

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**GUSTAVO LEARDINI MONTANHEIRO**

**CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS BIPARTIDOS COM  
ATÉ TRÊS BICLIQUES**

**CURITIBA**

**2022**

**GUSTAVO LEARDINI MONTANHEIRO**

**CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS BIPARTIDOS COM  
ATÉ TRÊS BICLIQUES**

**Characterising and Total Colouring Bipartite Graphs with at Most Three  
Bicliques**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Computação do Curso de Bacharelado em Engenharia de Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Miranda Zatesko

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marina Esther Groshaus

**CURITIBA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**GUSTAVO LEARDINI MONTANHEIRO**

**CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS BIPARTIDOS COM  
ATÉ TRÊS BICLIQUES**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção  
do título de Bacharel em Engenharia de  
Computação do Curso de Bacharelado em  
Engenharia de Computação da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 16/dezembro/2022

---

Leandro Miranda Zatesko  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Marina Esther Groshaus  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Aleffer Rocha  
Mestrado  
Instituto Federal do Paraná

---

Sheila Morais de Almeida  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA**

**2022**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus orientadores, Leandro Zatesko e Marina Groshaus, pela ajuda, pela paciência, e principalmente pela amizade que desenvolvemos, juntamente com o presente trabalho.

Agradeço ao meu pai, Lécio Montanheiro, pela compreensão depois de todas as vezes que involuntariamente o ignorei, por estar obstinadamente concentrado na escrita deste trabalho, e de outros.

Agradeço aos grandes amigos que fiz ao longo deste curso de Engenharia de Computação. Foi uma honra poder ser colega de pessoas tão incríveis, e eu não teria chegado até aqui sem a presença de cada um deles.

Finalmente, agradeço aos meus amigos Kaoê Amorim e Douglas Yamasaki, pelo suporte ao longo dessa jornada, e, também, por estarem dispostos a me ouvir falar sobre grafos (e matemática em geral) por horas.

## RESUMO

O número cromático total de um grafo  $G$  é o menor número de cores necessário para colorir todos os vértices e todas as arestas de  $G$  de modo que não haja cores iguais em elementos adjacentes. Determinar o número cromático total de um grafo é um problema importante, porém difícil, que já foi estudado em diversas classes de grafos, incluindo grafos com poucas cliques. Para grafos com um vértice universal, o problema foi resolvido por Hilton em 1990. Se o número cromático total de um grafo  $G$  é  $\Delta(G) + 1$ , dizemos que  $G$  é Tipo 1. Se é  $\Delta(G) + 2$ , dizemos que  $G$  é Tipo 2. Em 2012, Campos et al. determinaram o número cromático total dos grafos split-indiferença, os quais contêm no máximo três cliques, provando que  $G$  é Tipo 2 se  $G$  tem um  $\Delta$ -subgrafo  $H$  que tem um vértice universal e é Tipo 2; senão é Tipo 1. Em 1991, Hilton também resolveu o problema para grafos bipartidos com vértices biuniversais adjacentes. Nós conjecturamos que um grafo bipartido  $G$  com no máximo três bicliques é: Tipo 2 se  $G$  tem algum  $\Delta$ -subgrafo Tipo 2 com vértices biuniversais adjacentes; senão é Tipo 1. Se  $G$  tem no máximo duas bicliques, então a conjectura vale pelo resultado de Hilton. Se  $G$  tem três bicliques, nós provamos que o grafo obtido após a remoção sucessiva de vértices falsos gêmeos é isomorfo ao  $P_5$  ou tem vértices biuniversais adjacentes. No primeiro caso, sejam  $A, B, C, D, E$  os conjuntos de vértices falsos gêmeos de  $G$ , onde o  $P_5$  é dado pela sequência  $ABCDE$ , com  $a, b, c, d, e$  sendo suas respectivas cardinalidades, com  $a \geq e$  sem perda de generalidade. Então, provamos que nossa conjectura vale para todos os seguintes casos:  $b + d \neq c + a$ ;  $b + d = c + a > ad + \min(a, d)$ ;  $\max(d, e) < a$  e  $ad \geq b$ . A conjectura permanece aberta para os casos em que  $b + d = c + a \leq ad + \min(a, d)$  e: ou  $d \geq a$ , ou  $a = e > d$ .

**Palavras-chave:** coloração total de grafos; bicliques; grafos bipartidos.

## ABSTRACT

The total chromatic number of a graph  $G$  is the least number of colours necessary to colour all the vertices and edges of  $G$  so that no adjacent elements have the same colour. Determining the total chromatic number of a graph is an important hard problem that has been studied for many graph classes, including graphs with few cliques. For graphs with a universal vertex, it was solved by Hilton in 1990. If the total chromatic number of a graph  $G$  is  $\Delta(G) + 1$ ,  $G$  is said to be Type 1. If it is  $\Delta(G) + 2$ , then  $G$  is Type 2. In 2012, Campos et al. solved the problem for split-indifference graphs, all of which have at most three cliques, proving that such a graph  $G$  is: Type 2 if  $G$  has some  $\Delta$ -subgraph  $H$  (i.e a subgraph with  $\Delta(H) = \Delta(G)$ ) which has a universal vertex and is Type 2; Type 1 otherwise. In 1991, Hilton also solved the problem for bipartite graphs with adjacent bi-universal vertices (a vertex in a part of a bipartite graph is *bi-universal* if it is adjacent to all vertices in the other part). We conjecture that a bipartite graph  $G$  with at most three bicliques is: Type 2 if  $G$  has some Type 2  $\Delta$ -subgraph with adjacent bi-universal vertices; Type 1 otherwise. If  $G$  has at most two bicliques, then the conjecture holds by Hilton's result. If  $G$  has three bicliques, we prove that the graph obtained after successively removing twins is either a  $P_5$  or has adjacent bi-universal vertices. For the former case, let  $A, B, C, D, E$  be the sets of twin vertices, where the  $P_5$  is given by the sequence  $ABCDE$ , being  $a, b, c, d, e$  their corresponding cardinalities, with  $a \geq e$  without loss of generality. Then, we prove that our conjecture holds for all the following cases:  $b + d \neq c + a$ ;  $b + d = c + a > ad + \min(a, d)$ ;  $\max(d, e) < a$  and  $ad \geq b$ . So, the conjecture remains open when  $b + d = c + a \leq ad + \min(a, d)$  and: either  $d \geq a$ , or  $a = e > d$ .

**Keywords:** graph total colouring; bicliques; bipartite graphs.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 – Grafo <math>A</math></b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Figura 2 – Grafo <math>A</math>, evidenciando sua bipartição e bicliques</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Figura 3 – Coloração total do <math>K_{2,3}</math></b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Figura 4 – Coloração total do <math>P_4</math></b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Figura 5 – Coloração total do <math>P_5</math></b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Figura 6 – Coloração total do grafo <math>A</math></b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Figura 7 – 1 biclique</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Figura 8 – 2 bicliques</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Figura 9 – 3 bicliques: grafo <math>A</math></b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Figura 10 – 3 bicliques: <math>P_5</math></b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Figura 11 – Subcaso a</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>Figura 12 – Subcaso b</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>Figura 13 – Caso 2: Solução</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>Figura 14 – Caso 2: contradição</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>Figura 15 – Subcaso a</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>Figura 16 – Subcaso b</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>Figura 17 – Subcaso c</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>Figura 18 – Subcaso d</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>Figura 19 – Subcaso a: contradição</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>Figura 20 – Subcaso b: contradição</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>Figura 21 – Caso 3: Solução 1, <math>P_5</math></b> . . . . .	<b>19</b>
<b>Figura 22 – Caso 3: Solução 2, grafo <math>A</math></b> . . . . .	<b>20</b>
<b>Figura 23 – <math>K_2</math></b> . . . . .	<b>21</b>
<b>Figura 24 – <math>P_4</math></b> . . . . .	<b>21</b>
<b>Figura 25 – Grafo <math>A</math></b> . . . . .	<b>21</b>
<b>Figura 26 – <math>P_5</math></b> . . . . .	<b>21</b>
<b>Figura 27 – <math>\Delta</math>-vértices em <math>B</math> e <math>C</math></b> . . . . .	<b>23</b>
<b>Figura 28 – Arestas faltantes em <math>G</math></b> . . . . .	<b>24</b>
<b>Figura 29 – Subgrafo não colorido <math>X</math></b> . . . . .	<b>25</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 – Caracterização dos grafos da classe proposta . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>Tabela 2 – Grafos da classe proposta quanto à presença de vértices biuniversais .</b>	<b>26</b>
<b>Tabela 3 – Classificação dos grafos isomorfos ao <math>P_5</math> após a remoção sucessiva de vértices falsos gêmeos quanto ao número cromático total . . . . .</b>	<b>27</b>



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.1</b>	<b>Definições</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Uma breve história do problema de coloração de grafos</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Resultados clássicos em coloração total de grafos</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1.4</b>	<b>Aplicações de coloração de grafos</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Caracterização dos grafos bipartidos com até 3 bicliques</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Coloração total de alguns dos grafos caracterizados</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>Caracterização dos grafos bipartidos com até três bicliques</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>3.2</b>	<b>Coloração total dos grafos bipartidos com até três bicliques</b> . . . . .	<b>26</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>28</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo caracterizar a classe de grafos mencionada no título, os grafos bipartidos com até três bicliques (definições na sequência), bem como determinar o número cromático total desta classe, apresentando um algoritmo polinomial para obter uma coloração total para os grafos na classe.

