UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PPGMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARIA JOSÉ FAGUNDES BARBOSA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O TEOREMA DE TALES

DISSERTAÇÃO

LONDRINA

2018

MARIA JOSÉ FAGUNDES BARBOSA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O TEOREMA DE TALES

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Profª. Drª. Claudete Cargnin

LONDRINA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

B238s Barbosa, Maria José Fagundes
Uma sequência didática para o Teorema de Tales / Maria José Fagundes Barbosa – Londrina: [s.n.], 2018.
100 f. : il.; 30 cm.

Orientador: Prof.ª Dr.ª Claudete Cargnin
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2018.
Bibliografia: f. 97-100

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Ensino Fundamental. 3. Didática. I. Cargnin, Claudete, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Simone Cristina Menolli – CRB 9/1500

TERMO DE APROVAÇÃO

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O TEOREMA DE TALES

por

Maria José Fagundes Barbosa

Esta Dissertação foi apresentada em 09 de julho de 2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

____
Claudete Cargnin
Profª. Orientadora

____
Veridiana Rezende
Membro titular

____
Eliane Maria de Oliveira Araman
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática –

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação de mestrado é o resultado de um grande sonho que se tornou realidade com o apoio de várias pessoas.

Em primeiro lugar, não posso deixar de agradecer a minha orientadora, Professora Doutora Claudete Cargnin, por toda a paciência, estímulo, motivação e empenho que sempre dedicou ao me orientar neste trabalho e em todos aqueles que realizei durante os seminários de mestrado. Agradeço, especialmente, por ter me corrigido em momentos que me desmotivei, sempre me incentivando a prosseguir.

Agradeço a minha mãe Luciana, por me apoiar durante toda a minha vida, sendo o meu exemplo a ser seguido e por me suportar nos momentos de dificuldade.

Agradeço ao meu esposo Luiz Alfredo, por sempre me apoiar nos meus sonhos, sendo sempre o esteio incondicional de que necessitei.

Gostaria de deixar registrado, também, o meu reconhecimento aos meus filhos Miguel e Maria Luiza que sempre tiveram paciência em todos esses momentos em que não estive presente, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que, por algum motivo, contribuíram para a realização desta pesquisa.

Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar possibilidades para a sua
própria produção ou construção.

(PAULO FREIRE, 2003)

RESUMO

BARBOSA, Maria José Fagundes. **Uma Sequência Didática para o Teorema de Tales.** 2018. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

Esta pesquisa teve por objetivos elaborar, aplicar e avaliar uma sequência didática, com tarefas relativas ao Teorema de Tales, direcionadas ao nono ano do Ensino Fundamental, em que a gradual utilização de conceitos, o diálogo entre estudantes e o trabalho em equipe atuassem como facilitadores à aquisição da aprendizagem do tema. Focou-se na seguinte questão de pesquisa: "*Uma sequência de tarefas criada para apropriação gradativa de conteúdos na qual o aluno tenha acesso a diferentes recursos para resolver as questões que lhe são propostas proporciona a aprendizagem do Teorema de Tales*?" A sequência didática foi implementada em uma turma com 30 alunos do 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola do município de Curiúva, Paraná, no período de agosto a setembro de 2017. Utilizou como Metodologia de Pesquisa a Engenharia Didática e as tarefas foram elaboradas fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. Como instrumentos de coleta de dados foram utilizadas as resoluções das tarefas realizadas pelos alunos e suas manifestações, anotadas num diário de campo pela professora-pesquisadora no decorrer da pesquisa. A análise das respostas discentes indicou que a sequência didática proposta contribuiu para que eles diferenciassem os conceitos de reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas e transversais, bem como a compreensão do conceito de razão e proporção, que culminaram na aprendizagem do Teorema de Tales, comprovada pela avaliação que eles realizaram ao final da implementação. Indicou também maior motivação e envolvimento na realização das tarefas, percepção sobre a importância da Matemática e sua presença no cotidiano. Dificuldades de realizar trabalhos em dupla, de justificar suas respostas usando a língua natural e de mobilizar conhecimentos prévios como os conceitos de razão e proporção foram sendo minimizadas ao longo da implementação das tarefas em sala de aula. Reformulações na sequência didática foram realizadas a partir desta experimentação e compuseram um produto educacional chamado de "Tarefas para revisar pré-requisitos e estudar o Teorema de Tales" (apêndice dessa dissertação). Nas considerações finais e, particularmente, no produto educacional, são feitas recomendações aos professores que quiserem usar este material como, por exemplo, adequar as tarefas as suas necessidades e cuidados na abordagem de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Ensino de Matemática. Teoria das Situações Didáticas. Teorema de Tales. Sequência Didática.

ABSTRACT

BARBOSA, Maria José Fagundes. **A Didactic Sequence for the Thales Theorem.** 2018. 129 f. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

The purpose of this research was to elaborate, apply and evaluate a didactic sequence with tasks related to the Tales' Theorem, and directed to the ninth year of elementary school, in which the gradual use of concepts, dialogue between studentes and teamwork facilitate the acquisition of learning about the theme. It focused on the following research question: *"A sequence of tasks created for gradual appropriation of contents in which the student has access to different resources to solve the questions that are proposed provides the learning of the Tales' Theorem?"* The didactic sequence was implemented in a class with 30 students of the 9th grade of elementary school from a school in the municipality of Curiúva, Paraná, from August to September of 2017. It used Didactic Engineering as a Research Methodology and the tasks were elaborated based on Guy Brousseau's Theory of Didatical Situations (TSD). As data collection instruments were used: the resolutions of the tasks performed by the students and their manifestations, annotated in a field diary by the teacher-researcher in the course of the research. The analysis of the students' responses indicated that the proposed didactic sequence contributed to their differentiation between the concepts of straight, semirect, straight line, parallel and transverse lines, as well as the concept of reason and proportion, which culminated in the learning of the Tales' Theorem, proved by the evaluation they performed at the end of the implementation. It also indicated greater motivation and involvement in the accomplishment of tasks, perception about the importance of Mathematics and its presence in daily life. Difficulties in doing work in pairs, in justifying their answers using natural language and mobilizing prior knowledge as the concepts of reason and proportion were minimized throughout the implementation of the tasks in the classroom. Reformulations in the didactic sequence were carried out from this experimentation and composed an educational product called "Tasks to revise prerequisites and to study the Tales' Theorem" (appendix of this dissertation). In the final considerations, and particularly in the educational product, recommendations are made to teachers who want to use this material, such as adjusting their tasks to their needs and care in the approach to mathematical concepts.

Keywords: Elementary School. Mathematics Teaching. Theory of Didactic Situations. Theorem of Tales. Following Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde o início de minha carreira docente, há 23 anos, sempre observei como os alunos aprendiam, independentemente da etapa escolar em que estavam inseridos, e refletia como eu poderia ajudá-los nesse processo. Diante deste interesse, busquei novos conhecimentos mediante a participação em diversos cursos, visando encontrar maneiras de aprimorar a minha prática pedagógica e, consequentemente, a aprendizagem dos meus alunos.

No decorrer de minha carreira, atuei em todos os níveis da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e pude interagir com as mais diversas realidades, observei que todos estes níveis possuem dificuldades de aprendizagem, porém, de acordo com a faixa etária dos alunos, pode ser maior ou menor, dependendo do domínio de pré-requisitos. Percebi também a necessidade de uma mudança de concepção na prática pedagógica dos professores; de uma prática tradicional para uma que privilegie a participação ativa dos alunos no processo de aquisição de seu conhecimento, tornando-os agentes ativos em vez de apenas reproduzir o que lhes era passado pelo seu professor.

Ao inserir-me como Professora de Matemática dos anos Finais do Ensino Fundamental, esta realidade manifestou-se de maneira mais contundente, pois observei que meus alunos não aprendiam realmente, apenas reproduziam os conceitos que eu lhes transmitia.

Diante disto, sempre me sentia frustrada, pois embora quisesse utilizar recursos diversificados em minhas aulas, as dificuldades em relação ao funcionamento de equipamentos, por exemplo, e sua disponibilidade representavam transtornos maiores que a pouca aprendizagem dos meus alunos. Durante um período de 5 anos dediquei-me às aulas, sem nenhuma inovação, realizando, porém, diversas leituras sobre as mudanças que estavam sendo cada vez mais necessárias, pois a realidade vivenciada em sala distanciava-se da vivenciada pelos alunos em seu cotidiano, principalmente em relação à utilização de recursos tecnológicos.

No ano de 2015, realizei o Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) do Estado do Paraná, momento em que tive contato com professores inseridos no Ensino Superior, acesso a novas práticas pedagógicas e novas teorias, as quais despertaram a minha necessidade de continuar estudando para, consequentemente, melhorar minha atuação como professora, visando à melhoria da aprendizagem de meus alunos. Percebi a necessidade de buscar novas metodologias referentes à minha atuação em sala de aula, pois meu modo de trabalhar encontrava-se centrado em conteúdos ensinados de forma abstrata e mecânica, que não estavam inseridos em seus cotidianos.

Ao iniciar, em 2016, o curso de mestrado em Ensino de Matemática, participei da disciplina Didática da Matemática, realizei leituras referentes às teorias de aprendizagem e tive o primeiro contato com a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, que me possibilitou encontrar uma alternativa para a insatisfação que me acompanhava em relação às práticas pedagógicas desenvolvidas em sala de aula, pois a teoria tem como objeto de estudo as relações que ocorrem entre o professor, o aluno e o saber.

Diante disto, comecei a realizar pesquisas e verifiquei que o Teorema de Tales é um conteúdo com aplicabilidade no cotidiano e dentro da própria Matemática, e que, no entanto, era pouco explorado no ambiente escolar, pois, em geral, seu ensino limitava-se apenas à resolução de exercícios mecânicos em sala de aula. Além disso, representava um desafio para mim. Esta foi a motivação que me levou à escolha do tema da dissertação: acreditei que eu pudesse elaborar uma sequência de tarefas que pudessem fazer o aluno “enxergar” a utilidade do Teorema de Tales.

Dentro da minha realidade, as situações de aprendizagem que permeiam o ensino de Matemática têm sido baseadas em tarefas que se restringem à disponibilização de modelos e posterior “lista de exercícios”, sem nenhuma interpretação do aluno ou relação com um conhecimento prévio, corroborando com Miguel (2011, p. 6): “a ênfase exagerada no simbolismo lógico - formal da Matemática reforça a tendência pedagógica de ‘passar conteúdo’ em detrimento de um processo de construção do saber matemático. ”

O Teorema de Tales é um conteúdo com diversas aplicações, porque apresenta conceitos relacionados à semelhança de figuras geométricas, proporcionalidade, paralelismo, trigonometria, entre outros. Uma das aplicações práticas do teorema refere-se ao cálculo de distâncias inacessíveis. Pode ser aplicado em contextos da Biologia, Física, Arquitetura e em diversas situações do cotidiano. Destaca-se, porém, que mesmo diante da grande importância e aplicabilidade do Teorema de Tales, as abordagens pedagógicas utilizadas pelos docentes restringem-se, na maioria das vezes, às situações propostas pelos livros didáticos, as quais nem sempre possibilitam que os estudantes vivenciem, de fato, o significado do que está sendo estudado.

Vivemos um momento de transformações na sociedade e, consequentemente, no ambiente escolar, que nem sempre se reflete nas abordagens metodológicas utilizadas pelos professores em sua prática. As inovações tecnológicas que estão ao alcance de nossos alunos em seu dia a dia não se propagam na escola, pois, embora muitas delas possuam um Laboratório de Informática, os equipamentos encontram-se sucateados, o acesso à *internet* é lento e insuficiente e a formação direcionada ao professor para seu manuseio é quase inexistente. Estes são alguns dos diversos obstáculos que os professores encontram ao tentar inovar suas aulas com o auxílio de recursos tecnológicos.

Embora as dificuldades encontradas causem desânimo, destaca-se que há um processo paulatino de transformação no que se refere à prática, uma vez que os professores estão refletindo sobre ela e buscando “novas” metodologias, que auxiliem em seu dia a dia na sala de aula, por meio de cursos de formação continuada, inserção em cursos de especialização e programas de mestrado, diversificação em suas leituras, entre outros.

Neste contexto, procurando contribuir para esse processo de ressignificação da prática escolar, esta dissertação apresenta uma sequência didática com tarefas que buscam resgatar os conhecimentos prévios dos alunos para fazê-los avançar em direção a um novo conhecimento (Teorema de Tales), usando celular, dicionário, vídeos e situações do cotidiano como recursos para dinamizar e tornar mais atrativas as aulas de Matemática. Além disso, as tarefas pressupõem a autonomia do estudante em relação à resolução do que lhe é proposto, sem, no entanto, perder de vista o objeto de estudo (Teorema de Tales).

Dessa forma, esta dissertação tem por objetivos elaborar, aplicar e avaliar uma sequência didática, com tarefas relativas ao Teorema de Tales, direcionadas ao nono ano do Ensino Fundamental, em que a gradual utilização de conceitos, o diálogo entre estudantes e o trabalho em equipe atuem como facilitadores à aquisição da aprendizagem do tema.

Para atingir esses objetivos, essa pesquisa foi desenvolvida com a seguinte questão-problema:

"*Uma sequência de tarefas criada para apropriação gradativa de conteúdos na qual o aluno tenha acesso a diferentes recursos para resolver as questões que lhe são propostas proporciona a aprendizagem do Teorema de Tales*?"

Esta dissertação utiliza a Teoria das Situações Didáticas como fundamentação teórica e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Está estruturada em cinco seções, sendo a primeira delas a introdução, que descreve a motivação da pesquisa e enuncia a problemática e os objetivos. A segunda seção expõe noções da Teoria das Situações Didáticas (TSD) que serão utilizadas no decorrer das análises das tarefas, assunto da seção quatro. Ainda na segunda seção são apresentadas perspectivas históricas sobre o ensino do Teorema de Tales, as quais serviram de referência para a elaboração da nossa proposta. A seção três é destinada à Metodologia de pesquisa e Coleta de Dados. Nela, são descritos a Engenharia Didática e dados sobre a aplicação da sequência de tarefas e o público-alvo. As considerações finais são apresentadas na seção 5. Em seguida, apresentam-se as referências. O Produto Educacional referente a esta dissertação encontra-se no Apêndice A.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, inicialmente apresentamos uma breve biografia de Guy Brousseau, autor da Teoria das Situações Didáticas, bem como os principais elementos desta teoria. Em seguida, destacamos um pouco da história de Tales de Mileto e as origens do denominado Teorema de Tales.

2.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS[1]

2.1.1 Biografia do Autor

Guy Brousseau nasceu em 1933, no Marrocos e, desde muito jovem, demonstrou interesse em Matemática e Física. Visando estudar a forma como as crianças adquirem seus conhecimentos matemáticos, abandonou o curso de Matemática Superior para realizar um ano de formação profissional na Escola Normal de Agen, no sudoeste da França (BROUSSEAU, 2008).

Com 20 anos, iniciou seu trabalho de professor. Em 1958, durante o serviço militar, na Argélia, elaborou fichas e lições de matemática que eram propostas aos professores de matemática da época. Em 1962, em Bordeaux, retornou aos estudos de Matemática Superior na universidade.

Em 1964, propôs a criação, no Centro Regional de Documentação Pedagógica de Bordeaux, de um Centro de Pesquisa do Ensino de Matemática (CREM). Após a criação do CREM, e com a ajuda de universitários e professores da Escola Normal, publicou cadernos destinados aos professores que propunham inovações em suas práticas.

