura ao decorrer das iterações - Situação 3 (Caso 4).	92

Lista de Quadros

Quadro 2.1 – Formulação matemática do processo de otimização.	20
Quadro 2.2 – Divisão dos Algoritmos de Programação Matemática.	29
Quadro 2.3 – Relação entre o processo físico e o processo de otimização.	44
Quadro 2.4 – Funcionamento do critério de Metropolis et al. (1953)	45
Quadro 2.5 – Notação e terminologia do algoritmo PSO	49
Quadro 2.6 – Resumo dos principais trabalhos de otimização de estruturas treliçadas	53

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Método de Seleção por Roleta de indivíduos.	40
Tabela 3.1 – Coeficiente de flambagem por flexão de elementos isolados.	61
Tabela 5.1 – Configurações Gerais - Programação Quadrática Sequencial.	69
Tabela 5.2 – Configurações Gerais - Algoritmo Genético.	69
Tabela 5.3 – Dados Gerais - Treliça plana de 18 barras (Caso 1).	73
Tabela 5.4 – Resultados otimizados para treliça plana de 18 barras (Caso 1).	73
Tabela 5.5 – Tensões axiais nas barras da treliça plana de 18 barras (Caso 1).	74
Tabela 5.6 – Dados Gerais - Treliça plana de 18 barras (Caso 2).	76
Tabela 5.7 – Resultados otimizados da treliça plana de 18 barras (Caso 2).	77
Tabela 5.8 – Tensões axiais nas barras da treliça plana de 18 barras (Caso 2).	78
Tabela 5.9 – Dados Gerais - Cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).	80
Tabela 5.10 – Resultados otimizados da cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).	81
Tabela 5.11 – Tensões axiais nas barras da cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).	83
Tabela 5.12 – Dados Gerais - Treliça plana de 6 barras (Caso 4).	85
Tabela 5.13 – Resultados das treliça plana de 6 barras (Caso 4).	86
Tabela 5.14 – Tensões axiais nas barras da treliça plana de 6 barras (Caso 4).	87

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AG	Algoritmo Genético
ASD	<i>Allowable Stress Design</i>
BFGS	Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LRFD	<i>Load and Resistance Factor Design</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR	Norma Técnica Brasileira
PLC	Problema Linear Complementar
PNL	Programação Não-Linear
PPQ	Problema de Programação Quadrática
PQS	Programação Quadrática Sequencial
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
SSGA	<i>Steady-State Genetic Algorithmn</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Justificativa	16
1.2	Objetivos	17
1.2.1	Objetivos Gerais	17
1.2.2	Objetivos Específicos	17
1.3	Metodologia	17
1.3.1	Seleção dos Métodos de Otimização mais adequados aos problemas de Otimização Estrutural	17
1.3.2	Implementação e Validação do Programa	17
2	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	19
2.1	Definições	19
2.1.1	Análise das Restrições	21
2.1.2	Pontos de Máximo/Mínimo Local e Global	22
2.1.3	Convexidade do Problema	23
2.1.4	Vetor Gradiente	24
2.1.5	Matriz Hessiana	24
2.1.6	Multiplicadores de Lagrange	25
2.1.7	Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)	25
2.2	Tipos de Otimização Estrutural	26
2.3	Métodos de Otimização	27
2.3.1	Métodos de Otimização Matemática	28
2.3.1.1	Método de Newton	30
2.3.1.2	Método Quase-Newton – BFGS	31
2.3.1.3	Problema de Programação Quadrática	32
2.3.1.4	Programação Quadrática Sequencial – Algoritmo de Han-Powell	33
2.3.2	Métodos de Otimização Heurística	36
2.3.2.1	Algoritmos Genéticos (<i>Genetic Algorithms</i>)	38
2.3.2.2	Recozimento Simulado (<i>Simulated Annealing</i>)	43
2.3.2.3	Enxame de Partículas (<i>Particle Swarm Optimization - PSO</i>)	48
2.3.3	Principais Trabalhos Publicados na Área	50
3	FORMULAÇÃO BÁSICA PARA DIMENSIONAMENTO DE BARRAS TRACIONADAS E COMPRIMIDAS	54
3.1	Dimensionamento à Tração Simples	56
3.1.1	Força Axial Resistente de Cálculo	56

3.2	Dimensionamento à Compressão Simples	57
3.2.1	Força Axial Resistente de Cálculo	59
3.2.2	Determinação do Coeficiente Redutor Q	59
3.2.3	Determinação do Coeficiente Redutor χ	60
3.2.4	Formulação simplificada para resistência à compressão	62
4	FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA TRELIÇA PLANA	64
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	67
5.1	Treliça Plana de 18 Barras - Caso 1	72
5.2	Treliça Plana de 18 Barras - Caso 2	76
5.3	Cúpula Treliçada de 120 Barras - Caso 3	79
5.4	Treliça Plana de 6 Barras - Caso 4	84
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	95
	REFERÊNCIAS	96
	ANEXO A – VALORES COMERCIAIS DE TUBOS CIRCULARES - CATÁLOGO TUPER	100

1 Introdução

Historicamente, o desenvolvimento da sociedade esteve sempre atrelado ao consumo de recursos naturais pelo ser humano, seja para a melhoria das condições de sobrevivência, necessidade de se locomover, moradia ou geração de bens materiais. Entretanto, o aumento populacional, o desenvolvimento tecnológico e a globalização causaram um consumo desenfreado de recursos. Diante dessa problemática, diversas áreas passaram a se preocupar em adotar medidas sustentáveis (CAVALCANTI, 2019).

O campo da construção civil é um dos principais responsáveis pela extração de recursos naturais, uma vez que utiliza diversos materiais de forma direta ou indireta, como concreto, aço, madeira, solo, plásticos, resinas, entre outros. Na produção do aço, a matéria prima primordial é o minério de ferro obtido das grandes minas. O processo de extração desse recurso natural gera grandes impactos ambientais e modificações quase irreversíveis na paisagem local, como é o caso da Serra dos Carajás, ilustrada na Figura 1.1 (SHUTTERSTOCK, 2000).

Figura 1.1 – Mina de extração da Serra dos Carajás.



Fonte: Shutterstock (2000).

A partir de cálculos de dimensionamento, a engenharia estrutural é responsável por projetar elementos de sustentação de edifícios, pontes, barragens, túneis, torres de transmissão, automóveis, navios, aviões, plataformas de petróleo, entre outros. Apesar de seu objetivo principal ser projetar estruturas seguras e eficientes para os usuários, a necessidade global na busca de medidas sustentáveis faz com que a engenharia estrutural procure soluções em que os elementos possuam a melhor configuração e/ou o menor peso, reduzindo seu custo de produção e seu impacto ambiental (RIGO, 1999).

Na maior parte dos casos, o engenheiro estrutural define uma configuração inicial para o

sistema estrutural a ser projetado e, por meio de processos iterativos, verifica se as condições previstas em normas técnicas para a segurança e serviço são atendidas. No entanto, mesmo que a solução proposta respeite as condições exigidas, essa pode não ser a melhor em termos de consumo de materiais. Para a obtenção da solução ótima, é necessária a utilização de técnicas de otimização estrutural.

As técnicas de otimização têm como finalidade minimizar ou maximizar o valor de uma função objetivo (modelo matemático), que pode estar sujeita ou não a restrições de igualdade e/ou desigualdade. Segundo Arenales et al. (2006), pode-se definir como solução ótima aquela em que a função objetivo apresenta o menor ou maior valor, de acordo com o que se busca, e que atende a todas restrições impostas. De acordo com Cavalcanti (2019), a busca por tal solução ótima pode ser feita por meio de derivação matemática (métodos determinísticos) ou busca aleatória (métodos estocásticos).

Com o empenho da comunidade científica na busca por métodos de otimização, diversos métodos foram desenvolvidos, como é o caso dos Métodos de Otimização Matemática (RIGO, 1999) e dos Métodos de Otimização Heurística (PHAM; GHANBARZADEH, 2007). Cada um é utilizado para as mais diversas finalidades, de acordo com suas vantagens e desvantagens diante das dificuldades impostas.

Na Engenharia de Estruturas é cada vez mais recorrente o emprego desses métodos para a otimização de estruturas treliçadas. Denomina-se treliça um conjunto de barras conectadas entre si em suas extremidades (nós), formando uma configuração de base triangular (no espaço 2D) ou tetraédrica (no espaço 3D) estável, podendo ser isostática ou hiperestática. As estruturas treliçadas construídas com perfis metálicos produzidos industrialmente possuem grande versatilidade de aplicações no campo da construção civil, sendo utilizadas em coberturas, pontes, torres de telecomunicação, passarelas, dentre outros. As treliças metálicas têm capacidade de vencer grandes vãos, alta resistência a esforços internos e podem garantir estruturas mais leves e que geram menos resíduos em seu processo de construção. Outra vantagem está associada ao seu dimensionamento, uma vez que as treliças são submetidas apenas a esforços normais (tração e compressão), desprezando-se esforços tidos como secundários devido às suas magnitudes, como esforços cortantes e momentos fletores. O sistema treliçado metálico é muito utilizado em coberturas de estádios, como é o caso da Arena Corinthians, exibida na Figura 1.2 (AUGUSTO JR, 2013).

Uma dentre as diversas maneiras de proceder com a otimização de estruturas metálicas treliçadas consiste em reduzir ao máximo o peso próprio da estrutura (função objetivo) por meio da minimização da área da seção transversal dos elementos de barra. A solução ótima deve respeitar as condições de segurança e de serviço exigidas por normas técnicas, evitando a ocorrência dos fenômenos de flambagem local e global, garantindo adequada flexibilidade à estrutura e proporcionando tensões dentro dos limites admissíveis.

Diante do cenário exposto, este trabalho tem como finalidade otimizar estruturas metálicas treliçadas visando a redução do peso próprio do sistema, sem comprometer sua utilização

Figura 1.2 – Estrutura treliçada metálica utilizada na Arena Corinthians.



Fonte: Daniel Augusto Jr. / Ag. Corinthians.

e a segurança dos usuários. Com isso, espera-se obter uma estrutura eficiente, cujo consumo mínimo de material proporciona um reduzido custo de produção e está alinhado aos princípios de sustentabilidade na construção civil.

1.1 Justificativa

O setor da construção civil é um dos principais responsáveis pela devastação ambiental em consequência da extração de recursos naturais. Com a busca iminente de medidas sustentáveis pela sociedade, é dever dos engenheiros estruturais elaborar projetos otimizados, respeitando todos os requisitos previstos em normas regulamentadoras, já que a solução ótima garante uma estrutura segura alinhada ao consumo mínimo de materiais.

Uma vez realizado o processo de otimização estrutural com a redução de materiais utilizados, a construção terá um menor custo de produção. Desta forma, pesquisas relacionadas à aplicação de diferentes métodos de otimização no contexto da engenharia de estruturas vêm sendo cada vez mais valorizadas e discutidas pela comunidade acadêmica (BASTOS, 2004; SIAS; ALVES, 2014). A otimização estrutural garante resultados positivos na busca de construções mais econômicas em concordância a medidas sustentáveis e é aplicável a diversos tipos de estruturas (como treliças, pórticos, fundações, muros de arrimo, entre outros) constituídas por variados materiais (concreto armado, aço, madeira, etc).

O presente trabalho busca realizar a otimização de estruturas treliçadas metálicas, que possuem uma ampla gama de aplicações na construção civil (como galpões, coberturas, pontes, torres, entre outros) e possuem uma alta confiabilidade devido ao controle tecnológico dos elementos pré-fabricados industrializados. Desta forma, o estudo visa corroborar com a comunidade acadêmica ao apresentar uma análise crítica dos métodos de otimização e despertar o interesse

de futuros entusiastas na temática apresentada.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

Este trabalho tem por objetivos gerais implementar uma ferramenta computacional para otimização paramétrica do peso de estruturas em aço treliçadas por meio de diferentes técnicas e comparar a eficiência dos diferentes métodos programados.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Investigar métodos de otimização comumente aplicados às estruturas em aço treliçadas;
- Implementar e/ou adaptar algoritmos de otimização matemática e heurística para uso em problemas estruturais; e
- Realizar estudos de caso para validação do código e posterior comparação com os resultados apresentados por outros autores.

1.3 Metodologia

1.3.1 Seleção dos Métodos de Otimização mais adequados aos problemas de Otimização Estrutural

Inicialmente são definidas premissas gerais aplicadas a problemas de otimização, bem como a diferentes tipos de otimização estrutural. Em seguida, são fundamentados teoricamente alguns métodos de otimização matemáticos e heurísticos, analisando-os de forma criteriosa, a fim de escolher alguns destes que melhor se aplicam aos objetivos do presente trabalho. Posteriormente, são apresentadas algumas pesquisas relevantes feitas no campo da otimização estrutural, em especial às estruturas em aço treliçadas, e as conclusões obtidas por cada um dos autores apresentados.

1.3.2 Implementação e Validação do Programa

No presente trabalho, desenvolve-se um código computacional para otimizar estruturas em aço treliçadas planas e espaciais. Nas análises estruturais são considerados materiais com relação constitutiva elástica linear (Lei de Hooke) e hipótese de deformações infinitesimais. Desta forma, o problema de otimização consiste em minimizar a função objetivo, representada pelo peso próprio total da estrutura associado às áreas das seções transversais das barras (variáveis de projeto). Para garantir a segurança das soluções obtidas, são aplicadas restrições de projeto, como

valores admissíveis para área da seção transversal dos elementos, tensão axial máxima admissível do material e tensão axial de compressão máxima para flambagem global. Vale ressaltar que as restrições serão baseadas nas exigências impostas pela *ABNT NBR 8800:2008 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*, *ABNT NBR 16239:2013 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios com perfis tubulares* e por modelos baseados no Método das Tensões Admissíveis.

Além disso, a otimização é feita utilizando variáveis contínuas para que, posteriormente, sejam adotados valores de área comercialmente disponíveis para perfis metálicos imediatamente próximos à solução ótima encontrada.

Concluída a fundamentação teórica, são desenvolvidos algoritmos baseados nos métodos de otimização escolhidos, sendo um matemático e outro heurístico. O procedimento será realizado por meio do *software* Matlab, que possui versatilidade e alta performance, o qual é usualmente empregado para resolver problemas matemáticos de diversas áreas. Por fim, são realizados estudos de caso de treliças metálicas clássicas na literatura, com o intuito de verificar a validade dos algoritmos desenvolvidos e comparar a performance dos métodos de otimização matemáticos e heurísticos.

2 Otimização Estrutural

De forma convencional, uma estrutura é dimensionada por meio de um processo iterativo, no qual o engenheiro projetista adota uma configuração inicial (dimensões, geometria, disposição e quantidade de elementos) e avalia sua conformidade em relação à resistência de esforços, segurança, desempenho e conforto exigidos pelas normas técnicas. Quando a solução adotada respeita todas as exigências, o processo iterativo é finalizado. A partir da experiência em projetos de construções análogas a que está sendo dimensionada, o projetista passa a adotar configurações iniciais cada vez mais próximas da solução considerada ótima.

Na engenharia estrutural, entretanto, inúmeras variáveis estão envolvidas. Muitas vezes a intuição e a experiência do projetista não são suficientes para obter a solução ótima devido à complexidade do problema. Assim, diante da necessidade da minimização dos custos de produção na construção civil e redução do consumo de recursos naturais, as técnicas de otimização possibilitam a obtenção de soluções estruturais comprovadamente ótimas, auxiliando o engenheiro no desenvolvimento do projeto (RIGO, 1999)

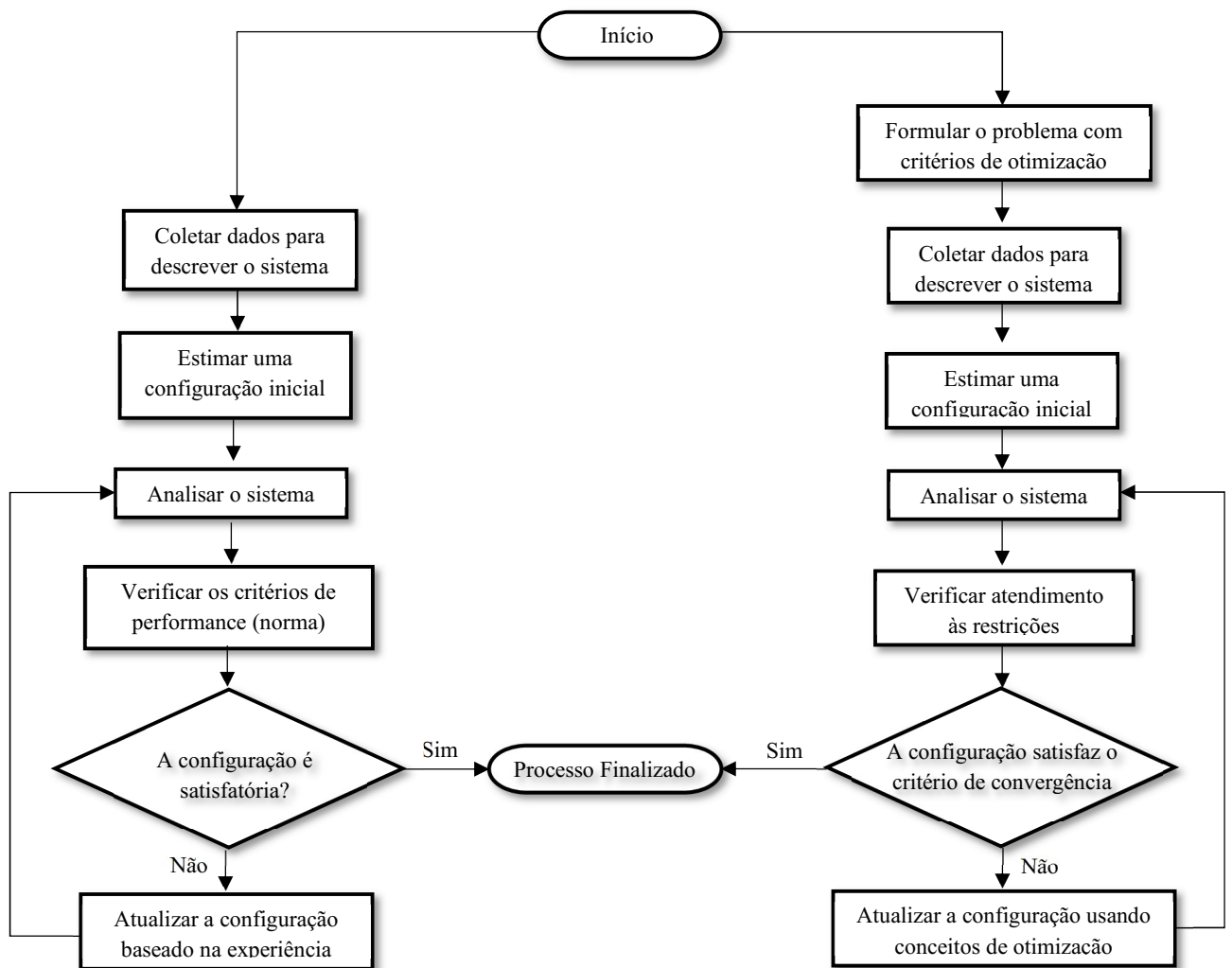
Segundo Arora (2012), um projeto estrutural convencional se difere de uma estrutura otimizada pelo seu processo iterativo, sendo realizado de forma mais simples, já que são verificadas apenas as restrições de norma, não mensurando a solução em relação a outras possíveis soluções ótimas. A Figura 2.1 mostra os processos iterativos percorridos durante o dimensionamento estrutural.

2.1 Definições

Qualquer problema de otimização pode ser formulado considerando uma função objetivo com variáveis independentes ou relacionadas, em que se deseja encontrar uma solução máxima ou mínima dentro de um espaço amostral (ou domínio da função), respeitando as restrições impostas. De acordo com Arora (2012), estes parâmetros podem ser definidos da seguinte forma:

- **Variáveis de Projeto:** é o conjunto de variáveis independentes que descrevem o sistema cujos valores se alteram durante o processo de otimização. Estas variáveis podem ser discretas e/ou contínuas, de acordo com o problema analisado;
- **Função Objetivo:** função que associa uma ou mais variáveis de projeto, cujo valor se deseja otimizar (minimizar ou maximizar);
- **Espaço Amostral:** espaço que contempla o domínio de soluções possíveis e viáveis da função objetivo, sendo em geral delimitado pelas funções de restrição;
- **Restrições:** são funções de igualdade e/ou desigualdade associadas às variáveis de projeto ou variáveis dependentes que limitam o problema de otimização.

Figura 2.1 – Fluxograma de comparação dos processos iterativos de dimensionamento estrutural: convencional (esquerda); otimizado (direita).



Fonte: Adaptado de Arora (2012)

A formulação de problemas de otimização pode ser matematicamente representada conforme apresentado no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Formulação matemática do processo de otimização.

<i>Minimizar/Maximizar</i>	$\rightarrow f(\mathbf{X})$	(Função Objetivo)
$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$		(\mathbf{X} sendo o vetor de variáveis de projeto)
$\mathbf{X} \in \Omega \subset R$		(Sendo Ω o espaço de soluções viáveis)
Restrições:	$\rightarrow h_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$	(Restrições de igualdade)
	$\rightarrow g_j(\mathbf{X}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p$	(Restrições de desigualdade)

Fonte: Autoria própria

Cavalcanti (2019) afirma que pode-se classificar um problema de otimização de acordo com:

- A natureza da função objetivo e das restrições: que pode ser considerada linear ou não linear (quando alguma das funções $h_i(\mathbf{X})$, $g_j(\mathbf{X})$, e/ou $f(\mathbf{X})$ é não linear);
- As características do espaço amostral: que pode ser contínuo, discreto ou misto, a depender do domínio das variáveis de projeto;
- Tipologia das restrições: em que um problema pode ser considerado restritivo ou não restritivo (quando não há restrições), sendo que no primeiro caso as restrições podem ser expressas por funções de igualdade e/ou desigualdade, podendo ainda existir restrições laterais (ou canalizadas), que definem um intervalo de validade para as variáveis de projeto.

No caso de otimização de estruturas em aço, é recomendada a utilização de variáveis de projeto discretas, adotando-se valores comerciais. Apesar de variáveis contínuas apresentarem melhores soluções, essas geralmente se tornam inexequíveis devido à indisponibilidade de elementos com as exatas dimensões otimizadas no mercado (WU; CHOW, 1995).

É necessário salientar que o número de restrições de igualdade deve ser menor ou igual ao número de variáveis (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). Caso contrário, o sistema de equações se torna superdeterminado. Não há, no entanto, limitações para o número de restrições de desigualdade.

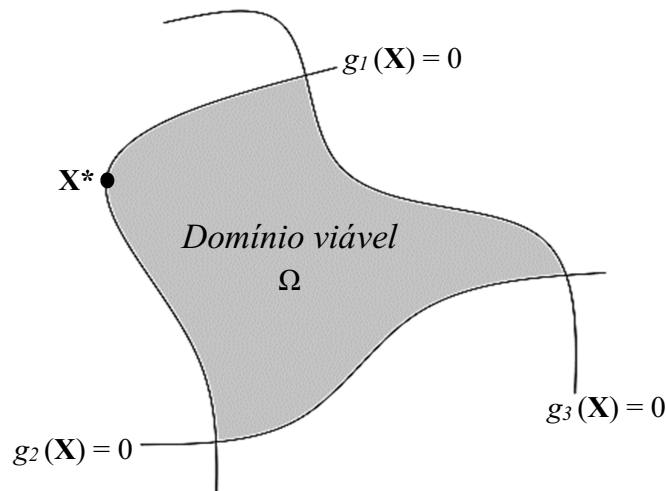
2.1.1 Análise das Restrições

De acordo com Guilherme (2006), as restrições de projeto podem ser consideradas ativas, inativas ou violadas. Considerando uma função de desigualdade, $g_j(\mathbf{X}) \leq 0$, pode-se dizer que esta é ativa em um ponto \mathbf{X}^* do domínio viável quando é satisfeita a igualdade $g_j(\mathbf{X}^*) = 0$, e inativa para a condição $g_j(\mathbf{X}^*) < 0$. Para o caso em que $g_j(\mathbf{X}) > 0$, a restrição é dita como violada.

Soares e Debs (1997) definem que toda restrição de igualdade, $h_i(\mathbf{X}) = 0$, é ativa para qualquer ponto \mathbf{X}^* pertencente ao domínio viável. Desta forma, a restrição é dada como violada para os casos em que $h_i(\mathbf{X}) \neq 0$.

Considerando o espaço de soluções viáveis (Ω) em que um ponto \mathbf{X}^* está presente, as restrições ativas são aquelas que limitam de forma efetiva o domínio do problema e que devem ser verificadas primeiro, enquanto as restrições inativas não influenciam diretamente o problema, podendo ser verificadas em etapa posterior à obtenção da solução ótima. A Figura 2.2 ilustra um domínio em que $g_1(\mathbf{X}^*)$ é uma restrição ativa, enquanto $g_2(\mathbf{X}^*)$ e $g_3(\mathbf{X}^*)$ são inativas.

Figura 2.2 – Restrições ativas e inativas.



Fonte: Autoria própria

2.1.2 Pontos de Máximo/Mínimo Local e Global

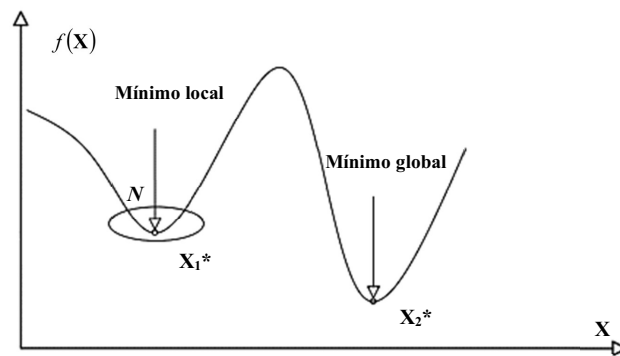
A solução de um problema de otimização varia de acordo com a forma de busca no espaço amostral e com o critério de parada do processo iterativo, que estão associados ao método escolhido. Durante o processo de busca, é possível encontrar valores de mínimo/máximo global ou local, os quais dependem, por sua vez, das características do problema a ser solucionado.

Segundo Chen e Ho (1992), os conceitos de mínimo local e mínimo global de uma função podem ser definidos da seguinte forma:

- **Mínimo local:** uma função $f(\mathbf{X})$ tem valor de mínimo local em \mathbf{X}^* , pertencente a uma vizinhança N , quando é satisfeita a condição $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$, para todo $\mathbf{X} \in N \cap \Omega$. Se nesta condição o valor de $f(\mathbf{X})$ for maior que $f(\mathbf{X}^*)$ para $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}^*$, o ponto é denominado de mínimo local estrito;
- **Mínimo global:** a função $f(\mathbf{X})$ tem valor de mínimo global em \mathbf{X}^* quando a condição $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$ é satisfeita em todo domínio Ω . Novamente, se $f(\mathbf{X}) > f(\mathbf{X}^*)$ para $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}^*$, o ponto é denominado de mínimo global estrito.

Para um melhor entendimento, a Figura 2.3 ilustra graficamente uma função $f(\mathbf{X})$ com valores de mínimo local e mínimo global.

Figura 2.3 – Pontos de mínimo de uma função.



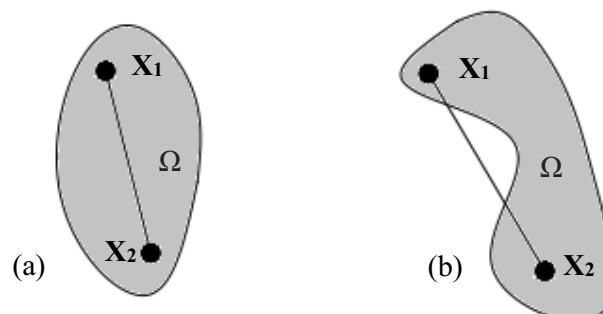
Fonte: Autoria própria

2.1.3 Convexidade do Problema

Em geral, os problemas de otimização estrutural são não lineares e, devido à sua complexidade, encontrar o mínimo global da função objetivo se torna uma tarefa árdua e de alto custo computacional. Na maioria dos casos, os algoritmos acabam ficando presos a regiões de mínimos locais, as quais ocorrem devido à não convexidade do problema de otimização.

Em problemas convexos, caso haja um mínimo local no interior do conjunto de soluções viáveis (exceto no limite), este também será o mínimo global (ARORA, 2012). O problema de otimização é considerado convexo caso a função objetivo e seu domínio viável (Ω) sejam convexos, o que é comprovado se o segmento que une quaisquer dois pontos dentro da região Ω também esteja dentro desta. A Figura 2.4 apresenta um domínio convexo e não convexo, respectivamente.

Figura 2.4 – Domínio viável: (a) convexo; (b) não convexo.



Fonte: Autoria própria

Matematicamente, uma função $f(\mathbf{X})$ é definida como convexa quando os valores obtidos com dois pontos quaisquer, \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , e suas combinações lineares, $\alpha\mathbf{X}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{X}_2$, satisfazem

a relação a seguir (GUILHERME, 2006):

$$f[\alpha\mathbf{X}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{X}_2] \leq \alpha f(\mathbf{X}_1) + (1 - \alpha)f(\mathbf{X}_2) \quad (2.1)$$

sendo α um valor entre zero e um ($0 \leq \alpha \leq 1$) e $\alpha\mathbf{X}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{X}_2 \in k$, em que k é um subconjunto convexo presente no espaço amostral Ω . Além disso, a função $f(\mathbf{X})$ é contínua para qualquer ponto no interior de k .

Para problemas não convexos, não se pode afirmar que um ponto de mínimo local é também um mínimo global, portanto solucioná-los é uma tarefa complexa.

2.1.4 Vetor Gradiente

Caso a função $f(\mathbf{X})$ seja contínua e diferenciável, derivando-a parcialmente em relação às n variáveis que compõem o vetor \mathbf{X} e rearranjando o resultado de forma vetorial, obtém-se o que se denomina por vetor gradiente da função, $\nabla f(\mathbf{X})$, representado na Equação 2.2.

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_n} \end{bmatrix}; \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

Stewart (2012) define que um ponto \mathbf{X}^* é chamado **ponto crítico** da função $f(\mathbf{X})$ se as suas **derivadas parciais** forem nulas, $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \vec{0}$, (reta tangente igual a zero ou inexistente), o que torna o ponto \mathbf{X}^* um candidato a máximo/mínimo. Portanto, a análise do vetor gradiente da função é uma ferramenta eficiente e muito utilizada nos algoritmos de otimização.