O problema de coloração total de um grafo já foi estudado para diversas classes de grafos (BEHZAD; CHARTRAND; COOPER, 1967; HILTON, 1990; HILTON, 1991; MCDIARMID; SANCHEZ-ARROYO, 1941; CAMPOS *et al.*, 2012). Em particular, em 1990, este problema foi resolvido para grafos com um vértice universal (HILTON, 1990). Com base nesse resultado, Campos *et al.* (2012) resolveram o problema para grafos *split-indiferença*, os quais possuem no máximo três cliques. Em 1991, Hilton resolveu o problema para grafos bipartidos com vértices biuniversais adjacentes. Desta forma, podemos enxergar o presente trabalho como análogo ao desenvolvido por Campos *et al.*, mas para grafos bipartidos, e considerando bicliques em lugar de cliques.

Como forma de ilustrar a importância do problema de coloração total, destacamos uma conjectura central da área: a Conjectura da Coloração Total, cujo enunciado é apresentado na Seção 1.3. É um problema aberto que motiva a pesquisa nesta área, e que é tida como de importância alta pelo *site Open Problem Garden*<sup>1</sup>, que reúne diversos problemas abertos em matemática. Nosso trabalho visa resolver essa conjectura para a classe de grafos que propomos.

O problema da coloração total é um problema de grande interesse da Computação. Por se tratar de um problema NP-difícil, captura completamente a dificuldade da pergunta  $P = NP?$ , a qual já foi considerada “uma das perguntas mais profundas que a humanidade já se fez” (AARONSON, 2010). Mais especificamente, o problema de decidir se um grafo é Tipo 1 é NP-completo, mesmo quando restrito a grafos bipartidos regulares (MCDIARMID; SANCHEZ-ARROYO, 1941). No entanto, ao restringirmos a classe de grafos, considerando grafos que tenham alguma propriedade (como é o caso deste trabalho), é possível que o problema da coloração total seja mais fácil para esta subclasse de grafos. De fato, existe um algoritmo polinomial para resolver o problema de coloração total de grafos bipartidos com vértices biuniversais adjacentes, conforme mostrado por Hilton. É possível utilizar este algoritmo como subrotina para colorir os grafos considerados neste trabalho, assim expandindo as classes de grafos para os quais se conhece um algoritmo polinomial para o problema em questão.

### 1.1 Definições

Neste trabalho, nos limitaremos a considerar somente *grafos simples* e nos referiremos a esses simplesmente como grafos.

<sup>1</sup> Disponível em [http://www.openproblemgarden.org/op/behzads\\_conjecture](http://www.openproblemgarden.org/op/behzads_conjecture)

Definimos<sup>2</sup> um grafo como um par  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito de elementos chamados *vértices*, e  $E$  é um conjunto de pares não-ordenados de vértices, chamados de *arestas*, que representam ligações entre vértices, necessariamente distintos. Note que como  $E$  é definido como um conjunto, dados dois vértices quaisquer, existe no máximo uma aresta conectando-os. Para denotar os conjuntos de vértices e arestas de um grafo  $G$ , é utilizada a notação  $V(G)$  e  $E(G)$ , respectivamente. Denotamos cada aresta entre os vértices  $u$  e  $v$  por  $uv$ . Se  $uv \in E$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são *adjacentes* ou *vizinhos*. O conjunto de vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  é chamado de *vizinhança* de  $v$ , e é denotado por  $N_G(v)$ . Dizemos que a aresta  $e = uv$  é *incidente* sobre os vértices  $u$  e  $v$ . Duas arestas são adjacentes ou vizinhas se incidem sobre um mesmo vértice. Dois vértices  $u, v$  são *gêmeos verdadeiros (falsos)* se (não) são adjacentes, e têm a mesma vizinhança. Um vértice é dito *universal* se é adjacente a todos os outros vértices do grafo. O *grau* de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes a ele, e é denotado por  $d(v)$ . Como em um grafo  $G$ , o conjunto  $V(G)$  é finito, sempre existem vértices de grau máximo e mínimo. Denotamos por  $\Delta(G)$  o grau do vértice de maior grau em  $G$ , e por  $\delta(G)$  o grau do vértice de menor grau em  $G$ . Definimos como um *emparelhamento* em um grafo um conjunto de arestas não-adjacentes no grafo. Denotamos por  $\mu(G)$  o tamanho do maior emparelhamento no grafo  $G$ .

Um *subgrafo* de um grafo  $G$  é um grafo  $H$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Seja  $V' \subseteq V(G)$ . O *subgrafo induzido* de um grafo  $G$  por um conjunto  $V' \subseteq V(G)$ , denotado por  $G[V']$ , é um subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V' = V(H)$ , e dados  $u, v \in V'$ ,  $uv \in E(H)$  se e somente se  $uv \in E(G)$ . Chamamos um subgrafo  $H$  de  $G$  de  $\Delta$ -subgrafo de  $G$  se  $\Delta(H) = \Delta(G)$ .

Sejam  $G$  e  $H$  grafos. Definimos o grafo  $G \cap H = (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H))$ . Quando livre de ambiguidade, denotamos o grafo vazio  $(\emptyset, \emptyset)$  por  $\emptyset$ , por abuso de notação.

Um grafo é chamado de *trivial* se tem somente um vértice. Um *conjunto independente* em um grafo é um conjunto de vértices que não são adjacentes dois a dois. Um grafo não-trivial  $G$  é dito bipartido se e somente se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos independentes, frequentemente chamados de *partes* ou *lados* do grafo. Dizemos que um grafo não-trivial  $G$  é *bipartido completo* se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos independentes não-vazios de forma que cada vértice seja adjacente a todos os vértices da outra parte. Denotamos um grafo bipartido completo  $G$  por  $K_{m,n}$ , onde  $m$  e  $n$  são as cardinalidades das partes de  $G$ . Ainda, um grafo não-trivial  $G$  é *equibipartido* se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos independentes  $I_1, I_2$  de forma que  $|I_1| = |I_2|$ . Chamamos de vértice *biuniversal* um vértice em um grafo bipartido para qual existe uma bipartição em que esse vértice é adjacente a todos os vértices da outra parte.

Seja  $n > 0$  um inteiro. Um grafo é *completo* se todos os vértices são adjacentes dois a dois, e é denotado por  $K_n$ . Uma *clique* é um subgrafo completo maximal (i.e não é subgrafo de nenhum outro subgrafo completo). Uma *biclique* é um subgrafo induzido bipartido completo

<sup>2</sup> Para definições e informações mais detalhadas sobre grafos, recomendamos Bondy e Murty (2008) e Diestel (2000)

maximal (i.e não é subgrafo de nenhum outro subgrafo bipartido completo). Um *caminho* com  $n$  vértices, denotado por  $P_n$ , é o grafo definido por  $V(P_n) = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ ,  $E(P_n) = \{u_i u_{i+1} : 0 \leq u < n - 1\}$ . É dito que um grafo  $G$  é *conexo*<sup>3</sup> se para todo par de vértices  $u, v$  no grafo, existe um caminho em  $G$  que começa em  $u$  e termina em  $v$ . Um *ciclo* de comprimento  $n$ , denotado por  $C_n$  e definido somente se  $n \geq 3$ , é o grafo definido por  $V(C_n) = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$  e  $E(C_n) = \{u_i u_{(i+1) \bmod n} : 0 \leq i \leq n - 1\}$ .

Dois grafos  $G, H$  são *isomorfos* se existe uma bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $f(u)f(v) \in E(H)$  se e somente se  $uv \in E(G)$ .

Uma *k-coloração dos vértices* de um grafo  $G$  é uma atribuição  $c : V(G) \rightarrow C$ , com  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ , de forma que dados  $u, v$  quaisquer adjacentes em  $G$ , vale  $c(u) \neq c(v)$ . Definimos o problema de coloração de vértices em um grafo  $G$  como encontrar o mínimo  $k$  tal que exista uma  $k$ -coloração dos vértices de  $G$ . Em outras palavras, interpretamos os números atribuídos aos vértices como cores, e queremos encontrar o número mínimo de cores de forma que nenhum par de vértices adjacentes tenha a mesma cor. Este número mínimo é chamado de *número cromático* de  $G$  e é denotado por  $\chi(G)$ .

Uma *k-coloração das arestas* de um grafo  $G$  é uma atribuição  $c : E(G) \rightarrow C$ , com  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ , de forma que dadas  $e_1, e_2$  quaisquer adjacentes em  $G$ , vale  $c(e_1) \neq c(e_2)$ . Definimos o problema de coloração de arestas em um grafo  $G$  como encontrar o mínimo  $k$  tal que exista uma  $k$ -coloração as arestas de  $G$ . O mínimo  $k$  para o qual  $G$  tem uma  $k$ -coloração de arestas é chamado de *índice cromático* de  $G$  e é denotado por  $\chi'(G)$ .