Em 1970, assumiu o posto de assistente de matemática na Universidade de Bordeaux, já sendo, neste período, licenciado em Matemática. No mesmo ano, em um congresso dos Professores de Matemática do Ensino Público de Clermont-Ferrand, apresentou os primeiros elementos da Teoria das Situações Didáticas.

[1] Texto baseado em Brousseau (2008).

Nos anos finais da década de 1970, Brousseau passou a desempenhar um papel importante no desenvolvimento da didática da matemática como disciplina científica, sendo sua contribuição essencial a Teoria das Situações Didáticas que vem sendo atualizada e aperfeiçoada, procurando rever a forma de ensino e aprendizagem da Matemática. Os principais elementos da TSD são apresentados na próxima seção.

2.1.2 Características da Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas originou-se em uma época em que o processo de ensino e aprendizagem eram dominados pela visão cognitivista, com a influência da Epistemologia de Piaget. A teoria, considerada uma referência na área da Educação Matemática, apresenta um enfoque diferenciado de Piaget: a compreensão de que as interações sociais dos alunos, professores e conhecimentos matemáticos que ocorrem em uma sala de aula permitem a construção do conhecimento (BROUSSEAU, 2008, p. 11). Artigue (2002) ressalta que a teoria das situações didáticas (TSD) não é uma teoria cognitivista, pois seu objeto central é a situação didática (e não o sujeito cognitivo), que busca modelizar as interações complexas que existem entre professor, saber e aluno.

Brousseau (2008, p. 21) destaca que, na década de 1970, as situações didáticas eram "aquelas que servem para ensinar sem que seja levado em conta o papel do professor". Considerava-se que a situação era o contexto em que o aluno estava inserido, que era manipulado e projetado pelo professor visando a sua aprendizagem. Atualmente, este conceito teve desdobramentos: as situações matemáticas. Para Brousseau, as situações matemáticas são aquelas que inserem no aluno a aprendizagem matemática, sem a intervenção do professor, e situações didáticas estão presentes nos modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno.

Brousseau (2008, p. 34) salienta que o aluno aprende mediante um processo de adaptação a um meio (*Milieu*), resultado de contradições, dificuldades, desequilíbrios, e que o saber se manifesta por meio de novas respostas, indicando-se a aprendizagem, daí a importância da dialética da formulação, explicitada mais adiante nesse texto. Para Brousseau (2008), as concepções atuais de ensino exigem que o professor proporcione condições para que o aluno atue, fale, reflita e evolua, diante de novas situações que lhes são apresentadas.

Almouloud (2014, p.32) esclarece que o principal objeto de estudo da teoria “não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber.” Nesse contexto, o processo de aprendizagem deve ocorrer de maneira que o aluno se sinta estimulado a buscar novos conhecimentos através das situações propostas. Para tanto, é necessário que haja a interação entre professor e aluno visando à aquisição da aprendizagem, ou seja, é preciso que o professor ofereça subsídios para que os alunos sejam atuantes neste processo.

Almouloud (2014, p. 32) apresenta três hipóteses em que se apoia a Teoria das Situações Didáticas:

> 1. O aluno aprende adaptando-se a um milieu que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem.
> 2. O milieu não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um milieu no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
> 3. A terceira hipótese postula que esse milieu e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Reconhece-se que o professor é peça fundamental neste processo de construção do saber, pois cabe a ele organizar todo o processo de ensino e aprendizagem, sempre considerando os conhecimentos prévios dos alunos e proporcionando condições para que atuem no sentido de interligar um novo saber ao saber anterior.

No sentido de proporcionar condições para aquisição do conhecimento, Brousseau (2008, p. 35) apresenta o conceito de situação adidática.

> A partir do momento em que o aluno aceita o ‘problema’ como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode não precisar de razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido,

> de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se de situação adidática.

Considera-se que situação adidática é uma situação de aprendizagem em que não se revela ao estudante a intenção de ensinar, porém oferece condições propícias para que ele se aproprie do saber almejado. Nesse contexto, o professor assume o importante papel de planejar e elaborar tais condições.

Para Brousseau (2008, p. 35),

> Como o aluno não pode resolver, de pronto, qualquer situação adidática, o professor apresenta as que ele é capaz de solucionar. As situações adidáticas elaboradas com fins didáticos determinam o conhecimento transmitido em um determinado momento e o sentido particular que ele assumirá em razão das restrições e deformações adicionadas à situação fundamental. Essa situação (ou problema) escolhida pelo professor o envolve em um jogo com o sistema de interações do aluno e seu meio. Esse jogo mais amplo é a situação didática.

Na sequência didática elaborada para esta dissertação, estas indicações teóricas foram consideradas em dois momentos: 1) no planejamento das tarefas – ao se propor que os estudantes resgatassem conhecimentos prévios, como a diferenciação entre segmento de reta, retas e semirretas, conceitos de paralelismo e transversalidade; 2) na implementação em sala – por meio do estímulo às reflexões, análises e respostas coletivas, sem a interferência da professora-pesquisadora.

Na TSD é importante que o aluno compreenda que ele deverá atuar no sentido de buscar a sua aprendizagem autonomamente, utilizando, para isso, seus conhecimentos prévios.

Brousseau (2008, p.27) ressalta que na perspectiva das situações didáticas:

> [...] as relações dos alunos com o meio (milieu) classificam-se em três grandes categorias:
> - troca de informações não codificadas ou sem linguagem (ações e decisões);
> - troca de informações codificadas em uma linguagem (mensagens);
> - troca de opiniões (sentenças referentes a um conjunto de enunciados que exercem o papel de teoria).

A partir dessa classificação, surge a tipologia, assunto da próxima seção.

2.1.3 Tipologia das Situações Didáticas

Na relação aluno-milieu, Brousseau (2008) apresenta quatro tipos de dialéticas associadas às situações didáticas, pois considera que os alunos apresentam características de aprendizagem de acordo com as situações que lhes são apresentadas.

Dialética de ação: o estudante é colocado diante de uma situação (tarefa) para a qual ele possui modelos mentais mais ou menos adequados, que lhes permitam interpretar e receber informações dessa situação. Algumas informações recebidas podem ser percebidas de maneira afetiva, como reforço ou como sanções resultantes de suas ações. De acordo com isso, o estudante reforça ou refuta sua conduta (BROUSSEAU, 1970). De modo geral, esse tipo de dialética consiste em escolher diretamente os estados do meio antagonista em função de suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões, antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões, pois os conhecimentos permitem produzir e mudar essas antecipações. A aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados.

Dialética de formulação: Os modelos mentais devem se tornar explícitos. O estudante precisa comunicar, construir uma descrição, uma representação, um modelo explícito. Além disso, é preciso que o modelo seja útil à obtenção de um resultado. Nesta etapa, é importante a comunicação com outra pessoa, porque é possível que o modelo do outro responda mais satisfatoriamente aos dados. É essa etapa da comunicação que “ajusta” os modelos mentais de um e de outro e que torna possível a explicitação. A relação de dois interlocutores com uma situação permite prever qual o conteúdo da mensagem emissor-receptor que permitirá obter o resultado desejado. As regras impostas pela comunicação e os conhecimentos dos dois sujeitos envolvidos limitam a escolha do repertório e a sintaxe utilizada (BROUSSEAU,1970). Essa dialética é importante porque a formulação de um conhecimento implícito muda, ao mesmo tempo, suas possibilidades de tratamento, aprendizagem e aquisição, sendo que a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação.

Dialética da validação: trata-se das regras, por vezes implícitas na dialética da formulação, de precisar as convenções e dizer porque tal escrita matemática é correta e pertinente (BROUSSEAU, 1970). Nesta situação, permite-se distinguir um novo tipo de formulação: o emissor já não é um informante, mais um proponente, e o receptor, um oponente. Colaboram na busca de vincular um conhecimento a um campo de saberes já estudado, mas entram em confronto quando há dúvidas. Nesta etapa, cada um deve posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir demonstração ou exigir que aplique suas declarações na interação com o meio. Os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à soberba, a intimidações, etc. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Aqui, há que se ressaltar a dificuldade de alunos do nono ano, como é o caso da nossa pesquisa, de terem maturidade suficiente para chegar ao nível matemático pretendido por Brousseau, por isso consideraremos a validação empírica como uma dialética de validação. Sobre a dialética de validação Brousseau (2008, p.27) descreve:

> Nesse tipo de situação os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à soberba, a intimidações etc. As razões que um aluno possa fornecer para convencer o outro, ou as que possa aceitar para mudar de opinião, serão progressivamente elucidadas, construídas, testadas, debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação como também, precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração.

Dialética de institucionalização: no decorrer das experiências desenvolvidas nas escolas, verificou-se que os professores, depois de certo tempo, precisavam ordenar um espaço. Era necessário "fazer alguma coisa", pois tinham que dar conta da produção dos alunos, descrever os fatos observados e tudo que estivesse vinculado ao saber em questão, determinar um objeto de ensino e identificá-lo, aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações e indicar quais poderiam ser reutilizadas. A esta etapa denominou-se institucionalização, que deu a determinados conhecimentos o *status* cultural indispensável do saber. Na situação de institucionalização, o professor não deve antecipar o conhecimento referente ao conteúdo ministrado, mas sim apresentar devolutivas a fim de proporcionar ao estudante a compreensão necessária à aquisição do conhecimento pretendido.

As situações apresentadas encontram-se interligadas, sendo que sua separação ocorre apenas para direcionar as ações do professor e do aluno, que são diferentes em cada uma delas. As peculiaridades nesse processo de adaptação às situações é assunto da próxima seção.

2.1.4 Adaptações dos Alunos às Situações: Concepções, Adaptações e Obstáculos

Para Brousseau (2008, p. 44), os indivíduos se adaptam às situações que surgem, produzindo novos saberes de acordo com as necessidades apresentadas.

A aprendizagem por adaptação implica em que as variáveis sejam escolhidas de modo que o conhecimento que queremos “que seja descoberto” seja significativamente mais vantajoso que qualquer outro (BROUSSEAU, 2008, p.46).

Brousseau (2008, p.47) descreve que “cada maneira organizada, mas particular de considerar uma noção matemática constitui o que chamamos de **concepção**” (grifo nosso). Sendo assim, ao se defrontar com diferentes situações e tendo que refletir sobre elas, o estudante pode avançar sobre seu nível de conhecimento, assimilando novas percepções que podem alterar o seu nível de conhecimento anterior e incorporar uma nova concepção a sua estrutura cognitiva. Cabe ressaltar que algumas das concepções adquiridas não desaparecem imediatamente em benefício de uma concepção melhor: resistem, provocam erros, tornando-se obstáculos (BROUSSEAU, 2008, p.48).

Por meio da modelagem das situações, Brousseau (2008, p. 49) apresentou algumas considerações referentes aos obstáculos:

> Um obstáculo é um conhecimento no sentido que lhe demos de forma regular um conjunto de situações.
> Tal conhecimento possibilita resultados corretos ou vantagens observáveis em um determinado contexto, mas revela-se falso ou totalmente inadequado em um contexto novo ou mais amplo.
> O conhecimento novo, verdadeiro ou válido sobre um contexto mais amplo não é determinado de acordo com um conhecimento anterior, mas em oposição a ele: utiliza outros pontos de vista, outros métodos, etc. Entre eles não existem relações evidentes que permitam desaparecer facilmente o erro antigo por meio do conhecimento novo.
> Os conhecimentos aqui considerados não são construções pessoais variáveis, mas sim respostas universais em contextos precisos.

Segundo Brousseau (2008), os obstáculos são manifestados pelos erros, ou por alguma fonte comum, como uma concepção incorreta de algum conhecimento anterior que não tenha sido compreendido satisfatoriamente pelos alunos. Destaca também que o obstáculo não desaparece com a aprendizagem de um novo conhecimento, mas opõe resistência à sua compreensão, fica escondido e reaparece subitamente, de acordo com as circunstâncias.

Brousseau (2008, p. 50) argumenta que “é inútil ignorar um obstáculo, devendo integrar a sua negação à aprendizagem de um conhecimento novo, em particular na forma de contra-exemplos, sendo considerado um constitutivo do saber.”

Os obstáculos estão presentes no processo de aprendizagem e se fazem necessários, pois são considerados legítimos e inevitáveis.

Em particular, ao se tratar do Teorema de Tales, assunto da próxima seção, inúmeros obstáculos podem surgir na situação didática em sala de aula. Na seção 4, em meio às análises, apresentamos alguns deles.

2.2 TEOREMA DE TALES

2.2.1 Um Pouco de História

Tales de Mileto foi um filósofo grego que trouxe grandes contribuições para a Matemática, porém há poucas informações sobre sua vida e obra. Os relatos da época em que ele viveu ocorrem mediante citações incompletas de outros que viveram séculos depois de sua existência.

Boyer (1996) relata que nos anos 776 a.C. foram realizados os primeiros Jogos Olímpicos, e neste mesmo período a literatura grega era representada com brilhantismo pelas obras de Homero e Hesíodo. Em relação à matemática grega deste período não há registro. Destaca que provavelmente encontrava-se em atraso em relação ao desenvolvimento das obras literárias, que obtinham maior expressão devido à comunicação oral. O autor cita que se passaram mais de dois séculos sem nenhuma citação da matemática grega. Porém, no século VI a. C. aparecem Tales e Pitágoras, os quais representaram para a matemática a mesma importância que Homero e Hesíodo tiveram para a literatura.

Em relação às obras de Tales e Pitágoras, Boyer (1996, p.34) relata que não sobreviveu nenhuma delas e que não há certeza se foram eles mesmos que as compuseram; ressalta, porém, que “as mais antigas referências gregas à história da matemática, atribuem a Pitágoras e Tales um bom número de descobertas matemáticas definidas”.

Segundo Pereira (2005), Tales nasceu no ano de 640 a.C. na cidade de Mileto, na Grécia Antiga, e teria morrido com 78 anos, aproximadamente, entre 548-545 a. C. A data de sua morte é baseada no fato de que em 585 a. C. Tales havia previsto um eclipse solar, considerando-se que quando este fato ocorreu ele estava com 40 anos e quando morreu estava com 78 anos.

Eves (2004) relata que Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico, o que lhe possibilitou dedicar-se ao estudo e a algumas viagens em uma parte de sua vida. Sobressaiu-se como estadista, engenheiro, filósofo, comerciante e astrônomo. É considerado o primeiro homem a quem se associam descobertas específicas da Matemática. Destaca-se também como o organizador da Geometria Dedutiva.

Segundo Pereira (2005), Tales elaborou uma estrutura lógica para a Geometria, introduzindo a ideia de prova, efetivando-se assim a sua importância para a Matemática.

Eves (2004, p. 95) comenta que em Geometria são creditados a ele os seguintes teoremas:

> 1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
> 2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> 3. Ângulos opostos pelos vértices são iguais.
> 4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
> 5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Por meio da previsão do eclipse solar, Tales firmou-se como cientista, segundo Pereira (2005). A autora afirma que alguns pesquisadores desconfiam da autenticidade desta história, pois um eclipse solar só é visível em pequena parte da Terra.

Há muitas histórias sobre as viagens de Tales. Numa destas, Schmidt (2014) relata que, quando estava no Egito, foi prestigiado pelo faraó Amásis por ter medido a altura da pirâmide de Queóps, sem escalá-la. Para isso, Tales teria comparado a sombra projetada pela pirâmide com a sombra de uma haste vertical.