2.1.5 Matriz Hessiana

Caso seja possível derivar parcialmente o vetor gradiente em relação às variáveis da função, obtém-se a segunda derivada parcial da função $f(\mathbf{X})$, que, quando representada de forma matricial, recebe o nome de matriz Hessiana, $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ ou $\nabla^2 f(\mathbf{X})$.

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_i \partial \mathbf{X}_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_2 \partial \mathbf{X}_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_n \partial \mathbf{X}_1} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_1 \partial \mathbf{X}_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_n \partial \mathbf{X}_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_1 \partial \mathbf{X}_n} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_2 \partial \mathbf{X}_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_n^2} \end{bmatrix}; \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

Guilherme (2006) afirma que a matriz Hessiana pode ser utilizada para verificar se um ponto crítico \mathbf{X}^* corresponde a um valor de máximo ou mínimo local ao satisfazer uma das seguintes condições:

- Se a determinante de $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*) > 0$, \mathbf{X}^* é ponto de mínimo local;
- Se a determinante de $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*) < 0$, \mathbf{X}^* é ponto de máximo local;
- Se a determinante de $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*) = 0$, \mathbf{X}^* representa um ponto de sela.

Este método é conhecido na literatura como *Teste da Segunda Derivada* (STEWART, 2012).

2.1.6 Multiplicadores de Lagrange

Para problemas de otimização irrestritos, o cálculo das derivadas parciais de primeira e segunda ordem são úteis na busca por uma solução ótima. Entretanto, no caso de problemas sujeitos a restrições, a simples utilização de derivadas não possibilita verificar se uma solução obtida viola qualquer tipo de restrição imposta, seja ela de igualdade ou desigualdade. Nessa situação, é usual o emprego do método dos multiplicadores de Lagrange.

De acordo com Guilherme (2006), é possível otimizar uma função objetivo $f(\mathbf{X})$ sujeita a restrições de igualdade e desigualdade, $h_i(\mathbf{X}) = 0$ e $g_j(\mathbf{X}) \leq 0$, respectivamente, ao combiná-las convenientemente em uma nova função auxiliar, chamada função Lagrangeana, conforme a Equação 2.4:

$$L(\mathbf{X}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{X}) + \lambda_i[h_i(\mathbf{X})] + \mu_j[g_j(\mathbf{X})]; \quad i, j = (1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

sendo λ_i e μ_j denominados multiplicadores de Lagrange, os quais estão associados às restrições $h_i(\mathbf{X})$ e $g_j(\mathbf{X})$, respectivamente.

Igualando o gradiente da Equação 2.4 a um vetor nulo, $\nabla L(\mathbf{X}, \lambda, \mu) = \vec{0}$, obtém-se um sistema de equações que, ao ser resolvido, fornece os valores ótimos das variáveis de projeto que atendem a todas as restrições.

2.1.7 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Pesquisas realizadas por Karush (1939), e posteriormente por Kuhn e Tucker (1951) de forma independente, indicaram as condições matemáticas que garantem que um ponto no espaço viável pode ser considerado ótimo de um problema de programação não-linear (PNL), as quais ficaram conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Para formular as condições de KKT, é necessário primeiramente salientar algumas condições básicas de otimalidade (GUILHERME, 2006):

- **Condição necessária de 1ª ordem:** para que um ponto \mathbf{X}^* seja mínimo (máximo) local da função $f(\mathbf{X})$, diferenciável em \mathbf{X}^* , é indispensável que $\nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$;
- **Condição necessária de 2ª ordem:** para que um ponto \mathbf{X}^* seja mínimo (máximo) local da função $f(\mathbf{X})$, duas vezes diferenciável em \mathbf{X}^* , é indispensável que seja satisfeita a condição necessária de 1ª ordem e que a matriz Hessiana, $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*)$, seja positiva (negativa) semidefinida no ponto;
- **Condição suficiente:** Sendo a função $f(\mathbf{X})$ duas vezes diferenciável em \mathbf{X}^* e satisfeita a

condição necessária de 1ª ordem, \mathbf{X}^* é considerado mínimo (máximo) tal que a matriz Hessiana no ponto, $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*)$, seja positiva (negativa) definida.

Estudos feitos por Haftka e Gürdal (1996) mostram que as condições de KKT podem ser aplicadas em problemas com restrições associados aos multiplicadores de Lagrange. Pode-se dizer que \mathbf{X}^* , λ^* e μ^* são soluções ótimas da função Lagrangeana, Eq.(2.4), desde que sejam respeitadas as seguintes condições:

$$\nabla L(\mathbf{X}^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(\mathbf{X}^*) + \lambda_i^* [\nabla h_i(\mathbf{X}^*)] + \mu_j^* [\nabla g_j(\mathbf{X}^*)] = 0 \quad (2.5)$$

$$h_i(\mathbf{X}^*) = 0 \quad (2.6)$$

$$g_j(\mathbf{X}^*) \leq 0 \quad (2.7)$$

$$\mu_j^* [g_j(\mathbf{X}^*)] = 0 \quad (2.8)$$

$$\mu^* \geq 0 \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) é chamada de *condição de complementaridade* e estabelece que no caso da restrição de desigualdade estar ativa, $g_j(\mathbf{X}^*) = 0$, o multiplicador de Lagrange μ_j pode ou não ser nulo. Entretanto, no caso da restrição estar inativa, $g_j(\mathbf{X}^*) < 0$, o multiplicador é obrigatoriamente igual a zero.

As condições de KKT podem garantir que a solução encontrada se trata de um mínimo global apenas para problemas de otimização convexos. Caso contrário, devem ser verificadas as condições necessárias de 2ª ordem (PEREIRA, 2002). Basicamente, as condições de KKT podem ser resumidas em quatro itens:

- Uma solução ótima deve atender às condições necessárias de 1ª e 2ª ordem. Caso contrário, não é considerada ótima;
- O ponto que satisfaz as condições necessárias não é necessariamente uma solução ótima;
- Ao atender a condição suficiente, o ponto candidato é de fato o ótimo;
- Caso a condição suficiente não possa ser utilizada ou não seja atendida, não pode-se afirmar que o ponto candidato seja de fato o ótimo.

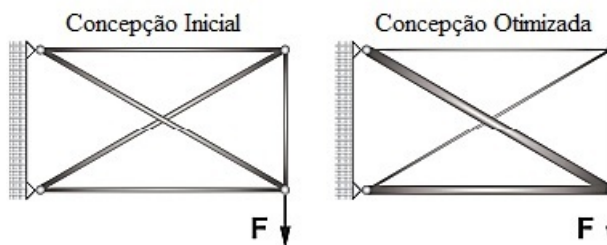
2.2 Tipos de Otimização Estrutural

A otimização de uma estrutura pode ser alcançada por meio de diferentes procedimentos de mudança da configuração do projeto, destacando-se três: dimensional (ou paramétrica), de forma e topológica.

Uma otimização é classificada como dimensional quando a disposição dos elementos estruturais é fixa (quantidade de elementos, posição dos nós, etc) e variam-se apenas as dimensões das seções transversais dos elementos (como área, altura, largura, diâmetro, entre outros). A

Figura 2.5 mostra uma estrutura treliçada que passou por um processo de otimização dimensional e teve a área da seção transversal de seus elementos modificada (CAVALCANTI, 2019).

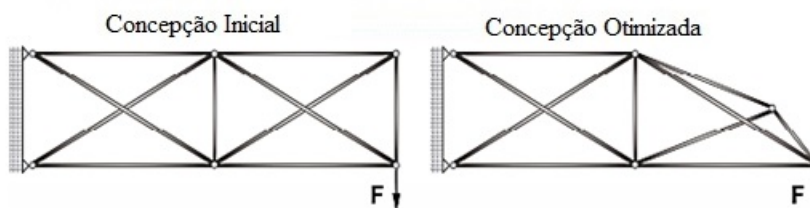
Figura 2.5 – Otimização dimensional de uma treliça.



Fonte: Cavalcanti (2019)

Outro método para garantir uma solução ótima é a otimização de forma, que consiste em modificar as coordenadas nodais e posição dos elementos estruturais, como mostra a Figura 2.6. Embora seja um método mais robusto, permitindo a mudança do domínio das variáveis, pode apresentar numerosos ótimos locais. Nessa abordagem, é necessário impor restrições que impeçam configurações hipostáticas, já que ocorre a modificação da posição dos nós da estrutura.

Figura 2.6 – Otimização de forma de uma treliça.



Fonte: Cavalcanti (2019)

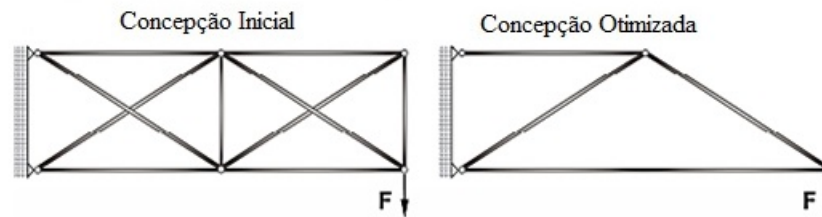
O procedimento que considera a possibilidade da exclusão ou anexo de elementos estruturais na configuração inicialmente proposta é conhecido como otimização topológica, algo não abordado pelos outros métodos. A ideia principal do processo consiste em remover material sempre que áreas ou volumes tendam a zero na simulação feita em elementos finitos (ZHOU, 1996). A otimização topológica de um sistema treliçado está representado na Figura 2.7.

2.3 Métodos de Otimização

Diante da relevância dos problemas de otimização, diversos métodos foram desenvolvidos pela comunidade científica. Mesmo com o elevado número de métodos desenvolvidos, cada qual com suas características, é possível agrupá-los em dois grupos: **métodos matemáticos** e **métodos heurísticos**.

Os **métodos matemáticos** são baseados na busca da melhor solução por meio de operadores matemáticos, como o cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem da função

Figura 2.7 – Otimização topológica de uma treliça.



Fonte: Cavalcanti (2019)

objetivo. Isso porque a direção dos gradientes possibilita que o ponto de partida chegue em uma solução ótima do problema realizando-se um processo iterativo. Sendo pré-definido o ponto de partida, o algoritmo sempre resultará na mesma solução ótima.

No caso dos **métodos heurísticos**, a busca por uma boa solução do problema é feita de forma aleatória. Ao empregar mecanismos probabilísticos, estes métodos encontram resultados satisfatórios para o problema, mas não garantem que a solução proposta, apesar de ótima, seja a melhor no espaço viável. Além disso, diferentemente dos métodos matemáticos, os heurísticos podem gerar soluções satisfatórias distintas com um mesmo ponto de partida, devido aos fatores aleatórios de busca.

Ressalta-se que o sucesso de qualquer método de otimização, seja matemático ou heurístico, está associado à sua robustez, considerando sua eficácia e eficiência. Embora a dificuldade atrelada à implementação de um algoritmo seja um ponto chave para a sua escolha, deve-se atentar à sua capacidade para resolução do problema. Quanto mais robusto for o método selecionado, mais confiável será a solução obtida. Isto posto, apresenta-se a seguir um estudo aprofundado a respeito dos principais métodos de otimização, analisando suas vantagens e desvantagens de forma crítica, para que, ao final da presente seção, esteja justificada a escolha do método matemático e do método heurístico que melhor se adequam para a otimização de estruturas em aço treliçadas.

2.3.1 Métodos de Otimização Matemática

Segundo Pereira (2002), os métodos de otimização matemática, também chamados de algoritmos de programação matemática, podem ser classificados de acordo com as características da função objetivo e das restrições, conforme apresentado no Quadro 2.2.

Métodos desenvolvidos para resolver problemas lineares e quadráticos possuem um número finito de passos para chegar à solução. Entretanto, a maior parte dos problemas de otimização de Engenharia são representados por problemas não-lineares e, para obter sua solução, os algoritmos de resolução utilizam processos iterativos que buscam a convergência de um ponto inicial no espaço para um ponto de ótimo.

Em geral, algoritmos de Programação Não Linear efetuam a busca pelo ponto ótimo utilizando a posição corrente $\mathbf{X}^{(k)}$ como ponto de partida para a próxima iteração $(k + 1)$,

Quadro 2.2 – Divisão dos Algoritmos de Programação Matemática.

Tipos de Otimização	Função Objetivo	Restrições
Programação Linear	Linear	Lineares
Programação Quadrática	Quadrática	Lineares
Programação Não Linear	Não linear	Não lineares
	Não linear	Lineares
	Linear	Não lineares

Fonte: Adaptado de Pereira (2002)

aplicando de forma iterativa a equação:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} ; \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{d}^{(k)}$ é a direção de busca do ponto ótimo e $\alpha^{(k)}$ é um escalar que representa o tamanho do passo dado ao longo da direção de busca.

Na maioria das vezes, os algoritmos recorrem ao cálculo de derivadas para obter a direção de busca da solução ótima, caminhando nesse sentido até a convergência. Quando um método utiliza apenas o gradiente da função objetivo e das restrições para calcular a direção de busca, ele é classificado como de primeira ordem. Contudo, sendo necessária a utilização da matriz Hessiana, o algoritmo é considerado de segunda ordem.

Dentre as diversas vantagens que os métodos matemáticos podem apresentar, destacam-se (BASTOS, 2004):

- ✓ Teoremas que garantem a convergência para uma solução ótima;
- ✓ Solução ótima é encontrada de forma exata;
- ✓ Algoritmos com custo computacional reduzido;
- ✓ Rápida convergência para ponto de ótimo ao utilizar derivadas.

Embora os métodos matemáticos possuam ferramentas que garantem a solução de problemas de otimização de forma eficiente, seu uso pode ser inviabilizado para alguns casos. As principais deficiências destes métodos são:

- ✗ Dependendo do ponto de partida adotado, o algoritmo pode convergir para um ponto de ótimo local, não alcançando o otimização global;
- ✗ Alguns métodos exigem que a função objetivo e as restrições sejam diferenciáveis, o que por vezes pode não ser possível (funções descontínuas) ou ser uma tarefa demasiadamente custosa em termos computacionais;
- ✗ Dificuldade para encontrar a solução ótima global em problemas que apresentam muitos ótimos locais, exigindo algoritmos robustos ou a inicialização do algoritmo em diferentes pontos do domínio;

- ✗ Algumas operações podem exigir que as variáveis sejam contínuas no espaço, tornando os métodos matemáticos inadequados para analisar problemas que envolvam variáveis discretas.

A otimização de estruturas em aço recai em problemas de otimização discreta (assim denominado devido à natureza discreta das variáveis de projeto) devido à disponibilidade comercial dos perfis pré-fabricados. Desta forma, métodos matemáticos que exigem variáveis contínuas acabam contornando essa particularidade ao determinar uma solução ótima num domínio contínuo (relaxamento da solução) e aproximando-a para o valor discreto mais próximo que seja comercialmente disponível. Em alguns casos, esse processo pode se tornar custoso, já que podem existir duas opções de variáveis discretas, uma imediatamente inferior e outra imediatamente superior à solução contínua, e, sendo um problema com n variáveis aproximadas, resultará em 2^n possibilidades de escolha (BASTOS, 2004).

Diversos métodos de otimização matemática foram desenvolvidos pela comunidade científica, dentre os quais merecem destaque: Método do Máximo Declive (“Steepest Descent Method”), Método de Newton, Métodos Quase-Newton, Método do Lagrangeano Aumentado, Método das Penalidades, Método de Programação Quadrática Sequencial, Método do Gradiente Conjugado, entre outros.

Na seção a seguir, alguns métodos matemáticos são descritos de forma sucinta, com o intuito de verificar sua aplicabilidade à problemas de otimização de estruturas treliçadas em aço.

2.3.1.1 Método de Newton

A ideia básica do Método de Newton consiste na obtenção da direção ótima de busca a partir da aproximação da função objetivo $f(\mathbf{X})$ por meio da expansão em séries de Taylor até o termo de segunda ordem ao redor de um ponto $\mathbf{X}^{(k)}$ qualquer (ARORA, 2012):

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) \cong f(\mathbf{X}^{(k)}) + \nabla f(\mathbf{X}^{(k)})^T \Delta \mathbf{X} + \frac{(\Delta \mathbf{X})^T \nabla^2 f(\mathbf{X}^{(k)}) (\Delta \mathbf{X})}{2} \quad (2.11)$$

em que

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)} \quad (2.12)$$

Sendo a Equação (2.11) quadrática, é possível minimizá-la utilizando as condições de otimalidade. Logo, derivando toda a expressão em relação ao termo $\Delta \mathbf{X}$ e igualando o resultado a um vetor nulo, chega-se na seguinte expressão:

$$\nabla f(\mathbf{X}^{(k)}) + (\Delta \mathbf{X}) \nabla^2 f(\mathbf{X}^{(k)}) = 0 \quad (2.13)$$

em que ∇^2 refere-se a derivada de segunda ordem de $f(\mathbf{X})$.

Substituindo o termo $\nabla^2 f(\mathbf{X}^{(k)})$ por $\mathbf{H}(\mathbf{X}^{(k)})$ (matriz Hessiana) e realizando algumas adequações matemáticas, a Eq. (2.13) pode ser escrita como:

$$\Delta \mathbf{X} = -[\mathbf{H}(\mathbf{X}^{(k)})]^{-1} \nabla f(\mathbf{X}^{(k)}) \quad (2.14)$$

Considerando as equações apresentadas, é possível encontrar um ponto de ótimo da função $f(\mathbf{X})$ adotando um ponto de partida qualquer, que irá convergir por um processo iterativo realizado pela equação a seguir:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - [\mathbf{H}(\mathbf{X}^{(k)})]^{-1} \nabla f(\mathbf{X}^{(k)}) \quad (2.15)$$

O processo é repetido diversas vezes, obtendo a cada iteração um valor mais próximo da solução ótima, sendo finalizado quando o erro da estimativa for inferior a uma tolerância pré-estabelecida.

Apesar de ser um método que garante a convergência para muitos problemas de otimização, o Método de Newton pode ser utilizado apenas para problemas irrestritos e duas vezes diferenciáveis. Além dessas limitações, Pereira (2002) afirma que o cálculo da matriz Hessiana a cada iteração é uma das principais desvantagens do método, já que exige um alto custo computacional e pode se tornar uma tarefa ainda mais árdua para problemas que envolvam muitas variáveis.

2.3.1.2 Método Quase-Newton – BFGS

Diante da problemática apresentada pelo Método de Newton no processo de cálculo das derivadas de segunda ordem a cada iteração, pesquisadores buscaram novas abordagens capazes de vencer essa dificuldade por meio de aproximações da matriz Hessiana (ou da sua inversa) ao utilizar valores dos gradientes ao longo das iterações (PEREIRA, 2002). Estes métodos são conhecidos como Métodos Quase-Newton e um dos mais conhecidos é o BFGS, que recebe este nome em homenagem aos autores Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno, que propuseram o método em 1970.

Segundo Arora (2012), o método BFGS pode ser resumido pelo seguinte algoritmo:

1. Estime um ponto inicial \mathbf{X}_0 . Escolha uma matriz \mathbf{H}_0 definida, positiva e simétrica como estimativa para a matriz Hessiana da função objetivo $f(X)$. Na falta de informações, adota-se $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} a matriz identidade. Escolha o parâmetro de convergência ε (erro). Inicie o processo iterativo ($k = 0$) e calcule o vetor gradiente $\mathbf{c}_0 = \nabla f(\mathbf{X}_0)$.
2. Calcule a norma do vetor gradiente, $\|\mathbf{c}^{(k)}\|$. Se $\|\mathbf{c}^{(k)}\| < \varepsilon$, pare o processo iterativo; caso contrário, prossiga.
3. Resolva o sistema de equações lineares a seguir para obter o parâmetro da direção de busca ($\mathbf{d}^{(k)}$):

$$\mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{c}^{(k)} \quad (2.16)$$

4. Calcule o tamanho do passo da busca:

$$\alpha^{(k)} = \alpha, \text{ ao minimizar } f(\mathbf{X}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}) \quad (2.17)$$

5. Atualize o valor do ponto na iteração da seguinte forma:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \quad (2.18)$$

6. Atualize a aproximação da Hessiana da função objetivo com a expressão:

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{D}^{(k)} + \mathbf{E}^{(k)} \quad (2.19)$$

sendo as matrizes de correção $\mathbf{D}^{(k)}$ e $\mathbf{E}^{(k)}$ dadas por

$$\mathbf{D}^{(k)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)}}; \quad \mathbf{E}^{(k)} = \frac{\mathbf{c}^{(k)} \mathbf{c}^{(k)T}}{\mathbf{c}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}} \quad (2.20)$$

em que

$$\mathbf{s}^{(k)} = \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}; \quad \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)}; \quad \mathbf{c}^{(k+1)} = \nabla f(\mathbf{X}^{(k+1)}) \quad (2.21)$$

7. Prossiga na iteração, $k = k + 1$, e volte para o Passo 2.

O BFGS apresenta certa vantagem em relação ao Método de Newton, já que se limita a calcular apenas derivadas de primeira ordem ao adotar um mecanismo para aproximar a matriz Hessiana. Dessa forma, mantém sua eficácia em otimizar problemas, mas com um algoritmo computacionalmente menos exigente. Martinez e Santos (1995) afirmam que o esforço computacional do Método de Newton, que é de ordem $O(n^3/3)$, diminui para $O(n^2)$ ao adotar um método da família Quase-Newton.

Apesar de ser um método de otimização consolidado, o BFGS apresenta algumas limitações, como a necessidade de uma função objetivo que seja ao menos uma vez diferenciável e poder ser aplicado apenas a problemas irrestritos. Além disso, possui um custo computacional elevado para problemas com grande número de variáveis, já que é necessário o armazenamento das matrizes a cada iteração, consumindo um grande espaço de memória. Estudiosos buscaram diminuir essa dificuldade, como é o caso de Nocedal (1980), que propôs uma modificação ao BFGS, chamado de método de memória limitada, que faz com que a matriz que aproxima a Hessiana seja atualizada somente após um número específico de iterações.

2.3.1.3 Problema de Programação Quadrática

De acordo com Parente (2000), um Problema de Programação Quadrática (PPQ) é aquele em que a função objetivo é quadrática e as restrições são lineares. Matematicamente, um PPQ pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(\mathbf{X}) = \mathbf{q}^T \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} \mathbf{a}_i^T \mathbf{X} = \mathbf{b}_i & i = (1 \dots l) \\ \mathbf{a}_j^T \mathbf{X} \leq \mathbf{b}_j & j = (1 \dots m) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que \mathbf{a} é o vetor dos coeficientes das derivadas das funções de restrição, \mathbf{b} é o vetor dos termos independentes e \mathbf{q} é um vetor constante qualquer. Caso a matriz hessiana \mathbf{H} seja positiva e definida, o problema é convexo, garantindo que o ponto de mínimo local é também mínimo global. A solução do PPQ pode ser obtida em três etapas bem definidas, conforme Eboli (1989), Parente (2000) e Pereira (2002):

1. Eliminam-se as restrições de igualdade do problema e obtém-se um problema de programação quadrática reduzida, chamado de problema padrão de programação quadrática, apenas com restrições de desigualdade;
2. O problema reduzido é transformado em um Problema Linear Complementar (PLC), resolvido através de métodos de pivoteamento;
3. Calculam-se as variáveis das restrições retiradas na primeira etapa, recuperando-se a solução para o espaço original.

2.3.1.4 Programação Quadrática Sequencial – Algoritmo de Han-Powell

O algoritmo de Programação Quadrática Sequencial (PQS) é um dos métodos mais utilizados para a solução de problemas de programação não linear. O algoritmo se baseia na resolução das condições de KKT, aproximando-se do Método de Newton, o que garante boas propriedades de convergência. Entretanto, o principal diferencial deste método é a aplicabilidade a problemas com restrição (SIAS; ALVES, 2014).

Pereira (2002) afirma que a PQS é o resultado da aplicação do Método de Newton para minimizar uma aproximação quadrática da função Lagrangeana do problema. A cada iteração, o método fornece os vetores \mathbf{d} (correção de \mathbf{X}) e $\Delta\lambda$ (correção dos multiplicadores de Lagrange λ), que, quando atualizados, são aproximadores da solução \mathbf{X}^* e $\Delta\lambda^*$, podendo ser comprovado considerando o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(\mathbf{X}) \\ & \text{sujeito a } h_i(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

sendo a função Lagrangeana dada por:

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) + \sum_i^n \lambda_i [h_i(\mathbf{X})] \quad (2.24)$$

Desenvolvendo o gradiente da Lagrangeana, $\nabla L(\mathbf{X}, \lambda)$, em séries de Taylor ao redor do ponto $(\mathbf{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})$ até a primeira ordem, chega-se à seguinte expressão:

$$\nabla L(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k+1)}, \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k+1)}) = \nabla L(\mathbf{X}^{(k)}, \lambda^{(k)}) + [\nabla^2 L(\mathbf{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(k+1)} \\ \Delta\lambda^{(k+1)} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Adotando $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}$ e $\Delta\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}$ e aplicando as condições de estacionariedade à Eq.(2.25) no ponto $(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k+1)}, \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k+1)})$, obtém-se:

$$[\nabla^2 L(\mathbf{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(k+1)} \\ \Delta\lambda^{(k+1)} \end{Bmatrix} = -\nabla L(\mathbf{X}^{(k)}, \lambda^{(k)}) \quad (2.26)$$

que pode ser expresso matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(k)} & \mathbf{A}^{(k)} \\ \mathbf{A}^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(k+1)} \\ \Delta\lambda^{(k+1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{c}^{(k)} \\ \mathbf{h}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

na qual $\mathbf{A}^{(k)}$ é a matriz do gradiente das restrições, $\mathbf{H}^{(k)}$ é matriz Hessiana da Lagrangeana e $\mathbf{c}^{(k)}$ é o gradiente de $f(\mathbf{X}^{(k)})$, todos avaliados no ponto $\mathbf{X}^{(k)}$.

A solução da Eq. (2.27) pode ser obtida de forma equivalente à solução do subproblema de programação quadrática, apresentada por Eboli (1989), em que a cada iteração se equivalem por meio da linearização das restrições e pela expansão quadrática de f em torno do ponto $\mathbf{X}^{(k)}$.

No caso de problemas em que todas as restrições são de igualdade, a direção de busca e os multiplicadores de Lagrange podem ser determinados solucionando o sistema de equações lineares gerado pelo Método de Newton, como mostrado na Eq.(2.27). Entretanto, este método não pode ser usado para problemas com restrições de igualdade e desigualdade, que exigem a solução de um sistema de inequações (PARENTE, 2000), portanto é necessário adotar alguns artifícios matemáticos. Para tal, Eboli (1989) considera o seguinte problema sujeito a restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(\mathbf{X}) \\ & \text{sujeito a } \begin{aligned} & \mathbf{h}_i(\mathbf{X}) = 0 \\ & \mathbf{g}_j(\mathbf{X}) \leq 0 \end{aligned} \quad i, j = (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ao definir uma direção de busca \mathbf{d} e estimar novamente os multiplicadores de Lagrange λ , recai-se no método PPQ a seguir:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \mathbf{c}^{(k)T} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d} \\ & \text{sujeito a } \begin{aligned} & \mathbf{h}_i^{(k)} + \mathbf{a}_i^{(k)T} \mathbf{d} = 0 \\ & \mathbf{g}_j^{(k)} + \mathbf{a}_i^{(k)T} \mathbf{d} \leq 0 \end{aligned} \quad i, j = (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.29)$$

cujo método de solução foi apresentado na seção anterior.

O algoritmo de Han-Powell é considerado o de maior destaque dentre os métodos de PQS, sendo definido da seguinte forma (PEREIRA, 2002):

1. Dado um ponto inicial \mathbf{X}_0 em $k = 0$, aproxima-se o valor da matriz Hessiana da função Lagrangeana, \mathbf{B}_0 , por meio da expressão:

$$\mathbf{B}_0 = b_0 \mathbf{I} \quad (2.30)$$

em que b_0 é um parâmetro determinado pelo operador, tal como o parâmetro n_r que controla o número de reinícios da matriz \mathbf{B} , que, segundo Parente (2000), tem a função de descartar a influência de pontos muito distantes do ponto da atual iteração.

2. Iniciando o processo iterativo com $k = k + 1$, montar e resolver o PPQ dado pela Eq.(2.29), obtendo os vetores $\mathbf{d}^{(k)}$ e $\lambda^{(k)}$.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \mathbf{g}^{(k-1)T} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{(k-1)} \mathbf{d} \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} \mathbf{h}_i^{(k-1)} + \mathbf{a}_i^{(k-1)T} \mathbf{d} = 0 \\ \mathbf{g}_j^{(k-1)} + \mathbf{a}_j^{(k-1)T} \mathbf{d} \leq 0 \end{cases} \quad i, j = (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.31)$$

sendo $\mathbf{h}_i^{(k-1)}$ e $\mathbf{g}_j^{(k-1)}$ os vetores com as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente; $\mathbf{a}_i^{(k-1)T}$ é a matriz com o gradiente das restrições; e $\mathbf{B}^{(k-1)}$ é a aproximação da Hessiana no ponto $\mathbf{X}^{(k-1)}$.

3. Verificar o critérios de convergência do algoritmo:

$$\begin{cases} |\mathbf{c}^{(k-1)T} \mathbf{d}^{(k)}| \leq \text{tolerância}_1 \\ \max(h_i^{(k)}) \leq \text{tolerância}_2 \end{cases} \quad (2.32)$$

em que o primeiro critério é a variação da função objetivo na direção de busca $\mathbf{d}^{(k)}$ e o segundo critério verifica de forma explícita o valor da restrição mais violada. Além disso, verifica-se o número de avaliações da função objetivo e número de iterações.

4. No caso em que os critérios de parada não sejam atendidos, realiza-se uma busca linear unidimensional para determinar o tamanho do passo $\alpha^{(k)}$ na direção de busca, de modo com que o novo estimador da solução $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$ seja um ponto que colabore para o decréscimo da função objetivo. A busca é feita utilizando a função de penalidade p , construída com a intenção de impor um alto custo à violação das restrições, e que é dada por:

$$p(\alpha) = p(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{d}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^m r_i |h_i(\mathbf{X})| + \sum_{m+1}^p r_i \max[h_i(\mathbf{X}), 0] \quad (2.33)$$

em que r_i são os fatores de penalidade.

5. Atualizar a matriz Hessiana $\mathbf{B}^{(k)}$ do subproblema quadrático utilizando o método BFGS, conforme apresentado na seção 2.3.1.2.
6. Retornar à etapa 2.