Uma *k-coloração total* de um grafo  $G$  é uma atribuição  $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow C$ , com  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ , de forma que dados  $u, v \in V(G)$  quaisquer adjacentes,  $e_1, e_2 \in E(G)$  quaisquer adjacentes,  $w \in V(G)$  e  $e = wx$  para algum  $x \in V(G)$ , vale  $c(u) \neq c(v)$ ,  $c(e_1) \neq c(e_2)$ , e  $c(w) \neq c(e)$ . Em outras palavras, é uma atribuição de cores para todos os elementos de um grafo, onde se obedecem tanto as regras de uma  $k$ -coloração de vértices quanto as de uma  $k$ -coloração de arestas, além de não se permitir que uma mesma cor seja atribuída a uma aresta e a um vértice ao qual ela é incidente. Definimos o problema de coloração total em um grafo  $G$  como encontrar o mínimo  $k$  tal que exista uma  $k$ -coloração total de  $G$ . O mínimo  $k$  para o qual  $G$  tem uma  $k$ -coloração total é chamado de *número cromático total* de  $G$  e é denotado por  $\chi''(G)$ . Dizemos que, numa coloração total de um grafo, uma cor  $i$  está *faltando* num vértice  $v$  se  $i$  não está atribuída a  $v$ , nem a nenhuma aresta incidente sobre  $v$ , nem a nenhum vértice vizinho de  $v$ .

Para os fins deste trabalho, é relevante definir um grafo bipartido particular, o grafo  $A$ , representado nas Figuras 1 e 2, o qual possui três bicliques, destacadas na Figura 2.

<sup>3</sup> Consideraremos somente grafos simples e conexos neste trabalho, sem perda de generalidade.

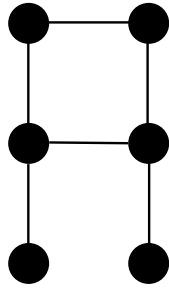


Figura 1 – Grafo  $A$   
Fonte: Autoria própria (2022).

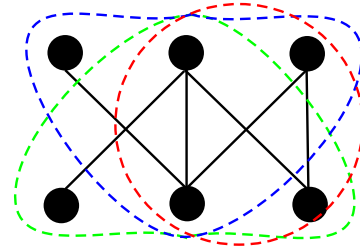


Figura 2 – Grafo  $A$ , evidenciando sua bipartição e bicliques  
Fonte: Autoria própria (2022).

As Figuras 3, 4, 5, 6 ilustram alguns exemplos de coloração total de grafos na classe proposta pelo presente trabalho.

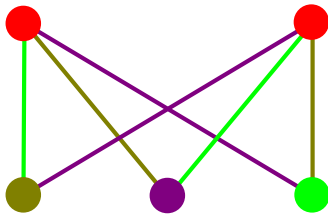


Figura 3 – Coloração total do  $K_{2,3}$   
Fonte: Autoria própria (2022).

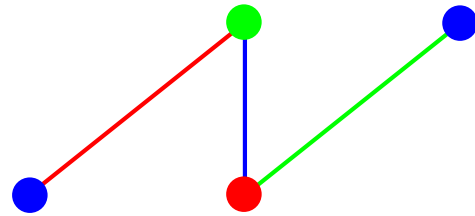


Figura 4 – Coloração total do  $P_4$   
Fonte: Autoria própria (2022).

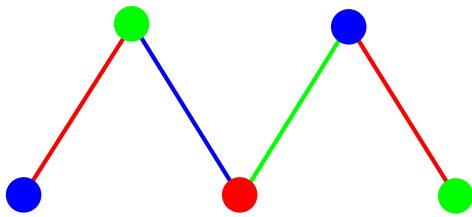


Figura 5 – Coloração total do  $P_5$   
Fonte: Autoria própria (2022).

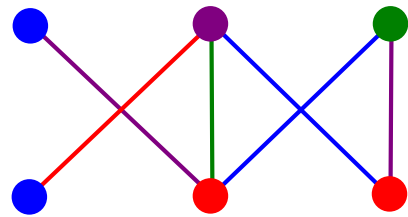


Figura 6 – Coloração total do grafo  $A$   
Fonte: Autoria própria (2022).

Para encerrar esta seção, apresentamos o conceito de coloração de arestas por listas, que utilizamos para provar um dos resultados deste trabalho. Sendo  $k$  um inteiro positivo e  $C$  um conjunto de cores, e sendo  $L$  uma função que mapeia cada aresta  $e$  de  $G$  a uma lista  $L(e)$  de até  $k$  cores de  $C$ , uma *coloração de arestas de  $G$  por  $L$*  é uma coloração de arestas  $c: E(G) \rightarrow C$  tal que  $c(e) \in L(e)$  para qualquer  $e \in E(G)$ . O *índice de selecionabilidade de  $G$*  é o menor inteiro  $k$  tal que, para *qualquer* atribuição  $L$  de listas de até  $k$  cores às arestas de  $G$ , existe uma coloração de arestas de  $G$  por  $L$ .

## 1.2 Uma breve história do problema de coloração de grafos

A origem do problema de coloração em grafos está na coloração de mapas. Conforme Kubale (2004) e Chartrand e Zhang (2008), o matemático sul-africano Francis Guthrie, ao tentar colorir um mapa da Inglaterra de forma que regiões adjacentes não fossem coloridas da mesma cor, percebeu que bastavam 4 cores e conjecturou que este número bastaria para qualquer

mapa. Este problema foi comunicado ao matemático britânico Augustus De Morgan, que por sua vez, o encaminhou ao matemático irlandês William Hamilton, em 1852. A formulação moderna deste problema é: *dado um grafo planar, é possível colori-lo com não mais do que quatro cores?*, onde um grafo planar é um grafo cuja representação pode ser desenhada de forma que arestas não se cruzem. A ideia de grafo planar é uma formulação abstrata de um mapa, pois podemos representar países (ou regiões distintas em um mapa) por vértices, com arestas entre dois vértices existindo se e somente se os países são adjacentes no mapa. Com algum cuidado, é possível desenhar qualquer grafo obtido desta forma sem que arestas se cruzem.

Por muitos anos, não houve sequer uma demonstração publicada para este problema, até que em 1879, o matemático britânico Alfred Kempe propôs uma solução (CHARTRAND; ZHANG, 2008). Apesar de ter sido aceita por mais de 10 anos após sua publicação, um conterrâneo de Kempe, Percy Heawood, a desprovou, apontando um erro na demonstração de Kempe, e publicou um resultado mais fraco: bastam cinco cores para colorir um grafo planar (CHARTRAND; ZHANG, 2008).

Finalmente, em 1977, mais de 100 anos após a formulação original do problema ter sido encaminhada para De Morgan e Hamilton, a Conjectura das Quatro Cores foi provada por Kenneth Appel, Wolfgang Haken, e John Koch, em dois artigos: um autorado somente por Appel e Koch (APPEL; HAKEN, 1977), e um com o auxílio de Koch (APPEL; HAKEN; KOCH, 1977). Esta solução propunha que qualquer grafo planar apresenta alguma entre uma lista de 1936 configurações inevitáveis, as quais foram verificadas por computador. Esta foi a primeira instância de um problema matemático famoso que foi resolvido com a assistência de computadores. Desde então, o número de configurações inevitáveis foi reduzido para 633, em 1996, por Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour, e Robin Thomas (ROBERTSON *et al.*, 1996).

### 1.3 Resultados clássicos em coloração total de grafos

Um resultado que segue imediatamente da definição de coloração total é o de que é possível criar uma coloração total válida através da coloração ótima de vértices juntamente com a coloração ótima de arestas, em que o conjunto de cores utilizadas para os vértices é disjunto do conjunto de cores utilizadas para as arestas. Logo,  $\chi''(G) \leq \chi(G) + \chi'(G)$  para todo grafo  $G$ .

O Teorema de Brooks (BROOKS, 1941) afirma que dado um grafo  $G$ , se  $G$  não é um grafo completo ou um ciclo de comprimento ímpar, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ , senão,  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ . O Teorema de Vizing (VIZING, 1964) afirma que para todo grafo  $G$  vale que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , logo, vale  $\chi''(G) \leq 2\Delta(G) + 2$ . Uma conjectura central na teoria de coloração total de grafos é a Conjectura da Coloração Total (TCC: do inglês, *Total Colouring Conjecture*), proposta independentemente por Behzad em 1965, e por Vizing em 1968, cujo enunciado é: *para todo grafo  $G$ ,  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$* . Notamos que isso limitaria o valor de  $\chi''(G)$  para dois valores possíveis:  $\Delta(G) + 1$  e  $\Delta(G) + 2$ , onde o limite inferior segue da pró-

pria definição de coloração total, pois um vértice e suas arestas incidentes precisam ter todos cores diferentes. Se a TCC for verdadeira, é possível classificar os grafos em dois tipos: um grafo  $G$  é dito Tipo 1 se seu número cromático total é  $\Delta(G) + 1$ , e Tipo 2 se é  $\Delta(G) + 2$ . A CCT já foi provada para algumas classes de grafos, como os mencionados no início deste capítulo (grafos com um vértice universal, grafos split-indiferença, grafos bipartidos com vértices biuniversais adjacentes), grafos completos, grafos bipartidos completos (BEHZAD; CHARTRAND; COOPER, 1967), entre outras. Inclusive, apesar de o problema de coloração total de grafos ser NP-difícil, existem algoritmos polinomiais para computar o número cromático total destas classes de grafos mencionadas anteriormente.