Em decorrência das grandes contribuições associadas a Tales, Boyer (1996) relata que “a opinião antiga é unânime em considerar Tales como um homem de rara inteligência e como primeiro filósofo e por acordo geral o primeiro dos Sete Sábios” (BOYER, 1996, p.34).

2.2.2 Origens do Teorema

Não há evidência concreta referente ao surgimento do Teorema de Tales, pois não há fontes históricas suficientes para tal fato. A própria autoria do teorema é discutível, decorrente da mesma situação (HARUNA, 2000). Para Pereira (2005), é possível que a origem do teorema tenha ocorrido em função da necessidade de solucionar problemas de natureza prática associados à arquitetura e agrimensura, abordando o paralelismo e a proporcionalidade, estando relacionados ao geométrico e ao numérico.

Embora a nacionalidade de Tales seja grega, o teorema pode ter sido originado no Egito, pois, segundo Eves (2004), Tales viajou para o Egito visando obter o conhecimento matemático deste povo e foi desafiado a medir a altura de uma pirâmide. O autor afirma:

> Ha duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual a altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide — isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide (EVES, 2004, p.115).

A não menção às dificuldades de se obter o comprimento da sombra da pirâmide ao seu centro é um dos pontos que questionam a veracidade das versões apresentadas na citação acima.

De toda forma, para realizar a medição da altura da pirâmide, Tales utilizou os conceitos matemáticos de razão, proporção e semelhança de triângulos. Santos

(2012, p.11) relata, em sua pesquisa, que aborda a História da Matemática e o Teorema de Tales, os procedimentos usados para calcular a altura da pirâmide:

> [...] ao utilizar a sombra projetada por uma vara, ele teria escrito a razão entre as medidas do comprimento do objeto e da sombra projetada e, imediatamente, registrado o comprimento da sombra projetada pela pirâmide e relacionado com a altura desconhecida da pirâmide e como a ideia de proporcionalidade era conhecida por Tales, podia desenvolver corretamente os cálculos necessários (SANTOS, 2012, p.11).

A figura 2.1 apresenta uma possível representação da situação descrita por Eves (2004) e idealizada por Tales.

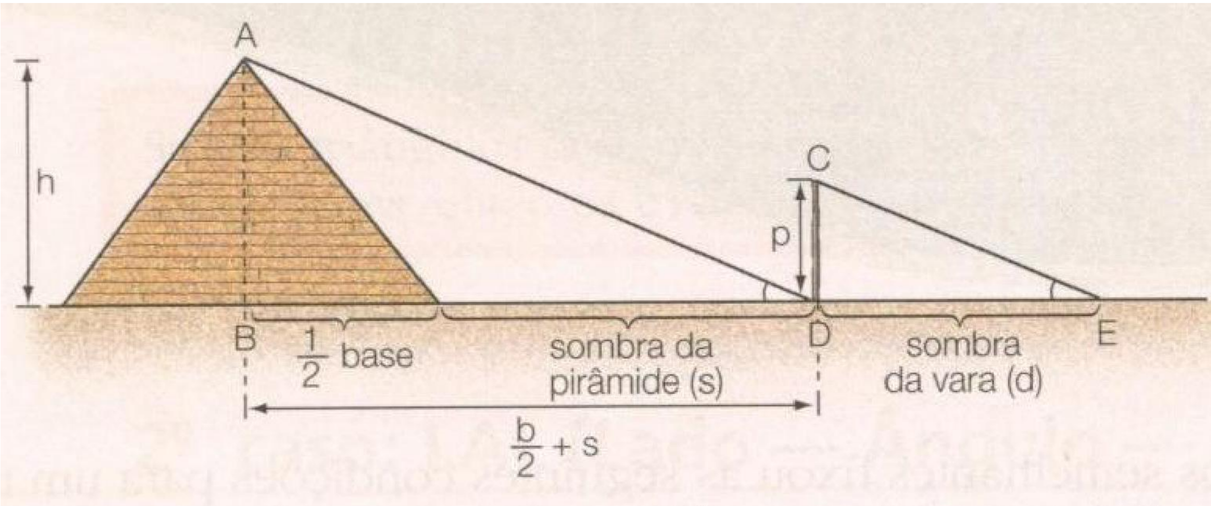


Figura 2. 1 – Representação da medição da altura da Pirâmide de Quéops
Fonte: Iezzi; Dolce; Machado, 2009, p. 117

Pereira (2005) destaca que o Teorema de Tales era conhecido até o final do século XIX como Teorema das Linhas Proporcionais, porque apresenta as condições de proporcionalidade dos segmentos. Bongiovanni (2007) destaca que a primeira vez que o Teorema dos Segmentos Proporcionais foi substituído por Teorema de Tales ocorreu no livro francês *Éléments de géométrie* de Rouche e Comberousse, na reedição de 1883.

Segundo Pereira (2005), no Brasil, o nome Teorema de Tales surgiu na segundo metade do século XX, paralelo ao surgimento do movimento da Matemática Moderna, em livros como de Oswaldo Sangiorgi. Atualmente, o Teorema de Tales é conhecido como “feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais que determinam segmentos proporcionais entre si”.

Bongiovanni (2007) apresenta como é descrito o Teorema de Tales em alguns países:

- Itália: Os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais.
- Espanha: Se cortamos duas retas quaisquer por várias retas paralelas, os segmentos correspondentes determinados em ambas são proporcionais.
- Alemanha: Se um feixe de retas concorrentes é cortado por duas retas paralelas, então a razão entre as medidas dos segmentos determinados por uma reta do feixe é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre qualquer outra reta do feixe.

Feitas essas considerações teóricas, apresentamos aspectos metodológicos da pesquisa e coleta de dados na próxima seção.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA E COLETA DE DADOS

Esta pesquisa tem caráter qualitativo e exploratório, visando à obtenção de dados para a elaboração e aplicação de práticas pedagógicas que permitam ampliar o conhecimento dos alunos em relação ao Teorema de Tales. Segundo Gerhardt e Silveira (2009, p.32), “a pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais”, já a pesquisa exploratória “tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses” (p.35).

A metodologia de pesquisa adotada nessa dissertação é a Engenharia Didática, descrita a seguir. Ao final da seção, são descritos os procedimentos realizados para a coleta de dados.

3.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática (ED), a qual “se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental, baseado em ‘realizações didáticas’ em sala, ou seja, sobre a concepção, a realização, observação e análise de sequências de ensino” (ARTIGUE, 1988, p.247- tradução nossa).

A Engenharia Didática surgiu na França no início dos anos 1980 como uma metodologia que pudesse avaliar o papel das situações, elemento norteador da Teoria de Brousseau, por meio de um confronto *a priori/posteriori* (ARTIGUE, 2002). Como já mencionado na seção anterior, a TSD não é uma teoria cognitivista, pois está centrada nas interações que ocorrem entre professor, aluno e saber, a partir de situações fundamentais elaboradas para construir um determinado conhecimento. Avaliar a efetividade de tais situações para alcançar o que se almejava foi a finalidade da criação da ED.

Devido ao seu sistema de validação, essencialmente interno, mediante confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*, durante os anos 1980, a ED destacou-se como uma metodologia de pesquisa entre os estudiosos franceses da

Didática da Matemática, sendo essa década considerada um período de ouro da ED (ARTIGUE, 2002).

A Engenharia Didática é composta por quatro fases, não necessariamente disjuntas: 1) análises preliminares, 2) concepção e análise *a priori*, 3) experimentação - aplicação de uma sequência didática e 4) análise *a posteriori* e validação.

A primeira fase apoia-se em algumas **análises preliminares** tais como: análise epistemológica dos conteúdos usados para o ensino, análise do ensino usual dos seus efeitos, análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução, análise do campo de onde irá se efetuar a sua ação didática e os objetivos específicos da pesquisa (ARTIGUE, 1988). Nesse trabalho, essa fase contemplou a análise da abordagem do tema em livros didáticos (BARBOSA e CARGNIN, 2016) e documentos oficiais, na história da matemática e em pesquisas acadêmicas atuais, com o objetivo de adquirir elementos que pudessem embasar a elaboração das tarefas.

A segunda fase é chamada de **concepção** e **análise *a priori***: o pesquisador decide agir sobre um certo número de variáveis relativas ao problema estudado, por exemplo, a disposição de equipamentos tecnológicos, o local, a realização da sequência, etc. Nessa fase, as tarefas são elaboradas e analisadas, visando conceber um meio antagônico propício ao desenvolvimento do conhecimento pretendido. Busca-se determinar os efeitos das escolhas realizadas e antecipar as possíveis interações dos alunos com o meio (milieu) e seus efeitos em prol da construção do conhecimento pretendido (ARTIGUE, 2002).

Nesta pesquisa, essa etapa consistiu na elaboração e análise de 38 tarefas, tendo em vista as reais condições de aplicação da sequência didática. Foram escolhidas as variáveis didáticas envolvidas: recursos tecnológicos, proximidade com o contexto estudantil e ancoragem de pré-requisitos para a compreensão do Teorema de Tales.

A terceira fase é a **experimentação**, que consiste na aplicação da sequência didática em condições reais de ensino. Esta etapa foi implementada no período de 07 de agosto a 06 de setembro de 2017, em uma escola estadual do município de Curiúva-PR, em uma turma matutina de nono ano, na qual havia 30 alunos matriculados e da qual a pesquisadora-autora era também a professora regente de classe. Foram usadas 25 aulas de 50 minutos e 05 horas no contraturno (momento em que foi realizada a tarefa 35).

A quarta fase é a **análise *a posteriori*** e a **validação**: esta etapa consiste na análise do conjunto de dados recolhidos na experimentação: as observações realizadas pelo professor e as produções dos alunos em sala de aula. Esses dados frequentemente são complementados com a utilização de questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos. A validação é feita pelo confronto dos dados da análise *a priori* e *posteriori*. Esta análise deve permitir atribuir sentido aos comportamentos observados e em particular assegurar que os comportamentos esperados se produzam e possam legitimamente ser interpretados como sinais da construção do conhecimento visado (ARTIGUE, 2002).

Nesta dissertação, foi nesse momento que houve o confronto entre as produções dos estudantes e o que havia sido previsto em cada bloco de atividades, visando avaliar a aquisição do conhecimento sobre o Teorema de Tales.

3.1.1 Coleta de Dados

Na fase de experimentação foi solicitado que os alunos se dividissem em duplas, de acordo com sua afinidade.

Cada dupla providenciou uma pasta catálogo na qual foram arquivadas suas produções. Era entregue, às duplas, apenas uma tarefa por vez. A dupla recebia a tarefa seguinte, quando terminasse aquela que tinha sido entregue anteriormente. Devido a isso, nem todos os estudantes estavam nas mesmas tarefas nas aulas: alguns estavam adiantados em relação ao cronograma[2] previsto, enquanto outros estavam atrasados. Ao final da aula, as duplas arquivavam suas produções nas respectivas pastas, que ficavam sob a tutela da professora-pesquisadora. Essas produções escritas foram utilizadas para as análises *a posteriori*. Ao final da implementação, as pastas foram aleatoriamente enumeradas de 1 a 15, o que gerou

[2] Antes da implementação, para fins de planejamento do tempo necessário, foi feito um cronograma das tarefas a serem realizadas em cada dia de aula, que sofreu modificações e adaptações conforme a necessidade observada em sala de aula.

a indicação que aparece nas análises: dupla 01, dupla 02 até dupla 15. Ao final de cada aula, as respostas eram analisadas para verificar a necessidade de algum questionamento mais específico para alguma dupla.

A seção 4, a seguir, apresenta e discute as respostas dadas pelos alunos às tarefas propostas na sequência didática.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ANÁLISES E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos as tarefas propostas na sequência didática, que tinha por finalidade a compreensão do Teorema de Tales.

Por sequência didática entendemos um conjunto de tarefas, devidamente ordenadas, com uma finalidade específica. Ou, como afirmam Teixeira e Passos (2013, p.162):

> Uma sequência didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado.

Como já exposto anteriormente, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) pressupõe que o aluno tenha um papel ativo frente à sua aprendizagem. Para isso, Brousseau indica a proposição de algumas dialéticas, a saber: de ação, formulação e validação. Para garantir a aquisição do saber matemático sistematizado, o autor prevê a etapa de institucionalização, momento no qual toda a investigação realizada pelo estudante é "oficializada", sistematizada, mediante atuação docente.

Para atingir o objetivo dessa pesquisa, foram planejadas tarefas nas quais os estudantes deveriam analisar, discutir, confrontar a veracidade de uma afirmação e escrever sobre suas percepções. Em relação a esse processo de comunicação, Vasconcelos (2010, p. 2) expõe:

> [...] tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre seus conhecimentos prévios e a linguagem abstrata e simbólica da Matemática. Nesse sentido, introduzir os recursos da comunicação nas salas de aula de Matemática, principalmente das séries iniciais, pode contribuir para a concretização da aprendizagem numa perspectiva mais significativa para o aluno e favorecer o acompanhamento dessa aprendizagem em processo.

Embora Vasconcelos esteja se referindo aos anos iniciais, acreditamos que uma abordagem que utiliza amplamente a comunicação oral e escrita pode contribuir fortemente com a aprendizagem matemática. A despeito desse assunto, Guerreiro (2011, p.417) declara:

> [...] A integração da singularidade das ideias e processos matemáticos dos alunos originou uma crescente comunicação reflexiva e instrutiva e uma partilha de responsabilidades no reconhecimento do conhecimento matemático construído na sala de aula. A prática de comunicação matemática excedeu assim a transmissão de conhecimentos predefinidos e assumiu uma ação intencional do professor na valorização da comunicação reflexiva e instrutiva como meio de aprendizagem da matemática [...]. A prática comunicativa integrou uma valoração da linguagem e o reconhecimento da oralidade como uma forma de comunicação argumentativa, excedendo o ato de fala, da escrita como um recurso à expressão do pensamento matemático [...].

Além disso, as tarefas propõem um olhar para alguns conceitos matemáticos que estejam mais próximos da vivência do estudante.

Nessa pesquisa, reconhece-se a importância de se desenvolver tarefas em grupos nos quais os alunos possam interagir, trocando ideias, informações e compartilhando e complementando conhecimentos e aprimorando o aprendizado.

Para melhor organização, esta seção será dividida em subseções, as quais apresentarão as análises *a priori* e *a posteriori* de um determinado grupo de tarefas. Assim, para cada grupo, apresentamos as tarefas seguidas das análises *a priori* e *a posteriori*, para facilitar a compreensão do leitor.

Primeira Parte da Sequência Didática: pré-requisitos

Na primeira parte da Sequência Didática (tarefas 1 a 15) são abordados conhecimentos referentes à reta, segmento de reta, paralelismo, transversalidade e feixe de retas que permitiram a revisão de conceitos presentes no Teorema de Tales.

4.1 TAREFAS DE 1 A 6: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

4.1.1 Apresentação das Tarefas de 1 a 6

1) Você já ouviu falar em retas, segmentos de reta, semirretas? Discuta com seus colegas e escreva o que vocês entendem por:
Reta____
Segmento de reta____
Semirreta____
Retas Paralelas____
Retas Transversais____

2) Observando o ambiente físico ao seu redor, você consegue identificar retas, segmentos de reta ou semirretas? Onde? Dê exemplos e escreva por que esses são exemplos de reta ou segmento de reta ou semirreta (se necessário, releia as respostas da questão 1).