2.3.2 Métodos de Otimização Heurística

O processo de utilizar a experiência e a probabilidade de sucesso para executar tarefas, resolver problemas e tomar decisões da melhor forma possível é conhecido como heurística. Desta forma, pode-se dizer que uma heurística consiste em um método de otimização.

A partir da década de 1950, estudiosos observaram que diversos fenômenos da natureza seguem um comportamento heurístico e, com isso, passaram a desenvolver algoritmos na tentativa de simulá-los (SECCHI, 1995). Estes algoritmos, apesar das particularidades entre si, tinham um ponto forte em comum, que era o caráter aleatório e probabilístico, semelhante ao acaso que ocorre em diversos processos naturais, como a evolução das espécies e o comportamento social dos animais.

De acordo com Secchi (1995), com o crescimento do uso de computadores na década de 1980, os métodos heurísticos passaram a ser empregados para a solução de problemas em que os métodos de otimização mais tradicionais da época não tinham sucesso, como era o caso de problemas de otimização combinatória (por exemplo, o clássico problema do caixeiro viajante), problemas em que a função objetivo não pode ser expressa matematicamente, ou problemas com muitos mínimos locais. Além disso, os métodos heurísticos trabalham com operações que funcionam tanto em domínio contínuo, quanto discreto, podendo ser vantajoso em relação aos métodos matemáticos em algumas ocasiões.

Diferente dos métodos matemáticos, os métodos heurísticos não utilizam, necessariamente, derivadas e nem valores matemáticos bem definidos para a direção de busca por possíveis soluções ótimas. A busca é realizada aleatoriamente, com mecanismos probabilísticos, encontrando resultados que satisfaçam os critérios impostos pelo programador. O resultado do problema não depende apenas dos dados de entrada, mas também de fatores aleatórios, e, devido a isso, podem gerar diferentes soluções ótimas com um mesmo ponto de partida.

Segundo Arora (2012), os métodos heurísticos possuem duas fases: global e local. Durante a fase global, a função é avaliada aleatoriamente em diversos pontos da amostra. Na fase local, os pontos são manipulados por buscas locais, com o intuito de encontrar um candidato a mínimo global. Deste modo, para resolver problemas de espaço amostral grande, o método deve ser robusto e capaz de analisar todo espaço, evitando que possíveis ótimos sejam desconsiderados.

Bastos (2004) afirma que para um método de otimização heurístico ser considerado eficiente este deve fazer uso da **exploração**, que investiga e identifica regiões interessantes do espaço amostral, e da **exploração**, que é o processo de extração das soluções presentes nessas regiões. O equilíbrio entre estes dois recursos é essencial para o algoritmo, uma vez que a exploração exagerada pode incluir regiões de pouco interesse, enquanto a demasia de exploração pode levar o problema a uma convergência prematura em um mínimo local. Por outro lado, se houver pouca exploração possíveis regiões interessantes podem não ser analisadas, ao passo que uma baixa exploração pode dificultar a convergência do método.

Algumas características dos métodos heurísticos permitem vencer dificuldades que os

métodos matemáticos têm em solucionar diversos problemas de otimização. Entre as vantagens dos métodos heurísticos, são relevantes as seguintes:

- ✓ Algoritmos flexíveis e robustos, capazes de solucionar diversos tipos de problemas de otimização;
- ✓ Aplicáveis a domínios discretos, contínuos ou mistos;
- ✓ Não necessitam que a função objetivo seja diferenciável e nem contínua, e, muitas vezes, nem ter um modelo matemático explícito definido que a expresse;
- ✓ Não apresentam restrições quanto ao ponto de partida;
- ✓ Adequados a problemas com restrições arbitrárias, capazes de otimizar múltiplas funções com objetivos conflitantes;
- ✓ Capazes de realizar buscas simultâneas em várias regiões do espaço amostral através de uma população de indivíduos;
- ✓ São razoavelmente eficientes para problemas complexos, com múltiplos mínimos.

Ainda que os métodos heurísticos sejam flexíveis e aplicáveis à maioria dos problemas de otimização, algumas limitações podem fazer com que estes métodos não sejam adequados em alguns casos. São apresentadas algumas dessas desvantagens a seguir:

- ✗ Exigem, em geral, um grande número de avaliações da função objetivo, especialmente em problemas com um amplo espaço amostral, o que pode consumir um elevado tempo de processamento;
- ✗ Dependendo dos parâmetros de entrada, o algoritmo pode convergir rapidamente para um mínimo local qualquer, sem avaliar outras regiões atraentes;
- ✗ O elevado número de operações e combinações pode fazer com que possíveis soluções ótimas se percam ao longo do processo de busca.

Como já citado, diversos métodos de otimização heurística foram inspirados em fenômenos naturais. Dentre os mais conhecidos na comunidade acadêmica, destacam-se (MEDEIROS; KRIPKA, 2012): Método do Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*), Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithms*), Otimização por Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization*), Otimização via Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization*), Busca Tabu (*Tabu Search*) e Busca Harmônica (*Harmonic Search*). Com a finalidade de avaliar seu potencial para a otimização de estruturas treliçadas em aço, alguns destes métodos são descritos na seção a seguir.

2.3.2.1 Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithms*)

Desenvolvido por John Holland em 1975, o Algoritmo Genético (AG) é um método de otimização heurístico baseado na teoria evolucionista de seleção natural proposta por Charles Darwin, cuja ideia principal é a de que indivíduos da mesma espécie possuem probabilidades distintas de sobrevivência em função de sua condição genética (CAVALCANTI, 2019). Indivíduos mais aptos ao sistema possuem maior longevidade, maior probabilidade de reprodução e, conseqüentemente, maiores chances de que sua condição genética se propague em futuras populações (processo de seleção natural). As condições genéticas constituem a identidade de cada indivíduo e podem ser representadas pelos cromossomos.

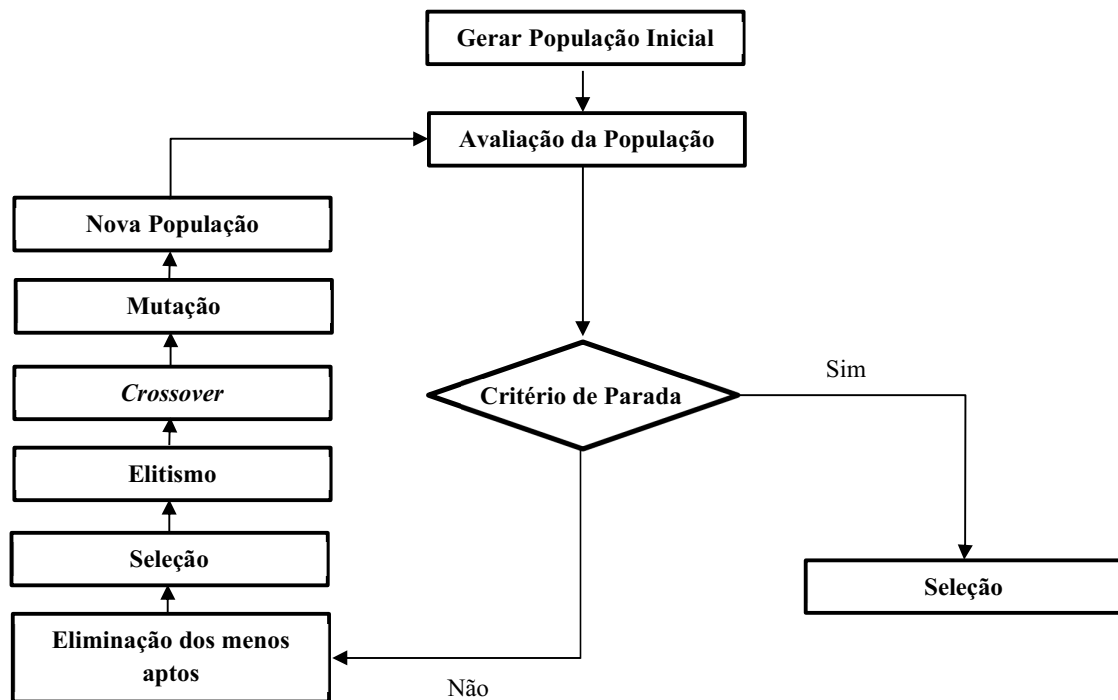
Para um melhor entendimento, alguns termos importantes para a compreensão do AG são (ARORA, 2012):

- **Cromossomo:** Representa uma solução viável ou inviável para o problema, contendo informações sobre todas variáveis da função;
- **Gene:** Este termo é usado para representar um componente escalar presente no cromossomo, ou seja, representa uma determinada variável do problema;
- **População:** O conjunto de pontos (cromossomos) na atual iteração é chamado de população, representando um grupo de possíveis soluções;
- **Geração:** É a iteração em que se encontra o AG, subsequente à qual ocorrerão modificações genéticas na população.

De forma análoga à natureza, na qual as características dos indivíduos (responsáveis pelo grau de aptidão) são codificados pelos genes que compõem os cromossomos, os Algoritmos Genéticos otimizam o valor da função objetivo operando sobre uma representação codificada dos genes dos indivíduos. Segundo Bastos (2004), um dos aspectos mais importantes do AG é a utilização de codificações dos parâmetros ao invés dos próprios parâmetros envolvidos, pois possibilita que o problema não seja dependente de um espaço amostral contínuo ou que a função objetivo seja diferenciável. Há diversas maneiras de codificar e representar um indivíduo, sendo a mais tradicional e utilizada pelos AG, a codificação por **vetores binários**. Este método permite que cada elemento de um vetor seja preenchido apenas com o número 0 ou 1, possibilitando 2^n maneiras de preencher um vetor de n dígitos.

Para a estruturação definida na utilização dos Algoritmos Genéticos, um cromossomo é uma estrutura de dados que representa uma possível solução no espaço amostral do problema, sendo submetido a um processo evolucionário que envolve avaliação por meio da função de aptidão (associação da função objetivo com as funções de restrição), seleção, elitismo, cruzamento (*crossover*) e mutação. Em um processo iterativo de evolução, a população deverá conter indivíduos cada vez mais aptos, até atingir uma solução satisfatória, de acordo com parâmetros pré-estabelecidos (critério de parada). A Figura 2.8 apresenta a sequência operacional dos Algoritmos Genéticos.

Figura 2.8 – Fluxograma da sequência operacional dos Algoritmos Genéticos.



Fonte: Adaptado de Cavalcanti (2019)

Considerando uma população inicial, os cromossomos são avaliados quanto à aptidão para sobreviver à próxima geração, ou seja, verifica-se a qualidade das soluções de acordo com a função objetivo. Posteriormente, os indivíduos passam por um procedimento de seleção, que separa aqueles que se mostraram mais aptos e que participarão dos processos de operações genéticas (elitismo, *crossover* e mutação), denominados por “pais”. As soluções de baixa aptidão são descartadas. Existem diversos procedimentos para a seleção dos melhores indivíduos, sendo os mais usuais a **Seleção por Roleta** (*roulette wheel selection*), e a **Seleção por Torneio** (*tournament selection*).

No método de **Seleção por Roleta**, cada indivíduo da população recebe uma parcela na roleta proporcional a sua aptidão, isto é, indivíduos com alta aptidão recebem uma parcela maior da roleta em relação aos indivíduos menos aptos. Por fim, gira-se a roleta um determinado número de vezes e são escolhidos os indivíduos sorteados (BASTOS, 2004).

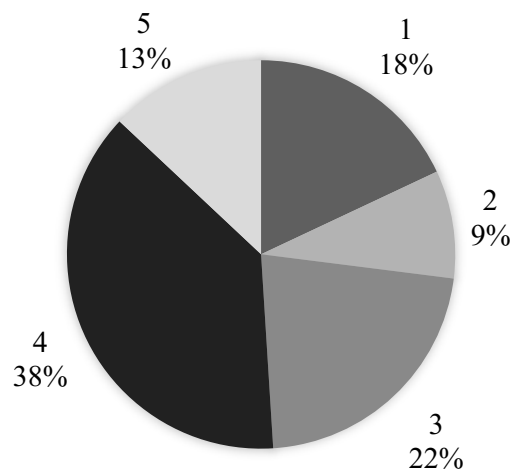
Em outras palavras, a probabilidade de um indivíduo ser selecionado (fração da roleta) é calculada pela razão entre a aptidão do indivíduo e o somatório de todas as aptidões da população. Para ilustrar de forma didática, o procedimento da roleta é apresentado na Tabela 2.1 e Figura 2.9 para uma população de 5 indivíduos. Nota-se que a faixa favorável tem extensão correspondente à probabilidade de seleção do indivíduo e que qualquer número aleatório sorteado entre 0 e 1 é correspondente a um indivíduo.

Tabela 2.1 – Método de Seleção por Roleta de indivíduos.

Indivíduo	Aptidão	Probabilidade de seleção	Faixa favorável
1	7.20	18.00%	0 - 0.18
2	3.60	9.00%	0.18 - 0.27
3	8.80	22.00%	0.27 - 0.49
4	15.20	38.00%	0.49 - 0.87
5	5.20	13.00%	0.87 - 1.00
Σ	40.00	100.00%	

Fonte: Autoria própria

Figura 2.9 – Roleta de Indivíduos com suas respectivas parcelas.



Fonte: Autoria própria

Bastos (2004) ressalta que o método de **Seleção por Roleta** possui algumas falhas, como proporcionar a escolha excessiva de um mesmo cromossomo cuja aptidão seja elevada. Tal fato diminui a variabilidade da população, o que pode ocasionar problemas de convergência prematura.

No caso do procedimento de **Seleção por Torneio** são selecionados dois ou mais indivíduos de forma aleatória e comparam-se suas aptidões. O mais apto vence e é escolhido para ser um dos pais da nova população. Ao contrário do método de Seleção por Roleta, não é necessário calcular a probabilidade de seleção ou uma faixa favorável, sendo, por este motivo, considerado um procedimento mais rápido e simples de ser implementado.

Após o processo de seleção dos indivíduos mais aptos, são aplicados **operados genéticos** que darão origem a uma nova população (filhos). Michalewicz e Hartley (1996) afirmam que o intuito dos operadores genéticos é proporcionar o intercâmbio de informações entre diversas soluções possíveis, introduzindo assim uma variabilidade extra na população. Portanto, os operadores genéticos são necessários para garantir a diversidade do espaço amostral e que sejam mantidas

as características de aptidão adquiridas pelas gerações anteriores (POZO A ; CAVALHEIRO, 2005). Os operadores genéticos mais utilizados são o elitismo, o *crossover* e a mutação, que estão descritos de forma detalhada a seguir:

Elitismo

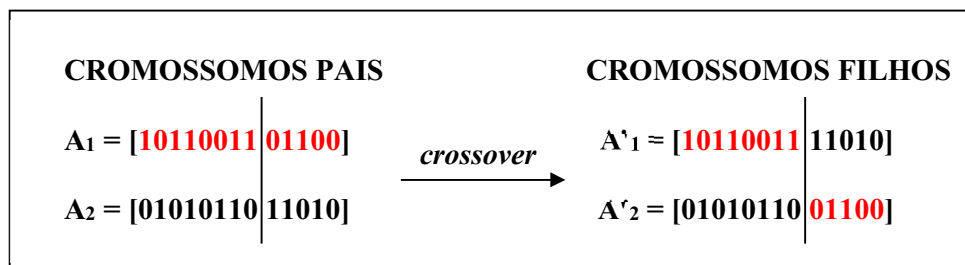
Sendo o mais simples de ser aplicado, consiste basicamente em replicar um indivíduo de boa aptidão para a nova população, semelhante a uma clonagem. Este processo permite que as características das melhores soluções perpetuem nas próximas gerações.

Cruzamento(*crossover*)

É o processo de combinar ou misturar trechos de genes presentes em dois cromossomos pais, gerando dois novos cromossomos filhos. Assim como o elitismo, o *crossover* garante que os filhos herdem as características das gerações anteriores. Existem diferentes maneira de empregar o *crossover*, sendo os métodos de corte em um ponto (*one-cut-point*) e o corte em dois pontos (*two-cut-point*) os mais empregados (ARORA, 2012).

No método de corte em um ponto, seleciona-se uma posição aleatória da sequência genética dos dois cromossomos, que marca a posição na qual os cromossomos pais se dividem. Posteriormente, são trocados os trechos tirados de cada pai, formando a sequência genética dos filhos, como ilustrado na Figura 2.10.

Figura 2.10 – Aplicação do *crossover* pelo método de corte em um ponto.



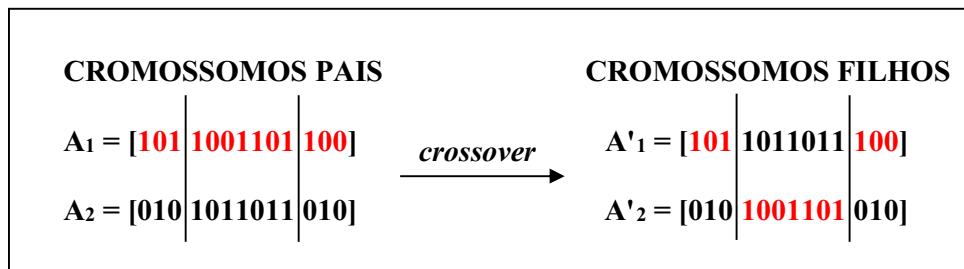
Fonte: Autoria própria

O método de corte em dois pontos opera de forma semelhante, porém são escolhidos dois pontos aleatórios em que serão retiradas as sequências genéticas dos cromossomos pais. O método está exemplificado na Figura 2.11.

Conforme Arora (2012), a seleção de quantos ou qual porcentagem de cromossomos que passaram pelo *crossover*, e em quais pontos essa operação ocorre, faz parte da natureza heurística dos Algoritmos Genéticos. Existem inúmeras abordagens diferentes, sendo a maioria delas baseadas em seleções aleatórias.

Mutação

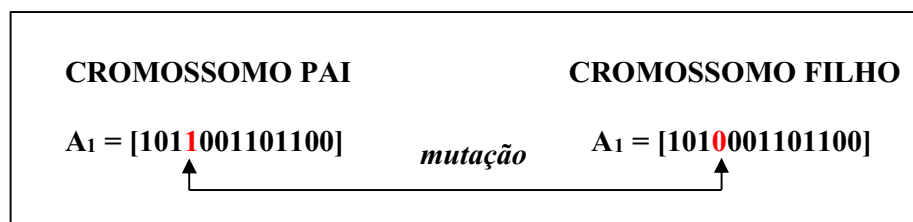
O processo de mutação de um cromossomo se baseia na modificação aleatória de alelos. Por exemplo, caso seja escolhido um alelo igual a 0, ele passa a valer 1, e vice-versa. Tanto o número de alelos selecionados, quanto suas posições, obedecem uma probabilidade de mutação

Figura 2.11 – Aplicação do *crossover* pelo método de corte em dois pontos.

Fonte: Autoria própria

estabelecida pelo programador. Segundo Saramago (2003), recomenda-se que a probabilidade de mutação dos cromossomos seja entre 0,1% e 1%. A mutação é fundamental para garantir uma boa diversidade genética dos cromossomos, proporcionando assim a busca em diferentes regiões do espaço amostral, contornando problemas de ótimos locais (CAVALCANTI, 2019). A Figura 2.12 apresenta um cromossomo que passa pelo operador de mutação em um de seus alelos.

Figura 2.12 – Aplicação do operador de mutação.



Fonte: Autoria própria

Apesar dos operadores genéticos proporcionarem muitas vantagens quando utilizados nos algoritmos, como citado anteriormente, a configuração destes mecanismos afetam diretamente o desempenho do AG, como é o caso dos seguintes operadores:

- **Tamanho da População (N):** Representa o número de indivíduos (cromossomos) pertencentes ao espaço amostral. Quanto maior o número de cromossomos, mais diversificadas serão as soluções possíveis e maior o número de avaliações feitas pela função de aptidão, o que exige um alto custo computacional. Desta forma, o tamanho da população está relacionado ao desempenho global e eficiência computacional dos AG. Pesquisadores indicam que uma população ideal para os AG deve possuir entre 10 e 100 indivíduos (CAVALCANTI, 2019);
- **Probabilidade de Cruzamento (Pc):** Parâmetro que indica a probabilidade de serem incluídos novos indivíduos na população à partir do operador de cruzamento (*crossover*). Pode-se afirmar que ao ser adotado um valor muito alto, soluções com alto potencial de se tornarem ótimos podem ser perdidas durante o processo de busca, sendo algo extremamente desvantajoso para os AG. Em geral, recomenda-se que a Pc varie entre 0,5 e 0,95.

- **Probabilidade de Mutação (Pm):** Este parâmetro deve ser atentamente definido, pois quando adotado um valor baixo é comum que o algoritmo fique preso em mínimos locais. Entretanto, para altos valores de Pm, a propagação da herança genética dos indivíduos mais aptos não será feita de forma ideal, fazendo com que seja perdida a eficiência de busca, ou seja, o algoritmo passa a ter um método de busca aleatório. Como já mencionado, recomenda-se que a Pm varie entre 0,1% e 1%. Jong (1990) sugere que seja adotado um valor inversamente proporcional ao tamanho da população.

Pode-se dizer que processo iterativo dos Algoritmos Genéticos termina ao encontrar uma solução ótima para o problema proposto e atendendo critérios de parada pré-definidos pelo usuário, sendo os mais utilizados (BASTOS, 2004):

- O algoritmo atinge um determinado número de gerações (iterações);
- Sendo conhecido o ótimo global, o algoritmo é finalizado ao encontrá-lo;
- Houver convergência, isto é, caso não haja melhora do indivíduo de maior aptidão após um determinado número de gerações. Na representação binária, pode-se dizer que a convergência foi atingida quando ao menos 90% dos indivíduos da população apresentam a mesma aptidão.

2.3.2.2 Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

Inicialmente proposto por Metropolis et al. (1953), o método *Simulated Annealing* é um método de busca local simples que faz analogia à termodinâmica, simulando o processo de resfriamento de um conjunto de átomos aquecidos, dando origem ao nome do método. Posteriormente, Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983) estenderam o método tradicional para problemas de otimização combinatorial.

Segundo Ferreira (2008), no campo da termodinâmica o recozimento tem a finalidade de reduzir ao máximo a energia de um material, de modo que seus cristais se tornem o mais organizado possível. Durante o processo (muito empregado em vidros e metais), diminui-se a temperatura de um material, inicialmente aquecido, de forma gradual e lenta, possibilitando que as moléculas se estabilizem em estado de mínima energia, em um único cristal, e consequentemente aumentado sua capacidade de absorver energia (tenacidade). Assim como os Algoritmos Genéticos, o *Simulated Annealing* permite a formulação de variáveis de projeto por meio de vetores binários (GOMIDE, 2009).

De acordo com Simonetti (2009), o *Simulated Annealing* é um método de otimização confiável para determinar o ótimo global, mesmo para problemas com um grande número de variáveis. Ferreira (2008) afirma que o método ganhou destaque por evitar mínimos locais, buscando o ótimo global iterativamente.

Em termos de otimização, a principal vantagem deste método está relacionada à sua formulação, que por meio de um tratamento estatístico de controle das variáveis, aceita como

ótimo combinações de variáveis com propriedades inferiores a outras já encontradas. Esta propriedade se deve a Lei de Boltzmann, que determina a probabilidade de uma molécula ter uma energia superior à que deveria ter em função da temperatura que se encontra. Esta probabilidade é calculada sempre que o arranjo molecular possuir energia inferior à configuração do arranjo molecular anteriormente tido como ótimo (FERREIRA, 2008). Isso possibilita que o método investigue regiões menos atraentes de ótimos, assim escapando de mínimos locais. Yamamoto (2004) descreve a relação da terminologia entre os processos físicos do *Simulated Annealing* e o algoritmo de otimização, sendo apresentado no Quadro 2.3.

Quadro 2.3 – Relação entre o processo físico e o processo de otimização.

Física	<i>Simulated Annealing</i>
Estado	Solução atual do processo, ponto no espaço
Energia	Função de custo ou Função objetivo
Estado de transição	Soluções vizinhas
Temperatura	Parâmetros de controle (restrições)
Ponto de congelamento	Solução final do método

Fonte: Adaptado de Yamamoto (2004)

Como já mencionado, o grande diferencial do *Simulated Annealing* se deve à utilização da Lei de Boltzmann Eq.(2.34). O critério de Metropolis et al. (1953) se baseia neste fenômeno ao comparar números aleatórios entre 0 e 1 e em calcular a probabilidade do arranjo da molécula trocar de nível de energia na temperatura atual do algoritmo, conforme a expressão a seguir:

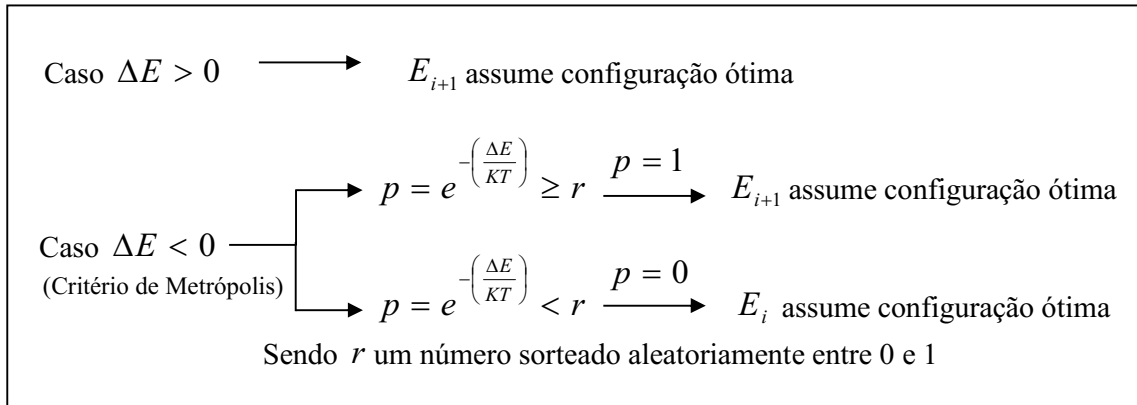
$$Prob(E_{i+1} > E_i) = e^{-\left(\frac{\Delta E}{KT}\right)} \quad (2.34)$$

em que K é a constante de Boltzmann ($1,381 \times 10^{-23}$ J/K), $\Delta E = E_i - E_{i+1}$ é a diferença de energia (em Joules) das moléculas nas configurações anterior (E_i) e posterior (E_{i+1}) na temperatura T (em Kelvin) do sistema. A constante K tem apenas a função de garantir a proporcionalidade entre a temperatura e a energia, podendo ser retirada caso as variáveis já estejam naturalmente proporcionais.

Ferreira (2008) afirma que o critério de Metropolis et al. (1953) pressupõe a existência de dois níveis energéticos, anterior (E_i) e posterior (E_{i+1}), sendo o último obtido através de pequenas perturbações aplicadas à molécula em uma situação anterior. Caso a energia posterior seja menor, não é necessário a aplicação do critério, e esta configuração de energia passa a ser aceita como a menor, caso contrário, emprega-se o critério. Quando a probabilidade (calculada através da Eq. (2.34)) for maior ou igual a um número aleatório entre 0 e 1, a configuração da molécula é considerada como provável de acontecer, independente da energia posterior ser maior que a da configuração anterior. Quando a probabilidade for menor que o número sorteado, a configuração é considerada improvável de ocorrer e a configuração anterior permanece como a

de menor energia. A lógica proposta pelo critério de Metropolis et al. (1953) pode ser melhor visualizada no Quadro 2.4.

Quadro 2.4 – Funcionamento do critério de Metropolis et al. (1953)



Fonte: Autoria própria

Analisando a Equação (2.34) e o Quadro 2.3, pode se comprovar o fato do critério aceitar mais pontos em temperaturas mais altas, possibilitando que o método verifique possíveis configurações ótimas em todo o espaço. Do modo como ocorre o resfriamento da molécula (diminuição da temperatura), a probabilidade dela ter uma energia superior em relação ao estado anterior também diminui, sendo menos provável a aceitação de pontos piores que os já selecionados como ótimo, garantindo a convergência do método.

A eficiência do *Simulated Annealing* depende da definição e observação de diversos parâmetros existentes no método, conforme apresentado por Ferreira (2008):

- **Temperatura inicial (T_0):** Recomenda-se adotar um valor alto suficiente para que a maioria dos pontos analisados sejam aceitos e, desta forma, seja feita uma busca por todas regiões possíveis no campo amostral. Uma temperatura inicial pode ser eficiente para alcançar o ponto ótimo, porém pode ser desvantajosa por exigir um alto custo computacional. Em contrapartida, quando adotado um valor demasiado pequeno, o algoritmo se limita a realizar a busca em poucas regiões, que apesar de resultar num baixo custo computacional, podem comprometer a qualidade dos resultados;
- **Temperatura final (T_{final}):** Teoricamente, a temperatura final deveria ser igual a zero, entretanto na prática a parada ocorre quando a probabilidade de ocorrer aumentos na função de custo for aproximadamente zero;
- **Perturbação das variáveis:** É um valor incrementado às variáveis de projeto para que sejam realizadas as buscas nos passos posteriores, podendo ser um valor constante ou variável. Quando adotado um valor variável, o passo varia de acordo com o número de aceitações desfavoráveis do método. Se este número for maior que uma constante, o passo tende a aumentar de modo que o sistema faça a busca pelo ótimo em regiões diferentes das atuais, aumentando a possibilidade de encontrar um ponto com características melhores, escapando de ótimos locais;

- **Número máximo de iterações:** Depende dos parâmetros anteriormente apresentados e pode variar de acordo com a análise do problema de otimização. Tem a função de limitar ou reduzir o tempo de processamento, mas vale ressaltar que isso influencia a qualidade da solução ótima.