#### 1.4 Aplicações de coloração de grafos

Para encerrar este capítulo, apresentamos algumas aplicações clássicas relacionadas a problemas de coloração de grafos em geral. A aplicabilidade dos problemas em coloração de grafos se dá em situações em que existem *itens* de diferentes *tipos* que podem ser incompatíveis uns com os outros. Alguns exemplos de aplicações são (LEWIS, 2021; ZATESKO, 2018):

- alocação de horários (para aulas, eventos, torneios);
- agendamento de viagens de táxi;
- alocação de registradores por um compilador;
- comunicação entre sensores.

A alocação de horários consiste num conjunto de eventos (por exemplo, aulas) que devem ser alocadas em um horário de um conjunto de horários. Se uma pessoa precisa estar presente em mais que um evento, então esses eventos não devem ser alocados no mesmo horário, pois essa pessoa não conseguiria comparecer em ambos dessa forma. Esse problema pode ser modelado em termos de grafos, com vértices representando eventos, e com arestas entre eventos distintos se eles conflitam entre si, como exemplificado. Vértices adjacentes (i.e eventos conflitantes) devem ser coloridos de cores diferentes (alocados para horários diferentes). Trata-se então de um problema de coloração de vértices.

Suponhamos que uma empresa de táxis tenha recebido  $n$  agendamentos de viagens, cada uma com um tempo de início e tempo de fim (quando o táxi está disponível para fazer outras viagens agendadas). O problema então consiste em alocar estas viagens de forma que o número mínimo de táxis seja necessário. Podemos modelá-lo em termos de grafos, com vértices representando viagens, e com arestas entre vértices distintos se essas viagens têm alguma interseção entre seus intervalos de tempo. Veículos diferentes devem ser alocados para viagens conflitantes. Então, o número mínimo de veículos necessários coincide com o número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo obtido. Novamente, temos um problema de coloração de vértices.

Também é possível modelar a alocação de registradores do processador para diferentes variáveis em uso em um programa de computador. Cada variável em um programa só é usada em uma certa seção no código. Semelhantemente aos problemas anteriores, consideramos as variáveis como vértices, que são adjacentes se há interseção entre os intervalos em que são usadas, configurando também um problema de coloração de vértices.

Consideremos agora a modelagem de um problema de comunicação entre sensores. Cada sensor pode se comunicar com somente um outro, que esteja próximo, num mesmo intervalo de tempo. Queremos que cada sensor tenha se comunicado com todos os sensores próximos de si depois de um intervalo de tempo que seja o menor possível. Com isso, podemos modelar sensores como vértices, com arestas ligando vértices se os sensores estão próximos o suficiente para que possam se comunicar entre si. Podemos pintar cada aresta com uma cor representando um certo intervalo de tempo que será utilizado para a comunicação entre os vértices (sensores) sobre os quais ela é incidente. Logo, arestas incidentes sobre um mesmo vértice precisam de cores diferentes. Portanto, encontrar o número mínimo de cores necessárias para colorir as arestas deste grafo é equivalente a encontrar o número mínimo de intervalos de tempo necessários para que todos os sensores adjacentes se comuniquem. Isso configura então um problema de coloração de arestas.



## 2 RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentadas as demonstrações dos dois principais resultados deste trabalho: a caracterização dos grafos bipartidos com até 3 bicliques, e a coloração total de alguns destes grafos.

### 2.1 Caracterização dos grafos bipartidos com até 3 bicliques

Para de fato apresentar uma coloração total da classe de grafos que propomos, é necessário primeiro caracterizá-los, isto é, de fato mostrar quais são e que características têm. Consideramos, para isto, o número de bicliques presentes no grafo (uma, duas, ou três), e as possíveis interseções entre elas. Observamos que cada interseção não pode ser vazia, pois consideramos somente grafos conexos, logo, pode conter somente vértices, ou tanto vértices quanto arestas. Observe que ao retirar vértices falsos gêmeos, a quantidade de bicliques não muda. Então vamos focar em grafos sem falsos gêmeos. Se  $G$  é um grafo sem falsos gêmeos, da classe de grafos proposta pelo presente trabalho, o Teorema 1 mostra que  $G$  é isomorfo a algum dos grafos representados nas Figuras 7, 8, 9, 10.

**Teorema 1.** *Seja  $G$  um grafo bipartido conexo com até três bicliques sem gêmeos falsos. Então  $G$  é isomorfo a um dos seguintes grafos:  $K_2$ ,  $P_4$ ,  $A$ ,  $P_5$  (Figuras 7, 8, 9, 10, respectivamente).*



Figura 7 – 1 biclique

Fonte: Autoria própria (2022).

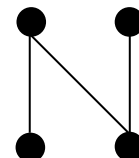


Figura 8 – 2 bicliques

Fonte: Autoria própria (2022).

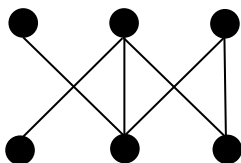


Figura 9 – 3 bicliques: grafo  $A$

Fonte: Autoria própria (2022).

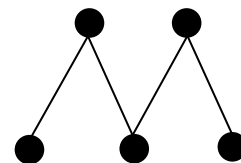


Figura 10 – 3 bicliques:  $P_5$

Fonte: Autoria própria (2022).

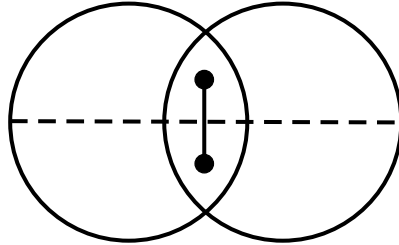
*Demonstração.* Consideremos os casos em que  $G$  tem 1, 2, ou 3 bicliques:

1. Suponhamos que  $G$  tenha exatamente uma biclique. Então  $G$  é bipartido completo, e seus conjuntos independentes são conjuntos de gêmeos falsos. Como  $G$  não tem gêmeos falsos por hipótese, concluímos que cada conjunto independente de  $G$  possui um único vértice; portanto,  $G$  é isomorfo ao  $K_2$ .

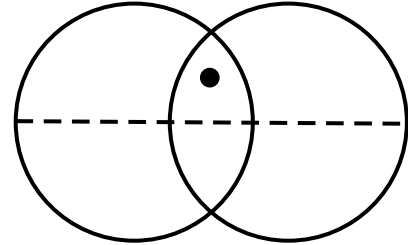
2. Suponhamos que  $G$  tenha exatamente duas bicliques, denotadas por  $H$  e  $J$ . Como  $G$  é conexo,  $H \cap J \neq \emptyset$ . Temos dois subcasos, esquematizados nas Figuras 11 e 12:

a)  $E(H) \cap E(J) \neq \emptyset$

b)  $E(H) \cap E(J) = \emptyset$

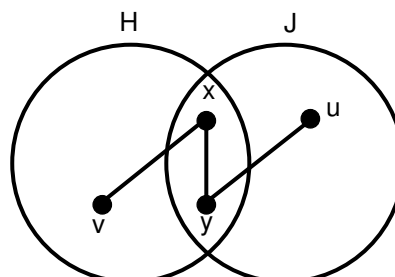


**Figura 11 – Subcaso a**  
Fonte: Autoria própria (2022).



**Figura 12 – Subcaso b**  
Fonte: Autoria própria (2022).

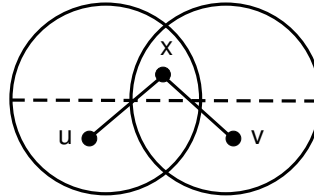
**Subcaso a:** Vamos mostrar que este subcaso é possível e caracterizar quais são os grafos deste subcaso. Sejam  $x$  e  $y$  vértices em  $V(H) \cap V(J)$ . Como  $G$  tem duas bicliques, então os grafos  $H' = G[V(H) \setminus V(J)]$  e  $J' = G[V(J) \setminus V(H)]$  são não-vazios. Logo, existe uma aresta  $xv$ , com  $v \in H'$  ou  $v \in J'$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $v \in H'$ . Se  $u \in J'$  é adjacente a  $x$ , então  $\{x, y, v, u\}$  induz um subgrafo bipartido completo incluso em alguma biclique diferente de  $H$  e  $J$ . Portanto, todo vértice  $u \in J'$  é adjacente a  $y$  (e portanto pertence a mesma parte que  $x$ ). Como  $J$  é uma biclique diferente de  $H$ , então existe um vértice  $u$  adjacente a  $y$ . Analogamente ao mencionado anteriormente, todo vértice de  $H'$  é adjacente a  $x$ . Consideremos agora vértice qualquer  $u \in H'$  e  $v \in J'$ . Se  $uv \in E(G)$ , o subgrafo induzido por  $\{x, y, u, v\}$  é um grafo bipartido completo que não é nem subgrafo de  $H$ , nem de  $J$ , o que é uma contradição. Logo,  $uv \notin E(G)$ . Como o grafo não tem gêmeos, então  $H'$  e  $J'$  só contém um vértice  $v, u$  respectivamente. Assim,  $G$  é isomorfo ao  $P_4$ , como ilustrado na Figura 13.