3) Considerando os exemplos que você deu na questão 2, como é a posição entre esses elementos (reta, semirreta e segmento de reta) que você citou? Eles se cruzam? Mantêm-se a uma mesma distância? Não se cruzam? Se você os prolongasse, eles se cruzariam? Pense sobre isso e escreva suas conclusões.

4) Vamos pesquisar um pouco? No dicionário, veja o significado das seguintes palavras (observe o significado relacionado à matemática).
Reta____
Segmento de reta __________________________________
Semirreta______________________________________
Paralela ______________________________________
Transversal ____________________________________

5) Analise as definições apresentadas nas questões 1 e 4. Elas têm o mesmo significado? Elas querem dizer a mesma coisa? Comente.

6) Observe as seguintes definições para retas paralelas e retas transversais.

- ***Retas Paralelas são retas que estão num mesmo plano, apresentam a mesma inclinação, não apresentam nenhum ponto em comum, ou seja, não se cruzam, não se tocam e nem sequer se cruzam em suas prolongações.*** (Disponível em: http://queconceito.com.br/retas-paralelas)
- ***Reta transversal a outras retas é uma reta que tem intersecção com as outras retas em pontos diferentes.*** (Disponível em: https://www.todamateria.com.br/retas/)

Compare estas definições com as que foram apresentadas na questão 4. São semelhantes? Explique.

4.1.2 Análise *a Priori* das Tarefas de 1 a 6

O objetivo desse conjunto de tarefas era propiciar reflexão sobre os conceitos de reta, segmento de reta, semirreta, retas paralelas e transversais, bem como conhecer as concepções[3] dos estudantes sobre o assunto. Embora os objetos matemáticos sejam abstratos, não possuam existência física, associá-los, quando possível, a objetos que existem no ambiente que nos circunda pode favorecer uma imagem mental do objeto matemático, ponto de partida de estudos mais sistematizados.

[3] Para Brousseau (2009, p.47), concepção é "Cada maneira organizada, mas particular, de considerar uma noção matemática".

Propõe-se o trabalho em duplas, pois favorece a discussão e o confronto entre concepções dos estudantes. Cada indivíduo possui um modelo mental para os objetos envolvidos nessas tarefas e, nesse confronto, espera-se que, pelo menos na dupla, haja uma uniformidade em relação ao significado de tais conceitos. Além do confronto entre as concepções individuais, há ainda o confronto com o dicionário (que pode ser tanto o físico como o virtual), que requer reflexão sobre os significados dos termos usados no dicionário e seus correspondentes usados no repertório de cada estudante.

As dialéticas de ação e formulação se fazem presentes nesta etapa, pois os estudantes deverão confrontar o que pensam sobre cada um dos termos e, ao mesmo tempo, confrontar as respostas para, de comum acordo, emitir um posicionamento coletivo.

Uma dificuldade que pode surgir nesse bloco de tarefas é justamente a necessidade de escrever sobre conceitos que, em geral, em sala de aula, são tratados na oralidade (e pelo professor). Entretanto, ao responder ao questionamento (da tarefa, do parceiro, ou do professor), os estudantes estarão começando a refletir sobre elementos essenciais à compreensão do Teorema de Tales. Tarefas que envolvem esse confronto são citadas por Santos (2014, p. 59), que afirma:

> As situações didáticas ainda podem ser trabalhadas por meio da abordagem socrática que valoriza os conhecimentos prévios dos alunos, os quais deverão surgir por meio de perguntas apropriadas. Esse método pode ser aperfeiçoado, permitindo uma evolução de seus conhecimentos.

Em relação aos exemplos que serão apresentados pelos alunos, estes poderão restringir-se, em sua grande maioria, aos segmentos de reta (mesmo que erroneamente os considerem como retas), localizando-os na lousa, nas estruturas das janelas, nas madeiras que compõem o forro, nas cerâmicas do piso da sala de aula, entre outros. É possível que argumentem que não encontram a presença de retas e semirretas, pois todos os exemplos que observam possuem começo e fim. Isso faz parte dos conhecimentos prévios, pois os alunos já estudaram esses conceitos em anos anteriores, e deve servir de base para discussões mais profícuas, pois, ainda sobre a utilização dos conhecimentos prévios dos alunos, Silva afirma:

> [...] devem ser considerados, no que concerne à relação entre o saber escolar e o aluno, os conhecimentos prévios sobre o que se quer ensinar, as hipóteses relacionadas ao novo saber, o progresso do aluno mediante a aquisição do conhecimento ensinado, entre outros aspectos. É buscada, pois, conexão entre o que já se conhece e o novo saber (SILVA, 2015, p.70).

Em relação à posição das retas, considera-se que entre as possíveis respostas apresentadas pelos alunos, eles poderão argumentar que os elementos citados, se fossem prolongados, não se cruzariam e permaneceriam sempre a uma mesma distância, indicando a existência do conceito de retas paralelas.

É importante destacar que o fato dos alunos terem que buscar a identificação de retas e semirretas no seu ambiente físico, solicitado pela tarefa 2, é uma oportunidade do professor trabalhar a diferenciação entre tais conceitos, já que retas e semirretas não existem no mundo físico.

O fato de o aluno ter que analisar a resposta do dicionário é importante porque, segundo Viali e Silva (2007, p.6): “Discutir as questões de linguagem com o aluno contribui para que ele desenvolva o hábito de atentar para o real significado de cada palavra em uma situação ou problema e se torne independente na análise da situação ou na resolução do problema”. A não compreensão adequada de um termo matemático pode ser fonte de insucessos na aprendizagem, no decorrer dos estudos, como conclui a pesquisa de Cargnin (2013). Além disso, deverá haver outro confronto: entre o que foi encontrado no dicionário e a definição da dupla, podendo causar outros desconfortos. Vale ressaltar que essa etapa de comunicação é fundamental para a compreensão dos conceitos matemáticos em tela, e correspondem à dialética da formulação. Esse confronto de ideias pode, ainda, auxiliar na assimilação dos conceitos envolvidos e na sua articulação, necessidade apontada por Santos e Lima (2010, p. 5), que argumentam sobre a necessidade de se organizar uma Matemática (escolar) em que os conhecimentos sejam separados, porém articulados.

O Dicionário Priberam da Língua Portuguesa apresenta as seguintes definições:

- Reta: linha, traço ou risco que apresenta sempre a mesma direção.
- Segmento de reta: porção delimitada de uma reta.
- Semirreta: linha definida numa só direção e sentido, partindo de um ponto de origem.
- Paralela: linha ou superfície equidistante de outra em toda a sua extensão.

- Transversal: linha que corta ou atravessa outra linha ou um plano.

Espera-se que, ao final desse bloco de questões, os estudantes tenham encontrado semelhanças entre suas definições empíricas e as apresentadas pelo dicionário ou até mesmo uma definição matemática formal, já que, como argumenta Brousseau (2008, p.73): “o professor não pode dizer explicitamente, e de antemão, o que o aluno terá que fazer diante de um problema, sem tirar-lhe, ao fazê-lo, a possibilidade de manifestar ou adquirir o conhecimento correspondente”.

Diante disto, destaca-se que o professor não pode “contar” ao seu aluno qual o procedimento que ele deve utilizar para resolver determinada situação, pode, porém, oferecer-lhe subsídios para encontrar o processo para desvendá-la.

4.1.3 Análise *a Posteriori* das Tarefas de 1 a 6

Como era esperado, os alunos tiveram dificuldades de escrever o significado dos termos solicitados (observado pelas inúmeras vezes que o texto foi reescrito – cerca de 75% dos casos), haja vista não ser essa uma atitude corriqueira em sala de aula de matemática. Por vezes, percebeu-se um certo desconforto por parte dos alunos. Alguns quiseram procurar na *internet* uma definição, mas foram persuadidos a escreverem o que pensavam primeiro, sem se importarem se estava certo ou errado.

Nesse quesito, a falta de argumentação é perceptível (08 de 15 duplas começaram a resposta à questão 3 com um sim/não, mesmo que sim/não não respondesse à questão), já que, em vários casos, as perguntas constantes no enunciado como uma forma de pontos a refletir foram diretamente respondidas. Veja a Figura 4.1 abaixo, da dupla 15.

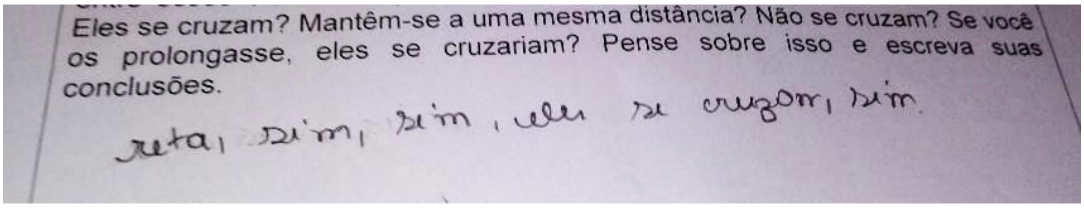

Eles se cruzam? Mantêm-se a uma mesma distância? Não se cruzam? Se você os prolongasse, eles se cruzariam? Pense sobre isso e escreva suas conclusões.
reta, sim, sim, eles se cruzam, sim.

Figura 4.1: Respostas dos alunos da dupla 15
Fonte: a autora
(Transcrição: *reta, sim, sim, eles se cruzam, sim*)

A forma como os alunos responderam à questão 3 indica-nos a necessidade de revê-la: uma questão principal deve ser reformulada no início, sendo que pontos importantes que devem ser observados não poderão ser apresentados em forma de perguntas como feito na nossa tarefa.

Algumas definições dos alunos estão mostradas na Figura 4.2 (a) e (b).

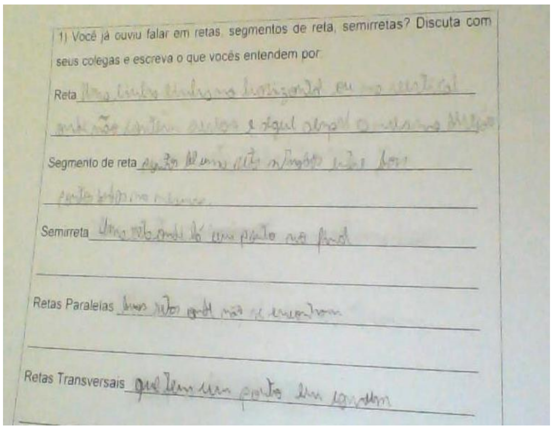
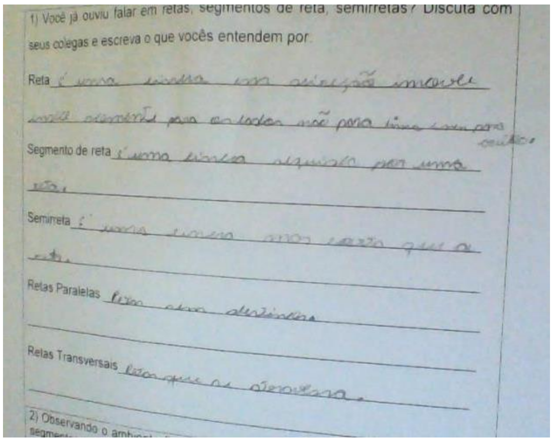
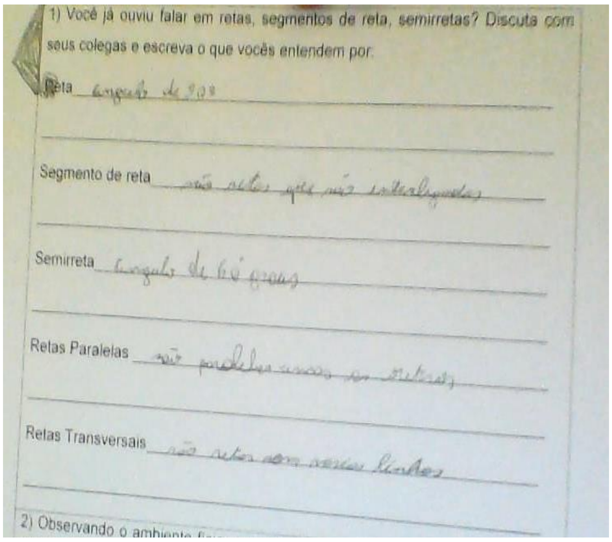
 (a)	 (b)
(Transcrição) Reta: *uma linha linha na horizontal que não contém arestas e segue sempre a mesma direção.* Segmento de reta: *pontos de uma reta situados entre dois pontos na mesma.* Semirreta: *uma reta onde há um ponto no final* Retas paralelas: *duas retas onde não se encontram* Retas transversais: *que tem um ponto em comum*	(Transcrição) Reta: *é uma linha em direção imóvel indo somente para os lados não para cima ou para baixo* Segmento de reta: *é uma linha seguida por uma reta* Semirreta: *é uma linha mais curta que a reta* Retas paralelas: *retas sem destino* Retas transversais: *retas que se atravessa*

Figura 4.2: Entendimento sobre conceitos dupla 14 (a) e 13(b)
Fonte: as autoras

Observe, na Figura 4.2, que apenas as posições horizontal e vertical foram mencionadas. Chamou-nos a atenção o fato de não ter sido mencionada a possibilidade de existência de retas oblíquas por nenhuma dupla. Tal significação pode representar um obstáculo ontológico[4] na compreensão do Teorema de Tales, já que as retas poderão ser traçadas em diversas posições e não apenas na horizontal/vertical.

[4] É um tipo de obstáculo que é próprio das faculdades do aprendente (BROUSSEAU, 2010).

Uma concepção que nos chamou a atenção foi a associação entre retas e ângulos, como destaca a Figura 4.3.


1) Você já ouviu falar em retas, segmentos de reta, semirretas? Discuta com seus colegas e escreva o que vocês entendem por:

Reta ângulo de 90°

Segmento de reta são retas que são interligadas

Semirreta ângulo de 60° graus

Retas Paralelas são paralelas umas as outras

Retas Transversais são retas com várias linhas

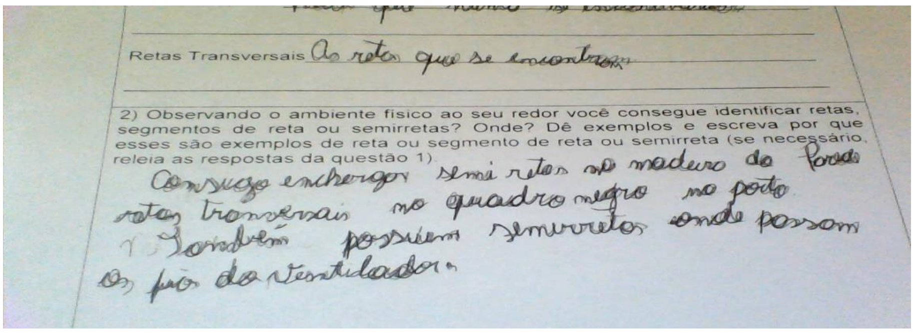
2) Observando o ambiente ...

Figura 4.3: Resposta dos alunos da dupla 06
Fonte: as autoras

(Transcrição: Reta: *ângulo de* 90°; Segmento de reta: *são retas que são interligadas*; Semirreta: *ângulo de* 60°*graus*; Retas paralelas: *são paralelas umas as outras*; Retas transversais*: são retas com várias linhas*.*)*

Uma conjectura sobre as respostas dadas pela dupla 06 é que o ângulo de 90° está associado à existência de retas verticais, enquanto que as semirretas estão associadas a linhas inclinadas.