O processo iterativo de um método de busca por valores ótimos, como é o caso do *Simulated Annealing*, geralmente é finalizado ao atingir um critério de parada. Segundo Suman e Kumar (2006), os principais critérios utilizados são:

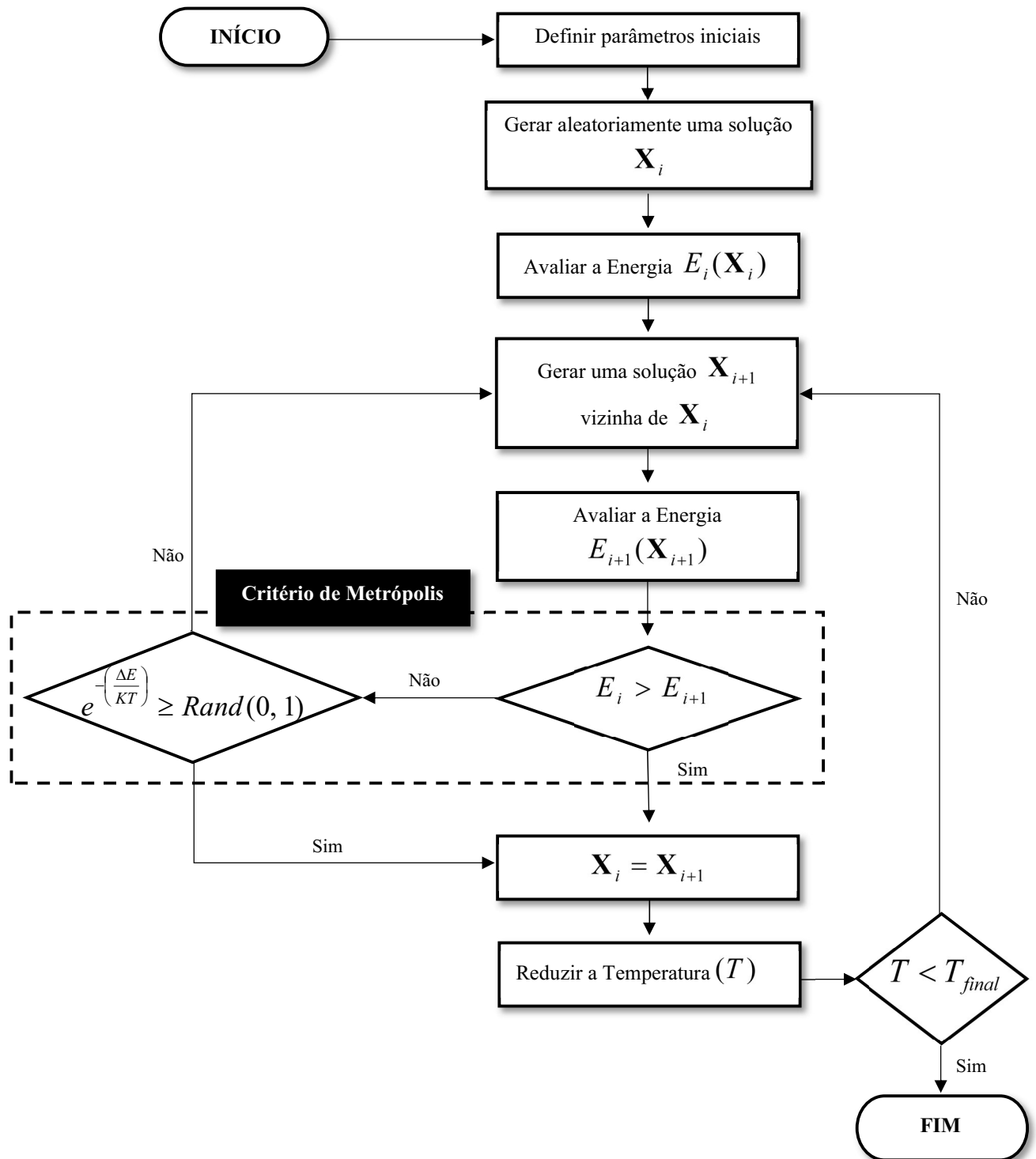
- Atingir o número máximo de iterações;
- Quando a temperatura final pré-definida for maior que o valor da temperatura atual do sistema;
- Analisar se o valor atingido é satisfatório, próximo ao desejado como ótimo;
- O sistema alcançar uma temperatura igual a zero, isto é, assumir que a temperatura atingiu o ponto de congelamento.

Bustamante (2002) apresenta outro critério de parada complementar à lista anterior. Para o autor, o algoritmo pode finalizar seu processo se não for constatada nenhuma melhoria da solução, após um determinado número de iterações.

Para Gomide (2009), apesar de ser um método flexível e eficiente em diversos problemas de otimização, garantindo muitas vezes a convergência para um ótimo global, o *Simulated Annealing* possui algumas **desvantagens**, sendo as principais: a convergência pode ser lenta caso a função de custo seja difícil de ser calculada; em problemas cujo espaço amostral apresente poucos pontos de ótimo local, a solução encontrada pode deixar a desejar; não há garantias de que a solução encontrada seja exata, já que se trata de um método de otimização por aproximação; pode ser custoso computacionalmente para problemas que envolvam muitas variáveis, uma vez que será necessário realizar buscas em diversas regiões viáveis.

O funcionamento completo do método *Simulated Annealing* está esquematizado na Figura 2.13.

Figura 2.13 – Fluxograma do funcionamento do método de otimização *Simulated Annealing*



Fonte: Adaptado de Buckham e Lambert (1999)

2.3.2.3 Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization* - PSO)

O método *Particle Swarm Optimization* (PSO) foi desenvolvido por Kennedy e Eberhart (1995) para tratar de problemas de domínio discreto, sendo baseado no comportamento e dinâmica do movimento de populações de pássaros, peixes, insetos, e até mesmo o comportamento social humano (SERAPIÃO, 2009).

De acordo com Serapião (2009), o PSO segue uma teoria sócio-cognitiva muito simples. Cada indivíduo de uma população possui sua própria experiência e é capaz de estimá-la. Além disso, os indivíduos são sociáveis, de forma que possuem conhecimentos sobre o comportamento de seus vizinhos. Esses dois tipos de informações equivalem à aprendizagem individual (cognitiva) e à transmissão cultural (social), respectivamente. Portanto, a probabilidade de uma decisão tomada por um indivíduo depende tanto do seu desempenho no passado, quanto do desempenho de alguns de seus vizinhos. Eberhart, Shi e Kennedy (2001) destacam três princípios que regem a adaptação cultural:

- **Avaliar:** Cada indivíduo é capaz de sentir o ambiente e assim estimar seu próprio comportamento;
- **Comparar:** Os indivíduos se comparam entre si para obter referências de comportamento;
- **Imitar:** Sendo central em organizações sociais e importante para a aquisição e manutenção de habilidades mentais.

O PSO se baseia em uma população capaz de interagir entre si e com o meio ambiente. Utilizando as propriedades de autoavaliação, comparação e imitação, os indivíduos são capazes de se comportar de acordo com diversas situações possíveis que o ambiente lhes proporciona (SERAPIÃO, 2009).

Segundo Arora (2012), o PSO se assemelha a técnicas de otimização evolutivas, como os Algoritmos Genéticos, por iniciar com uma população de soluções aleatórias e buscar uma solução ótima melhorando as gerações. Entretanto, o PSO não possui operadores de evolução, como *crossover* e mutação. Neste método, as soluções potenciais, chamadas de partículas, voam pelo espaço amostral do problema seguindo as melhores partículas (de melhores valores até o momento).

O *Particle Swarm* se baseia nas informações de trajetória dos indivíduos (partículas) e dos pontos presentes no espaço de busca por eles visitados para informar a qualidade da solução encontrada (avaliada pela função objetivo). Para isso, utiliza-se um banco de dados (memória) para preservar os melhores locais visitados.

A indicação da direção do movimento de cada partícula a cada iteração depende de duas informações: a melhor posição de todo o enxame (população) e a melhor posição da própria partícula. Portanto, introduzindo essas regras estocásticas no método, pressupõe-se o caráter aleatório do PSO (MEDEIROS; KRIPKA, 2012).

Para descrever o comportamento social de enxames em um algoritmo de otimização por meio do PSO, Arora (2012) utiliza a notação apresentada no Quadro 2.5.

Quadro 2.5 – Notação e terminologia do algoritmo PSO

Notação	Termologia
c_1	Parâmetro cognitivo; valor adotado entre 0 e 4 (usualmente adotado 2)
c_2	Parâmetro social; valor adotado entre 0 e 4 (usualmente adotado 2)
r_1, r_2	Constantes de aleatoriedade (adotando valores entre 0 e 1)
k	Iteração atual
k_{\max}	Limite do número de iterações
n	Número de variáveis de projeto
N_p	Número de partículas do enxame (pontos no espaço amostral)
x_j	Variável de projeto na posição j do vetor de variáveis \mathbf{X}
$\mathbf{v}_i^{(k)}$	Velocidade da partícula i (espaço amostral) na iteração k
$\mathbf{X}_i^{(k)}$	Posição da partícula i na iteração k
$\mathbf{X}_{p_i}^{(k)}$	Melhor posição da partícula i (baseado na experiência) na iteração k
$\mathbf{X}_G^{(k)}$	Melhor solução do enxame (baseado no líder do enxame) na iteração k
\mathbf{X}_L	Vetor contendo o limite inferior das variáveis de projeto
\mathbf{X}_U	Vetor contendo o limite superior das variáveis de projeto

Fonte: Adaptado de Arora (2012)

Durante as etapas do algoritmo, cada partícula do enxame controla e armazena sua própria posição atual ($\mathbf{X}_i^{(k)}$) e sua melhor posição já alcançada ($\mathbf{X}_{p_i}^{(k)}$). Além disso, é armazenada a cada iteração o melhor valor alcançado dentre todas as partículas do enxame ($\mathbf{X}_G^{(k)}$), chamado de líder do enxame. O PSO consiste em alterar, a cada iteração, a velocidade de cada partícula em direção à sua melhor posição, bem como a melhor posição do enxame (também chamada de aceleração da partícula em direção à melhor posição conhecida).

De forma bem definida, Arora (2012) apresenta o algoritmo PSO com os seguintes passos:

1. **Inicialização:** Defina os valores de N_p , c_1 , c_2 , e k_{\max} . Defina a velocidade inicial da partícula, $\mathbf{v}_i^{(0)}$, sendo igual a zero. Inicie o contador iterativo com $k = 1$.
2. **Geração Inicial:** Utilizando um processo aleatório, gere N_p partículas $\mathbf{X}_i^{(0)}$. Avalie a função objetivo em cada ponto gerado, $f(\mathbf{v}_i^{(0)})$. Determine a melhor solução dentre todas as partículas, $\mathbf{X}_G^{(0)}$.

3. **Cálculo das velocidades:** Calcule a velocidade de cada ponto por meio da Equação (2.35).

$$\mathbf{v}_i^{(k+1)} = \mathbf{v}_i^{(k)} + c_1 r_1 (\mathbf{X}_{P_i}^{(k)} - \mathbf{X}_i^{(k)}) + c_2 r_2 (\mathbf{X}_G^{(k)} - \mathbf{X}_i^{(k)}); \quad i = 1, 2, \dots, N_P \quad (2.35)$$

4. **Cálculo das posições:** Atualize a posição das partículas com a seguinte expressão:

$$\mathbf{X}_i^{(k+1)} = \mathbf{X}_i^{(k)} + \mathbf{v}_i^{(k+1)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_P \quad (2.36)$$

5. **Verificação:** Verifique e imponha os limites nas posições das partículas:

$$\mathbf{X}_L \leq \mathbf{X}_i^{(k+1)} \leq \mathbf{X}_U \quad (2.37)$$

6. **Atualização da melhor solução:** Calcule o valor da função objetivo para os novos pontos, $f(\mathbf{X}_i^{(k+1)})$. Para cada partícula, execute a seguinte checagem:

$$\text{Se } f(\mathbf{X}_i^{(k+1)}) \leq f(\mathbf{X}_{P_i}^{(k)}), \text{ tem-se } \mathbf{X}_{P_i}^{(k+1)} = \mathbf{X}_i^{(k+1)} \quad (2.38)$$

$$\text{caso contrario } \mathbf{X}_{P_i}^{(k+1)} = \mathbf{X}_{P_i}^{(k)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_P$$

$$\text{Se } f(\mathbf{X}_{P_i}^{(k+1)}) \leq f(\mathbf{X}_G), \text{ tem-se } \mathbf{X}_G = \mathbf{X}_{P_i}^{(k+1)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_P \quad (2.39)$$

7. **Critério de parada:** Verifique a convergência do processo iterativo. Se algum critério de parada for atingido ($k = k_{\max}$, ou se todas as partículas convergirem para a melhor solução do enxame), pare o algoritmo. Caso contrário, adote $k = k + 1$ e retorne ao Passo 2.

Com o propósito de aplicar o *PSO* a problemas de otimização com variáveis discretas, Kennedy e Eberhart (1997) propuseram uma versão binária do método. Entretanto, esta adaptação pode ser computacionalmente custosa, além de não ser obrigatória para solucionar problemas discretos. Segundo Lacerda (2007), uma das principais desvantagens do algoritmo é ser lento no ajuste fino de soluções (como nos Algoritmos Genéticos), apesar de ser rápido para localizar a bacia de atração das boas soluções.

2.3.3 Principais Trabalhos Publicados na Área

Na presente seção são apresentados os principais trabalhos publicados por pesquisadores a respeito da aplicação de métodos de otimização em estruturas treliçadas, destacando seus resultados e conclusões.

Segundo Guilherme (2006), o primeiro trabalho documentado pela comunidade científica que abordava a otimização estrutural é de Maxwell, em 1869, que buscava encontrar um projeto de treliças de peso mínimo. Posteriormente, em 1904, Michell desenvolveu uma teoria para obter

a ótima conectividade de uma treliça entre todos os nós possíveis, sendo considerado pioneiro e referência na teoria moderna de otimização topológica. Michell projetou treliças almejando minimizar seu peso, analisando as tensões nas barras de cada caso de carga.

O trabalho desenvolvido por Schmit (1960) envolvendo a otimização de treliças é considerado o início da era moderna de otimização estrutural, já que combina a análise estrutural por computadores e programação matemática. Com o desenvolvimento dos diferentes métodos de otimização já mencionados e com a facilidade de aplicação proporcionada pelos computadores, o estudo acerca da otimização estrutural se consolidou, trazendo inúmeros avanços para a Engenharia Civil em geral.

Wu e Chow (1995) realizaram pesquisas sobre otimização discreta de treliças planas e espaciais em aço. Os autores discutem sobre aspectos relacionados à utilização dos Algoritmos Genéticos, tais como baixa eficiência, pouca confiabilidade e a tendência a ficarem presos a mínimos locais. Diante disso, sugeriram uma modificação ao método, dando o nome de *Steady-State Genetic Algorithm* (SSGA), com uma baixa porcentagem de população a ser substituída a cada geração, trazendo um menor custo computacional. Além disso, os autores indicaram resultados em que os operadores de *crossover* pelos métodos de corte em dois, três e quatro pontos apresentaram melhores performances quanto ao método de corte em um ponto.

Rigo (1999) apresentou estudos comparativos entre métodos de otimização matemáticos (Método Gradiente, Método de Newton e Método Quase-Newton) aplicados à análise do comportamento não linear de estruturas reticuladas. O autor aplicou os métodos em exemplos de vigas, pórticos e treliças para validar seus resultados. Após comparar os resultados considerando fatores como tempo de processamento e eficácia dos algoritmos, concluiu que o método mais apropriado para as situações demonstradas foi o Método de Newton.

Christoforo et al. (2007) desenvolveram um software baseado no método dos elementos finitos e método dos mínimos quadrados para dimensionar a área ótima da seção transversal de treliças. O resultado ótimo é alcançado pelo software ao utilizar uma equação que os autores desenvolveram e que deixa como variável independente a área da seção. A partir deste ponto, a equação é minimizada pelo método de Newton. Concluíram que o software desenvolvido mostrou um bom critério de cálculo na escolha da área da seção transversal de estruturas treliçadas.

Perez e Behdinin (2007) otimizaram o peso de treliças clássicas (treliças de 10, 25 e 72 barras) utilizando o *Particle Swarm Optimization*. Os resultados obtidos foram comparados com publicações de outros autores que otimizaram os mesmo exemplos de treliças, mas que utilizaram métodos de otimização diferentes do PSO. Os autores concluíram que o PSO gera soluções ótimas similares ao método dos Algoritmos Genéticos.

Teles e Gomes (2010) fizeram um estudo comparativo entre dois métodos de otimização, um matemático e outro heurístico, sendo escolhidos algoritmos de Programação Quadrática Sequencial (PQS) e o método dos Algoritmos Genéticos, respectivamente. Para realizar a comparação, os autores utilizaram três modelos clássicos da literatura de treliças metálicas com resultados conhecidos e, por meio do *software* MatLab, modelaram cada problema com

as técnicas citadas. Os resultados obtidos mostraram que o método heurístico obteve melhor desempenho, por ser mais robusto e chegar mais próximo da solução ótima global. No entanto, os autores destacaram a necessidade de se analisar os dados de entrada dos Algoritmos Genéticos, para obtenção de melhores resultados.

Um amplo estudo acerca da aplicação de diferentes métodos heurísticos na otimização de estruturas foi realizado por Medeiros e Kripka (2012). Diversos trabalhos foram analisados pelos autores para comparar a eficiência e particularidades de cada método. Concluíram que os métodos mais consolidados são os Algoritmos Genéticos e o *Simulated Annealing*. Destacam que métodos mais recentes, como o *PSO*, têm se mostrado eficientes. Alertam ainda que a eficiência dos diferentes métodos heurísticos se deve principalmente à calibração dos parâmetros. Pelo mesmo fato, acredita-se que principalmente os algoritmos mais recentes podem ser ainda mais aperfeiçoados pelos pesquisadores. Por fim, os autores afirmam que, quando bem calibrado, o *Simulated Annealing* é considerado o método mais eficiente.

Recentemente, Cavalcanti (2019) apresentou um trabalho envolvendo a otimização de estruturas reticuladas em aço utilizando Algoritmos Genéticos. O autor utilizou exemplos que buscavam a minimização do peso de treliças clássicas (planas e espaciais) para validação do modelo desenvolvido. Foi feita uma análise do desempenho de diferentes tipos de perfis comerciais, na qual o perfil cantoneira se destacou com os melhores resultados. Cavalcanti (2019) concluiu que o programa de otimização desenvolvido é exequível, eficiente e de fácil utilização. Entretanto, destacou que devido à robustez do Algoritmo Genético utilizado, o programa pode ter um alto custo computacional para treliças com elevado número de barras.

O Quadro 2.6 apresenta de forma resumida os estudos anteriormente apresentados.

Quadro 2.6 – Resumo dos principais trabalhos de otimização de estruturas treliçadas

Autor(es)	Ano	Elementos estudados	Método de otimização	Conclusões
Wu e Chow	1995	Treliças espaciais em aço	Algoritmos Genéticos e <i>Steady-State Genetic Algorithm (SSGA)</i>	Modificações propostas puderam reduzir o custo computacional dos Algoritmos Genéticos
Rigo	1999	Estruturas reticulares (vigas, pórticos e treliças)	Método do Gradiente, Método de Newton e Método Quase-Newton	Comparando tempo de processamento e eficácia dos algoritmos, o Método de Newton foi o que gerou melhores resultados
Christoforo <i>et al</i>	2007	Treliças planas em aço	Método de Newton	O software desenvolvido se mostrou eficiente.
Perez e Behdinan	2007	Treliças planas em aço	<i>Particle Swarm Optimization</i>	Apresentou bons resultados, similares aos Algoritmos Genéticos
Teles e Gomes	2010	Treliças espaciais em aço e Mola helicoidal para cargas de tração e compressão	Algoritmos Genéticos e Programação Sequencial Quadrática	Devido a robustez, o Algoritmo Genético se mostrou mais eficiente
Medeiros e Kripka	2012	Eficiência de métodos heurísticos para otimização estrutural em geral	Colônia de Formigas, <i>PSO</i> , Busca Tabu, <i>Simulated Annealing</i> , Algoritmos Genéticos, entre outros	Algoritmos Genéticos e <i>Simulated Annealing</i> são os mais consolidados. Eficiência depende da calibração.
Cavalcanti	2019	Treliças planas e espaciais em aço	Algoritmos Genéticos	O software desenvolvido se mostrou eficiente e de fácil utilização. Pode ser lento a depender do tipo da treliça otimizada

Fonte: Autoria própria

3 Formulação Básica para Dimensionamento de Barras Tractionadas e Comprimidas

Para realizar um projeto de otimização estrutural seguro, é necessário definir as restrições que irão impor limitações ao comportamento da estrutura. Considera-se uma estrutura segura aquela que possui resistência suficiente quando submetida a solicitações, não sofrendo colapso ou deformações excessivas. Em geral, as limitações e diretrizes para o dimensionamento de uma estrutura são fornecidas por normas técnicas com base em modelos criados para esta finalidade. Dois dos modelos mais difundidos na comunidade científica são o Método das Tensões Admissíveis e o Método dos Estados Limites.

Método das Tensões Admissíveis

Pfeil e Pfeil (2009) afirmam que este método considera o dimensionamento satisfatório quando a máxima tensão solicitante (σ) em cada seção é inferior à tensão de resistência (f_k) minorada por um coeficiente de segurança (γ). Deste modo, a equação que deve ser satisfeita para garantir a segurança da estrutura é:

$$\sigma_{max} < \bar{\sigma} = \frac{f_k}{\gamma}. \quad (3.1)$$

O coeficiente de segurança γ está relacionado às diversas incertezas de projeto e abrange a utilização de modelos matemáticos para descrição do comportamento estrutural, da magnitude e distribuição de cargas, características geométricas e mecânicas dos materiais, modelagem estrutural e engloba até mesmo as imperfeições e os erros de execução.

O Método das Tensões Admissíveis, ou ASD (*Allowable Stress Design*), como é conhecido na língua inglesa, apresenta algumas limitações, destacando-se:

- Utilização de um único coeficiente de segurança para definir todas as incertezas relacionadas ao problema, seja qual for sua origem. A título de exemplo, a incerteza relacionada ao peso próprio da estrutura é inferior à incerteza associada a cargas de uso;
- Por se tratar de um modelo simplificado, ele prevê o comportamento da estrutura em regime elástico. Deste modo, não considera reservas de resistência dos materiais, nem a redistribuição dos esforços internos decorrente da plastificação de um ou mais elementos.

Método dos Estados Limites

Para garantir a integridade de uma estrutura, as solicitações atuantes devem ser inferiores à resistência durante toda sua vida útil. Segundo Ellingwood (2001), há duas maneiras de garantir a integridade estrutural: reduzindo a resistência real dos elementos estruturais e majorando as cargas atuantes. O Método dos Estados Limites admite em seu modelo matemático estas hipóteses, que são traduzidas pela seguinte equação (TESSARI, 2016):

$$\phi_R R_n \geq \sum \gamma_i Q_{ni}, \quad (3.2)$$

na qual R_n e Q_{ni} representam valores nominais (ou característicos) das resistências dos materiais e dos carregamentos aplicados; e ϕ_R e γ_i têm a função de minorar as resistências e majorar os carregamentos, respectivamente.

De acordo com Pfeil e Pfeil (2009), o Método dos Estados Limites, ou LRFD (*Load and Resistance Factor Design*), se trata de um método semiprobabilístico cujos valores dos coeficientes parciais de segurança (ϕ_R e γ_i) são obtidos através de análises de confiabilidade (SCHNEIDER, 2006), tal que a probabilidade de colapso é inferior a um valor suficientemente pequeno e seguro, que em geral varia entre 10^{-4} e 10^{-6} por ano de utilização e está relacionado ao tipo de colapso e suas consequências para a estrutura.

Além de ser um modelo que considera as incertezas de forma mais racional que o ASD, o LRFD também admite a existência de reservas de resistência após o início da plastificação. Este método proporciona diversos benefícios à concepção estrutural, como (TESSARI, 2016):

- Possibilita explorar melhor as propriedades de cada material da estrutura, tornando um projeto com diferentes materiais mais racional e econômico;
- Os coeficientes de majoração γ_i são definidos individualmente, a depender da natureza de cada carregamento, ao contrário de como é feito no Método das Tensões Admissíveis;
- A utilização de diferentes coeficientes de segurança para cada combinação de carregamento proporciona um projeto estrutural mais econômico e de mesmo nível de segurança comparado a um dimensionamento elaborado através do método ASD;
- Cargas e resistências são majoradas e minoradas, respectivamente, com coeficientes apropriados e independentes entre si, possibilitando a análise estatística de cada variável de projeto.

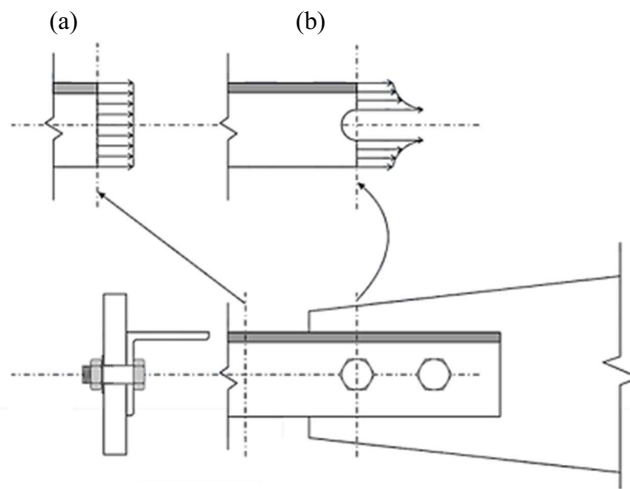
Tessari (2016) afirma que até a década de 1970 o método de dimensionamento estrutural mais utilizado era o ASD. Entretanto, com o surgimento do LRFD, a maior parte das normas estruturais passaram a utilizar equações de estado limite, devido aos seus benefícios. Assim como aplicado em diversos países, as normas brasileiras para projetos e execução de estruturas se baseiam no Método dos Estados Limites. A principal norma vigente para o dimensionamento de estruturas em aço é a *ABNT NBR 8800:2008 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*, que abrange inúmeros tipos de perfis. Perfis tubulares, que são muito utilizados em estruturas treliçadas, possuem uma norma específica, a *ABNT NBR 16239:2013 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios com perfis tubulares*.

No presente trabalho, são utilizadas as normas supracitadas para definir as equações básicas para dimensionamento de barras sujeitas à esforços axiais (tração e compressão), impostas como restrições de projeto nos modelos de otimização implementados.

3.1 Dimensionamento à Tração Simples

As equações para dimensionamento de peças metálicas sujeitas a esforços axiais de tração estão presentes no item 5.2 da ABNT NBR 8800:2008 e são provenientes, em sua maioria, da teoria clássica da Mecânica dos Sólidos. Essas equações são avaliadas de acordo com a região do elemento em análise, sendo diferenciada para os trechos afastados (Figura 3.1a) ou próximos (Figura 3.1b) da zona de ligação.

Figura 3.1 – Variação das tensões axiais de estruturas metálicas submetidas à tração.



Fonte: Adaptado de Argenta (2016)

Seguindo os critérios de segurança impostos pela ABNT NBR 8800:2008, a expressão de dimensionamento para barras tracionadas é dada por:

$$N_{t,Sd} \leq N_{t,Rd}, \quad (3.3)$$

em que,

$N_{t,Sd}$ é a força axial de tração solicitante de cálculo;

$N_{t,Rd}$ é a força axial de tração resistente de cálculo, determinada conforme os modelos adiante.

3.1.1 Força Axial Resistente de Cálculo

Como citado anteriormente, uma estrutura metálica submetida a tração, deve ser dimensionada de modo a atender duas condições, sendo elas:

- **Escoamento da seção bruta (ESB):** Ocorre a falha da peça em trechos de seção integral, e a força resistente nestes casos é dada por:

$$N_{t,Rd} = \frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}} \quad (3.4)$$

- **Ruptura da seção líquida efetiva (RSE):** Ocorre a falha da peça em seções próximas das regiões de ligação. A força resistente é expressa por:

$$N_{t,Rd} = \frac{A_e f_u}{\gamma_{a2}} \quad (3.5)$$

nas quais,

γ_{a1} é o coeficiente de minoração de escoamento do aço (Tabela 3, ABNT NBR 8800:2008);

γ_{a2} é o coeficiente de minoração de ruptura do aço (Tabela 3, ABNT NBR 8800:2008);

A_g é a área bruta da seção transversal da peça;

A_e é a área líquida efetiva da seção transversal da peça (determinada conforme o item 5.2.3 da ABNT NBR 8800:2008);

f_y é a resistência ao escoamento do aço; e

f_u é a resistência à ruptura do aço.

No presente trabalho, o dimensionamento e otimização das estruturas treliçadas se limitam a analisar o comportamento da seção bruta das barras, não abrangendo o efeito e dimensionamento de ligações. Portanto, não será analisada a ruptura da seção líquida efetiva das peças tracionadas.

3.2 Dimensionamento à Compressão Simples

As diretrizes para o dimensionamento de elementos estruturais em aço sujeitos a esforços axiais de compressão simples estão presentes no item 5.3 e nos Anexos E e F da ABNT NBR 8800:2008.

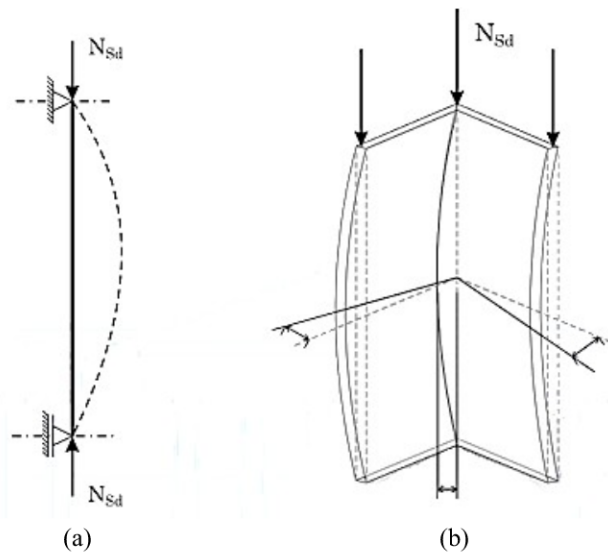
O colapso de barras comprimidas ocorre por diversas formas de instabilidade antes de atingir a tensão de escoamento do aço. Deste modo, a expressão que define o dimensionamento à compressão possui coeficientes que consideram a instabilidade, tendo a esbeltez da peça como fator determinante na resistência do elemento. A instabilidade de uma barra comprimida qualquer pode ocorrer na peça como um todo (instabilidade global) e parcialmente em um elemento constituinte de sua seção transversal (instabilidade local).

A instabilidade global da barra pode ocorrer de três modos distintos:

- **Instabilidade por flexão:** Este caso considera a perda da condição de equilíbrio de uma barra inicialmente retilínea, causando o deslocamento lateral de seu eixo.
- **Instabilidade por torção:** Neste caso, o eixo da barra se mantém retilíneo, entretanto ocorre a rotação relativa entre seções transversais adjacentes.
- **Instabilidade por flexo-torção:** Nada mais é que a ocorrência simultânea dos dois fenômenos.