**Figura 13 – Caso 2: Solução**  
Fonte: Autoria própria (2022).

**Subcaso b:** Vamos mostrar que esse caso não pode acontecer. Como  $G$  é conexo, existe  $x \in V(H) \cap V(J)$ , assim como existem  $xu, xv \in E(G)$ , com  $v \in H'$  e  $u \in$

$J'$ . Mas o subgrafo induzido por  $\{x, u, v\}$  é um grafo bipartido completo que não é subgrafo de  $H$  ou  $J$ , contradição. Logo, qualquer grafo simples, conexo, e bipartido com 2 bicliques contém pelo menos uma aresta na interseção dessas bicliques. A Figura 14 ilustra o grafo obtido neste caso.

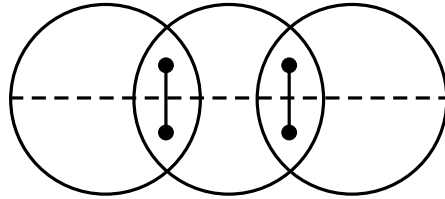


**Figura 14 – Caso 2: contradição**  
**Fonte: Autoria própria (2022).**

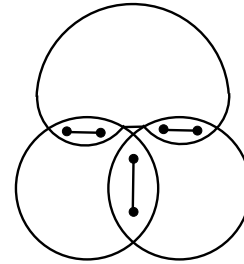
3. Suponhamos que  $G$  tenha exatamente 3 bicliques, denotadas por  $H$ ,  $J$ , e  $K$ . Temos 4 subcasos a considerar, esquematizados nas Figuras 15, 16, 17, 18:

- a)  $E(H) \cap E(J) \neq \emptyset, E(J) \cap E(K) \neq \emptyset, E(H) \cap E(K) = \emptyset$
- b)  $E(H) \cap E(J) \neq \emptyset, E(J) \cap E(K) \neq \emptyset, E(H) \cap E(K) \neq \emptyset, V(H) \cap V(J) \cap V(K) = \emptyset$
- c)  $V(H) \cap V(J) \cap V(K) \neq \emptyset, E(H) \cap E(J) \cap E(K) = \emptyset$
- d)  $E(H) \cap E(J) \cap E(K) \neq \emptyset$

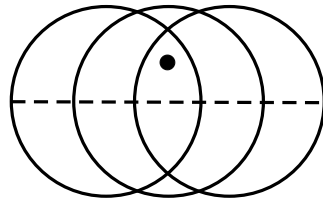
Pelo caso 2, os casos em que as bicliques têm interseção 2 a 2 apenas em vértices podem ser descartados.



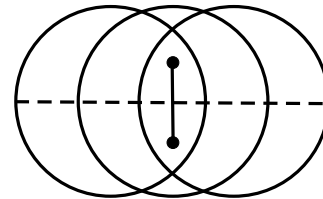
**Figura 15 – Subcaso a**  
 Fonte: Autoria própria (2022).



**Figura 16 – Subcaso b**  
 Fonte: Autoria própria (2022).

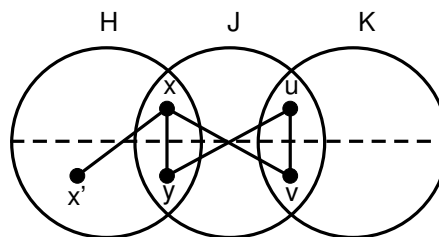


**Figura 17 – Subcaso c**  
 Fonte: Autoria própria (2022).



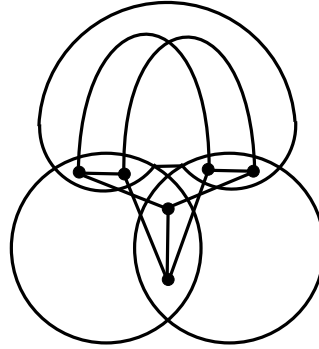
**Figura 18 – Subcaso d**  
 Fonte: Autoria própria (2022).

**Subcaso a:** Vamos mostrar que esse caso não pode acontecer. Seja  $xy$  uma aresta em  $E(H) \cap E(J)$ , e  $uv$  uma aresta em  $E(J) \cap E(K)$ . Existem as arestas  $xv$  e  $yu$ , pois  $J$  é biclique. Como existe pelo menos um vértice  $x'$  em  $H' = H \setminus J$ , então existe a aresta  $xx'$ , ou a aresta  $yx'$ . Então, o subgrafo induzido por  $\{x, y, x', v\}$  é um grafo bipartido completo que está incluído em alguma biclique diferente de  $H, J$  e  $K$ . Simetricamente provamos o mesmo para os vértices  $u$  e  $v$ . Então, não há grafos com 3 bicliques dessa forma. A Figura 19 ilustra o grafo obtido nesse caso.



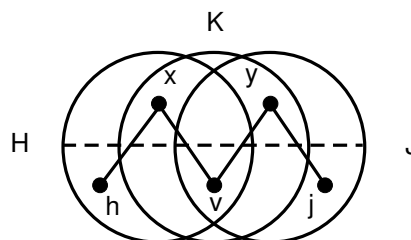
**Figura 19 – Subcaso a: contradição**  
 Fonte: Autoria própria (2022).

**Subcaso b:** Vamos mostrar que esse caso não pode acontecer. A demonstração é análoga à demonstração do subcaso a. Na Figura 20 está ilustrado o grafo obtido nesse caso.



**Figura 20 – Subcaso b: contradição**  
**Fonte: Autoria própria (2022).**

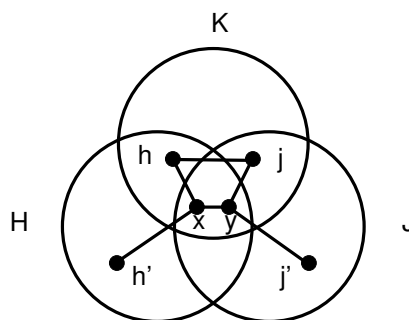
**Subcaso c:** Vamos mostrar que esse caso é possível e caracterizar quais são os grafos deste subcaso. Temos que os únicos elementos na interseção total dessas bicliques são vértices. Observe que todos esses vértices são biuniversais e da mesma parte e, como o grafo não tem gêmeos, só tem um vértice na interseção (chamemos de  $v$ ). Portanto,  $K = \{v\} \cup N_G(v)$ , onde  $N(v)$  é uma das partes de  $G$ . Observe que os vértices de  $V(J) \setminus V(K)$  não são adjacentes a nenhum vértice que não está em  $J$ , e portanto, são gêmeos entre eles. Novamente, como o grafo não tem gêmeos, somente pode existir um vértice nesse conjunto. O mesmo pode ser dito sobre  $V(H) \setminus V(K)$ . Como  $H$  é não-trivial, existe uma aresta  $xh$  em  $E(H)$ , e suponhamos, sem perda de generalidade, que  $x \in N_G(v)$ . Então  $x \in V(K)$ , e  $h \in V(H) \setminus V(K)$ . Analogamente, existe uma aresta  $yj$  em  $J$ , com  $j \in V(J) \setminus V(K)$ . Para terminar, basta observar que os vértices em  $V(H)$  adjacentes a  $v$  que não pertencem a  $J$  são gêmeos de  $x$ , pois não podem ser adjacentes a vértices de  $J$ . Analogamente, os vértices de  $J$  adjacentes a  $v$  que não pertencem a  $H$  são gêmeos de  $y$ . Portanto, como  $G$  não tem gêmeos, o grafo obtido é o da Figura 21, que é o grafo  $P_5$ .



**Figura 21 – Caso 3: Solução 1,  $P_5$**   
**Fonte: Autoria própria (2022).**

**Subcaso d:** Vamos mostrar que esse caso é possível, e caracterizar quais são os grafos deste subcaso. Seja  $xy$  uma aresta em  $E(H \cap J \cap K)$ , e sejam  $V_1$  e  $V_2$  as partes de  $G$ . Os vértices  $x, y$  são biuniversais em  $G$ , portanto,  $N_G(x), N_G(y)$  são as partes de  $G$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $V_1 = N(x)$ ,  $V_2 = N(y)$  e que  $G[\{x\} \cup N(x)]$  seja subgrafo de  $H$ , e  $G[\{y\} \cup N(y)]$  seja subgrafo de  $J$  (podemos supor que são bicliques diferentes, pois de outra forma, as duas partes