Foram citados como exemplos de retas, semirretas, segmentos de reta e posições entre retas: o quadro negro, as janelas, a porta, as canaletas dos fios, carteiras, chão, etc. Um exemplo de resposta é apresentado na Figura 4.4, na qual aparecem os conceitos de retas transversais e semirretas, mesmo desconsiderando sua finitude. Vale lembrar que aqui há uma oportunidade para o professor discutir elementos como reta, segmento de reta e semirreta, confrontando-os à realidade.


Retas Transversais As retas que se encontram

2) Observando o ambiente físico ao seu redor você consegue identificar retas, segmentos de reta ou semirretas? Onde? Dê exemplos e escreva por que esses são exemplos de reta ou segmento de reta ou semirreta (se necessário, releia as respostas da questão 1).

Consigo enchergar semi retas na madeira da parede retas transversais no quadro negro na porta Também possuem semirretas onde passam os fios do ventilador.

Figura 4.4: Respostas dos alunos da dupla 03
Fonte: as autoras

(Transcrição – pontuação nossa: *consigo enxergar semi retas na madeira da parede; retas transversais no quadro negro, na porta. Também possuem semirretas onde passam os fios do ventilador)*

Já na Figura 4.5, aparecem os conceitos de retas paralelas e semirretas:

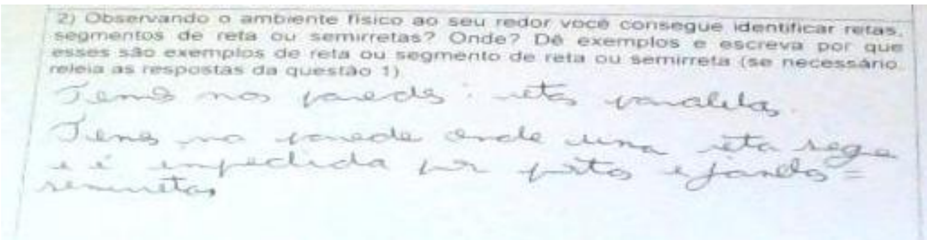

2) Observando o ambiente físico ao seu redor você consegue identificar retas, segmentos de reta ou semirretas? Onde? Dê exemplos e escreva por que esses são exemplos de reta ou segmento de reta ou semirreta (se necessário releia as respostas da questão 1).

Figura 4.5: Respostas dos alunos da dupla 11
Fonte: as autoras

(Transcrição: *temos nas paredes: retas paralelas. Temos na parede onde uma reta segue e é impedida por portas e janelas = semirretas)*

O confronto entre as respostas dos estudantes e os conceitos em tela e o dicionário foi importante para que eles pudessem perceber que, mesmo com palavras diferentes, poderiam escrever uma definição matemática mais precisa (embora não o tenham feito), reconhecendo, inclusive, estudos anteriores (Figura 4.6). Todas as equipes (exceto uma) afirmaram que o significado entre o que eles haviam escrito e a definição do dicionário era o mesmo (Nota-se mais uma vez a dialética da formulação entrando em ação no processo de comunicação). Isso pode contribuir para a autoconfiança do aluno, em termos de capacidade para escrever e compreender a matemática.

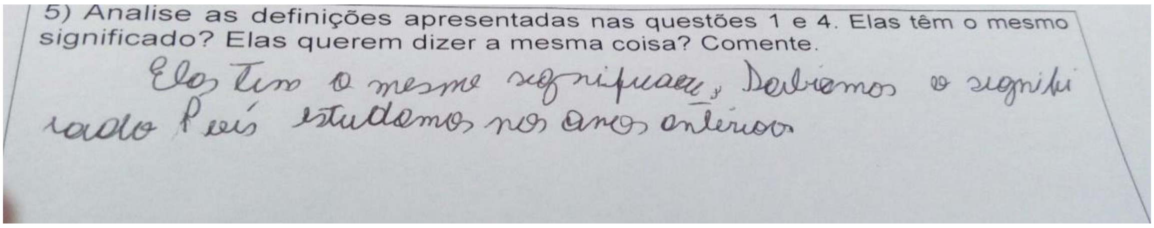
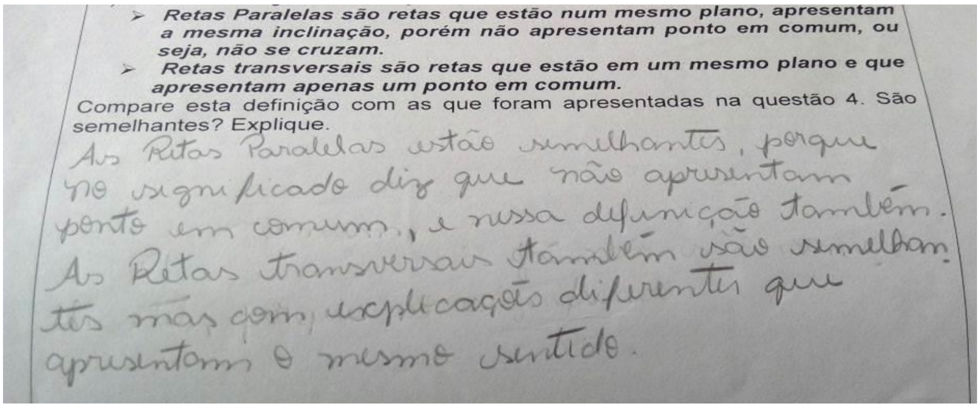

5) Analise as definições apresentadas nas questões 1 e 4. Elas têm o mesmo significado? Elas querem dizer a mesma coisa? Comente.

Figura 4.6: Respostas da dupla 03
Fonte: as autoras

(Transcrição: *Elas tem o mesmo significado, sabemos o significado pois estudamos nos anos anteriores*)

Nesse mesmo sentido, a tarefa 6 proporcionou esse confronto de ideias. A Figura 4.7 ilustra uma das respostas, representativa das demais.


- Retas Paralelas são retas que estão num mesmo plano, apresentam a mesma inclinação, porém não apresentam ponto em comum, ou seja, não se cruzam.
- Retas transversais são retas que estão em um mesmo plano e que apresentam apenas um ponto em comum.

Compare esta definição com as que foram apresentadas na questão 4. São semelhantes? Explique.

As Retas Paralelas estão semelhantes, porque no significado diz que não apresentam ponto em comum., e nossa definição também. As Retas transversais também são semelhantes más com, explicaçoẽs diferentes que apresentam o mesmo sentido.

Figura 4.7: Respostas da dupla 04
Fonte: as autoras

(Transcrição: *As retas paralelas estão semelhantes, porque no significado diz que não apresentam ponto em comum, e nossa definição também. As retas transversais também são semelhantes, mas com explicações diferentes que apresentam o mesmo sentido.*)

Durante a implementação dessa etapa (conjunto de 6 tarefas), percebeu-se troca de ideias entre as duplas, comparando respostas e analisando qual era a melhor, “mais certa”, confirmando a importância do trabalho em equipe, pois as respostas apresentadas foram oriundas das trocas de discussões entre os alunos, nas duplas que estavam inseridos e também do contato com outras duplas. Além disso, o desconforto de escrever as respostas a partir do diálogo entre a dupla foi desaparecendo, o que nos indica que se o professor de matemática adotar essa estratégia em sala poderá ter bons resultados de aprendizagem.

Outro fator observado foi que a atmosfera de cooperação que se instalou em sala favoreceu para que os estudantes expusessem incompreensões de palavras, como foi o caso de “obliquamente”, que apareceu no decorrer da realização da tarefa 4, o que gerou uma nova busca (no dicionário ou com a professora) pelos próprios colegas, indicando maior iniciativa dos discentes, essencial para aquisição de maior autonomia no processo de aprendizagem. Cabe destacar, ainda, que a utilização do dicionário de Língua Portuguesa em aulas de Matemática foi uma novidade para os estudantes participantes desta pesquisa.

As discrepâncias e dificuldades observadas nos momentos de discussão dos conceitos indicaram a necessidade de revê-los, antes de prosseguir com as tarefas. Nesse momento, a professora pesquisadora, em um ambiente coletivo, retomou os conceitos com maior discordância (diferença entre reta, semirreta, segmento de reta, posição de uma reta no plano), buscando analisar os comentários e registros deles em face ao saber sistematizado, explicitando os detalhes que não foram destacados pelos estudantes, como, por exemplo, a possibilidade de uma reta não estar apenas nas posições horizontal e vertical. Cabe destacar que neste momento de revisão e adequação dos conceitos está associada à etapa de institucionalização, pois o conhecimento errôneo que estava sendo construído pelos alunos foi direcionado para o saber matemático sistematizado.

4.2 TAREFAS DE 7 A 10 E 14: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

4.2.1 Apresentação das Tarefas de 7 a 10 e 14

7) Considerando que retas paralelas são retas que estão presentes em um mesmo plano e não se cruzam e nem possuem pontos em comum, desenhe três retas paralelas. O que te levou a considerar essas retas como paralelas?

8) Considerando que retas transversais possuem pontos de intersecção com outras retas, desenhe duas retas transversais a duas retas paralelas. O que você pensou para desenhar as retas dessa forma? Explique.

9) O mapa abaixo representa uma parte da cidade do Rio de Janeiro. Você consegue identificar, nele, ruas que podem estar associadas a retas paralelas e transversais? Se sim, quais são elas?

Figura 1: Mapa que representa uma parte do Rio de Janeiro

Fonte: https://pt.slideshare.net/iltonbruno/geometria-6-ano-retas

10) Compare sua resposta com os resultados dos colegas. Depois, escreva quais ruas são paralelas (ou transversais) a quais. Escreva também sobre as diferenças entre as suas respostas e a de seus colegas.

14) Observe os mapas que representam alguns bairros de sua cidade e responda aos questionamentos abaixo:

Figura 2: Bairro Morada Verde´s Campos Curiúva-PR
Fonte: as autoras

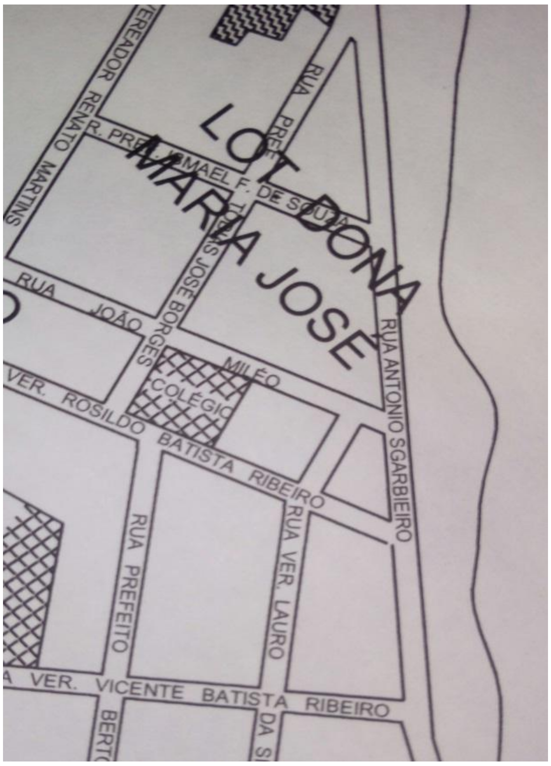


Figura 3: Bairro Vila Maria José Curiúva-PR
Fonte: as autoras

a) Na Morada Verd's Campos, há ruas paralelas? E transversais?
b) Quais ruas são paralelas à Rua Otacílio Luiz Pereira?
c) Quais ruas são paralelas à rua Vicente Pinto Ribeiro?
d) Quais são as ruas transversais encontradas neste bairro?

e) No Loteamento Maria José indique se há ruas paralelas.
f) Quais são as ruas paralelas às ruas Vereador Renato Martins e Vereador Rosildo Batista Ribeiro.
g) Cite o nome de duas ruas transversais à Rua João Miléo.
h) Realize o desenho das duas principais ruas de sua cidade, indicando seus nomes. Elas são paralelas ou transversais?

4.2.2 Análise *a Priori* das Tarefas de 7 a 10 e 14

Esse conjunto de tarefas tem por finalidade retomar o conhecimento sobre retas paralelas e transversais, diretamente citadas no Teorema de Tales. Nesse conjunto, pretende-se explorar uma outra representação das retas: a representação figural utilizada pelos estudantes nos desenhos (nos interessa saber as posições nas quais os estudantes desenham as retas, se são apenas nas posições horizontal ou vertical ou se desenham em posição oblíqua). Na primeira parte da SD, os estudantes usaram a Língua Portuguesa para representar seus conhecimentos, agora, eles têm a possibilidade de tornar mais consistentes suas respostas a partir dessa forma de representar: os desenhos. Esse é um conjunto de tarefas que pode ser suprimido, caso o professor venha a adotar essa SD para trabalhar com o Teorema de Tales, se considerar que os alunos já mostraram habilidades de reconhecer retas paralelas e transversais no conjunto de tarefas analisado anteriormente (1 a 6) ou ainda começar as tarefas por esse bloco, caso os alunos ainda não tenham conhecimento sobre retas paralelas ou transversais.

As tarefas 7 e 8 buscam analisar se há outras posições de retas além de horizontal/vertical, além de relacionar os desenhos feitos com as definições dadas em tarefas anteriores. Já a tarefa 9 insere os conceitos de paralelismo e transversalidade em um mapa, que corresponde a uma situação real de localização. A tarefa 10 possibilita a discussão de novos olhares sobre os conceitos em tela. Espera-se que nesta tarefa os alunos aprimorem sua capacidade de argumentação e conhecimento adquirido ao confrontar suas respostas com as dos colegas e defender seu ponto de vista.

A importância de propor esse tipo de tarefa pode ser percebida na pesquisa de Silva e Souza (2017), a qual apresentou um índice de erros na resolução de quase 70%. As autoras propuseram uma questão semelhante à tarefa 9 a 21 alunos de uma turma matutina de 9º ano, na Paraíba. 67% dos estudantes erraram ao indicar ruas paralelas/transversais a uma rua dada, outros 5% não souberam responder e deixaram em branco a questão. Essas autoras alertam para o fato de que os alunos podem desconhecer o significado da palavra transversal, e não associá-la à posição de uma reta em relação a outra, o que dificulta a resolução de questões que requeiram esse tipo de informação.

Para a tarefa 9, entre as possibilidades de respostas, poderão citar que encontraram segmentos de retas paralelas e transversais com diversas ruas paralelas entre si, entre elas as ruas Buenos Aires, Alfândega e Senhor dos Passos, que são paralelas e as ruas Tomé de Souza, Conceição e Rua dos Andradas que são transversais às ruas citadas anteriormente, pois “cruzam” com elas. Poderão citar também que as ruas Miguel Couto e Avenida Rio Branco são transversais à Rua Alfândega, pois também “cruzam-se”. Poderão, enfim, argumentar que no presente mapa há diversos exemplos de ruas paralelas e transversais que se cruzam e estão a uma mesma distância uma da outra, características condizentes dos conceitos atribuídos às posições das retas mencionadas.

A tarefa 14 busca mostrar que conceitos como paralelismo e transversalidade são usados em situações reais, por isso são apresentados mapas dos bairros que ficam no entorno da escola, locais que os estudantes conhecem e têm acesso. Espera-se, com essa tarefa, que tais conceitos se tornem mais presentes no cotidiano escolar e pessoal. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p.38) salientam a importância da aplicabilidade prática da Matemática, para que eles possam atuar decisivamente em sua vida cotidiana.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

É possível associar as tarefas 7 e 8 às dialéticas de ação e formulação, enquanto as tarefas 9 e 14 podem ser associadas à dialética de validação, mesmo que de modo empírico, já que para identificar ruas paralelas ou transversais deverão reconhecê-las (o que subentende a compreensão dos conceitos de paralelismo e transversalidade) a partir da imagem mostrada.