A Figura 3.2 ilustra dois modos de instabilidade global de uma barra sujeita a esforços de compressão.

Figura 3.2 – Comportamento da instabilidade de uma barra sujeita a compressão. (a) Instabilidade por flexão. (b) Instabilidade por flexo-torção



Fonte: Adaptado de Argenta (2016)

Ao analisar a instabilidade localizada de uma barra, ou seja, a perda da condição de equilíbrio de parte de sua seção transversal, deve-se verificar as condições de ligação e esbeltez dos elementos constituintes da seção. A ABNT NBR 8800:2008 estabelece alguns conceitos frente a possibilidade de ruína por instabilidade local das seções transversais, que são:

- **Seções compactas:** São aquelas que possuem robustez suficiente para que a distribuição das tensões sejam totalmente plásticas, antes que se inicie o processo de flambagem local da seção.
- **Seções semi-compactas:** São aquelas que podem atingir o escoamento, sem que haja a plastificação completa, antes mesmo da ocorrência de flambagem localizada.
- **Seções esbeltas:** São aquelas em que ocorre a ruína da seção antes da plastificação de qualquer dos seus elementos constituintes.

A expressão que define o dimensionamento e condição de segurança de barras comprimidas é dada por

$$N_{c,Sd} \leq N_{c,Rd}, \quad (3.6)$$

sendo,

$N_{c,Sd}$ a força axial de compressão solicitante de cálculo;

$N_{c,Rd}$ a força axial de compressão resistente de cálculo, determinada conforme os modelos a seguir.

3.2.1 Força Axial Resistente de Cálculo

De acordo com a ABNT NBR 8800:2008, a expressão que define a força axial resistente de cálculo para barras comprimidas é a seguinte:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} \quad (3.7)$$

em que,

χ é o coeficiente de redução que considera o efeito de instabilidade global da peça;

Q é o coeficiente de redução que considera o efeito de instabilidade local da seção transversal da peça.

A_g é a área bruta da seção transversal da peça;

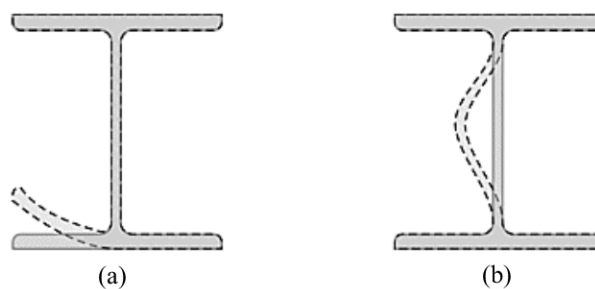
f_y é a resistência ao escoamento do aço; e

γ_{a1} é o coeficiente de minoração de escoamento do aço (Tabela 3, ABNT NBR 8800:2008);

3.2.2 Determinação do Coeficiente Redutor Q

Frente às diversas possibilidades de geometria para a seção transversal de um perfil de aço, a ABNT NBR 8800:2008 classifica os componentes das seções em **AL** e **AA**. Os componentes **AL** são aqueles que possuem uma extremidade "apoiada" (vinculada) ao restante da seção e a outra livre, enquanto os componentes **AA** possuem ambas extremidades "apoiadas". A Figura 3.3 representa a instabilidade local em um componente AL (a) e um componente AA (b).

Figura 3.3 – Instabilidade local de uma barra sujeita a compressão. (a) Instabilidade do componente AL. (b) Instabilidade do componente AA



Fonte: Adaptado de Argenta (2016)

A ABNT NBR 8800:2008 define a esbeltez dos elementos constituintes da seção transversal por meio da razão de seu comprimento (b) pela sua espessura (t), denominada "parâmetro de esbeltez", (b/t). O cálculo do coeficiente Q é apresentado em seu Anexo F e varia em função da geometria da seção transversal do elemento e da sua esbeltez. Inicialmente é calculado o parâmetro de esbeltez, de cada componente da seção, tal como a relação b/t limite que irá definir a ocorrência ou não de instabilidade local.

Verifica-se então a seguinte hipótese:

$$\text{Se } \frac{b}{t} \leq \left(\frac{b}{t}\right)_{lim} \rightarrow Q = 1,00. \quad (3.8)$$

Vale ressaltar que é necessário verificar a esbeltez dos elementos AL e AA da seção separadamente. Caso a relação b/t da seção ultrapasse o valor limite, o coeficiente Q é obtido pela expressão:

$$Q = Q_s Q_a \quad (3.9)$$

na qual,

Q_s é o valor do coeficiente de redução para os elementos AL, obtido seguindo as diretrizes do item F.2 da ABNT NBR 8800:2008, e ;

Q_a é o valor do coeficiente de redução para os elementos AA da seção, e deve ser obtido por meio das expressões presentes no item F.3 da ABNT NBR 8800:2008.

No caso de seções tubulares circulares, o fator de redução para instabilidade local da parede é determinado da seguinte maneira (ABNT, 2008):

$$Q = 1,00 \text{ para } \frac{D}{t} \leq 0,11 \frac{E}{f_y} \quad (3.10)$$

ou

$$Q = \frac{0,038 E}{D/t f_y} + \frac{2}{3} \text{ para } 0,11 \frac{E}{f_y} < \frac{D}{t} \leq 0,45 \frac{E}{f_y} \quad (3.11)$$

em que,

D é o diâmetro externo da seção tubular circular;

t é a espessura da parede; e

E é o módulo de elasticidade longitudinal do aço utilizado.

Não é recomendada a utilização de seções tubulares circulares com esbeltez superior a $0,45 \frac{E}{f_y}$.

3.2.3 Determinação do Coeficiente Redutor χ

As diretrizes para determinar o coeficiente redutor χ , que considera o efeito de instabilidade global de barras comprimidas, estão dispostas no item 5.3.3 da ABNT NBR 8800:2008, complementado pelo Anexo E da mesma norma. Uma vez que esse fator faz referência à esbeltez da barra como um todo, é necessário apresentar o conceito conforme estabelecido pela norma.

Seja uma barra comprimida, seu índice de esbeltez (λ) para cada um de seus eixos principais é definido por:

$$\lambda = \frac{KL}{r} \quad (3.12)$$

sendo,

K o coeficiente de flambagem relativo ao eixo considerado;

L o comprimento destravado no eixo considerado; e

r o raio de giração de seção transversal da barra relativo ao eixo considerado.

A norma limita a utilização de barras com índice de esbeltez superior a 200, independente da direção.

O coeficiente de flambagem K deve ser definido de acordo com a condição de vinculação da barra, conforme indicado na Tabela 3.1 (Tabela E.1 da ABNT NBR 8800:2008). Visto que os

nós de uma estrutura treliçada são considerados rotulados, o coeficiente de flambagem por flexão K das barras de uma treliça é igual a 1,0.

Tabela 3.1 – Coeficiente de flambagem por flexão de elementos isolados.

A linha tracejada indica a linha elástica de flambagem	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Valores teóricos de K_x ou K_y	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Valores recomendados	0.65	0.80	1.2	1.0	2.1	2.0
Código para condição de apoio		Rotação e translação impedidas				
		Rotação livre, translação impedida				
		Rotação impedida, translação livre				
		Rotação e translação livres				

Fonte: Adaptado de ABNT (2008)

Para determinar o coeficiente de redução χ propriamente dito, define-se inicialmente o índice de esbeltez reduzido com a seguinte expressão:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{QA_g f_y}{N_e}} \tag{3.13}$$

Em sequência, determina-se o valor de χ como:

$$\text{Seja } \lambda_0 \leq 1,5 \rightarrow \chi = 0,658\lambda_0^2 \tag{3.14}$$

$$\text{Seja } \lambda_0 > 1,5 \rightarrow \chi = \frac{0,877}{\lambda_0^2} \tag{3.15}$$

sendo o parâmetro N_e presente na Equação 3.13 representativo da força axial de flambagem, obtida de acordo com o Anexo E da ABNT NBR 8800:2008 para cada um dos eixos principais do elemento. Deve-se avaliar qual dos eixos da seção é crítico à flambagem e encontrar o índice de esbeltez reduzido equivalente. Genericamente, é possível expressar a equação que define o valor de N_e como sendo:

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}, \tag{3.16}$$

em que I é o momento de inércia no eixo em que está sendo analisada a flambagem da peça.

Para seções tubulares circulares, o fator de redução χ pode ser definido de acordo com a ABNT NBR 16239:2013:

$$\chi = \frac{1}{(1 + \lambda_0^{4,48})^{1/2,24}}. \tag{3.17}$$

O valor do índice de esbeltez reduzido para seções tubulares circulares também é definido pela Eq.(3.13).

3.2.4 Formulação simplificada para resistência à compressão

A força axial de flambagem elástica definida pela ABNT NBR 8800:2008 é baseada nos estudos de Leonhardt Euler (1707 -1783), que avaliou o equilíbrio de uma coluna comprimida, isenta de imperfeições geométricas e tensões residuais, com material de comportamento elástico linear e solicitada por uma carga perfeitamente centrada (PFEIL; PFEIL, 2009).

De acordo com PFEIL e PFEIL (2009), o estudo de Euler mostra que, nas condições impostas, a coluna mantém-se retilínea e sem deslocamentos laterais até a carga aplicada atingir uma determinada carga crítica, batizada "carga de Euler"(ou Tensão crítica de Euler, quando apresentada em termos de tensões), dada por:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (3.18)$$

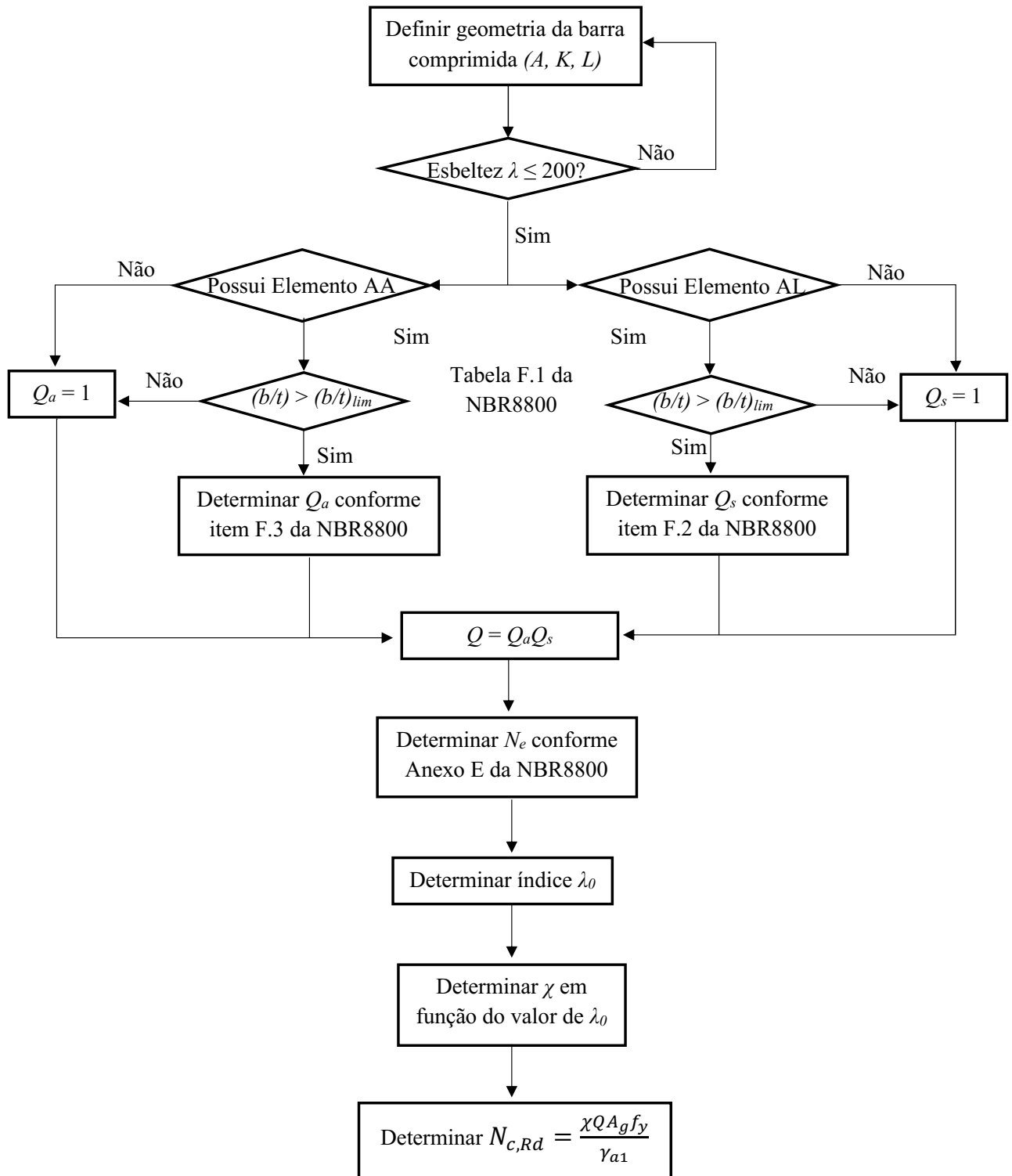
Durante muitas décadas, o dimensionamento de peças comprimidas se limitava a utilizar os estudos de Euler, não considerando fatores de redução de resistência, tal como preconiza a norma. Além disso, pela simplicidade de se trabalhar com apenas uma equação suficiente para definir a resistência de barras à compressão, grande parte dos estudos acerca de otimização de treliças metálicas utiliza a carga crítica de Euler, ou ainda a seguinte expressão:

$$N_{cr} = \frac{kEA^2}{L^2}, \quad (3.19)$$

sendo k uma constante que relaciona o momento de inércia (I) à área da seção transversal do elemento (A), dispensando o cálculo da primeira (CAVALCANTI, 2019).

Para exemplificar o processo de determinação da força resistente à compressão de acordo com a ABNT NBR 8800:2008, utiliza-se o fluxograma apresentado na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Fluxograma de determinação da resistência de cálculo axial à compressão ($N_{c,Rd}$).



Fonte: Autoria própria

4 Formulação de Elementos Finitos para Treliça Plana

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica que determina soluções aproximadas para problemas complexos envolvendo sistemas de equações diferenciais parciais. O método consiste em dividir o domínio completo do problema em partes menores e mais simples (chamadas elementos finitos) e utilizar métodos de variação para obter a solução do problema minimizando o erro associado a ele (ZIENKIEWICZ et al., 2000).

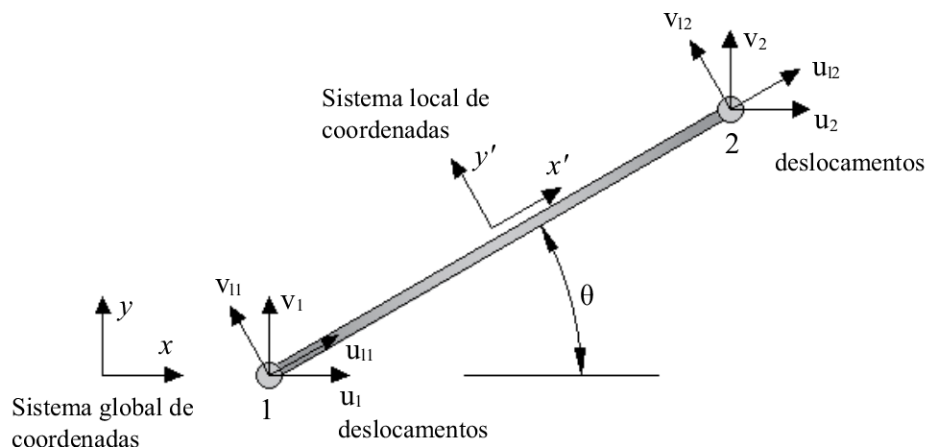
Segundo Zienkiewicz et al. (2000), a configuração inicial de um elemento finito de treliça pode ser descrita por coordenadas de referência dos nós, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Quando aplicados carregamentos, o elemento sofre deslocamentos e a barra passa a ter uma nova configuração, representada por novas coordenadas, (x'_1, y'_1) e (x'_2, y'_2) . Portanto, o comprimento inicial da barra, L_0 , e o comprimento deformado, L , podem ser calculados, respectivamente, por:

$$L_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (4.1)$$

$$L = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}. \quad (4.2)$$

O ângulo formado entre o elemento de barra na sua configuração inicial e o eixo horizontal do sistema global de coordenadas é chamado de θ , como ilustrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Elemento de treliça plana - coordenadas locais e globais.



Fonte: Adaptado de Silva Neto et al. (2007)

O seno e o cosseno desse ângulo θ podem ser obtidos pelas expressões, respectivamente:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y_2 - y_1}{L_0}, \quad (4.3)$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{x_2 - x_1}{L_0}. \quad (4.4)$$

O vetor de deslocamento nodais \mathbf{p} no sistema de coordenadas globais do elemento de treliça plana é

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{bmatrix}^T, \quad (4.5)$$

em que u_i e v_i , com $i=1,2$, são os deslocamentos horizontais e verticais dos nós do elemento, respectivamente. Relacionam-se os deslocamentos nodais em coordenadas globais e locais da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} u_{11} \\ v_{11} \\ u_{12} \\ v_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

na qual, u_{ij} e v_{ij} , com $i=1,2$, são os deslocamento horizontais e verticais no sistema de coordenadas locais do elemento de barra, respectivamente, e \mathbf{T} é a matriz de transformação definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

A matriz de rigidez elementar no sistema de coordenadas locais, \mathbf{k}_{el} , é determinada por:

$$\mathbf{k}_{el} = \frac{EA}{L_0} \mathbf{B}, \quad (4.8)$$

em que E é o módulo de elasticidade, A é a área bruta da seção transversal do elemento de barra e \mathbf{B} é a matriz obtida por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

A matriz de rigidez elementar no sistema de coordenadas globais, \mathbf{K}_{el} , é obtida por:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{T} \mathbf{k}_{el} \mathbf{T}^T. \quad (4.10)$$

O vetor de forças internas no sistema de coordenadas locais, \mathbf{f}_{el} , é determinado por:

$$\mathbf{f}_{el} = \frac{EA \epsilon_E}{L_0} \mathbf{r}, \quad (4.11)$$

sendo \mathbf{r} um vetor calculado pela expressão:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

e ε_E a deformação específica de engenharia dada por:

$$\varepsilon_E = \frac{u_{12} - u_{11}}{L_0}. \quad (4.13)$$

O vetor de forças internas no sistema global de coordenadas, \mathbf{F}_{el} , é obtido por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{T}\mathbf{f}_{el}. \quad (4.14)$$

Bathe (2006) define que o sistema de equações de equilíbrio gerado pelo Método dos Elementos Finitos que determina o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} é um sistema linear dado por:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext}, \quad (4.15)$$

em que \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas e \mathbf{K} é a matriz de rigidez global do sistema estrutural, calculada por:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_{el}^e, \quad (4.16)$$

na qual e é o elemento finito e n é o número total de elementos da treliça.

5 Resultados e Discussões

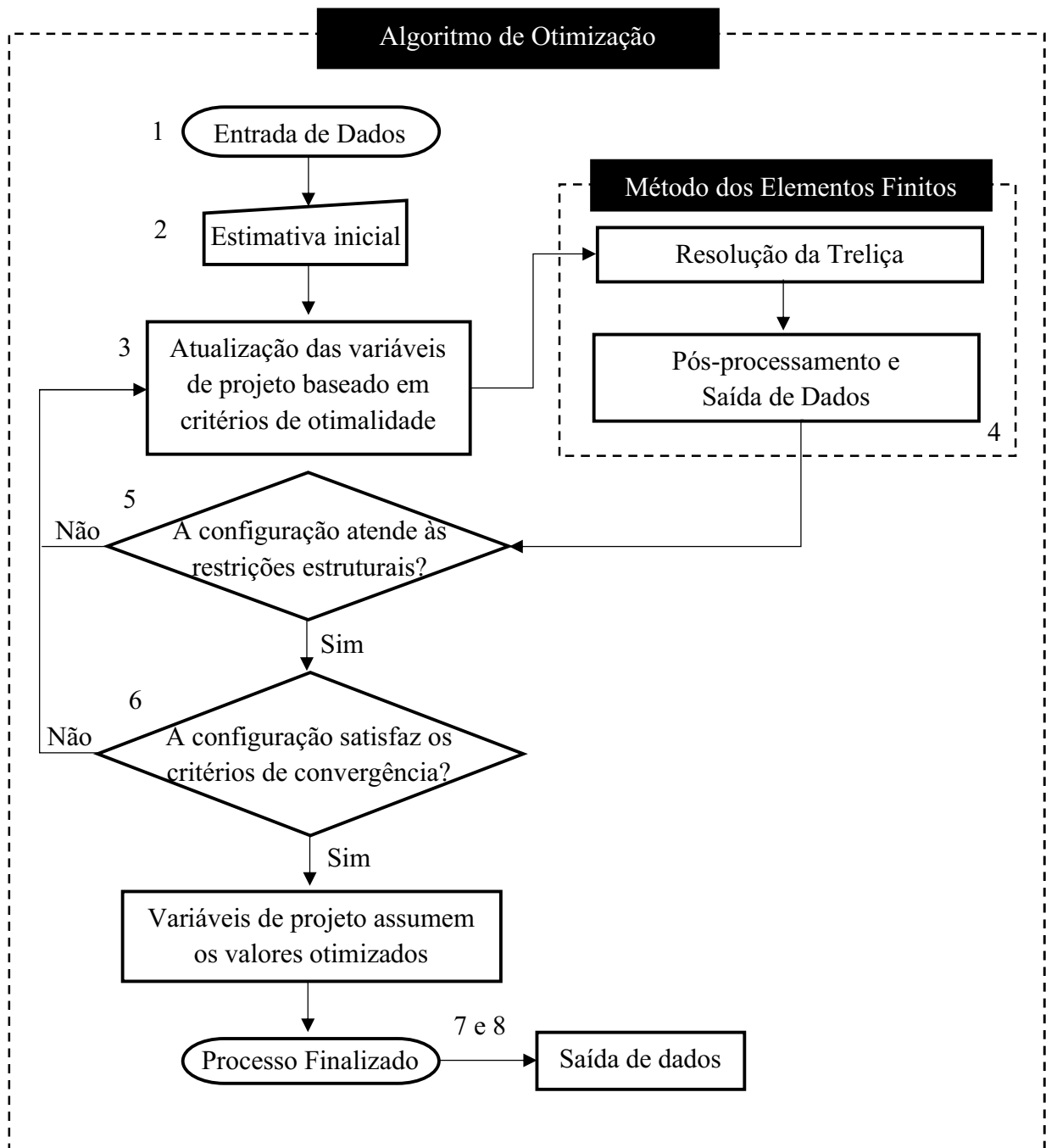
No presente trabalho, apresenta-se a implementação dos algoritmos computacionais proposto, capazes de auxiliar engenheiros estruturais a obter configurações satisfatórias, em termos do consumo de materiais de estruturas treliçadas em aço. O processo de otimização destes algoritmos se dá por meio de dois métodos: Algoritmo de Programação Quadrática Sequencial, que é um método de otimização matemático; e Algoritmo Genético, que é um método de otimização heurístico. Ambos os métodos terão a função de determinar (dimensionar) as áreas das seções transversais das barras das treliças analisadas sem violar as restrições de cargas (ou tensões) admissíveis, seja para o caso de tração seja para o caso de compressão. Para realizar a análise estrutural da treliça desejada, o algoritmo faz uso do Método dos Elementos Finitos.

Os algoritmos de otimização e o Método dos Elementos Finitos estão associados por meio de um processo iterativo que pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Introduzir dados de entrada gerais da estrutura treliçada, como posição dos nós, incidência das barras, magnitude e posição das forças aplicadas e módulo de elasticidade.
2. Fornecer uma estimativa inicial para as variáveis de projeto (área ou dimensões da seção transversal das barras).
3. Atualizar as variáveis de projeto com base nos critérios de otimalidade por meio dos algoritmos de otimização, seja pelo método matemático, seja pelo método heurístico.
4. Realizar análise linear estática estrutural via Método dos Elementos Finitos para obtenção dos esforços axiais e respectivas tensões normais nas barras.
5. Verificar restrições de projetos em termos de tensões ou cargas admissíveis.
 - a) Se as restrições são atendidas, prosseguir para o item 6.
 - b) Se as restrições não são atendidas, retornar ao item 3.
6. Verificar os critérios de convergência.
 - a) Se atendidos, o processo iterativo é finalizado, prosseguir para o item 7.
 - b) Se não atendidos, incrementar o contador de iterações e retornar ao item 3.
7. Imprimir dados de saída, como esforços axiais e tensões nas barras, deslocamentos nodais e reações nos apoios.
8. Imprimir gráficos de convergência.

O fluxograma ilustrado na Figura 5.1 mostra o processo iterativo envolvendo os algoritmos de otimização e de análise estrutural por meio do Método dos Elementos Finitos.

Figura 5.1 – Processo iterativo de otimização de treliças via MEF.



Fonte: Autoria própria

Os algoritmos utilizados possuem configurações padrões de funcionalidade no Matlab. Entretanto, o usuário tem a opção de ajustar esses parâmetros e refinar a otimização. As Tabelas 5.1 e 5.2 apresentam as configurações gerais do algoritmo de PQS e do Algoritmo Genético, respectivamente, que são utilizados em todos os estudos de casos realizados no presente trabalho.

Tabela 5.1 – Configurações Gerais - Programação Quadrática Sequencial.

Parâmetro	Valor/Tipo adotado
Número máximo de iterações	1500
Tolerância de erro da Função Objetivo	$1,0 \times 10^{-6}$
Tolerância de erro das Restrições	$1,0 \times 10^{-6}$

Fonte: Autoria própria

Tabela 5.2 – Configurações Gerais - Algoritmo Genético.

Parâmetro	Valor/Tipo adotado
Número máximo de iterações	100x nº de variáveis
Tolerância de erro da Função Objetivo	$1,0 \times 10^{-6}$
Tolerância de erro das Restrições	$1,0 \times 10^{-6}$
Tamanho da População	50
<i>Crossover type</i>	Corte por dois pontos

Fonte: Autoria própria

Vale ressaltar que outros parâmetros de otimização podem ser modificados tanto no Algoritmo Genético (como fator de mutação e reprodução, número máximo de iterações sem mudança da solução), quanto no algoritmo de PQS (como tipo da aproximação via diferenças finitas e tolerância do erro de cada variável de projeto). O algoritmo de PQS exige que o usuário forneça uma estimativa inicial para as variáveis de projeto, já para o Algoritmo Genético esse dado é facultativo. No presente trabalho é fornecida a estimativa em ambos algoritmos. O espaço amostral contínuo (população, no caso do Algoritmo Genético) é apresentado no algoritmo por meio de limites inferiores e superiores, sendo adotados o menor e maior valor discreto comercial presente no Anexo A.

Para fins de comparação, são analisadas três situações com restrições distintas nos estudos de caso:

- **Situação 1:** Força axial resistente de cálculo (tração) e carga crítica de Euler conforme a Equação 3.18 (compressão);
- **Situação 2:** Força axial resistente de cálculo (tração) e carga crítica de Euler conforme a Equação 3.19, adotando $k = 4$ (compressão), conforme Lee e Geem (2004);
- **Situação 3:** Força axial resistente de cálculo de tração e de compressão conforme premissas da ABNT NBR 8800:2008 e NBR 16239:2013.

As restrições de projeto seguindo as premissas da ABNT NBR 8800:2008 e pela carga crítica de Euler (no modelo da Equação 3.18) são não lineares, pois dependem de fatores da

geometria da seção transversal da barra, como o momento de inércia. Portanto, as variáveis de projeto interferem indiretamente no cálculo das restrições. Outro fato observado é a descontinuidade das soluções possíveis no espaço amostral, já que uma seção transversal circular tubular de mesma área pode ter diferentes valores de momento de inércia, modificando o valor do diâmetro e espessura. Isto possibilita a ocorrência de mínimos locais ou até mesmo de "falsos ótimos", que possuem valores de área compatíveis com a solução do problema, mas com esbelteza superior aos limites impostos.

Para contornar a não linearidade do problema e evitar que o algoritmo avalie soluções que violem as restrições de projeto de barras comprimidas, uma análise do espaço amostral é feita aplicando os dados da treliça otimizada. O processo é realizado da seguinte maneira: para cada barra comprimida calcula-se a carga crítica de Euler, na situação 1, e a força de compressão resistente de cálculo, na situação 3, considerando todos valores discretos disponíveis no catálogo comercial adotado. Caso este valor seja inferior ao esforço normal atuante na barra analisada, a área comercial correspondente é excluída do espaço amostral discreto.

A análise do espaço amostral é descrita pelos seguintes procedimentos:

1. Sejam N_i e A_i o esforço axial e o espaço amostral discreto, respectivamente, da variável de projeto x_i . A_{com} é o conjunto de áreas discretas disponíveis no catálogo comercial utilizado.
 - a) Se $N_i \geq 0$, $A_i = A_{com}$.
 - b) Se $N_i < 0$, prosseguir para o item 2.
2. Para $A_{com,j}$, na qual $j = 1, 2, \dots, n$ representa os elementos do espaço amostral, iniciar o seguinte processo:
 - a) Se adotada a situação 1, calcular a carga crítica de Euler (N_{cr}) para $A_{com,j}$.
 - i. Se $N_{cr} > N_i$, $A_{com,j}$ é incluído ao espaço amostral A_i . Prosseguir para o item 5.
 - ii. Se $N_{cr} \leq N_i$, $A_{com,j}$ é descartado do espaço amostral A_i . Prosseguir para o item 5.
 - b) Se adotada a situação 3, prosseguir para o item 3.
3. Calcular o índice de esbelteza (λ) correspondente ao elemento j .
 - a) Se $\lambda > 200$, $A_{com,j}$ é descartado do espaço amostral A_i . Prosseguir para o item 5.
 - b) Se $\lambda \leq 200$, prosseguir para o item 4.
4. Calcular a força de compressão resistente de cálculo ($N_{c,Rd}$) para $A_{com,j}$.
 - a) Se $N_{c,Rd} > N_i$, $A_{com,j}$ é incluído ao espaço amostral A_i . Prosseguir para o item 5.
 - b) Se $N_{c,Rd} \leq N_i$, $A_{com,j}$ é descartado do espaço amostral A_i . Prosseguir para o item 5.
5. Verificar a seguinte condição:
 - a) Se $j < n$, adotar $j = j + 1$ e retornar ao item 2.

b) Se $j = n$, o processo é finalizado.