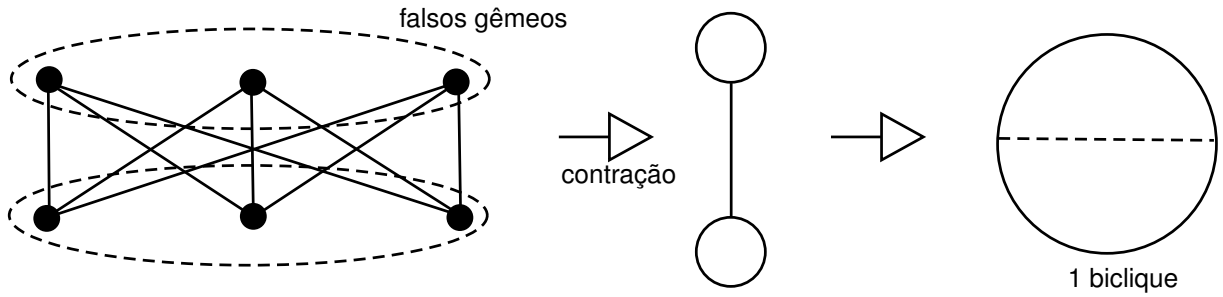
de  $G$  estariam contidas numa mesma biclique, e portanto  $G$  teria uma biclique só). Logo, não existe um vértice em  $K$  que não esteja também em  $H$  ou em  $J$ . Além disso, como em qualquer grafo bipartido, o grafo induzido por um vértice e sua vizinhança é sempre bipartido completo, então são subgrafos de uma biclique. Vamos mostrar que para cada interseção entre as bicliques, representadas na Figura 22, os vértices contidos nela são todos gêmeos, se estão na mesma parte de  $G$ . Temos que existem vértices nos conjuntos  $V(H \cap K \setminus J)$ ,  $V(J \cap K \setminus H)$ , pois de outra forma,  $K$  estaria inclusa em alguma entre  $H$  e  $J$ . Observamos que não pode existir nenhuma aresta de  $H \setminus (J \cup K)$  para  $G \setminus H$ , pois seria uma aresta que não está inclusa em nenhuma das três bicliques. Analogamente, o mesmo vale para a biclique  $J$ . Ademais, não existem vértices em  $V(H) \cap (V(J) \setminus V(K))$ , pois um vértice  $v$  nesse conjunto seria biuniversal no grafo  $H \cup J$ , e como esse grafo contém todos os vértices de ambas as partes de  $G$ ,  $v$  seria então biuniversal em  $G$ . Logo,  $v$  é gêmeo de  $x$  ou de  $y$ , e portanto está em  $K$ , contradizendo o fato de que  $v \in V(H) \cap (V(J) \setminus V(K))$ . Ainda, como  $G$  não contém vértices gêmeos, então não existe tal vértice  $v$ . Ainda, podemos notar que existe um vértice  $h' \in V(H) \setminus (V(J) \cup V(K))$ , pois  $H$  é diferente de  $K$ . Analogamente, existe um vértice  $j' \in V(J) \setminus (V(H) \cup V(K))$ . Podemos então concluir que, para  $i = 1, 2$ , todos os vértices em  $V(H) \cap V(K) \cap V_i$  são gêmeos entre si, assim como todos os vértices em  $V(J) \cap V(K) \cap V_i$ , pois estão na mesma biclique e não são adjacentes a nenhum vértice de fora dessas bicliques. Portanto, como seriam gêmeos, não existem. Além disso, como observado antes, todo vértice que está somente em  $H$  (ou somente em  $J$ ) não pode ser adjacente a um vértice fora de  $H$  ( $J$ ), portanto, todos os vértices nesses subgrafos seriam gêmeos, e também não existem.



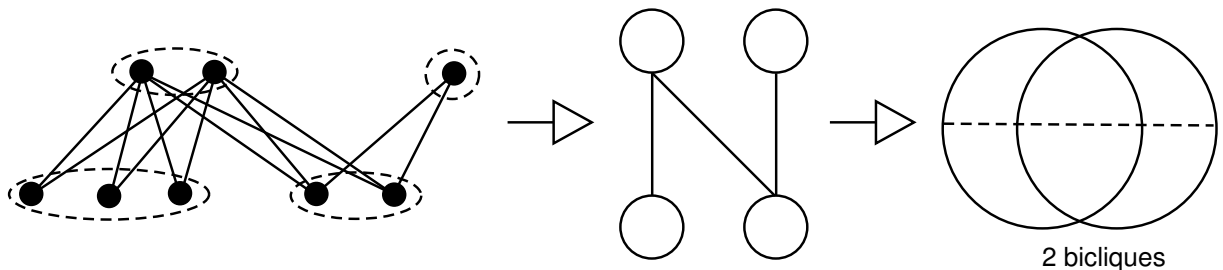
**Figura 22 – Caso 3: Solução 2, grafo  $A$**   
**Fonte: Autoria própria (2022).**

□

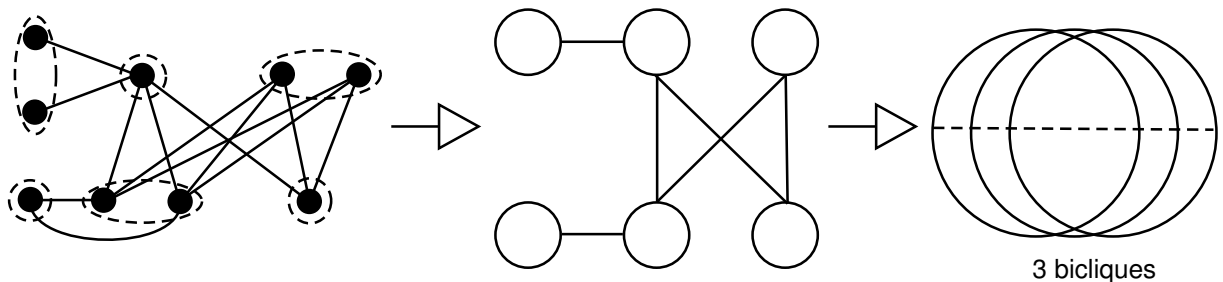
**Observação.** *Seja  $G$  um grafo bipartido conexo com até três bicliques. Seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  contraindo-se cada conjunto maximal de vértices gêmeos falsos num único vértice. Como  $G'$  é algum dos grafos mostrados nas Figuras 7, 8, 9, 10, temos que  $G$  é um dos grafos ilustrados nas Figuras 23, 24, 25, 26, onde identificamos cada conjunto de vértices gêmeos falsos, destacados pelas elipses tracejadas, por um círculo.*



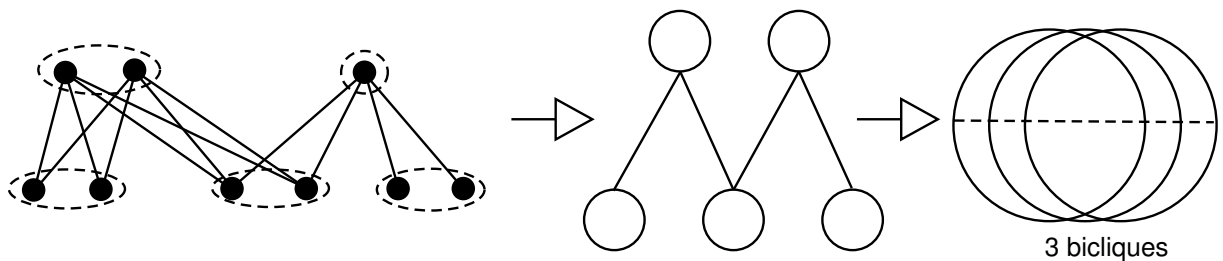
**Figura 23 –  $K_2$**   
**Fonte: Autoria própria (2022).**



**Figura 24 –  $P_4$**   
**Fonte: Autoria própria (2022).**



**Figura 25 – Grafo A**  
**Fonte: Autoria própria (2022).**



**Figura 26 –  $P_5$**   
**Fonte: Autoria própria (2022).**

## 2.2 Coloração total de alguns dos grafos caracterizados

Para a coloração total de alguns dos grafos bipartidos caracterizados na seção anterior, utilizamos os seguintes resultados da literatura.

**Teorema 2.** *Teorema de König: seja  $G$  um grafo bipartido. Então  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*  $\square$

**Corolário 2.1.** *Se  $G$  é um grafo bipartido com  $\Delta$ -vértices em só uma das partes, então  $G$  é Tipo 1.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2, existe uma  $\Delta(G)$ -coloração das arestas de  $G$ . Seja  $L$  a parte de  $G$  que contém os  $\Delta$ -vértices de  $G$ . Podemos colorir  $L$  com a cor  $\Delta(G) + 1$ . Seja  $R$  a outra parte de  $G$ . Vale que  $\forall v \in R, d(v) < \Delta(G)$ . Então, para cada vértice  $v$  de  $R$  há uma cor faltando em  $v$ , a qual pode ser utilizada para colorir  $v$ .  $\square$

**Teorema 3.** (HILTON, 1991) *Seja  $G = (L \cup R, E(G))$  um grafo bipartido. Se  $G$  tem vértices biuniversais adjacentes, então é Tipo 2 se e somente se  $G$  é equibipartido e  $|E(\overline{G})| + \mu(\overline{G}) \leq n - 1$ , onde  $n = |L| = |R|$  e  $\overline{G} = K_{n,n} \setminus G$ .*  $\square$

A construção de uma coloração total ótima de muitos grafos com até três bicliques já segue diretamente do Corolário 2.1 e do Teorema 3. Dos grafos do Teorema 1, apenas os grafos da forma da Figura 10 ( $P_5$  após a remoção sucessiva de gêmeos falsos) não são cobertos por esses resultados, como veremos na sequência.