4.2.3 Análise *a Posteriori* das Tarefas de 7 a 10 e 14

Reconhecer a possibilidade de desenhar retas em outra posição que não seja a horizontal/vertical começou a aparecer na tarefa 7. Em 4 das 15 duplas analisadas (cerca de 27%), retas paralelas e transversais foram representadas em uma posição oblíqua, como destaca a Figura 4.7. Observe, ainda, que a dupla 07 justificou seu posicionamento considerando os resultados das tarefas anteriores, o que indica que os objetivos da pesquisa estão sendo alcançados.

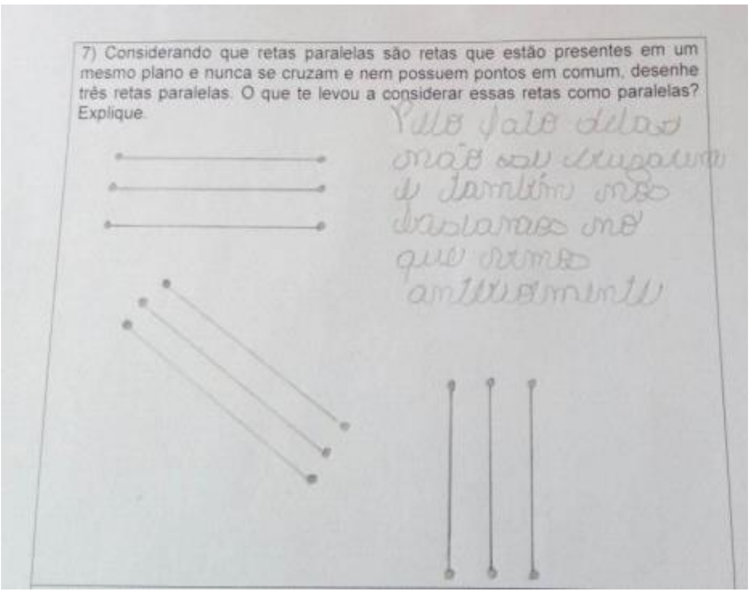


Figura 4.8: Resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

(Transcrição: *pelo fato delas não se cruzarem e também nos baseamos no que vimos anteriormente*)

Já a dupla 10 apresentou como exemplos de retas paralelas os desenhos da porta, lousa e janela presentes na sala de aula (Figura 4.9). Quando questionados sobre o desenho que utilizaram para representar, argumentaram que em todos estes desenhos eles “enxergavam” retas paralelas se eles (os segmentos) fossem “prolongados”, o que indica que há uma diferenciação entre segmentos de reta e retas.

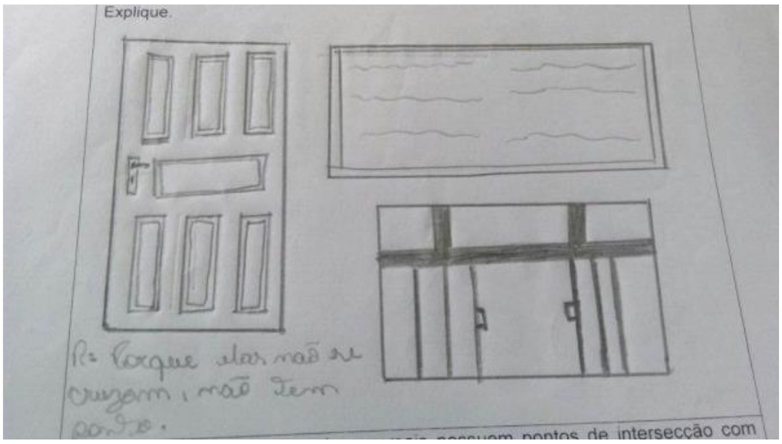


Figura 4.9: Respostas da dupla 10
Fonte: as autoras

(Transcrição: *porque elas não se cruzam, não tem ponto*)

De certa forma, como era previsto, todas as equipes souberam nomear ruas paralelas e transversais entre si, entretanto poucas (05 em 15) o fizeram indicando quais ruas eram paralelas ou transversais a quais, como o fez a dupla 07[5] (Figura 4.10). Todas as demais mencionaram corretamente ruas paralelas ou transversais entre si, mas deixaram implícitas algumas informações relevantes, como o ponto de referência tomado (Figura 4.11).

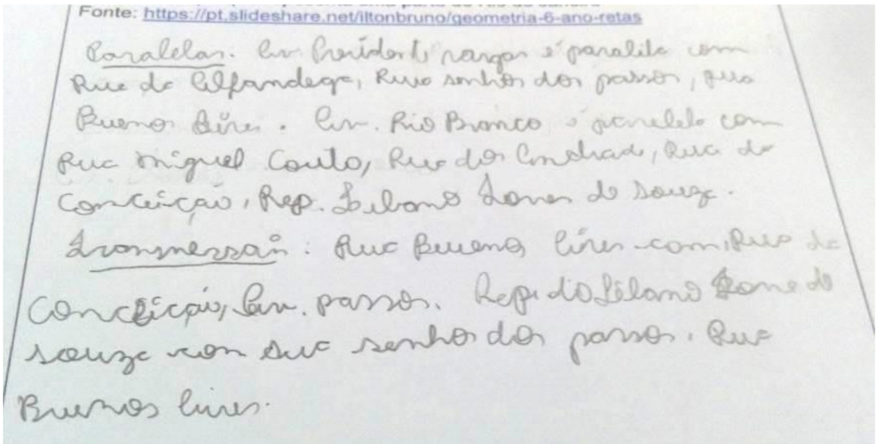

Fonte: https://pt.slideshare.net/iltonbruno/geometria-6-ano-retas

Figura 4.10: Resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

(Transcrição: <u>Paralelas</u>*: Av. presidente Vargas é paralela com Rua da Alfandega, Rua senhor dos Passos pela Buenos Aires. Av. rio Branco é paralela com Rua Miguel Couto, Rua dos Andrades, Rua da Conceição, Rep Líbano Torres de Souza.* <u>Transversais</u>*: Rua Bueno Aires com Rua da Conceição, av. Passos. Rep. Do Líbano Tomé de Souza com rua Senhor dos passos, rua Buenos Aires.)*

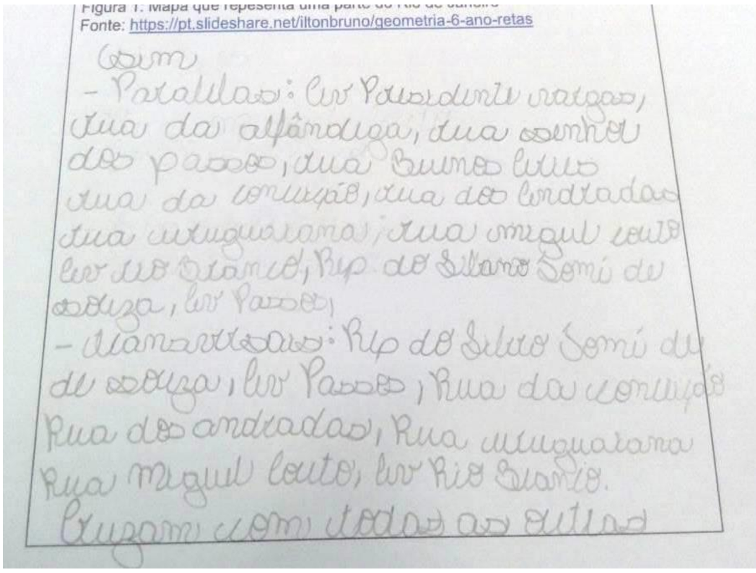

Fonte: https://pt.slideshare.net/iltonbruno/geometria-6-ano-retas

Figura 4.11: Resposta da dupla 08
Fonte: as autoras

[5] Há que se comentar que as ruas Miguel Couto e Av. Rio Branco não são paralelas entre si, mas as ruas Pion Libano Souza e Miguel Couto o são.

(Transcrição: - *Paralelas: Av. Presidente Vargas, rua da alfândega, rua senhor dos passos, rua Buenos Aires Rua da conceição, rua dos andradas Rua Uruguaiana; rua miguel couto av Rio Branco, rep do Liano Tomé de Souza, av Passos. – transversais: Rep do Libano Tomé de Souza, Av Passos, Rua da conceição Rua dos andradas, rua Uruguaiana Rua Miguel Couto, Av Rio Branco.Cruzam com todas as outras)*

Devido ao número de duplas que não indicou a rua de referência ao mencionar uma rua paralela ou transversal, a professora-pesquisadora, ao término da realização da tarefa, em mais um momento coletivo, indicou tal necessidade, partindo das próprias respostas na discussão com a turma. Este foi mais um momento de institucionalização, preconizado pela TSD.

Ao que parece, não ficou muito claro que é preciso indicar um referencial para determinar a posição das ruas, ou seja, é necessário indicar qual rua é transversal (ou paralela) a qual rua, pois o mesmo erro voltou a ocorrer na resolução da tarefa 14 (veja exemplo na Figura 4.12).

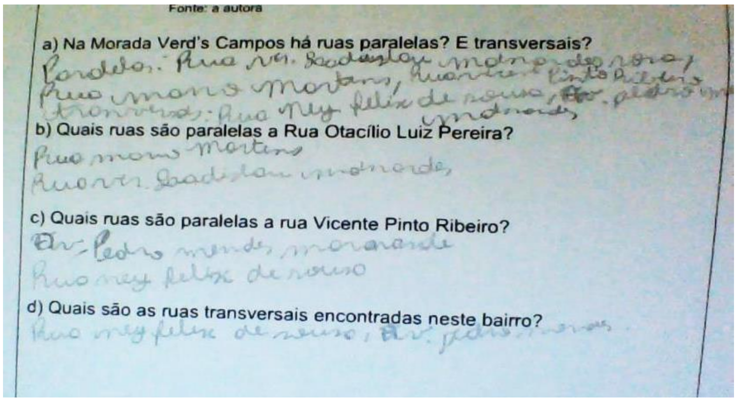


Figura 4.12 : resposta da dupla 05
Fonte: as autoras

(Transcrição: a) Na Morada Verd´s Campos há ruas paralelas? E transversais? *Paralelas: rua ver Ladislau Mainardes rosa, rua mano Martins, rua Vicente pinto ribeiro. Transversais: Rua Ney Felix de Sousa, av. Pedro mendes mainardes.* B) Quais ruas são paralelas a Rua Otacílio Luiz Pereira? *Rua mano Martins Rua ver Ladislau Mainardes;* c) Quais ruas são paralelas a rua Vicente Pinto Ribeiro? *Av Pedro Mendes Mainardes Rua Ney feliz de Sousa;* d) quais são as ruas transversais encontradas neste bairro? *Rua Ney Feliz de Sousa, av. Pedro mendes*).

Na Figura 4.12, observe que no item a) as ruas Mano Martins e Ladislau Mainardes foram consideradas corretamente como retas paralelas, entretanto, no item b), as mesmas ruas foram nominadas como paralelas, sem observar que, nessa questão, deveriam ser consideradas em relação à rua Otacílio Luiz Pereira. O mesmo aconteceu com o item c. As ruas nominadas são paralelas entre si, mas não em relação à rua Vicente Pinto Ribeiro. Já no item d, a resposta indica duas ruas paralelas entre si.

As respostas dessa dupla, em particular, pode remeter a duas situações: 1) não há clareza do conceito de paralelismo e transversalidade; 2) tais conceitos estão ligados à posição espacial que usualmente está relacionada ao desenho: retas paralelas são desenhadas na horizontal e retas transversais com uma inclinação vertical.

Considerando que o erro voltou a se repetir com várias duplas, houve um outro momento de discussão coletiva, a fim de dirimir as dúvidas restantes. Essa dificuldade persistente não estava prevista inicialmente, o que acarretou atraso no cronograma de aplicação.

4.3 TAREFAS DE 11 A 13: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

4.3.1 Apresentação das Tarefas de 11 a 13

11) Considere a seguinte definição:

- ***Um conjunto de três ou mais retas paralelas num plano é chamado de feixe de retas paralelas.***
- ***Transversal ao feixe de retas paralelas é uma reta que intersecta todas as retas do feixe.***

Reveja o mapa da questão 9. Lá, existe um feixe de ruas paralelas? Onde? Quais ruas compõem este feixe? E rua transversal? Quais ruas são transversais?

12) Observe as imagens seguintes. Você diria que nelas existe algo que pode estar associado a feixe de retas paralelas? E retas transversais? Em alguma imagem apresentada, as "retas" se cruzam? Justifique.

Figura 4: Estruturas
Fonte: http://conteudoonline.objetivo.br

Figura 5: A sombra de uma escada
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br

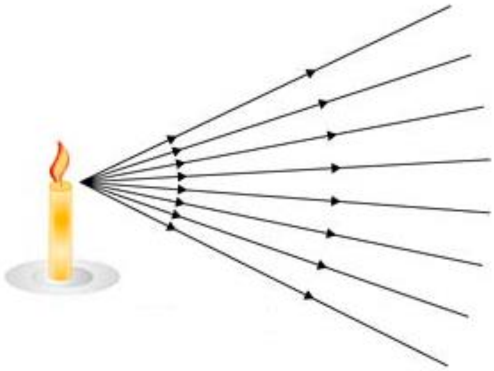


Figura 6: Feixe de luz
Fonte: http://polemicascmm.blogspot.com.br/

Figura 7: Assoalho de madeira
Fonte: http://br.depositphotos.com

13) Se você tivesse que explicar o que é um “feixe de retas paralelas” a um amigo, o que você diria? Explique.

4.3.2 Análise *a Priori* das Tarefas de 11 a 13

Continuando numa perspectiva de retomada de conceitos-chave à apreensão do Teorema de Tales, o objetivo destas tarefas é retomar o conceito de feixe de retas paralelas. Espera-se, nesta tarefa, que os alunos indiquem conhecimento referente ao tema, localizando-o em situações cotidianas, como no mapa apresentado na tarefa 9. Novamente, numa perspectiva de investigação, os estudantes terão uma definição para se apoiarem e os parceiros para testar e validar sua compreensão.

É possível que as imagens da Tarefa 12 possam trazer confusões em relação aos conceitos de reta e segmento de reta, entretanto, para que seja possível “enxergar” a aplicabilidade do Teorema de Tales em situações reais, como a medição de alturas, optamos por inserir tal tarefa e deixar a cargo do professor, por meio do diálogo e perguntas adequadas, a diferenciação desses conceitos, já trabalhados nas tarefas iniciais.

As tarefas 12 e 13 podem ser associadas à dialética da validação, pois os estudantes devem sustentar seu posicionamento frente aos demais colegas.

Mesmo que não sejam apresentados enunciados em demonstrações, como prescreve Brousseau, espera-se que os estudantes levem em conta elementos teóricos, como a existência de duas ou mais retas paralelas para que se tenha um feixe de retas paralelas.

Entre as possíveis respostas à questão 11, os alunos podem citar o nome de três ruas que anteriormente consideraram paralelas, entre elas Rua Alfândega, Senhor dos Passos e Buenos Aires, de acordo com a definição de feixe de paralelas apresentada no enunciado da atividade. Poderão identificar como sendo transversais as ruas que cortam as retas consideradas paralelas, entre elas as Ruas da Conceição e dos Andradas. A definição de ruas paralelas e transversais sempre será direcionada aos conceitos anteriormente apresentados, destacando-se “o infinito” e “cruzamento”.