A otimização é realizada em domínio contínuo, mas o processo de análise do espaço amostral discreto tem a função de determinar os valores limites (mínimo e máximo) que a variável de projeto pode assumir. Após encontrar as soluções contínuas, inicia-se a conversão para valores comerciais discretos da seguinte maneira:

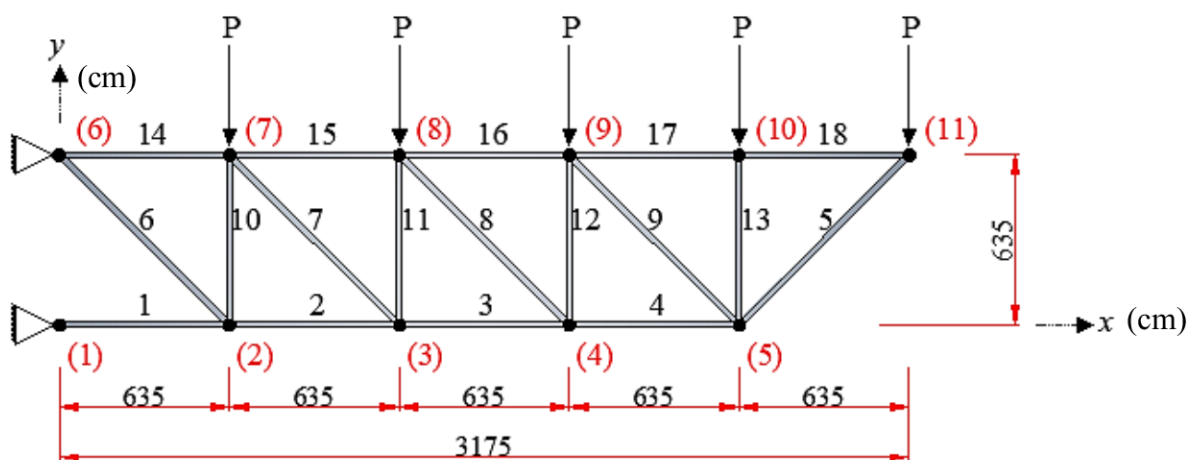
1. Encontrar o valor mais próximo da solução contínua de x_i no seu espaço amostral discreto A_i , seja ele menor ou maior.
2. Verificar se a solução contínua atende às restrições de projeto.
 - a) Se sim, o valor discreto é a solução ótima e o processo é finalizado.
 - b) Se não, o valor discreto é excluído do espaço amostral A_i . Retornar ao item 1.

O catálogo utilizado no presente trabalho contempla barras em formato tubular circular, portanto as áreas comerciais são apresentadas em função do diâmetro e espessura, conforme Anexo A. O momento de inércia e o raio de giração correspondente a cada área comercial do catálogo são calculados no processo de análise do espaço amostral. A cada iteração, o algoritmo adota o diâmetro e espessura da área comercial mais próxima do valor contínuo da variável de projeto para obter o índice de esbeltez e coeficientes de redução necessários para calcular as restrições.

5.1 Treliça Plana de 18 Barras - Caso 1

Para fins de validação dos algoritmos desenvolvidos, o primeiro exemplo analisado corresponde a um problema clássico da literatura investigado por Imai e Schmit Jr (1981) (Método Multiplicador), Lee e Geem (2004) (Algoritmo de Busca Harmônica) e Cavalcanti (2019) (Algoritmo Genético). Consiste em uma treliça plana de 18 barras e 11 nós, sujeita a carregamentos na direção do eixo y , $P = -88,96$ kN, aplicados nos nós 7, 8, 9, 10 e 11, como ilustrado na Figura 5.2. Os nós 1 e 6 possuem deslocamentos restringidos nas direções x e y .

Figura 5.2 – Treliça plana de 18 barras (Caso 1).



Fonte: Adaptado de Cavalcanti (2019)

Com o objetivo de minimizar o peso da estrutura a partir das áreas das seções transversais das barras, os elementos são agrupados em 4 conjuntos distintos, de modo a ter-se as variáveis de projeto:

- $x_1 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$;
- $x_2 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9$;
- $x_3 = A_{10} = A_{11} = A_{12} = A_{13}$;
- $x_4 = A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{17} = A_{18}$.

O caso analisado impõe restrições de desigualdade relacionadas à tensão máxima de escoamento do material, $\sigma_{max} = 137,90$ MPa, e à carga crítica de Euler, conforme Equação 3.19, para $k = 4$, valor adotado pelos autores que estudaram esse problema. As variáveis de projeto são analisadas em domínio contínuo. Informações gerais do problema estrutural estão melhor detalhadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Dados Gerais - Treliça plana de 18 barras (Caso 1).

Parâmetro	Unidade	Valor
Carga (P)	kN	88,96
Módulo de Elasticidade (E)	GPa	68,95
Peso Específico	kN/m ³	27,15
Variáveis de projeto (A)	cm ²	x_1, x_2, x_3, x_4
Domínio das variáveis de projeto	cm ²	$0,6452 \leq x_i \leq 322,60$ $i = 1, 2, 3, 4.$
Tensão máxima de escoamento (σ_{max})	MPa	137,90
Carga crítica de Euler (N_{cr})	kN	$\frac{kEA^2}{L^2}, k = 4$

Fonte: Adaptado de Cavalcanti (2019)

As variáveis de projeto (áreas das seções) iniciam o processo com o valor de 0,6452 cm² (área mínima do espaço amostral). O critério de convergência para ambos algoritmos é: tolerância de erro relativo entre a solução na iteração atual e anterior sendo $1,0 \times 10^{-6}$. Os resultados obtidos pelos algoritmos implementados neste trabalho são comparados com os demais presentes na literatura, como mostra a Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Resultados otimizados para treliça plana de 18 barras (Caso 1).

Variáveis de Projeto (área cm²)	Imai e Schmit Jr (1981)	Lee e Geem (2004)	Cavalcanti (2019)	PQS - Autoria própria	Algoritmo Genético - Autoria própria
x_1	139,686	139,557	139,692	139,675	139,956
x_2	45,614	45,532	45,622	45,616	45,606
x_3	80,650	80,585	80,65	80,642	80,714
x_4	64,507	64,391	64,52	64,511	64,500
Peso total (kN)	28,614	28,577	28,616	28,608	28,638

Fonte: Autoria própria

Comparando o peso total da estrutura obtido pelo presente trabalho em relação aos demais, têm-se resultados compatíveis. As diferenças se devem aos diferentes métodos de otimização e às tolerâncias de violação das restrições utilizadas em cada trabalho. A tolerância de violação das restrições adotada por Cavalcanti (2019) foi $1,0 \times 10^{-4}$. Imai e Schmit Jr (1981) e Lee e Geem (2004) adotaram tolerância de $1,0 \times 10^{-1}$.

As seções dos elementos agrupadas nas variáveis de projeto x_2 e x_4 são limitadas à restrição de tensão (tração), sendo as barras 6 e 14 críticas. Quanto às barras comprimidas

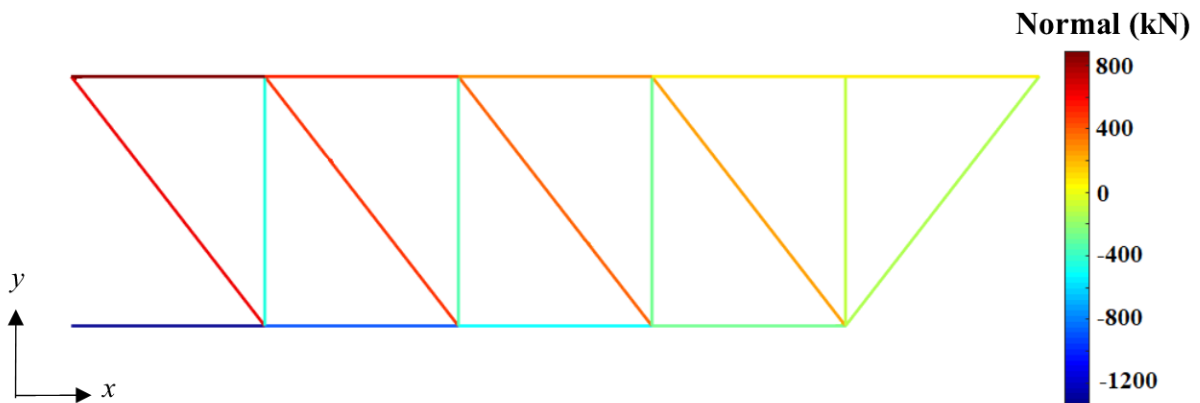
(variáveis x_2 e x_3), limitadas à restrição de flambagem, são críticos os elementos 1 e 10. A Tabela 5.5 traz uma comparação mais detalhada entre as tensões atuantes nas barras da treliça. A Figura 5.3 ilustra os esforços normais atuantes na treliça.

Tabela 5.5 – Tensões axiais nas barras da treliça plana de 18 barras (Caso 1).

Grupo	Barra	Normal (kN)	Tensão (MPa)	
			PQS	Algoritmo Genético
1	1	-1334,40	-95,536	-95,344
	2	-889,60	-63,691	-63,563
	3	-533,76	-38,214	-38,138
	4	-266,88	-19,107	-19,069
	5	-125,81	-9,007	-8,989
2	6	629,04	137,900	137,930
	7	503,23	110,320	110,344
	8	377,43	82,740	82,758
	9	251,62	55,160	55,172
3	10	-444,80	-55,158	-55,108
	11	-355,84	-44,126	-44,087
	12	-266,88	-33,095	-33,065
	13	-88,96	-11,032	-11,022
4	14	889,60	137,900	137,921
	15	533,76	82,740	82,753
	16	266,88	41,370	41,376
	17	88,96	13,790	13,792
	18	88,96	13,790	13,792

Fonte: Autoria própria

Figura 5.3 – Esforços normais atuantes na treliça plana de 18 barras (Caso 1).



Fonte: Autoria própria

Percebe-se uma pequena diferença entre os resultados das áreas obtidas pela Programação Quadrática Sequencial e pelo Algoritmo Genético. O método matemático levou 2,89 segundos para realizar a otimização em duas iterações e a tensão máxima atuante teve diferença relativa na ordem de $1,0 \times 10^{-14}$. Já o método heurístico levou 38,20 segundos para solucionar o problema em sete iterações, sendo que o erro relativo à restrição de tensão esteve na ordem de $1,0 \times 10^{-4}$.

5.2 Treliça Plana de 18 Barras - Caso 2

Nesse estudo de caso é analisada uma treliça plana de configuração semelhante ao primeiro exemplo, como ilustrado na Figura 5.2. Entretanto, para esse exemplo são utilizados parâmetros usuais em projetos de estruturas em aço, enquanto no Estudo de Caso 1 são utilizados parâmetros meramente acadêmicos e que fogem da realidade.

As barras adotadas são formadas por perfis tubulares de seção circular (Anexo A). Adota-se o aço ASTM A36 como material de toda treliça. As variáveis de projeto são otimizadas em domínio contínuo e posteriormente convertidas para o valor discreto comercial mais próximo ao ótimo, desde que este não infrinja as restrições de projeto. Novamente as áreas são agrupadas nos mesmos 4 conjuntos representados pelas variáveis de projeto x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

São analisadas as três situações de restrições apresentadas anteriormente. Para todas as situações analisadas, adota-se a mesma estimativa inicial para variáveis de projeto, sendo 466,21 mm², correspondente ao perfil de diâmetro igual a 76,2 mm e espessura de 2 mm. Os demais dados para a análise e otimização da treliça estão presentes na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Dados Gerais - Treliça plana de 18 barras (Caso 2).

Parâmetro	Unidade	Valor
Carga (P)	kN	88,96
Módulo de Elasticidade (E)	GPa	205
Peso Específico do Aço ASTM A36	kN/m ³	78,5
Variáveis de projeto (A)	mm ²	x_1, x_2, x_3, x_4
Domínio das variáveis de projeto	mm ²	Anexo A
Tensão máxima de escoamento (f_y)	MPa	250
Força de tração resistente de cálculo ($N_{t,Rd}$)	kN	$\frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}}$
Força de compressão resistente de cálculo ($N_{c,Rd}$)	kN	$\frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}}$
Coefficiente de minoração de escoamento (γ_{a1})	-	1,10
Carga crítica de Euler (N_{cr})	kN	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Carga crítica de Euler (Equação simplificada) (N_{cr})	kN	$\frac{kEA^2}{L^2}$, $k = 4$

Fonte: Autoria própria

Os critérios de convergência adotados para todas análises são: tolerância de erro relativo igual a 10^{-6} e solução da iteração atual deve ser numericamente menor que a solução anterior.

A Tabela 5.7 apresenta os resultados dos algoritmos e modelos de restrições aplicados ao problema em domínio contínuo e discreto.

Tabela 5.7 – Resultados otimizados da treliça plana de 18 barras (Caso 2).

Resultados	Situação 1		Situação 2		Situação 3	
	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético
contínuo - x_1 (mm ²)	5871,36	5913,62	8100,46	8123,13	15301,13	15416,44
discreto - x_1 (mm ²)	6283,97	6283,97	8105,43	8105,43	15301,13	15301,13
diâmetro ₁ (mm)	323,80	323,80	254,00	254,00	339,70	339,70
espessura ₁ (mm)	6,30	6,30	10,60	10,60	15,00	15,00
contínuo - x_2 (mm ²)	2767,79	2766,79	2767,79	2766,79	2767,79	2766,79
discreto - x_2 (mm ²)	2806,07	2806,07	2806,07	2806,07	2806,07	2806,07
diâmetro ₂ (mm)	165,10	165,10	165,10	165,10	165,10	165,10
espessura ₂ (mm)	5,60	5,60	5,60	5,60	5,60	5,60
contínuo - x_3 (mm ²)	2237,79	2237,79	4678,04	4681,22	4002,98	4002,98
discreto - x_3 (mm ²)	2237,79	2237,79	4704,35	4704,35	4002,98	4002,98
diâmetro ₃ (mm)	193,70	193,70	273,00	273,00	273,00	273,00
espessura ₃ (mm)	3,75	3,75	5,60	5,60	4,75	4,75
contínuo - x_4 (mm ²)	3914,24	3927,13	3914,24	3923,86	3914,24	3913,24
discreto - x_4 (mm ²)	3933,59	3933,59	3933,59	3933,59	3933,59	3933,59
diâmetro ₄ (mm)	141,30	141,30	141,30	141,30	141,30	141,30
espessura ₄ (mm)	9,50	9,50	9,50	9,50	9,50	9,50
Iterações	3	4	3	3	3	12
Timer (seg)	3,55	50,17	4,33	55,78	4,25	51,89
Peso total (kN)	39,138	39,138	48,972	48,972	66,994	66,994

Fonte: Autoria própria

Os resultados mostram que, em domínio contínuo, o algoritmo de PQS pode convergir para valores diferentes do Algoritmo Genético, mas ambos métodos de otimização recaem nos mesmos valores quando convertidos para o domínio discreto mais próximo.

A situação 3 é a mais conservadora para a variável x_1 , enquanto a situação 2 apresentou o maior valor para x_3 . Apesar disso, um resultado mais conservador não atende necessariamente todas as situações de restrição, sendo estritamente necessário analisar o comportamento da seção adotada frente às condições limites impostas em cada modelo de restrição. Pode-se dizer que ao utilizar o coeficiente $k = 4$ para aproximação da carga crítica de Euler é possível obter bons resultados, já que se mostrou conservador em relação à formulação original (situação 1), mas é

importante se atentar à esbeltez limite e restrições de estabilidade das barras comprimidas, já que os resultados podem não atender as diretrizes de norma.

Como mencionado, os valores utilizados no Estudo de Caso 1 não são compatíveis com projetos estruturais em aço e seus resultados são utilizados meramente para fins de validação dos algoritmos de otimização. Todavia, ao converter o peso total da estrutura otimizada em função do peso específico adotado nesse exemplo, 78,5 kN/m³, obtém-se os seguintes valores:

- Programação Quadrática Sequencial: 82,716 kN;
- Algoritmo Genético: 82,802 kN.

Comparando os pesos convertidos aos resultados da situação 2, que é a mesma utilizada no Estudo de Caso 1, têm-se soluções 68,90% mais pesada para o algoritmo de PQS, e 69,08% para o Algoritmo Genético.

Semelhante ao Estudo de Caso 1, as barras agrupadas nas variáveis de projeto x_2 e x_4 estão tracionadas, nas quais as barras 6 e 14 são as críticas. As barras agrupadas nas variáveis x_1 e x_3 estão comprimidas e as barras 1 e 10 são críticas. Os esforços e tensões axiais correspondentes a cada barra da treliça nas 3 hipóteses de restrições estão presentes na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Tensões axiais nas barras da treliça plana de 18 barras (Caso 2).

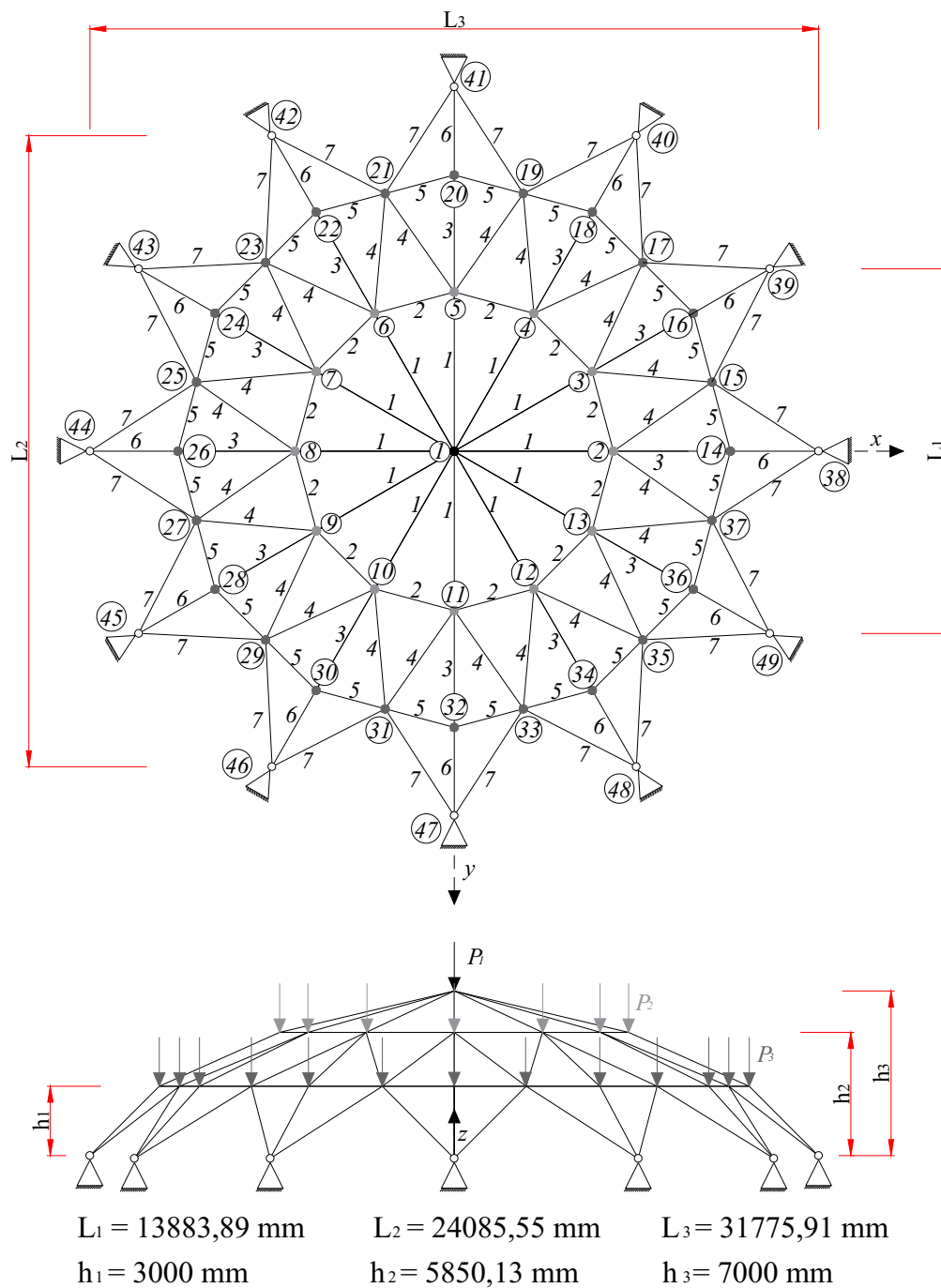
Grupo	Barra	Tensão (MPa) - Normal (kN)	Tensão (MPa) - Situação 1		Tensão (MPa) - Situação 2		Tensão (MPa) - Situação 3	
			PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético
1	1	-1334,40	-212,35	-212,35	-164,63	-164,63	-87,21	-87,21
	2	-889,60	-141,57	-141,57	-109,75	-109,75	-58,14	-58,14
	3	-533,76	-84,94	-84,94	-65,85	-65,85	-34,88	-34,88
	4	-266,88	-42,47	-42,47	-32,93	-32,93	-17,44	-17,44
	5	-125,81	-20,02	-20,02	-15,52	-15,52	-8,22	-8,22
2	6	629,04	224,17	224,17	224,17	224,17	224,17	224,17
	7	503,23	179,34	179,34	179,34	179,34	179,34	179,34
	8	377,43	134,50	134,50	134,50	134,50	134,50	134,50
	9	251,62	89,67	89,67	89,67	89,67	89,67	89,67
3	10	-444,80	-198,77	-198,77	-94,55	-94,55	-111,12	-111,12
	11	-355,84	-159,01	-159,01	-75,64	-75,64	-88,89	-88,89
	12	-266,88	-119,26	-119,26	-56,73	-56,73	-66,67	-66,67
	13	-88,96	-39,75	-39,75	-18,91	-18,91	-22,22	-22,22
4	14	889,60	226,15	226,15	226,15	226,15	226,15	226,15
	15	533,76	135,69	135,69	135,69	135,69	135,69	135,69
	16	266,88	67,85	67,85	67,85	67,85	67,85	67,85
	17	88,96	22,62	22,62	22,62	22,62	22,62	22,62
	18	88,96	22,62	22,62	22,62	22,62	22,62	22,62

Fonte: Autoria própria

5.3 Cúpula Treliçada de 120 Barras - Caso 3

Uma cúpula treliçada de 49 nós e 120 barras investigada por Lee e Geem (2004) é estudada neste caso. Os deslocamentos dos nós 38 a 49 são restringidos. São aplicados carregamentos na direção do eixo z para baixo, sendo $P_1 = -60,00$ kN aplicado ao nó 1, $P_2 = -30,00$ kN aplicados nos nós 2 a 13 e $P_3 = -10,00$ kN nos nós 14 a 37.

Figura 5.4 – Cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).



Fonte: Adaptado de Lee e Geem (2004)

Os 120 elementos de barra foram separados em 7 grupos, da seguinte maneira:

- x_1 = de A_1 até A_{12} ;
- x_2 = de A_{13} até A_{24} ;
- x_3 = de A_{25} até A_{36} ;
- x_4 = de A_{37} até A_{60} ;
- x_5 = de A_{61} até A_{84} ;
- x_6 = de A_{85} até A_{96} ;
- x_7 = de A_{97} até A_{120} ;

As barras são de aço ASTM A36 em formato tubular e seção transversal circular, sendo otimizadas em domínio contínuo e convertidas para valores discretos comerciais (Anexo A). São analisadas as mesmas situações do Estudo de Caso 2, variando as restrições impostas às tensões de tração e de compressão nos elementos.

Demais parâmetros relevantes para a otimização da treliça estão presentes na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Dados Gerais - Cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).

Parâmetro	Unidade	Valor
Cargas (P_1, P_2, P_3)	kN	60, 30, 10
Módulo de Elasticidade (E)	GPa	205
Peso Específico do Aço ASTM A36	kN/m ³	78,5
Variáveis de projeto (A)	mm ²	$x_1, x_2, x_3,$ x_4, x_5, x_6, x_7
Domínio das variáveis de projeto	mm ²	Anexo A
Tensão máxima de escoamento (f_y)	MPa	250
Força de tração resistente de cálculo ($N_{t,Rd}$)	kN	$\frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}}$
Força de compressão resistente de cálculo ($N_{c,Rd}$)	kN	$\frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}}$
Coeficiente de minoração de escoamento (γ_{a1})	-	1,10
Carga crítica de Euler (N_{cr})	kN	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Carga crítica de Euler (Equação simplificada) (N_{cr})	kN	$\frac{kEA^2}{L^2}, k = 4$

Fonte: Autoria própria

A estimativa inicial das variáveis é 466,21 mm² (diâmetro de 76,2 mm e espessura de 2 mm). Os critérios de convergência adotados para todas análises foram: tolerância de erro relativo igual a $1,0 \times 10^{-6}$ e solução da iteração atual deve ser numericamente menor que a solução anterior. Os resultados da otimização estão apresentados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 – Resultados otimizados da cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).

Resultados	Situação 1		Situação 2		Situação 3	
	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético
contínuo - x_1 (mm ²)	625,81	625,81	1342,95	1366,48	1452,05	1539,03
discreto - x_1 (mm ²)	625,81	625,81	1350,49	1369,54	1452,05	1601,62
diâmetro ₁ (mm)	101,60	101,60	95,25	120,00	127,00	139,70
espessura ₁ (mm)	2,00	2,00	4,75	3,75	3,75	3,75
contínuo - x_2 (mm ²)	506,111	625,01	954,13	953,13	785,40	806,93
discreto - x_2 (mm ²)	506,111	625,81	957,05	957,05	785,40	785,40
diâmetro ₂ (mm)	82,55	101,60	60,00	60,00	127,00	127,00
espessura ₂ (mm)	2,00	2,00	5,60	5,60	2,00	2,00
contínuo - x_3 (mm ²)	625,81	625,81	1369,68	1368,68	1452,05	1452,05
discreto - x_3 (mm ²)	625,81	625,81	1383,46	1383,46	1452,05	1452,05
diâmetro ₃ (mm)	101,60	101,60	76,20	76,20	127,00	127,00
espessura ₃ (mm)	2,00	2,00	6,30	6,30	3,75	3,75
contínuo - x_4 (mm ²)	420,72	420,72	809,75	812,19	705,60	740,71
discreto - x_4 (mm ²)	420,72	420,72	811,11	811,11	705,60	741,42
diâmetro ₄ (mm)	76,20	76,20	65,00	65,00	114,30	120,00
espessura ₄ (mm)	1,80	1,80	4,25	4,25	2,00	2,00
contínuo - x_5 (mm ²)	106,62	106,62	249,49	273,79	186,68	211,00
discreto - x_5 (mm ²)	106,62	106,62	249,95	272,90	186,68	212,91
diâmetro ₅ (mm)	46,00	46,00	46,00	47,62	63,50	76,20
espessura ₅ (mm)	0,75	0,75	1,80	1,90	0,95	0,90
contínuo - x_6 (mm ²)	585,91	585,91	1223,40	1247,61	1168,67	1183,51
discreto - x_6 (mm ²)	585,91	585,91	1227,66	1242,06	1168,67	1168,67
diâmetro ₆ (mm)	95,25	95,25	120,00	76,20	127,00	127,00
espessura ₆ (mm)	2,00	2,00	3,35	5,60	3,00	3,00
contínuo - x_7 (mm ²)	506,11	506,11	998,49	1061,92	785,40	897,96
discreto - x_7 (mm ²)	506,11	506,11	1003,15	1062,83	785,40	881,81
diâmetro ₇ (mm)	82,55	82,55	88,90	60,00	127,00	127,00
espessura ₇ (mm)	2,00	2,00	3,75	6,30	2,00	2,25
Iterações	3	3	3	3	3	3
Timer (seg)	4,38	22,59	4,41	42,30	4,22	26,20
Peso total (kN)	23,418	23,823	48,041	49,051	44,120	46,795

Fonte: Autoria própria

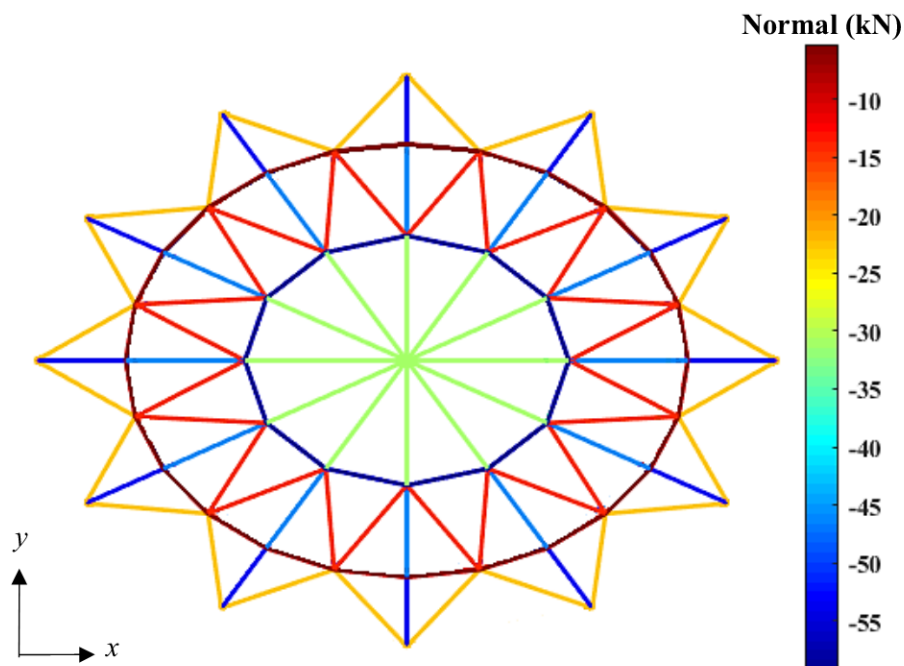
Observa-se nos valores destacados, que o Algoritmo Genético gera resultados ligeiramente mais pesados comparados ao algoritmo de PQS, além de exigir maior tempo de pro-

cessamento. Devido a sua natureza probabilística e combinatória, o Algoritmo Genético gera alguns resultados contínuos superiores e conseqüentemente podem ser convertidos para valores discretos maiores que os obtidos pelo algoritmo de PQS.