**Corolário 3.1.** *Se  $G$  é um grafo conexo, bipartido, com até 3 bicliques, mas não isomorfo ao  $P_5$  após a remoção sucessiva de falsos gêmeos, então  $G$  é Tipo 2 se e somente se  $G$  é equibipartido e  $|E(\overline{G})| + \mu(\overline{G}) \leq n - 1$ , onde  $n = |L| = |R|$  e  $L$  e  $R$  são as partes de  $G$ .*

*Demonstração.* Se, após a remoção sucessiva de falsos gêmeos, o grafo obtido é um  $K_2$  (Figura 7), ou um  $P_4$  (Figura 8), ou um grafo  $A$  (Figura 9), é direto verificar que  $G$  possui vértices biuniversais adjacentes, os  $\Delta$ -vértices de  $G$  estão todos em uma mesma parte da bipartição.  $\square$

Basta agora colorir os grafos que são isomorfos ao  $P_5$  após a remoção de falsos gêmeos e que possuem  $\Delta$ -vértices em ambas as partes da bipartição. Denotemos os conjuntos de vértices gêmeos em  $G$  por  $A, B, C, D, E$ , conforme na Figura 27, de cardinalidades  $a, b, c, d, e$  respectivamente. Primeiramente, notamos que  $\Delta$ -vértices só podem ocorrer nos conjuntos  $B, C, e D$ , pois os vértices nesses conjuntos têm grau estritamente maior do que os vértices nos conjuntos  $A$  e  $E$ , uma vez que nenhum desses conjuntos é vazio. Então, sem perda de generalidade, podemos considerar dois casos:

1. os  $\Delta$ -vértices ocorrem somente em  $B$  e  $C$ ;
2. os  $\Delta$ -vértices ocorrem em  $B, C, e D$ .

Trataremos, por fim, de subcasos do caso onde  $\Delta$ -vértices ocorrem somente em  $B$  e  $C$ . Este caso está esquematizado na Figura 27.



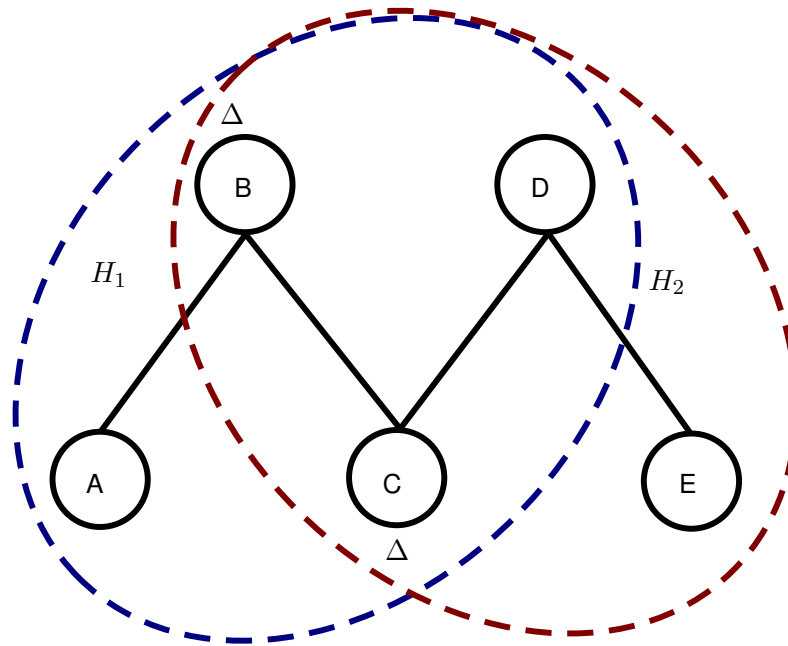


Figura 27 –  $\Delta$ -vértices em  $B$  e  $C$   
 Fonte: Autoria própria (2022).

Para a apresentação do nosso resultado principal, vamos utilizar o seguinte resultado sobre colorações de arestas por listas de grafos bipartidos.

**Teorema 4.** (GALVIN, 1991) *O índice de selecionabilidade de todo grafo bipartido é igual ao seu índice cromático.*

**Teorema 5.** *Seja  $G$  um grafo isomorfo a  $P_5$  após a remoção de vértices falsos gêmeos, cujos conjuntos de vértices falsos gêmeos são como na Figura 27 supondo  $a \geq e$  sem perda de generalidade.*

1. *Se  $b + d \neq c + a$ , então  $G$  é Tipo 1.*
2. *Se  $b + d = c + a > ad + \min(a, d)$ , então  $G$  possui um  $\Delta$ -subgrafo com vértices biuniversais adjacentes e, portanto, é Tipo 2.*
3. *Se  $b + d = c + a \leq ad + \min(a, d)$  e  $a > \max(d, e)$ , então  $G$  é Tipo 1.*

*Demonstração.* Vamos primeiro provar (1). Como  $a \geq e$ , se  $b + d < c + a$ , então os  $\Delta$ -vértices de  $G$  ocorrem apenas em  $B \cup D$ , e, portanto, o teorema segue do Corolário 2.1.

Daqui em diante, vamos supor que  $b + d = c + a$ , o que implica  $\Delta = b + d = c + a$ , havendo  $\Delta$ -vértices em  $B$ , em  $C$ , e, se  $a = e$ , também em  $D$ . Seja  $H_1 = G[A \cup B \cup C \cup D]$ , como na Figura 27. Podemos observar que  $H_1$  é um  $\Delta$ -subgrafo de  $G$ , é equibipartido, seu complemento bipartido tem  $ad$  arestas, conforme esquematizado na Figura 28, e o tamanho do maior emparelhamento em seu complemento bipartido é  $\min(a, d)$ . Logo, pelo Teorema 3 (HILTON, 1991),  $H_1$  é Tipo 2 se e somente se  $ad + \min(a, d) < \Delta(H_1) = \Delta(G) = \Delta$ . Se  $H_1$  é

Tipo 2, é imediato que  $G$  também é Tipo 2, pois  $H_1$  é um  $\Delta$ -subgrafo de  $G$ . Assim, concluímos a demonstração de (2).

Vamos agora provar (3). Como  $b + d = c + a \leq ad + \min(a, d)$ , sabemos que  $H_1$  é Tipo 1. Ainda, como  $a > d$ , temos  $ad + \min(a, d) = ad + d$  e, portanto, que  $b + d \leq ad + d$  implica  $ad \geq b$ . Basta agora estender a coloração total  $\phi$  com  $\Delta + 1$  cores de  $H_1$  para uma coloração total com  $\Delta + 1$  cores de  $G$ . Seja  $X = G[D \cup E]$ , um grafo bipartido, conforme a Figura 29. Para cada  $v \in D$ , o conjunto  $\{\phi(uv) : v \in D\} \cup \{\phi(v)\}$  é o conjunto das  $c + 1$  cores que estão proibidas para usarmos nas arestas de  $X$  incidentes em  $v$ . Portanto, para todo  $v \in D$ , ainda restam  $\Delta + 1 - (c + 1) = a$  cores que podem ser usadas para colorir as arestas de  $X$  incidentes em  $v$ . Escolhemos agora uma cor atribuída a um vértice arbitrário de  $C$  e atribuímos essa cor a todos os vértices de  $E$ . Como todos os vértices em  $D$  são vizinhos do vértice em  $C$  escolhido, a atribuição dessa cor a todos os vértices de  $E$  não cria conflito de cor entre os vértices em  $D$  e em  $E$ . Com isso, temos agora, para cada  $v \in D$ , um conjunto  $L(v)$  de pelo menos  $a - 1 \geq \max(d, e)$  cores que podem ser utilizadas para colorir as arestas de  $X$  incidentes em  $v$ . Atribuindo a lista  $L(v)$  a todas as arestas de  $X$  incidentes em  $v$ , obtemos uma coloração de todas as arestas de  $X$  por (GALVIN, 1991), pois  $a - 1 \geq \max(d, e) = \Delta(X)$ .

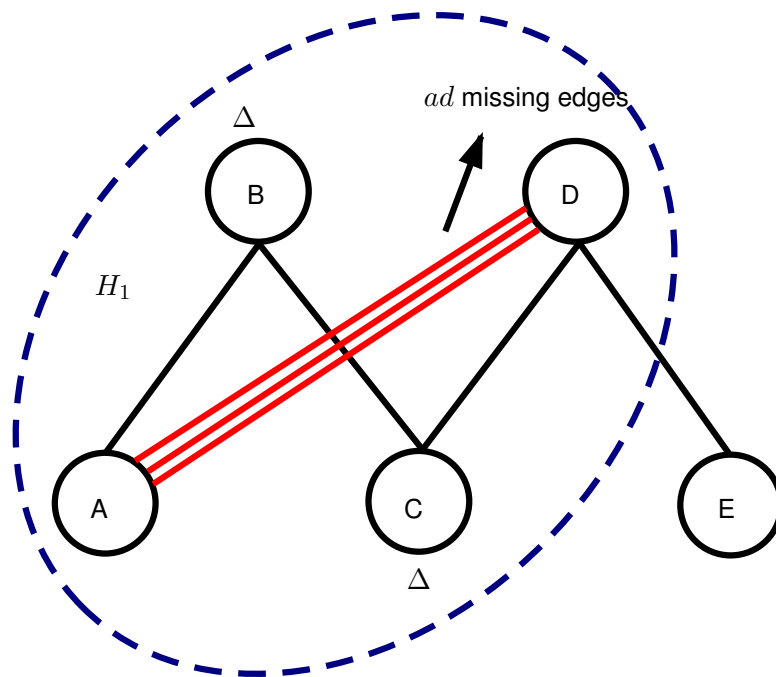


Figura 28 – Arestas faltantes em  $G$

Fonte: Autoria própria (2022).