Ao realizarem as tarefas mencionadas, os alunos estarão desenvolvendo os hábitos descritos por Brousseau, pois aprendem, auxiliam uns aos outros e possibilitam a troca de experiências, partindo de um conhecimento prévio para um conhecimento sistematizado, tendo condições de argumentar em prol de suas conclusões.

Nas tarefas 11 a 13, aborda-se o conceito de feixe de retas de um ponto de vista de estar presente em situações cotidianas, já que, como relata Azambuja (2013, p.29), em sua pesquisa com professores de matemática referente ao uso do cotidiano dos alunos nas aulas de Matemática,

> [...] ficou evidente nos relatos que os professores valorizam a investigação, a descoberta e a exploração do cotidiano para o ensino da Matemática, porque de certa forma, em sua grande maioria, foram influenciados em suas formações inicial e/ou continuada. Outro aspecto relevante, é que eles criticam métodos exclusivamente expositivos e desconectados.

Em particular, a tarefa 13 pode funcionar como uma verificação de aprendizagem, pois a capacidade de síntese e argumentação é posta em prova. Nesse sentido, cabe destacar as palavras de Almouloud (2010, p .24): “no processo de equilibração, a construção de novos esquemas (e de um novo conhecimento) se faz pela desestabilização dos antigos e posterior reconstrução.”

4.3.3 Análise *a Posteriori* das Tarefas de 11 a 13

Na resolução da tarefa 11, percebeu-se que ainda permanece uma certa confusão em relação aos termos. Na Figura 4.13, a dupla 04 mencionou dois feixes de retas paralelas, contudo um deles é apresentado como transversal sem, no entanto, mencionar que é um feixe de retas (paralelas entre si), mas transversais às retas do primeiro feixe mencionado. Isso ainda pode indicar confusão.

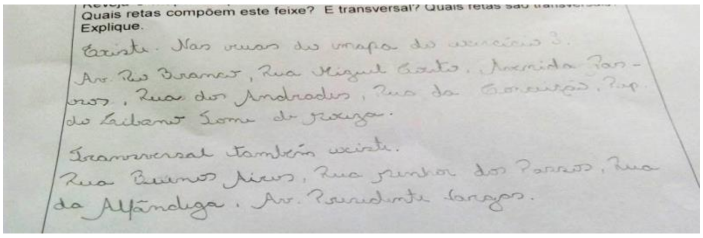


Figura 4.13: Resposta da dupla 04
Fonte: as autoras

(Transcrição: *Existe. Nas ruas do mapa do Exercício 9: Av. Rio Branco, Rua Miguel Couto, Avenida Passos. Rua dos Andrades, Rua da Conceição, Rep do Libano Tome de Souza. Tranversal também existe. Rua Buenos Aires, Rua senhos dos passos, rua da Alfândega. Av. Presidente Vargas*).

Já na questão 12, de modo geral, as equipes mencionaram a existência de feixes de retas paralelas, exemplificada na figura 4.14.

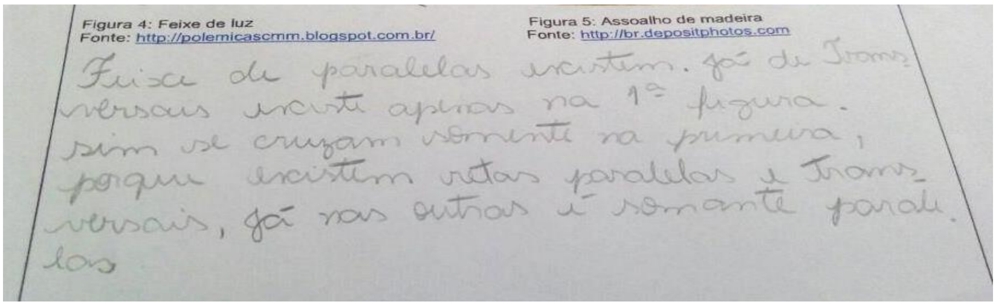


Figura 4.14: Resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

(Transcrição: *Feixe de paralelas existem. Já de transversais existe apenas na 1ª figura. Sim se cruzam somente na primeira, porque existem retas paralelas e transversais, já nas outras é somente paralelas*)

Nesta tarefa 12, foi possível perceber que, para identificar retas transversais, os estudantes pareciam estar focados no cruzamento de duas retas, o que pode ter sido a causa de ninguém indicar a figura 4 desta tarefa como sendo um feixe de retas que não são paralelas entre si.

Um fato curioso que nos remete à análise dos termos utilizados é a explicação dada por uma dupla em relação ao feixe de retas paralelas (veja a Figura 4.15).

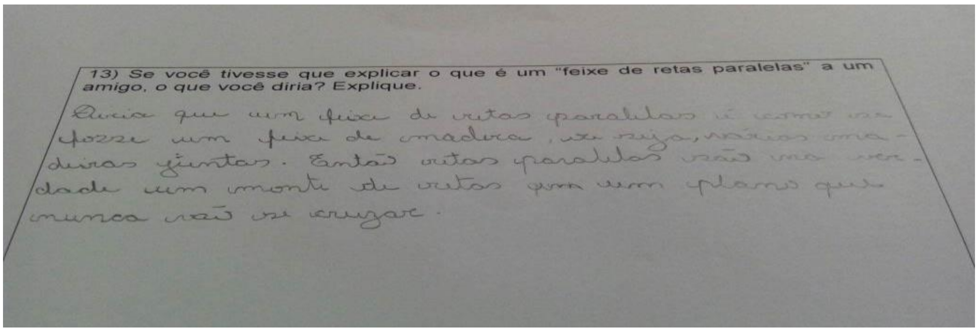


Figura 4.15: Resposta da dupla 04
Fonte: as autoras

(Transcrição: *Diria que um feixe de retas paralelas é como se fosse um feixe de madera, ou seja, várias madeiras juntas. Então retas paralelas são na verdade um monte de retas em um plano que nunca vão se cruzar)*

Sabe-se que o município de Curiúva é eminentemente rural, lugar no qual a expressão "feixe de lenha" é muito comum, já que muitos dos alunos são oriundos dessas propriedades e a expressão "feixe de lenha" poderá direcioná-los para as madeiras que são agrupadas e amarradas lado a lado e utilizadas em fogões de lenha presentes nessas residências rurais. A dupla pode ter evocado esse significado ao termo feixe, em vez do sentido matemático do termo.

Os erros cometidos nos chamam a atenção para a necessidade do professor estar atento às palavras usuais dos alunos, especialmente quando elas podem aparecer no contexto das aulas de Matemática, como é o caso da palavra "feixe". Outro fator a destacar é a necessidade de acompanhar as relações que os estudantes fazem no decorrer das tarefas, como é o fato que nos pareceu acontecer: associar a possibilidade de existência de feixe de retas transversais apenas quando se mostra claramente um ponto de interseção.

Para certificar-nos da compreensão adequada dos termos feixe de retas paralelas e feixe de retas transversais, ao final desta seção o assunto foi retomado com os estudantes e as dúvidas esclarecidas por meio da discussão dos conceitos e apresentação de novas situações, em mais um momento de institucionalização.

A fase de validação da Engenharia Didática mostrou-nos a necessidade de rever os enunciados das tarefas 2, 4 e 12, a fim de evitarem obstáculos didáticos, o que foi levado em conta apenas na reformulação para o produto educacional, associado a esta dissertação, que pode ser encontrado no Apêndice A.

Dessa primeira parte da sequência didática, percebeu-se que, conforme era esperado, inicialmente os estudantes tiveram dificuldades em escrever as respostas, por não se tratar de uma atitude habitual em aulas de matemática, entretanto, aos poucos, foram se envolvendo e “perdendo o medo” de escrever usando a língua portuguesa nas aulas de Matemática. Ainda há conceitos que parecem não estar claros para os estudantes, especificamente em relação à posição de retas paralelas e perpendiculares, entretanto, com os momentos de devolução ocorridos em sala, espera-se que ao menos as dificuldades tenham sido amenizadas. De modo geral, os alunos parecem estar gostando da autonomia de avançar na resolução das tarefas conforme sua facilidade e demonstram uma disposição maior em ajudar os demais colegas de turma.

Segunda Parte da Sequência Didática: os conceitos de razão e proporção

Após retomados os conhecimentos necessários à compreensão do Teorema de Tales, as tarefas dessa segunda etapa têm como objetivo trabalhar elementos relacionados à ampliação e redução de figuras, razão, proporção e segmentos proporcionais.

Nesta etapa, o *milieu* é composto pelas tarefas de ação juntamente com todos os recursos didático-pedagógicos utilizados, como os vídeos, os dicionários, a calculadora e o próprio trabalho em dupla na resolução das tarefas.

Nessa segunda parte, espera-se que os estudantes percebam que a matemática pode ser usada na prática, como é o caso do Teorema de Tales. A sequência didática foi planejada para que os estudantes pudessem usar os elementos contidos no Teorema de Tales em situações mais próximas de sua realidade. Com isso, pretende-se que, com o decorrer das tarefas, consigam resolver problemas que envolvem o Teorema de Tales tanto na linguagem matemática como em situações práticas. Além disso, espera-se que eles continuem a discutir e trabalhar em equipe, que pode proporcionar uma aprendizagem cooperativa aos seus membros, e exponham seus pontos de vista mais claramente. A aprendizagem cooperativa resulta de um trabalho cooperativo, sobre o qual Silva (1998, p.136) esclarece:

> De modo geral, o trabalho cooperativo concentra-se em pequenos grupos de alunos, interagindo com seus homólogos, ao mesmo tempo que trabalham com material acadêmico. O professor encontra-se à disposição para ajudar, mas, tipicamente, não dirige a interação entre os alunos.

Nesse contexto, as tarefas propostas visam a promover a troca de ideias e conhecimentos entre os alunos fortalecendo e ampliando a sua aprendizagem, sendo a professora pesquisadora um suporte para esclarecer suas dúvidas, intervindo quando necessário.

4.4 TAREFAS DE 15 A 19: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

4.4.1 Apresentação das tarefas 15 a 19

15) Observe a sala de aula abaixo:

Figura 08: representação de uma sala de aula
Fonte: http://www.aldacavalcante.com/2014/02/

a) Discuta com seus colegas e indique quais figuras geométricas estão presentes nesta figura de sala de aula.
b) Analise a sua sala de aula. Ela é semelhante à imagem apresentada nesta tarefa? Quais figuras geométricas estão presentes na sua sala de aula?
c) Vamos realizar medidas? Desenhem a janela, o quadro-negro e a porta da sua sala de aula. Dividam-se em grupos e meçam as partes desenhadas.
d) Vamos aumentar? Desenhe novamente o que solicitado no item C, aumentando três vezes em relação ao tamanho original.
e) Vamos diminuir? Desenhe novamente o que foi solicitado no item c, diminuindo as medidas duas vezes em relação ao tamanho original.
f) Observe as atividades realizadas nos itens D e E. O que ocorreu com as figuras desenhadas? Você considera que elas sejam as mesmas figuras? O que elas têm em comum? Comente.

16) Escolha uma imagem de uma revista.
a) Amplie a imagem a seu critério em relação à imagem original.
b) Reduza a imagem a seu critério em relação à imagem original.
c) Explique o procedimento realizado.
d) O que observaram? A figura geométrica continua sendo a mesma? O que mudou em relação às três figuras desenhadas?

17) Considerando que “figuras que apresentam a mesma forma, mas possuem tamanhos diferentes, são chamadas de figuras semelhantes” (RIBEIRO & SOARES, 2006, p.48), você considera que as figuras da atividade 16 (original, ampliada e reduzida) são semelhantes? Discuta com colegas e comente.

18) Você já ouviu falar em razão e proporção? Discuta com seus colegas e escrevam o que entendem por:
Razão____
Proporção____

19) Pesquise no dicionário o significado dessas duas palavras, anote-as e compare-as com suas respostas dadas na tarefa 18.

4.4.2 Análise *a Priori* das Tarefas de 15 a 19

O objetivo desse conjunto de tarefas é fazer o aluno perceber que as ampliações e reduções de figuras estão associadas a dois conceitos importantes da Matemática: razão e proporção, os quais são revividos na questão 18. Além disso, os conceitos de paralelismo e perpendicularismo estão implícitos nas tarefas. A imagem de sala de aula da tarefa 15 é uma tentativa de trazer o cotidiano do estudante para o estudo da matemática, pois de acordo com Azambuja (2013, p.14):

> Ao se encarar a matemática no âmbito de ciência, que compreende e explica os fenômenos do mundo, torna-se interessante para os alunos a relação do ‘aprender matemática’ com seus contextos sociais. A oportunidade de articular o ensino de matemática aos interesses e vivências dos estudantes, através da união dos seus conhecimentos prévios, situações vivenciadas em seu cotidiano, e às idealizadas em sala de aula são possibilidades de um ensino diferenciado.

As tarefas 15 e 16 oportunizam a inserção destes dois temas (cotidiano e conhecimentos prévios) ao propor situações em que os alunos deverão aplicar seus conhecimentos no contexto de sua sala de aula.

Entre as possibilidades de respostas considera-se que grande parte dos alunos reconhecerão apenas os retângulos (carteiras, cadeiras, armários, portas, janelas), losangos (teto) e quadrados (cerâmicas do piso), por serem mais comuns. Apresentarão facilidades para desenhar as partes solicitadas, medi-las, ampliá-las e reduzi-las.

Já a tarefa 17 caminha em direção ao estabelecimento de uma condição (critério) para figuras semelhantes, e pretende inserir a reflexão discente no ato de aprender, pois poderão argumentar sobre a maneira que uma razão sobre um lado e não sobre o outro poderá gerar figuras semelhantes ou não.

Por se tratar de tarefas relativas à geometria, pode ser que aconteçam problemas como os citados por Cunha (2015, p.6), em cuja intervenção sobre os elementos do triângulo numa atividade investigativa observou:

> [...] foi notável falta de interesse e paciência dos alunos para buscar as suas próprias respostas, a falta de conhecimento de figuras planas, e dos elementos dos triângulos também foi visível, além de não conhecerem os ângulos. Foi possível ainda observar grande dificuldade em cortar em linha reta e unir estas partes do triangulo de modo simétrico, ou seja, falta de coordenação motora, para atingir o objetivo de encontrar nesta união um ângulo de 180º (CUNHA, 2015, p. 6).

Apesar das possíveis dificuldades, espera-se que os alunos ajam com autonomia, tomando decisões baseadas em seus conhecimentos referentes aos temas propostos e à sua própria condição de agir em determinadas situações. Segundo Lucchesi, Lima e Gessinger (2012, p.73):

> [...] a autonomia do sujeito é um processo que se relaciona com a capacidade de autoria. A ação comunicativa, instaurada no diálogo em sala de aula, e a capacidade do educando em 'saber fazer' emergem do conflito, da pesquisa e das representações construídas na coletividade, mediadas pela intervenção do educador, incentivador e coordenador do processo de ensino.

Portanto, a autonomia desenvolvida pelos alunos é favorecida a partir das ações propostas pelo professor em sala de aula, valorizando os seus acertos e erros nas atividades desenvolvidas.

Espera-se que o estudante assuma seu papel crítico frente às tarefas apresentadas, questionando não apenas o como fazer, mas também as possibilidades de fazê-lo, mesmo que sua resposta sobre a semelhança de figuras, provocada pela questão 17, seja intuitiva.