Como no estudo de caso anterior, as situações 2 e 3 geram soluções conservadoras quando comparadas com a situação 1 (média de 105,52% e 92,41% mais pesadas, respectivamente). A solução das variáveis x_2 , x_4 , x_5 , x_6 e x_7 obtidas pela situação 2 foram superiores à situação 3, contudo uma solução de área superior não atende necessariamente as restrições de estabilidade que a ABNT NBR 8800:2008 impõe, já que parâmetros como momento de inércia e raio de giração interferem nos coeficientes de redução.

Todas as barras da cúpula otimizada estão comprimidas e, devido à simetria radial da estrutura, as barras agrupadas estão sujeitas aos mesmos esforços axiais como ilustra a Figura 5.5. A Tabela 5.11 detalha os esforços e tensões axiais atuantes.

Figura 5.5 – Esforços normais atuantes na cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).



Fonte: Autoria própria

Tabela 5.11 – Tensões axiais nas barras da cúpula treliçada de 120 barras (Caso 3).

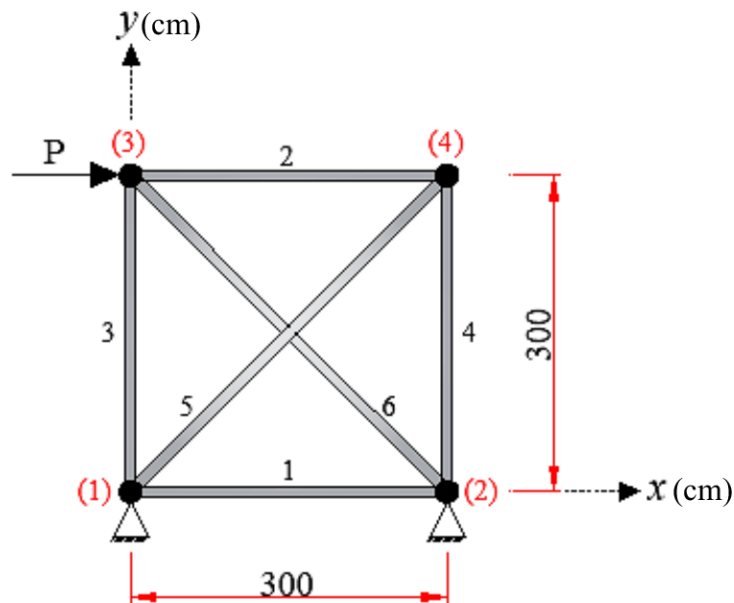
Barras Agrupadas	Normal (kN)	Tensão (MPa) - Situação 1		Tensão (MPa) - Situação 2		Tensão (MPa) - Situação 3	
		PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético
1	-30,60	-48,89	-48,89	-22,66	-22,34	-21,07	-19,10
2	-59,22	-117,01	-94,63	-61,88	-61,88	-75,40	-75,40
3	-46,16	-73,75	-73,75	-33,36	-33,36	-31,79	-31,79
4	-13,83	-32,86	-32,86	-17,05	-17,05	-19,59	-18,65
5	-5,29	-49,62	-49,62	-21,17	-19,39	-28,34	-24,85
6	-52,86	-90,21	-90,21	-43,06	-42,56	-45,23	-45,23
7	-22,74	-44,93	-44,93	-22,67	-21,40	-28,96	-25,79

Fonte: Autoria própria

5.4 Treliça Plana de 6 Barras - Caso 4

O quarto exemplo trata de uma treliça plana de 6 barras e 4 nós, sujeita a um carregamento na horizontal, $P = 20$ kN, aplicado ao nó 3. Os deslocamentos dos nós 1 e 2 estão restritos nas direções x e y , como mostra a Figura 5.6.

Figura 5.6 – Treliça plana de 6 barras (Caso 4).



Fonte: Autoria própria

Nesse caso são feitas análises críticas individuais a cada elemento de barra, não as agrupando. São feitas de aço ASTM A36 em formato tubular e seção transversal circular. A otimização é feita em domínio contínuo e posteriormente adota-se a seção comercial mais próxima. São analisadas as mesmas três situações de restrições dos Estudos de Caso 2 e 3.

Como critérios de convergência, impôs-se: tolerância de erro relativo igual a $1,0 \times 10^{-6}$ e solução da iteração atual deve ser numericamente menor que a solução anterior. Adota-se a mesma estimativa inicial para as variáveis de projeto conforme o Estudo de Caso 2.

Os dados de entrada da treliça analisada são apresentados na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 – Dados Gerais - Treliça plana de 6 barras (Caso 4).

Parâmetro	Unidade	Valor
Carga (P)	kN	20
Módulo de Elasticidade (E)	GPa	205
Peso Específico do Aço ASTM A36	kN/m ³	78,5
Variáveis de projeto (A)	mm ²	$x_1, x_2, x_3,$ x_4, x_5, x_6
Domínio das variáveis de projeto	mm ²	Anexo A
Tensão máxima de escoamento (f_y)	MPa	250
Força de tração resistente de cálculo ($N_{t,Rd}$)	kN	$\frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}}$
Força de compressão resistente de cálculo ($N_{c,Rd}$)	kN	$\frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}}$
Coefficiente de minoração de escoamento (γ_{a1})	-	1,10
Carga crítica de Euler (N_{cr})	kN	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Carga crítica de Euler (Equação simplificada) (N_{cr})	kN	$\frac{kEA^2}{L^2}, k = 4$

Fonte: Autoria própria

A treliça analisada é hiperestática, portanto a distribuição dos esforços internos depende também da rigidez axial de cada elemento. Os esforços normais acompanham a variação das áreas das barras a cada iteração e, conseqüentemente, as restrições de projeto também são modificadas. Sabendo da possibilidade da convergência para esforços normais nulos ou numericamente insignificantes em algumas barras, uma variável discreta de diâmetro igual a 0,002 mm e espessura igual a 0,00001 mm foi adicionada ao espaço amostral. Entende-se que uma variável que converge para este valor discreto tem valor de área ínfimo comparado com os valores discretos do catálogo presentes no Anexo A, possibilitando a exclusão do elemento na configuração inicialmente proposta.

Os resultados finais das análises feitas nesse caso estão apresentados na Tabela 5.13.

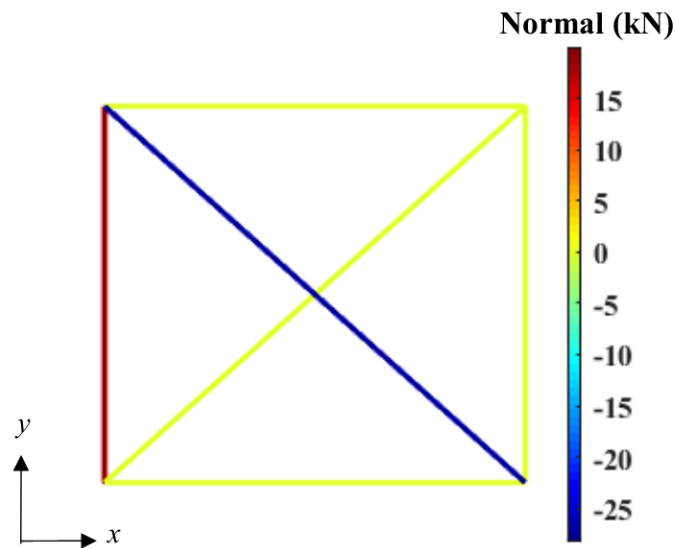
Tabela 5.13 – Resultados das treliça plana de 6 barras (Caso 4).

Resultados	Situação 1		Situação 2		Situação 3	
	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético
contínuo - x_1 (mm ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0
discreto - x_1 (mm ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
diâmetro ₁ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
espessura ₁ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
contínuo - x_2 (mm ²)	0,03	0,00	0,00	0,00	102,97	102,97
discreto - x_2 (mm ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	102,97	102,97
diâmetro ₂ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	44,45	44,45
espessura ₂ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,75
contínuo - x_3 (mm ²)	87,97	88,00	88,00	88,00	88,00	87,00
discreto - x_3 (mm ²)	88,00	88,00	88,00	88,00	88,00	88,00
diâmetro ₃ (mm)	38,10	38,10	38,10	38,10	38,10	38,10
espessura ₃ (mm)	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75
contínuo - x_4 (mm ²)	0,03	0,00	0,00	0,03	102,97	102,97
discreto - x_4 (mm ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	102,97	102,97
diâmetro ₄ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	44,45	44,45
espessura ₄ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,75
contínuo - x_5 (mm ²)	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
discreto - x_5 (mm ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
diâmetro ₅ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
espessura ₅ (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
contínuo - x_6 (mm ²)	363,51	363,51	787,96	787,96	705,60	705,60
discreto - x_6 (mm ²)	363,51	363,51	791,09	791,09	705,60	705,60
diâmetro ₆ (mm)	76,20	76,20	63,50	63,50	114,30	114,30
espessura ₆ (mm)	1,55	1,55	4,25	4,25	2,00	2,00
Iterações	12	15	35	30	29	13
Timer (seg)	4,25	58,95	4,92	97,83	8,33	53,31
Peso total (kN)	0,142	0,142	0,284	0,284	0,304	0,304

Fonte: Autoria própria

Observa-se a convergência de quatro das seis variáveis de projetos para áreas nulas nas situações 1 e 2, devido aos esforços axiais também nulos nestas barras. As tensões axiais de cada barra nas três situações estão apresentadas na Tabela 5.14.

Figura 5.7 – Esforços normais atuantes na treliça plana de 6 barras (Caso 4).



Fonte: Autoria própria

Tabela 5.14 – Tensões axiais nas barras da treliça plana de 6 barras (Caso 4).

Barras Agrupadas	Normal (kN)	Tensão (MPa) - Situação 1		Tensão (MPa) - Situação 2		Tensão (MPa) - Situação 3	
		PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético	PQS	Algoritmo Genético
		1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	20,00	227,26	227,26	227,26	227,26	227,26	227,26
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	-28,28	-77,81	-77,81	-35,90	-35,90	-40,09	-40,09

Fonte: Autoria própria

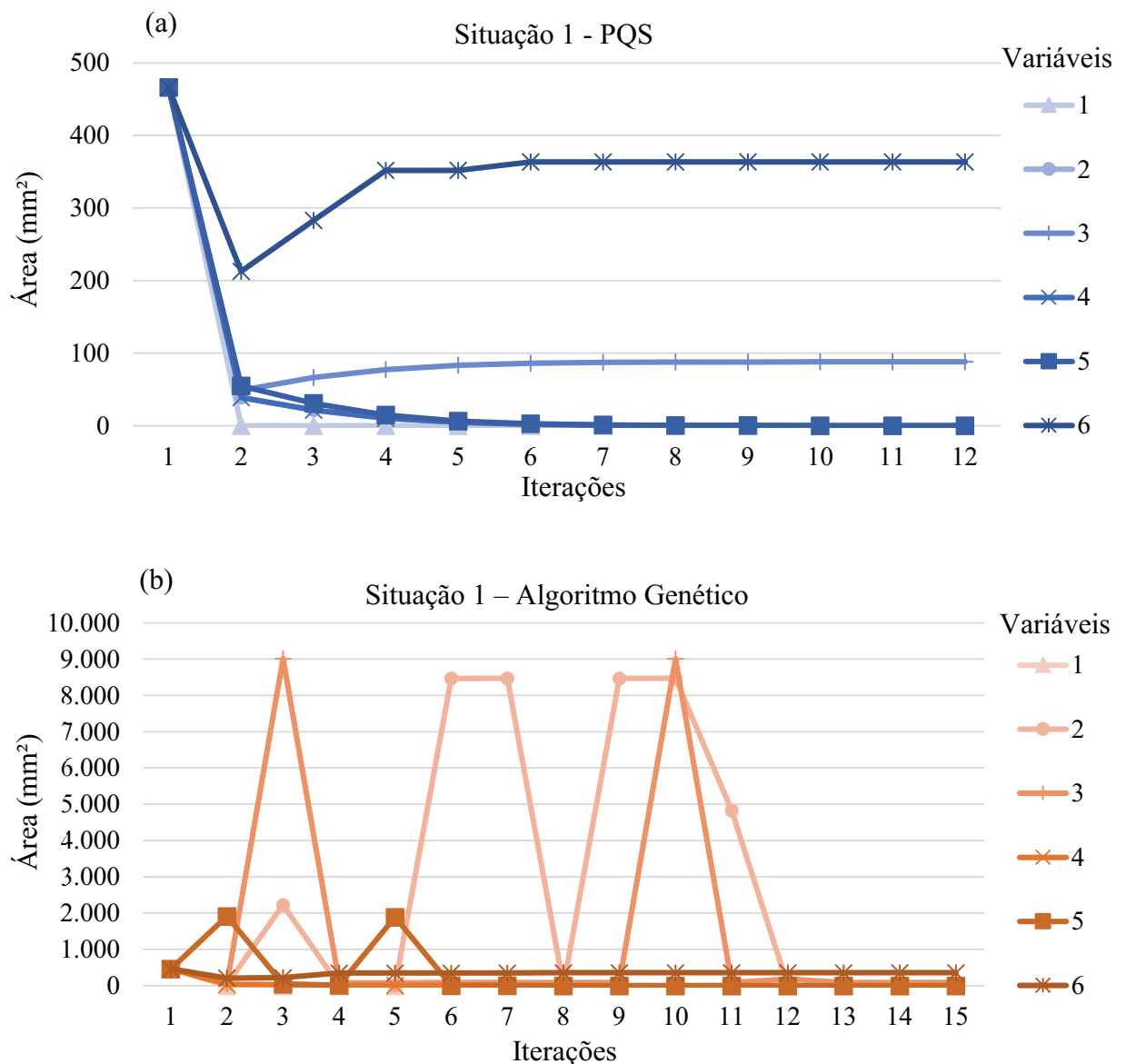
O processo iterativo faz com que a treliça encontre a melhor configuração possível (menor peso da estrutura) capaz de resistir aos esforços solicitantes. A solução encontrada mostra que é possível resistir ao carregamento utilizando apenas as barras 3 e 6, formando um sistema isostático. A otimização realizada pode ser caracterizada como topológica, pela possibilidade de exclusão de elementos da configuração inicialmente proposta.

Apesar de apresentarem tensões axiais nulas, as variáveis x_2 e x_4 na situação 3 não convergem para valores de área mínima devido às restrições de esbeltez limite que a ABNT NBR 8800:2008 impõe às barras comprimidas, e pelo fato dos valores dos esforços axiais atuantes nas barras em questão, apesar de insignificantes, serem de compressão no decorrer das iterações. É possível realizar a substituição dos resultados obtidos por áreas mínimas no pós-processamento,

já que a exclusão das barras não impacta na estabilidade e resistência da treliça, porém optou-se por mostrar a limitação dos resultados ao seguir rigorosamente as premissas da norma.

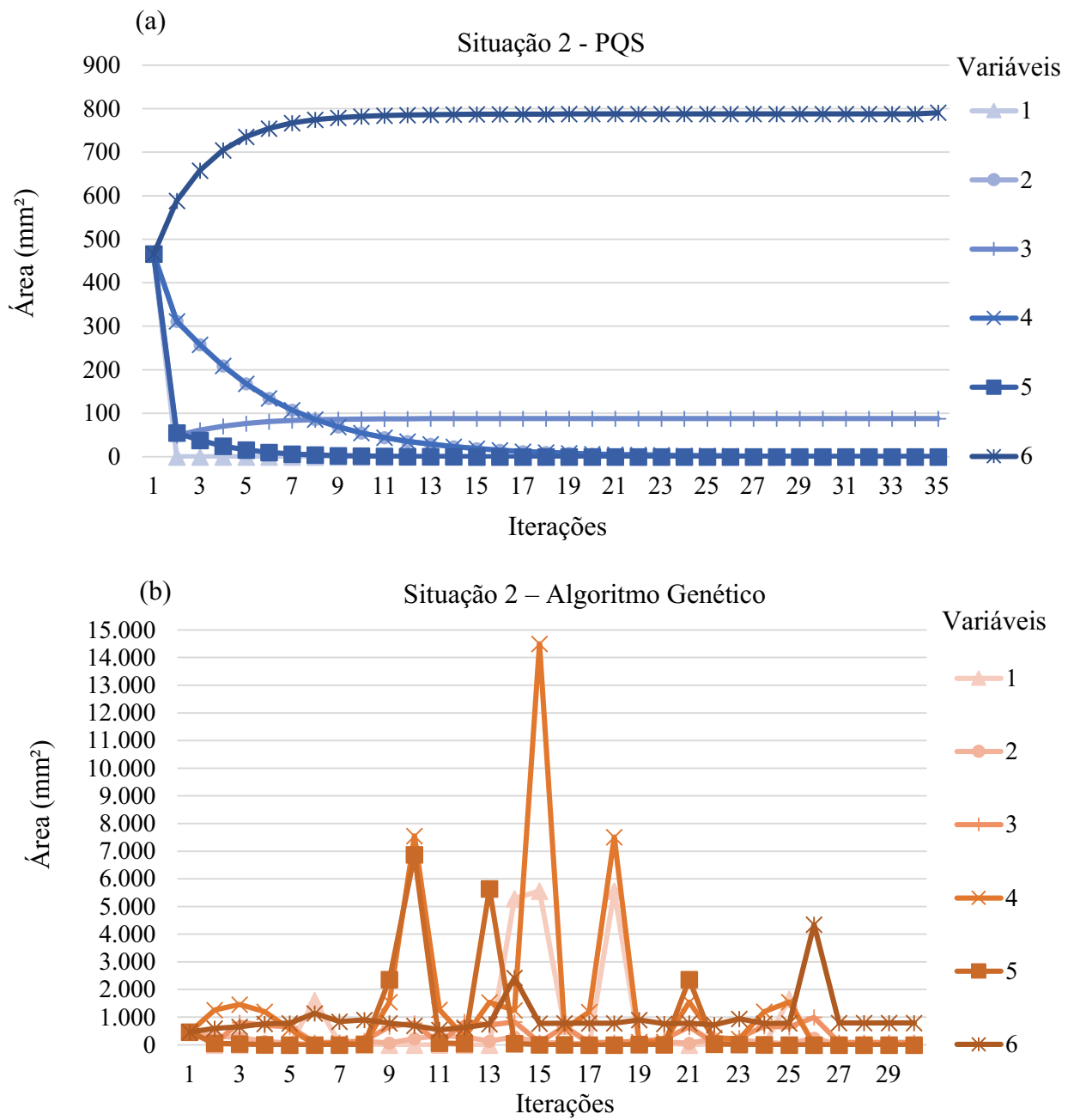
As Figuras 5.8, 5.9 e 5.10 ilustram a variação da solução das variáveis de projeto ao longo das iterações nas situações 1, 2 e 3, respectivamente. Nota-se uma constância na variação dos resultados ao utilizar a Programação Quadrática Sequencial, enquanto o Algoritmo Genético fornece resultados não uniformes até convergir para a solução final.

Figura 5.8 – Solução das variáveis ao decorrer das iterações para o Algoritmo de PQS (a) e Algoritmo Genético (b) - Situação 1 (Caso 4).



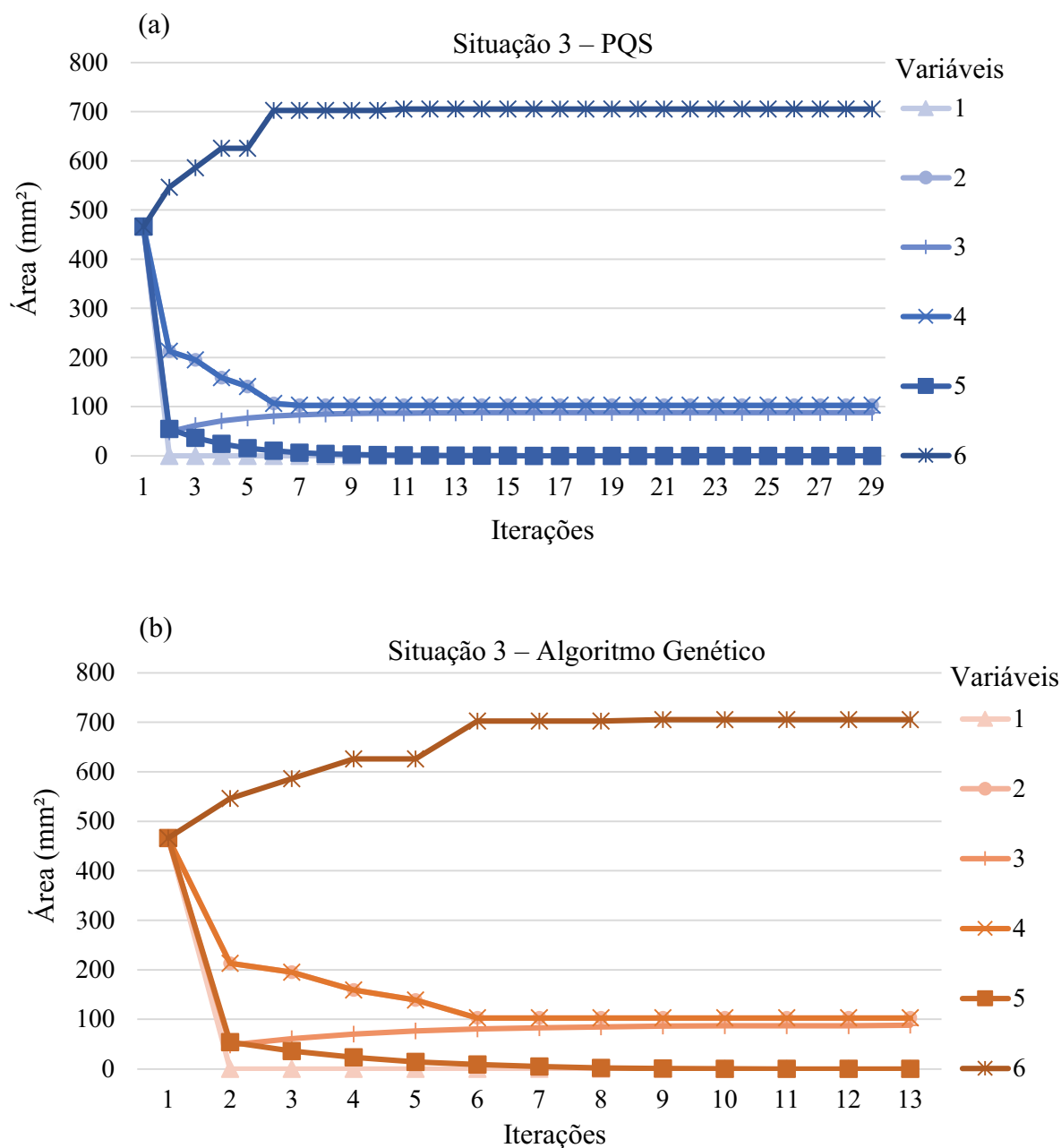
Fonte: Autoria própria

Figura 5.9 – Solução das variáveis ao decorrer das iterações para o Algoritmo de PQS (a) e Algoritmo Genético (b) - Situação 2 (Caso 4).



Fonte: Autoria própria

Figura 5.10 – Solução das variáveis ao decorrer das iterações para o Algoritmo de PQS (a) e Algoritmo Genético (b) - Situação 3 (Caso 4).

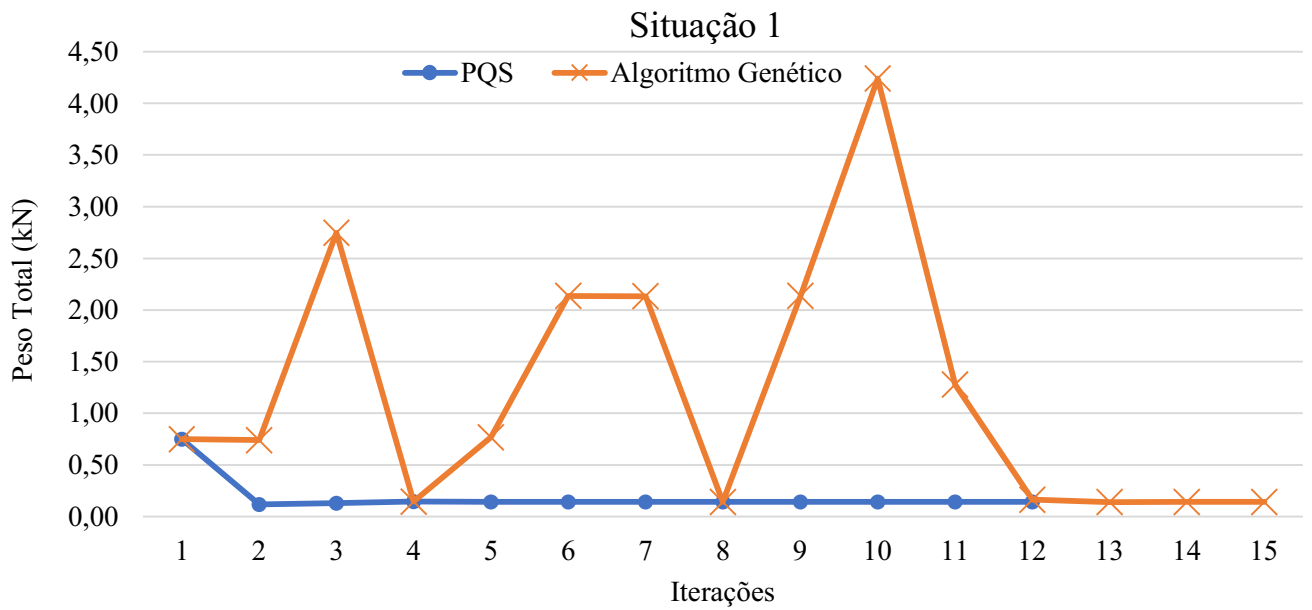


Fonte: Autoria própria

Nas situações 1 e 2, observa-se que durante o processo iterativo do Algoritmo Genético, algumas variáveis atingem valores de área consideravelmente superiores à solução final e, portanto, os gráficos possuem escalas bem diferentes comparados ao algoritmo de PQS.

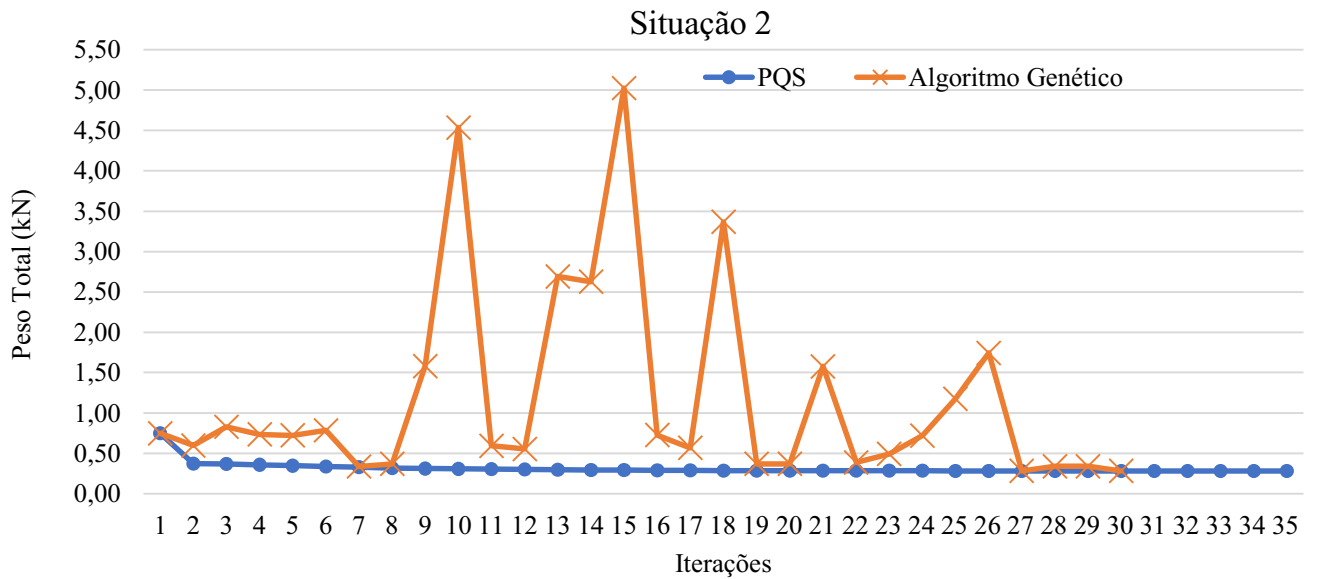
Devido à oscilação dos resultados das variáveis de projeto, a solução ótima da função objetivo também varia até convergir para a solução final, como apresentado nas Figuras 5.11, 5.12 e 5.13.

Figura 5.11 – Peso Total da estrutura ao decorrer das iterações - Situação 1 (Caso 4).



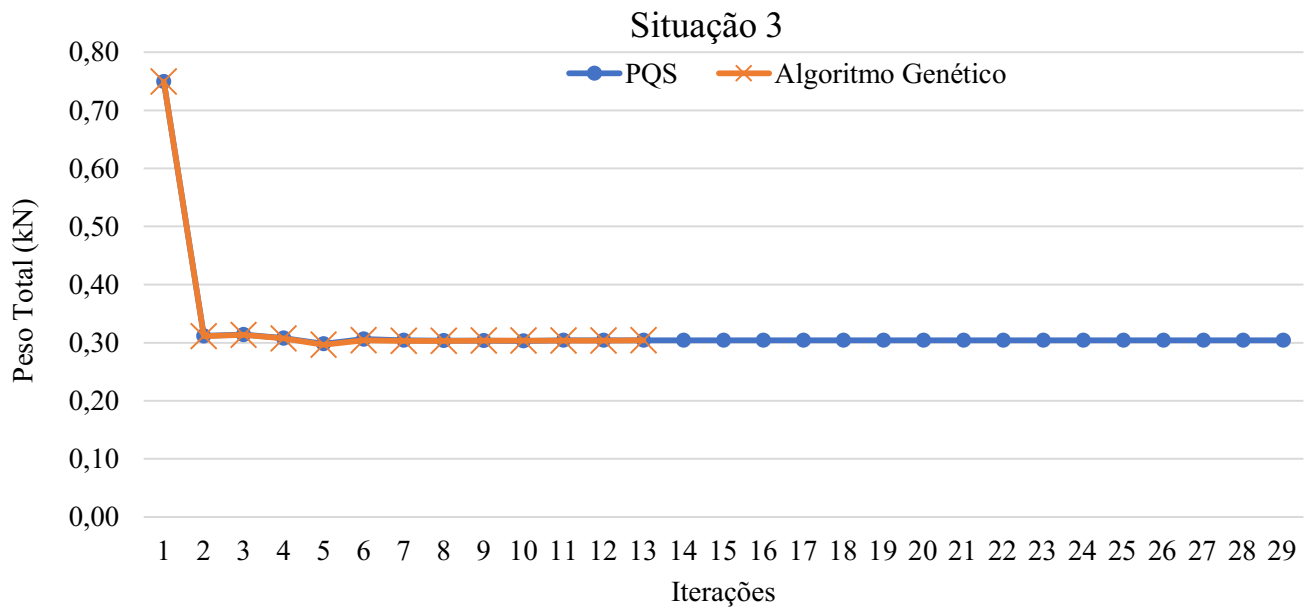
Fonte: Autoria própria

Figura 5.12 – Peso Total da estrutura ao decorrer das iterações - Situação 2 (Caso 4).