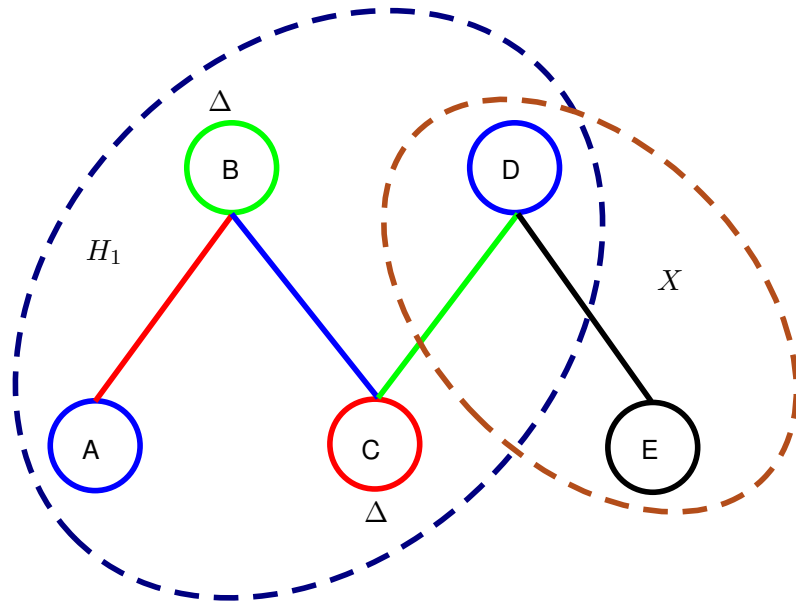


Figura 29 – Subgrafo não colorido  $X$   
Fonte: Autoria própria (2022).

□

### 3 CONCLUSÃO

Sumarizaremos os resultados obtidos no trabalho em tabelas, na sequência. Os resultados também foram apresentados no *10th Latin-American Workshop on Cliques in Graphs* (MONTANHEIRO; ZATESKO; GROSHAUS, 2022).

#### 3.1 Caracterização dos grafos bipartidos com até três bicliques

A caracterização da classe de grafos proposta, com os subcasos presentes na demonstração, é dada na Tabela 1.

**Tabela 1 – Caracterização dos grafos da classe proposta**

Número de bicliques	Subcaso	Grafo associado
1	-	$K_2$
2	Existem arestas na interseção das bicliques	$P_4$
	Não existem arestas na interseção das bicliques	Este caso não é possível
3	Duas bicliques disjuntas intersectam a terceira, e existem arestas nessas interseções	Este caso não é possível
	Cada biclique intersecta as demais, não existe interseção tripla, e existem arestas nas interseções	Este caso não é possível
	Existe interseção tripla entre as bicliques, e não existem arestas nessa interseção	$P_5$
	Existe interseção tripla entre as bicliques, e existem arestas nessa interseção	Grafo $A$
	Existem interseções dois a dois entre as bicliques que não contêm arestas	Este caso não é possível

Fonte: Autoria própria (2022).

#### 3.2 Coloração total dos grafos bipartidos com até três bicliques

A Tabela 2 classifica os grafos desta classe quanto à presença de vértices biuniversais.

**Tabela 2 – Grafos da classe proposta quanto à presença de vértices biuniversais**

Grafo	Possui vértices biuniversais adjacentes
Grafo bipartido completo	Sim
Grafos isomorfos ao $P_4$ após a remoção sucessiva de vértices falsos gêmeos	Sim
Grafos isomorfos ao grafo $A$ após a remoção sucessiva de vértices falsos gêmeos	Sim
Grafos isomorfos ao $P_5$ após a remoção sucessiva de vértices falsos gêmeos	Não

Fonte: Autoria própria (2022).

A Tabela 3 classifica o número cromático total dos grafos semelhantes ao  $P_5$ , de acordo com condições sobre as cardinalidades dos conjuntos de vértices falsos gêmeos, utilizando a notação definida na Seção 2.2.

**Tabela 3 – Classificação dos grafos isomorfos ao  $P_5$  após a remoção sucessiva de vértices falsos gêmeos quanto ao número cromático total**

Subcaso	Tipo
$b + d \neq c + a$	Tipo 1
$b + d = c + a > ad + \min(a, d)$	Tipo 2
$b + d = c + a, \max(d, e) < a, \text{ e } ad \geq b$	Tipo 1
$b + d = c + a \leq ad + \min(a, d)$ e ou $d \geq a$ , ou $a = e > d$	Em aberto

**Fonte: Autoria própria (2022).**

O problema permanece aberto para os casos onde  $b + d = c + a \leq ad + \min(a, d)$  e ou  $d \geq a$ , ou  $a = e > d$ . Uma proposta para um trabalho futuro sobre este problema é a de não só completar a demonstração para os casos restantes, como também a de reformular a demonstração da classificação do número cromático dos subcasos já classificados utilizando subgrafos de um grafo semelhante a  $P_5$  em que  $a = b = c = d = e$ .

Neste trabalho, propusemos a seguinte conjectura:

**Conjectura 1.** *Um grafo bipartido  $G$  com no máximo três bicliques é: Tipo 2 se  $G$  tem algum  $\Delta$ -subgrafo Tipo 2 com vértices biuniversais adjacentes; senão é Tipo 1.*

Essa conjectura tem como base o fato de que no caso dos grafos split-indiferença, que são grafos que possuem até três cliques, vale que um grafo  $G$  é Tipo 2 se e somente se  $G$  possui um  $\Delta$ -subgrafo com vértice universal que é Tipo 2 (CAMPOS *et al.*, 2012). Desta forma, nossa conjectura propõe que algo semelhante ocorre para grafos bipartidos, considerando bicliques em lugar de cliques, e vértices biuniversais em lugar de vértices universais. O Teorema 5 configura evidência para nossa conjectura, pois para todos os casos provados por esse teorema, os grafos Tipo 2 apresentam  $\Delta$ -subgrafos com vértices biuniversais adjacentes Tipo 2.

## REFERÊNCIAS

- AARONSON, S. **P vs. NP for Dummies**. 2010. Disponível em: <https://scottaaronson.blog/?p=459>.
- APPEL, K.; HAKEN, W. Every planar map is four colorable. part i: Discharging. **Illinois J. Math.**, University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics, v. 21, n. 3, p. 429–490, 09 1977. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049011>.
- APPEL, K.; HAKEN, W.; KOCH, J. Every planar map is four colorable. part ii: Reducibility. **Illinois J. Math.**, University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics, v. 21, n. 3, p. 491–567, 09 1977. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049012>.
- BEHZAD, M. **Graphs and their chromatic numbers**. 1965. Tese (Doutorado) — Michigan State University, 1965.
- BEHZAD, M.; CHARTRAND, G.; COOPER, J. J. K. The colour numbers of complete graphs. **London Mathematical Society**, 1967.
- BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory**. 1st. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. ISBN 1846289696.
- BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. *In: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.: s.n.], 1941.
- CAMPOS, C. *et al.* The total chromatic number of split-indifference graphs. **Discrete Mathematics**, v. 312, n. 17, p. 2690–2693, 2012. ISSN 0012-365X. Proceedings of the 8th French Combinatorial Conference. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X12000337>.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. Chromatic graph theory. CRC Press, 2008.
- DIESTEL, R. **Graph Theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2000.
- GALVIN, F. The list chromatic index of a bipartite multigraph. **Journal of Combinatorial Theory**, v. 63, p. 153–158, 1991. ISSN 0095-8956.
- HILTON, A. A total-chromatic number analogue of plantholt's theorem. **Discrete Mathematics**, v. 79, n. 2, p. 169–175, 1990. ISSN 0012-365X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X9090031C>.
- HILTON, A. J. W. The total chromatic number of nearly complete bipartite graphs. **Journal of Combinatorial Theory**, 1991.
- KUBALE, M. **Graph Colorings**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2004.
- LEWIS, R. M. R. **Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2021.
- MCDIARMID, C. J.; SANCHEZ-ARROYO, A. Total colouring regular bipartite graphs is np-hard. *In: NORTH-HOLLAND (Ed.). Discrete Mathematics*. [S.l.: s.n.], 1941.
- MONTANHEIRO, G. L.; ZATESKO, L. M.; GROSHAUS, M. E. On total colouring bipartite graphs with at most three bicliques. *In: Proc. X Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG '22)*. Curitiba: [s.n.], 2022. p. 48. Disponível em: [https://www.lawcg.mat.br/lawcg22/LAWCG\\_2022\\_book\\_of\\_abstracts.pdf](https://www.lawcg.mat.br/lawcg22/LAWCG_2022_book_of_abstracts.pdf).

ROBERTSON, N. *et al.* A new proof of the four-colour theorem. **Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society (AMS), v. 02, n. 01, p. 17–26, jan. 1996.

VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph (in Russian). **Diskret. Analiz.**, v. 3, p. 25–30, 1964.

VIZING, V. G. Some unsolved problems in graph theory. **Russian Math. Surveys**, v. 23, p. 125–141, 1968.

ZATESKO, L. M. **Novel Procedures for Graph Edge-Colouring**. 2018. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2018.