Fonte: Autoria própria

Figura 5.13 – Peso Total da estrutura ao decorrer das iterações - Situação 3 (Caso 4).



Fonte: Autoria própria

O peso da estrutura para a situação 2 é aproximadamente o dobro da primeira situação. Isso se deve à simplificação da equação da carga crítica de Euler utilizando o fator $k = 4$, como adotado por Imai e Schmit Jr (1981), Lee e Geem (2004) e Cavalcanti (2019). Os autores não especificam para que tipo de seção transversal o valor é recomendado, mas geram resultados conservadores quando comparados aos obtidos pela equação convencional em função do momento de inércia. A terceira situação se mostrou a mais conservadora, principalmente pelo fato da não convergência das variáveis x_2 e x_4 para áreas nulas.

6 Considerações Finais

A proposta do presente estudo é o desenvolvimento de algoritmos de otimização aplicados a estruturas treliçadas em aço, avaliando o desempenho de diferentes métodos de otimização. Com auxílio da metodologia apresentada, o engenheiro estrutural consegue desenvolver projetos que atrelam economia de consumo de materiais, menor custo de produção e sustentabilidade na construção civil.

Por meio das restrições de projeto, os algoritmos de otimização fornecem soluções que atendem às condições de segurança e garantem a integridade da estrutura e de seus usuários. Portanto, pode-se afirmar que os métodos de otimização estrutural são mais eficientes que os métodos tradicionais de dimensionamento, já que reduzem significativamente o peso próprio da estrutura, sem comprometer a função para a qual foi projetada.

Para desenvolver os algoritmos, estudou-se inicialmente os conceitos básicos de otimização estrutural, assim como os diferentes tipos e métodos comumente aplicados. Optou-se por utilizar a otimização dimensional e, para fins de comparação, aplicar dois métodos diferentes de otimização, sendo um método matemático e outro heurístico (Programação Quadrática Sequencial e Algoritmo Genético, respectivamente).

Outro estudo teórico relevante consistiu na formulação básica do Método dos Elementos Finitos, que é a técnica numérica utilizada para realizar as análises estruturais das treliças investigadas. Apresentou-se também as formulações para dimensionamento de barras tracionadas e comprimidas por meio de métodos clássicos que se valem do Método das Tensões Admissíveis e da carga crítica de Euler, bem como por meio das diretrizes da norma brasileira ABNT NBR 8800:2008, baseada no Método dos Estados Limites.

Por meio de quatro estudos de casos, verificou-se a capacidade e aplicabilidade dos algoritmos desenvolvidos. Para fins de validação, o primeiro caso é um problema clássico da literatura e consiste na otimização de uma treliça plana de 18 barras. Os algoritmos baseados no algoritmo de PQS e no Algoritmo Genético forneceram bons resultados quando comparados com outros autores, com diferenças na segunda casa decimal. Apesar de apresentarem valores numericamente próximos, o algoritmo de PQS se mostrou mais eficiente que o Algoritmo Genético neste exemplo, não só por fornecer um peso total da estrutura 0,105% inferior, mas principalmente pelo baixo custo computacional, levando apenas 2,89 segundos em duas iterações, comparados aos 38,20 segundos necessários para o Algoritmo Genético realizar sete iterações.

Com o intuito de investigar casos que se aproximam de projetos reais de estruturas treliçadas em aço, avaliou-se o caso de uma treliça plana de 18 barras de configuração semelhante ao Estudo de Caso 1, e uma cúpula treliçada de 120 barras. Em ambos os estudos, analisou-se a estrutura em domínio contínuo e, ao fim do processo iterativo, adotou-se a solução discreta comercial mais próxima. Foram utilizadas áreas comerciais de barras tubulares de seção transversal circular em aço ASTM A36. Com o objetivo de comparar a influência das restrições de

projeto, foram adotadas restrições baseadas na formulação clássica da carga crítica de Euler e em uma formulação simplificada que utiliza um coeficiente de correlação $k = 4$, valor este utilizado nos trabalhos de Imai e Schmit Jr (1981), Lee e Geem (2004) e Cavalcanti (2019). Também empregou-se restrições de projeto baseadas na ABNT NBR 8800:2008.

Os resultados obtidos nos Estudos de Caso 2, 3 e 4 mostram que, ao utilizar as restrições normativas para barras comprimidas, é necessário adotar barras com seções transversais mais robustas quando comparadas às soluções cujas restrições derivam da formulação clássica da carga crítica de Euler. Isso se deve ao rigor que a ABNT NBR 8800:2008 impõe ao limitar barras comprimidas com índice de esbelte inferior a 200 e ao utilizar coeficientes redutores de resistência devido aos efeitos de instabilidade globais e locais da peça, enquanto a carga crítica de Euler considera apenas efeitos de instabilidade global. A formulação simplificada, gerou estruturas mais pesadas comparadas com a hipótese de restrições conforme a norma, entretanto não é possível afirmar que esta solução também respeita as condições de estabilidade da norma, já que a integridade da estrutura não depende apenas da área da seção transversal da barra, mas também de propriedades como o índice de esbelte e dos parâmetros de estabilidade local e global.

No Caso 4, analisou-se uma treliça plana de 6 barras hiperestática. Os resultados mostram que é possível obter uma solução ótima com apenas 2 barras para o carregamento ao qual a treliça está sujeita, já que as outras barras convergiram para esforços axiais nulos. Este processo de exclusão de elementos da configuração inicialmente proposta é uma característica da otimização topológica.

Observou-se uma similaridade entre os resultados obtidos pelo algoritmo de PQS e pelo Algoritmo Genético, mas devido à natureza combinatória do último, o método heurístico exige maior tempo de processamento. Além disso, os resultados obtidos ao decorrer das iterações se mostram aleatórios até o fim do processo, podendo convergir em soluções ligeiramente mais pesadas que o algoritmo de PQS. É possível ajustar os parâmetros de processamento dos algoritmos presentes no *Toolbox* do *software* Matlab e refinar os resultados do Algoritmo Genético, porém isso pode tornar o processo ainda mais custoso computacionalmente.

Durante a aplicação das restrições de projeto envolvendo as premissas da ABNT NBR 8800:2008 e pela carga crítica de Euler (no modelo da Equação 3.18), observou-se que se tratam de restrições não lineares, já que a estabilidade de uma barra comprimida depende de sua esbelte. Além disso, barras tubulares circulares podem apresentar diferentes momentos de inércia para igual área da seção transversal, provocando uma descontinuidade no espaço amostral. Portanto, uma análise do espaço amostral é feita e, caso um valor de área comercial infrinja as restrições de flambagem, este é excluído do espaço amostral, evitando que o algoritmo o avalie como possível solução ótima.

Justificados pelos bons resultados apresentados, afirma-se que os algoritmos desenvolvidos são boas ferramentas de otimização estrutural e podem ser utilizados em projetos reais de treliças em aço. Além disso, o estudo corrobora com a comunidade científica ao apresentar

uma análise crítica de métodos de otimização de diferentes naturezas (matemáticos e heurísticos) aplicados à problemas estruturais baseados em métodos de dimensionamento distintos (ASD e LRFD).

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Tendo em vista o aperfeiçoamento e continuidade do presente trabalho, propõe-se algumas ideias para futuras pesquisas:

- Considerar as restrições devido ao dimensionamento das ligações nos nós (seja por parafusos ou por solda) e sua correspondente área líquida efetiva;
- Considerar como variáveis de projeto as dimensões da seção transversal;
- Considerar perfis comerciais de diferentes geometrias;
- Considerar as não linearidades física e/ou geométricas da estrutura;
- E, por fim, refinar os parâmetros básicos de otimização utilizados neste trabalho e realizar comparações.

Referências

- ABNT, N. 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2008.
- ABNT, N. 16239: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios com perfis tubulares. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2013.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. et al. *Pesquisa operacional*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2006.
- ARGENTA, M. A. *Estruturas Metálicas*. [S.l.]: Notas de Aula. Curitiba. Universidade Federal do Pará, 2016.
- ARORA, J. S. *Introduction to optimum design*. 3. ed. [S.l.]: Elsevier, 2012.
- BASTOS, E. A. Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos. *Rio de Janeiro, RJ*, 2004.
- BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. [S.l.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- BUCKHAM, B. J.; LAMBERT, C. Simulated annealing applications. *European Journal of OR*, v. 46, n. 4, p. 271–281, 1999.
- BUSTAMANTE, R. C. R. *Otimização de painéis sanduiche utilizando o método de recozimento simulado*. Dissertação (Mestrado) — Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica, 2002.
- CAVALCANTI, I. T. N. *Otimização do peso de estruturas treliçadas metálicas utilizando algoritmos genéticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2019.
- CHEN, J. L.; HO, J. Direct variational method for sizing design sensitivity analysis of beam and frame structures. *Computers & structures*, Elsevier, v. 42, n. 4, p. 503–509, 1992.
- CHRISTOFORO, A. L.; MARCONATO, S. A. S.; OLIVEIRA, R. d. Otimização numérica da área das seções transversais dos elementos componentes de estruturas planas do tipo treliça. *Revista Brasileira de Biometria, São Paulo*, v. 25, n. 3, p. 57–69, 2007.
- EBERHART, R. C.; SHI, Y.; KENNEDY, J. *Swarm intelligence*. [S.l.]: Elsevier, 2001.
- EBOLI, C. *Dimensionamento ótimo de seções de concreto armado à flexão composta oblíqua*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia . . . , 1989.
- ELLINGWOOD, B. R. Acceptable risk bases for design of structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*, Wiley Online Library, v. 3, n. 2, p. 170–179, 2001.
- FERREIRA, F. d. S. Uma abordagem numérico-experimental para a identificação de dano estrutural utilizando o método simulated annealing. 2008.
- GOMIDE, L. R. Planejamento florestal espacial. 2009.
- GUILHERME, C. E. M. Otimização topológica e cálculo do gradiente de forma para estruturas submetidas à restrição de fadiga. 2006.

- HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. *Elements of structural optimization*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- IMAI, K.; JR, L. A. S. Configuration optimization of trusses. *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, v. 107, n. 5, p. 745–756, 1981.
- JONG, K. D. Genetic-algorithm-based learning. In: *Machine learning*. [S.l.]: Elsevier, 1990. p. 611–638.
- KARUSH, W. Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints. *M. Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago*, 1939.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: IEEE. *Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks*. [S.l.], 1995. v. 4, p. 1942–1948.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. A discrete binary version of the particle swarm algorithm. In: IEEE. *1997 IEEE International conference on systems, man, and cybernetics. Computational cybernetics and simulation*. [S.l.], 1997. v. 5, p. 4104–4108.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *science*, American association for the advancement of science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983.
- KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. Nonlinear programming, in (j. neyman, ed.) proceedings of the second berkeley symposium on mathematical statistics and probability. *University of California Press, Berkeley*, 1951.
- LACERDA, E. G. de. A otimização nuvem de partículas (particle swarm). 2007.
- LEE, K. S.; GEEM, Z. W. A new structural optimization method based on the harmony search algorithm. *Computers & structures*, Elsevier, v. 82, n. 9-10, p. 781–798, 2004.
- MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. Métodos computacionais de otimização. *Colóquio Brasileiro de Matemática, Apostilas*, v. 20, 1995.
- MATLAB, M. The language of technical computing. the mathworks. Inc. <http://www.mathworks.com>, 2012.
- MEDEIROS, G. F. de; KRIPKA, M. Algumas aplicações de métodos heurísticos na otimização de estruturas. *Revista CIATEC-UPF*, v. 4, n. 1, p. 19–32, 2012.
- METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, American Institute of Physics, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953.
- MICHALEWICZ, Z.; HARTLEY, S. J. Genetic algorithms+ data structures= evolution programs. *Mathematical Intelligencer*, Berlin; New York: Springer-Verlag,[c1978-, v. 18, n. 3, p. 71, 1996.
- NETO, G. C. d. S.; LOPES, R. C.; LOPES, A. P. O método dos elementos finitos em treliças planas na disciplina de mecânica computacional. In: *Anais do Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. [S.l.: s.n.], 2007.
- NOCEDAL, J. Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of computation*, v. 35, n. 151, p. 773–782, 1980.

- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- PARENTE, E. J. *Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2000.
- PEREIRA, A. Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem. *PUC-Rio. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil*. Rio de Janeiro, 2002.
- PEREZ, R. I.; BEHDINAN, K. Particle swarm approach for structural design optimization. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 85, n. 19-20, p. 1579–1588, 2007.
- PFEIL, W.; PFEIL, M. Estruturas de aço-dimensionamento prático de acordo com a abnt nbr 8800: 2008. *Editora LTC, 8ª. Edição, Rio de Janeiro*, 2009.
- PHAM, D.; GHANBARZADEH, A. Multi-objective optimisation using the bees algorithm. In: *3rd International Virtual Conference on Intelligent Production Machines and Systems*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 6.
- POZO A ; CAVALHEIRO, A. F. Computação evolutiva. *Apostila (Grupo de Pesquisas em Computaçã Evolutiva)*, 2005.
- RIGO, E. *Métodos de otimização aplicados à análise de estruturas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1999.
- SCHMIT, L. A. Structural design by systematic synthesis. In: *Proceedings of the Second National Conference on Electronic Computation, ASCE, Sept., 1960*. [S.l.: s.n.], 1960.
- SCHNEIDER, J. *Introduction to safety and reliability of structures*. [S.l.]: Iabse, 2006. v. 5.
- SECCHI, A. R. Modelagem e simulação de processos. *Notas de Aula*, 1995.
- SERAPIÃO, A. B. d. S. Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão geral. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 20, n. 3, p. 271–304, 2009.
- SIAS, F. M.; ALVES, É. C. Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado. *REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, v. 9, n. 3, 2014.
- SIMONETTI, H. L. Otimização topológica de estruturas bidimensionais. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia . . . , 2009.
- SOARES, R. d. C.; DEBS, A. E. *Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação a pavimentos*. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado)—Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- STEWART, J. *Essential calculus: Early transcendentals*. [S.l.]: Cengage Learning, 2012.
- SUMAN, B.; KUMAR, P. A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization. *Journal of the operational research society*, Springer, v. 57, n. 10, p. 1143–1160, 2006.

TELES, M. L.; GOMES, H. M. Comparação de algoritmos genéticos e programação quadrática seqüencial para otimização de problemas em engenharia. *Teoria e Prática na Engenharia Civil*, v. 10, n. 15, p. 29–39, 2010.

TESSARI, R. K. *Projeto baseado em desempenho de torres metálicas sujeitas à ação do vento*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2016.

WU, S.-J.; CHOW, P.-T. Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of trusses. *Computers & structures*, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 979–991, 1995.

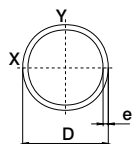
YAMAMOTO, L. Uso de simulated annealing e algoritmo genético no problema da reconfiguração de uma rede de distribuição de energia elétrica. 2004.

ZHOU, M. Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. *Structural optimization*, Springer, v. 11, n. 2, p. 134–136, 1996.

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. *The finite element method: solid mechanics*. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2000. v. 2.

ANEXO A – Valores comerciais de tubos circulares - Catálogo Tuper

Redondos	Bitola (mm - Pol)		Ø 15,87 - 5/8"		Ø 18,00		Ø 19,05 - 3/4"		Ø 20,00		Ø 20,65		Ø 21,00	
	Espessuras (mm)		0,75 a 1,95		0,75 a 1,95		0,75 a 2,25		0,75 a 2,25		0,75 a 2,25		0,75 a 2,65	
	Barras / Fardo (un)		366		309		309		309		309		309	
	Matriz de Origem (mm)		15,87		19,05		19,05		19,05		21,30		22,22	
		e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	
		0,75	1,678	0,75	1,914	0,75	2,031	0,75	2,136	0,75	2,208	0,75	2,247	
		0,90	1,994	0,90	2,277	0,90	2,417	0,90	2,544	0,90	2,630	0,90	2,677	
		0,95	2,097	0,95	2,397	0,95	2,544	0,95	2,678	0,95	2,769	0,95	2,818	
		1,06	2,323	1,06	2,657	1,06	2,822	1,06	2,971	1,06	3,073	1,06	3,128	
		1,11	2,424	1,11	2,774	1,11	2,947	1,11	3,103	1,11	3,209	1,11	3,267	
		1,20	2,605	1,20	2,983	1,20	3,169	1,20	3,338	1,20	3,454	1,20	3,516	
		1,25	2,704	1,25	3,098	1,25	3,292	1,25	3,468	1,25	3,588	1,25	3,653	
		1,50	3,189	1,50	3,662	1,50	3,895	1,50	4,106	1,50	4,250	1,50	4,328	
		1,55	3,284	1,55	3,773	1,55	4,014	1,55	4,232	1,55	4,381	1,55	4,461	
		1,80	3,747	1,80	4,315	1,80	4,594	1,80	4,847	1,80	5,021	1,80	5,114	
		1,90	3,928	1,90	4,526	1,90	4,822	1,90	5,089	1,90	5,271	1,90	5,370	
		1,95	4,016	1,95	4,631	1,95	4,934	1,95	5,208	1,95	5,396	1,95	5,497	
		-	-	-	-	2,00	5,046	2,00	5,327	2,00	5,519	2,00	5,623	
		-	-	-	-	2,25	5,593	2,25	5,910	2,25	6,126	2,25	6,242	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,65	7,195	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	



e = espessura
p = peso teórico

Bitola (mm - Pol)	Ø 21,30		Ø 22,00		Ø 22,22 - 7/8"		Ø 23,00		Ø 24,00		Ø 25,00		Ø 25,40 - 1"	
Espessuras (mm)	0,75 a 2,65		0,75 a 2,65		0,75 a 2,65		0,75 a 2,65		0,75 a 2,65		0,75 a 2,65		0,75 a 2,65 3,00 a 3,75	
Barras / Fardo (un)	309		309		309		309		309		271		271 135	
Matriz de Origem (mm)	22,22		22,22		22,22		22,22		24,00		25,40		25,40	
	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p
	0,75	2,281	0,75	2,358	0,75	2,383	0,75	2,469	0,75	2,580	0,75	2,691	0,75	2,736
	0,90	2,717	0,90	2,810	0,90	2,839	0,90	2,943	0,90	3,076	0,90	3,209	0,90	3,263
	0,95	2,861	0,95	2,959	0,95	2,990	0,95	3,100	0,95	3,240	0,95	3,381	0,95	3,437
	1,06	3,175	1,06	3,284	1,06	3,319	1,06	3,441	1,06	3,598	1,06	3,755	1,06	3,818
	1,11	3,316	1,11	3,431	1,11	3,467	1,11	3,595	1,11	3,760	1,11	3,924	1,11	3,990
	1,20	3,569	1,20	3,693	1,20	3,732	1,20	3,871	1,20	4,048	1,20	4,226	1,20	4,297
	1,25	3,708	1,25	3,838	1,25	3,879	1,25	4,023	1,25	4,208	1,25	4,393	1,25	4,467
	1,50	4,395	1,50	4,550	1,50	4,599	1,50	4,772	1,50	4,994	1,50	5,216	1,50	5,305
	1,55	4,530	1,55	4,690	1,55	4,741	1,55	4,920	1,55	5,149	1,55	5,378	1,55	5,470
	1,80	5,194	1,80	5,380	1,80	5,439	1,80	5,646	1,80	5,913	1,80	6,179	1,80	6,286
	1,90	5,454	1,90	5,651	1,90	5,713	1,90	5,932	1,90	6,213	1,90	6,494	1,90	6,607
	1,95	5,583	1,95	5,785	1,95	5,849	1,95	6,074	1,95	6,362	1,95	6,651	1,95	6,766
	2,00	5,712	2,00	5,919	2,00	5,984	2,00	6,215	2,00	6,511	2,00	6,807	2,00	6,925
	2,25	6,342	2,25	6,575	2,25	6,649	2,25	6,908	2,25	7,241	2,25	7,574	2,25	7,707
	2,65	7,313	2,65	7,587	2,65	7,674	2,65	7,980	2,65	8,372	2,65	8,764	2,65	8,921
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3,00	9,944
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3,35	10,930
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3,75	12,013
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

e = espessura
p = peso teórico

Bitola (mm - Pol)	Ø 26,00		Ø 26,70		Ø 26,90		Ø 28,00		Ø 28,57 - 1.1/8"		Ø 30,00		Ø 31,75 - 1.1/4"	
Espessuras (mm)	0,75 a 2,65 3,00 a 3,75		0,75 a 2,65 3,00 a 4,25		0,75 a 2,65 3,00 a 4,25		0,75 a 2,65 3,00 a 4,25		0,75 a 2,65 3,00 a 4,25		0,75 a 2,65 3,00 a 4,25		0,75 a 2,65 3,00 a 4,25	
Barras / Fardo (un)	271 135		271 135		271 135		217 124		217 124		169 124		169 124	
Matriz de Origem (mm)	25,40 26,90		26,70 26,90		26,70 26,90		28,57 28,00		28,57 28,57		31,75 30,00		31,75 31,75	
	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p
	0,75	2,802	0,75	2,880	0,75	2,902	0,75	3,024	0,75	3,087	0,75	3,246	0,75	3,440
	0,90	3,343	0,90	3,436	0,90	3,462	0,90	3,609	0,90	3,685	0,90	3,875	0,90	4,108
	0,95	3,521	0,95	3,620	0,95	3,648	0,95	3,802	0,95	3,883	0,95	4,084	0,95	4,330
	1,06	3,912	1,06	4,022	1,06	4,053	1,06	4,225	1,06	4,315	1,06	4,539	1,06	4,814
	1,11	4,088	1,11	4,203	1,11	4,236	1,11	4,417	1,11	4,510	1,11	4,745	1,11	5,032
	1,20	4,404	1,20	4,528	1,20	4,563	1,20	4,759	1,20	4,860	1,20	5,114	1,20	5,425
	1,25	4,578	1,25	4,707	1,25	4,744	1,25	4,948	1,25	5,053	1,25	5,318	1,25	5,641
	1,50	5,438	1,50	5,593	1,50	5,638	1,50	5,882	1,50	6,008	1,50	6,326	1,50	6,714
	1,55	5,608	1,55	5,768	1,55	5,814	1,55	6,066	1,55	6,197	1,55	6,525	1,55	6,926
	1,80	6,446	1,80	6,632	1,80	6,685	1,80	6,978	1,80	7,130	1,80	7,511	1,80	7,977
	1,90	6,776	1,90	6,972	1,90	7,029	1,90	7,338	1,90	7,498	1,90	7,900	1,90	8,392
	1,95	6,939	1,95	7,141	1,95	7,199	1,95	7,516	1,95	7,681	1,95	8,094	1,95	8,598
	2,00	7,103	2,00	7,310	2,00	7,369	2,00	7,694	2,00	7,863	2,00	8,286	2,00	8,804
	2,25	7,907	2,25	8,140	2,25	8,207	2,25	8,573	2,25	8,763	2,25	9,239	2,25	9,821
	2,65	9,156	2,65	9,430	2,65	9,509	2,65	9,940	2,65	10,164	2,65	10,724	2,65	11,411
	3,00	10,210	3,00	10,521	3,00	10,609	3,00	11,098	3,00	11,351	3,00	11,985	3,00	12,762
	3,35	11,228	3,35	11,575	3,35	11,674	3,35	12,219	3,35	12,501	3,35	13,210	3,35	14,078
	3,75	12,346	3,75	12,735	3,75	12,846	3,75	13,456	3,75	13,772	3,75	14,566	3,75	15,537
	-	-	4,25	14,118	4,25	14,244	4,25	14,936	4,25	15,294	4,25	16,193	4,25	17,294
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

e = espessura
p = peso teórico

Bitola (mm - Pol)		Ø 127,00 - 5"		Ø 139,70 - 5.1/2"		Ø 141,30 - 5.9/16"		Ø 152,40 - 6"		Ø 158,75 - 6.1/4"		Ø 165,10 - 6.1/2"		Ø 168,30 - 6.5/8"	
Espessuras (mm)	Barras / Fardo (un)	7,1	19	3,75 - 6,30	19	3,75 - 6,30	19	3,75 - 5,60	19	3,75 - 5,60	19	3,75 - 4,75	19	3,75 - 10,60	10
		8,00 - 10,00	13	7,10 - 10,00	13	7,10 - 9,50	13	6,30 - 9,00	13	6,30 - 8,00	13	5,60 - 8,00	13	11,20 - 16,00	7
						10,00	10	9,50 - 10,60	10	9,00 - 16,00	10	9,00 - 10,60	10		
												11,20 - 16,00	7		
Matriz de Origem (mm)		127,00		139,70		141,30		152,40		158,75		165,10		168,30	
e = espessura p = peso teórico		e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p
		7,10	125,957	3,75	75,432	3,75	76,320	3,75	82,478	3,75	86,002	3,75	89,525	3,75	91,301
		8,00	140,858	4,25	85,175	4,25	86,181	4,25	93,161	4,25	97,154	4,25	101,147	4,25	103,160
		9,00	157,134	4,75	94,844	4,75	95,969	4,75	103,770	4,75	108,233	4,75	112,696	4,75	114,945
		9,50	165,160	5,60	111,112	5,60	112,438	5,60	121,635	5,60	126,896	5,60	132,158	5,60	134,809
		10,00	173,113	6,30	124,349	6,30	125,840	6,30	136,187	6,30	142,106	6,30	148,025	6,30	151,008
		-	-	7,10	139,298	7,10	140,979	7,10	152,640	7,10	159,311	7,10	165,982	7,10	169,343
		-	-	8,00	155,891	8,00	157,785	8,00	170,923	8,00	178,440	8,00	185,956	8,00	189,744
		-	-	9,00	174,045	9,00	176,176	9,00	190,957	9,00	199,413	9,00	207,869	9,00	212,130
		-	-	9,50	183,012	9,50	185,261	9,50	200,863	9,50	209,789	9,50	218,714	9,50	223,212
		-	-	10,00	191,904	10,00	194,271	10,00	210,695	10,00	220,091	10,00	229,486	10,00	234,221
		-	-	-	-	-	-	10,60	222,396	10,60	232,355	10,60	242,314	10,60	247,333
		-	-	-	-	-	-	-	-	11,20	244,513	11,20	255,036	11,20	260,339
		-	-	-	-	-	-	-	-	12,50	270,489	12,50	282,234	12,50	288,152
		-	-	-	-	-	-	-	-	14,00	299,841	14,00	312,995	14,00	319,623
		-	-	-	-	-	-	-	-	15,00	319,039	15,00	333,132	15,00	340,234
		-	-	-	-	-	-	-	-	16,00	337,941	16,00	352,973	16,00	360,549
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

Bitola (mm - Pol)		Ø 177,80 - 7"		Ø 193,70 - 7.5/8"		Ø 203,20 - 8"		Ø 219,10 - 8.5/8"		Ø 244,48 - 9.5/8"		Ø 254,00 - 10"		Ø 273,00 - 10.3/4"	
Espessuras (mm)	Barras / Fardo (un)	3,75 - 10,00	10	3,75 - 9,00	10	3,75 - 8,00	10	3,75 - 11,20	7	4,25 - 10,00	7	4,25 - 9,50	7	4,25 - 9,00	7
		10,60 - 16,00	7	9,50 - 16,00	7	9,00 - 11,20	7	12,70 - 16,00	5	10,60 - 16,00	5	10,00 - 16,00	5	9,50 - 16,00	5
						12,50 - 16,00	5								
Matriz de Origem (mm)		177,80		193,70		203,20		219,10		244,48		254,00		273,00	
e = espessura p = peso teórico		e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p
		3,75	96,572	3,75	105,394	3,75	110,665	3,75	119,487	4,25	151,064	4,25	157,050	4,25	168,998
		4,25	109,133	4,25	119,132	4,25	125,106	4,25	135,104	4,75	168,485	4,75	175,175	4,75	188,529
		4,75	121,621	4,75	132,796	4,75	139,473	4,75	150,647	5,60	197,930	5,60	205,818	5,60	221,561
		5,60	142,681	5,60	155,855	5,60	163,727	5,60	176,901	6,30	222,019	6,30	230,893	6,30	248,604
		6,30	159,863	6,30	174,685	6,30	183,540	6,30	198,361	7,10	249,371	7,10	259,372	7,10	279,332
		7,10	179,323	7,10	196,026	7,10	206,006	7,10	222,709	8,00	279,917	8,00	291,185	8,00	313,675
		8,00	200,989	8,00	219,809	8,00	231,054	8,00	249,875	9,00	313,575	9,00	326,252	9,00	351,553
		9,00	224,781	9,00	245,954	9,00	258,604	9,00	279,778	9,50	330,293	9,50	343,674	9,50	370,381
		9,50	236,566	9,50	258,915	9,50	272,269	9,50	294,618	10,00	346,937	10,00	361,022	10,00	389,135
		10,00	248,277	10,00	271,803	10,00	285,859	10,00	309,384	10,60	366,812	10,60	381,743	10,60	411,542
		10,60	262,232	10,60	287,170	10,60	302,069	10,60	327,006	11,20	386,580	11,20	402,357	11,20	433,842
		11,20	276,082	11,20	302,430	11,20	318,173	11,20	344,522	12,50	429,047	12,50	446,654	12,50	481,795
		12,50	305,722	12,50	335,129	12,50	352,700	12,50	382,107	14,00	477,425	14,00	497,146	14,00	536,503
		14,00	339,302	14,00	372,238	14,00	391,916	14,00	424,852	15,00	509,308	15,00	530,437	15,00	572,605
		15,00	361,318	15,00	396,607	15,00	417,691	15,00	452,980	16,00	540,894	16,00	563,432	16,00	608,412
		16,00	383,039	16,00	420,680	16,00	443,170	16,00	480,811	-	-	-	-	-	-
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

1 - Tubos a partir de 139,70 Ø 5.1/2" | 2 - Quantidade de peças por Fardo para tubos de 6.000 mm | *Outras medidas sob consulta