Dentre as possibilidades de respostas, acredita-se que os alunos citem que as figuras anteriores são semelhantes, pois modificaram apenas os seus tamanhos e mantiveram a mesma forma, utilizando os conceitos presentes no enunciado e baseados nas ações realizadas nas atividades anteriores. Entretanto, há que se ressaltar que duas figuras são semelhantes entre si, quando há uma mesma proporção entre seus lados correspondentes, o que não está devidamente contemplado na definição apresentada na tarefa 17.

Espera-se que os alunos tenham menor dificuldade de responder à questão 18 nesse momento, haja vista as diversas tarefas que foram propostas com esse fim ao longo da sequência didática. Entretanto, dificuldades conceituais podem ocorrer, pois como afirma uma estudante da pesquisa de Marco e Moura (2010, p. 173): "'ter o conceito' pronto não significa entendê-lo a ponto de conseguir explicá-lo a si mesmo".

Especificamente em relação ao conceito de proporção, Nunes já fazia uma áspera crítica em 2002:

> É a proporcionalidade, questão central que envolve tanto frações como multiplicação, está presente em todas as ciências e faz parte do dia-a-dia de qualquer pessoa, seja no trabalho, seja em casa. O conceito, bastante simples na sua origem, nada mais é do que a relação entre duas variáveis. Para compreendê-lo, fazemos uma relação com a multiplicação, mas a escola não. Lá no início da escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação. Mas muitos professores ensinam essa operação básica apenas como uma "adição repetida" de parcelas. E não fazem relação com a noção de proporção. A adição repetida de parcelas não mostra o sentido de proporção que existe por trás dessa conta. Depois, só na 5ª série a proporção aparece, num capítulo isolado (NUNES, 2002, s/p).

Nunes argumenta que a proporção deve estar inserida desde os primeiros anos escolares, para que os alunos compreendam a sua presença em diversas situações do cotidiano. Complementando, a psicóloga Terezinha Nunes Martins (2007, p.109) descreve em sua pesquisa referente à aprendizagem de proporção na sexta série (sétimo ano):

> Muitas práticas nas salas de aula observadas basearam-se no pacto velado do faz-de-conta entre as professoras e seus alunos, com transmissão do conhecimento por parte das professoras e memorização dos conteúdos, algoritmos, regras e técnicas por parte dos alunos. Com metodologias ainda muito arraigadas na transmissão de conhecimento conteúdo, a aprendizagem de proporção reduziu-se à mera listagem de conteúdo, sem preocupação com o processo individual de cada aluno de construção e estruturas de conhecimento.

Não é objetivo desta dissertação discutir o ensino de proporcionalidade, mas as questões apresentadas ilustram uma possível dificuldade dos alunos que ainda pode persistir.

De modo geral, as tarefas desse bloco estão associadas às dialéticas de ação e formulação de Brousseau. Se considerarmos que ao ampliar ou reduzir as imagens os estudantes estarão pondo em prática e refletindo sobre os conceitos de razão e proporção, as questões 15 e 16 também poderão estar associadas à dialética de validação. A questão 19 está associada à dialética de validação pelo confronto proporcionado entre a definição do dicionário e as próprias respostas dos alunos, dadas na tarefa 18.

4.4.3 Análise *a Posteriori* das Tarefas de 15 a 19

De fato, os alunos perceberam apenas os retângulos e quadrados (figuras geométricas de 2 dimensões). Nota-se que, embora já faça parte do conteúdo programático de anos anteriores, elementos da geometria espacial como paralelepípedos não foram mencionados, exceto no caso da dupla 08, que citou a esfera (mesmo erroneamente – Figura 4.16) e a dupla 10 que citou círculos.

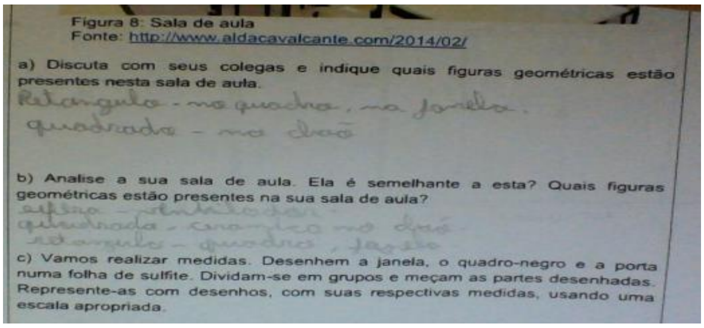


Figura 8: Sala de aula
Fonte: http://www.aldacavalcante.com/2014/02/

a) Discuta com seus colegas e indique quais figuras geométricas estão presentes nesta sala de aula.

Retangulo - no quadro, na janela.
quadrado - no chaõ

b) Analise a sua sala de aula. Ela é semelhante a esta? Quais figuras geométricas estão presentes na sua sala de aula?

c) Vamos realizar medidas. Desenhem a janela, o quadro-negro e a porta numa folha de sulfite. Dividam-se em grupos e meçam as partes desenhadas. Represente-as com desenhos, com suas respectivas medidas, usando uma escala apropriada.

Figura 4.16: resposta da dupla 08
Fonte: as autoras

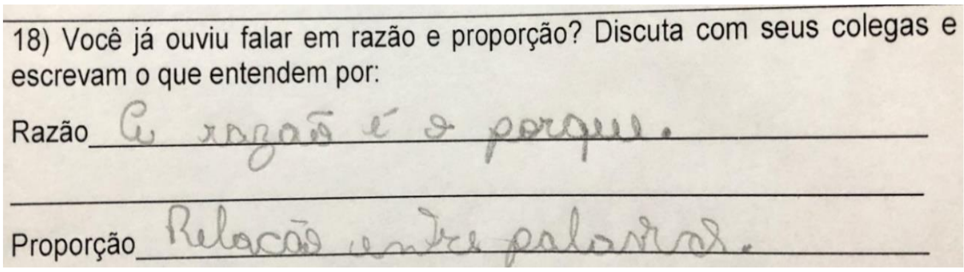
(Transcrição: *a) retângulo – no quadro, na janela. Quadrado – no chão. B) esfera – ventilador; quadrado – cerâmica no chão; retângulo – quadro, janela.)*

O uso das palavras aumentar e diminuir na tarefa 15 parece ter feito os alunos associarem a ampliação de uma figura com somar alguma medida a seus lados, enquanto que a redução foi associada com diminuir medidas. Mais uma vez isso nos alertou para as relações implícitas que podem acontecer em sala de aula com os termos matemáticos. Não se associou aumentar ou diminuir "tamanhos" por meio da razão entre seus lados. Isso pode ser considerado um obstáculo didático, uma vez que o uso inadequado de uma palavra no enunciado de uma questão pode trazer dificuldades na resolução de outras tarefas.

Nas representações das portas e janelas, solicitadas no item c, observou-se um desenho semelhante ao objeto real, entretanto larguras e alturas não preservaram a escala no desenho, tampouco quando se pediu para aumentar em 3 vezes o tamanho da figura. Essa dificuldade discente indica a necessidade de maior cuidado no enunciado da questão, mas também pode indicar que o estudo das razões e proporções carece de maior atenção e praticidade.

Importa destacar a validade de diferenciar figuras parecidas entre si (que comumente chamamos de semelhantes) de figuras proporcionais (as quais matematicamente são ditas serem semelhantes). Os alunos desenharam figuras parecidas, as quais eles chamaram de semelhantes, porém não proporcionais, corroborando a dificuldade já expressada por Nunes (2002).

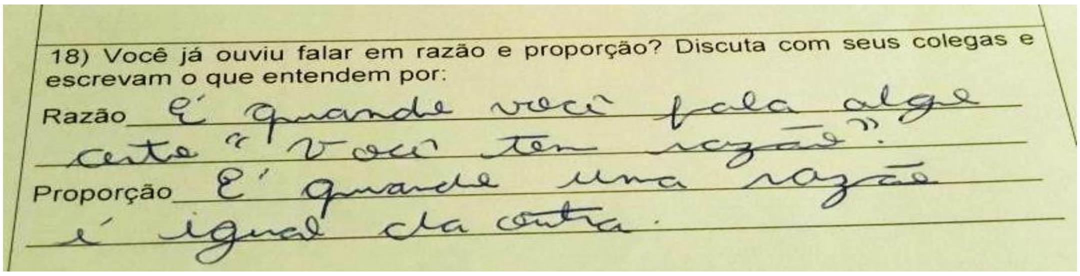
A associação palavra-significado inadequada mostrou-se na questão 18, sendo que uma das equipes associou à palavra razão o "porquê" (veja figura 4.17). A dupla 11 também conceituou razão nesse sentido (Figura 4.18).


18) Você já ouviu falar em razão e proporção? Discuta com seus colegas e escrevam o que entendem por:

Razão A razão é o porque.

Proporção Relação entre palavras.

Figura 4.17: Entendimento dos conceitos de razão e proporção para a dupla 10.
Fonte: as autoras
(Transcrição: *A razão é o porque. Proporção – Relação entre palavras.)*



18) Você já ouviu falar em razão e proporção? Discuta com seus colegas e escrevam o que entendem por:

Razão É quando você fala algo certo "você tem razão".

Proporção É quando uma razão é igual da outra.

Figura 4.18: Entendimento dos conceitos de razão e proporção para a dupla 11.
Fonte: as autoras

(Transcrição: Razão – é quanto você fala algo certo "você tem razão". Proporção – é quando uma razão é igual da outra.)

As respostas apresentadas pelos alunos indicam a necessidade de se ampliar e diversificar as práticas pedagógicas em sala de aula, visto que os termos solicitados neste conjunto de tarefas deveriam ser de domínio dos estudantes, entretanto, das 15 duplas analisadas, 10 (cerca de 67%) não atribuíram um sentido matemático ao termo razão. As duplas que deram um sentido matemático ao termo o relacionaram com resultado, comparação e igualdade entre grandezas.

Apesar disso, quando os estudantes se defrontaram com a definição matemática do dicionário de Língua Portuguesa, houve uma interessante discussão entre eles na tentativa de entender tais diferenças e sobre como o conceito se aplica na prática, mostrando mais uma vez a importância da comunicação (traduzida na dialética da formulação de Brousseau) em sala de aula de matemática. De certa forma, os discentes mostraram-se curiosos para as próximas tarefas, na expectativa de esclarecer esse assunto. Verificou-se, neste momento da aplicação das tarefas da sequência didática, uma mudança de atitude dos alunos que passaram a conversar e discutir assuntos que normalmente não davam importância, ressaltando-se o cunho matemático. Mencionaram, neste momento, a interrelação entre os conceitos que estavam sendo abordados nas tarefas que realizaram e nas próximas tarefas propostas. Uma aluna citou que todos estes conceitos se direcionavam para a compreensão do Teorema de Tales, mesmo sem tê-lo estudado antes.

4.5 TAREFAS DE 20 A 28: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

4.5.1 Apresentação das Tarefas de 20 a 28

20) Assista aos vídeos da série Matemática na Vida: Série Razão e Proporção

- A: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001056.mp4
- B: https://www.youtube.com/watch?v=wkjlps0B3Jc

Anote os pontos e definições que achar interessante.

21) Qual foi a definição de razão apresentada nos vídeos? E de proporção? A definição que você e seus colegas apresentaram e a do dicionário relacionavam-se com a que estava presente nos vídeos? Comente.

22) Considerando que “Razão é o quociente entre duas grandezas”, é possível determinar as razões entre as alturas das árvores da figura abaixo? Se sim, indique. Justifique a sua resposta.

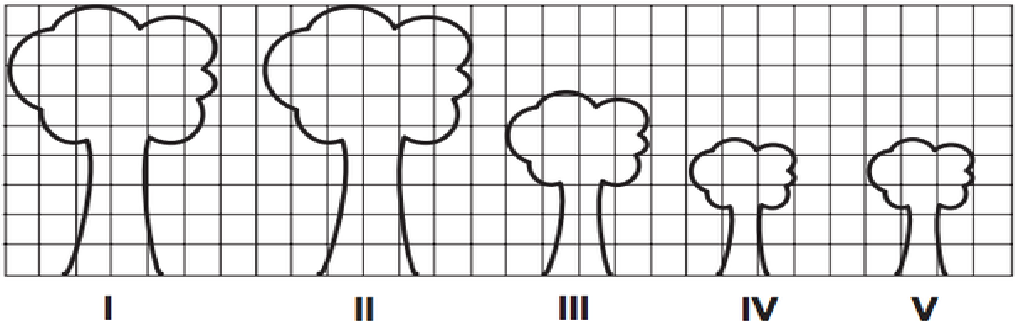


Figura 09: representação de árvores
Fonte: http://questoes_casa.s3.amazonaws.com/24137.jpg

23) Retomando conhecimentos. Vamos encontrar a razão entre as figuras originais, aumentadas e diminuídas das atividades 15 e 16. Realizem a atividade em dupla.

24) Vamos aprender um pouco mais sobre os conceitos matemáticos estudados, acessando os Objetos de Aprendizagem presentes nos links abaixo:

Proporcionalidade e Semelhança:

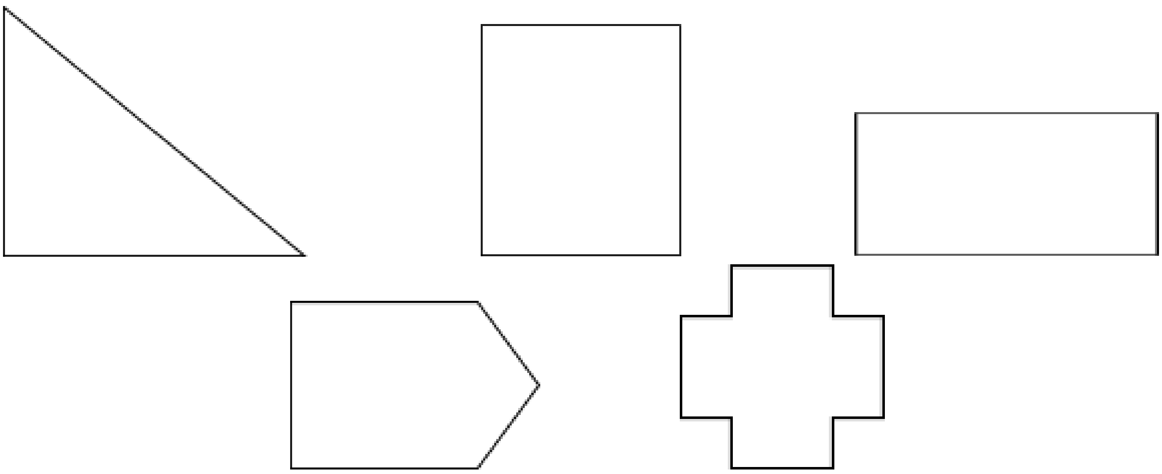
http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/proporcionalidde/AtividadeMat.html

Semelhança de Figuras:

http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/semelhanca_atraves_da_ampliacao/index2.html

As informações e atividades presentes nestes Objetos de Aprendizagem abordaram conceitos que vocês conheciam? Quais? Justifique a sua resposta.

25) Observe as figuras: (Adaptada de Haruna (2000)



a) Meça os lados de cada figura.
b) Amplie cada figura duas vezes em relação à medida inicial e realize as medidas de cada lado das figuras desenhadas.
c) Calcule a razão entre as medidas dos lados de cada figura com a medida dos lados correspondentes na ampliação.
d) O que variou durante a ampliação das figuras? Explique seu posicionamento.

26) Observe os prédios abaixo:

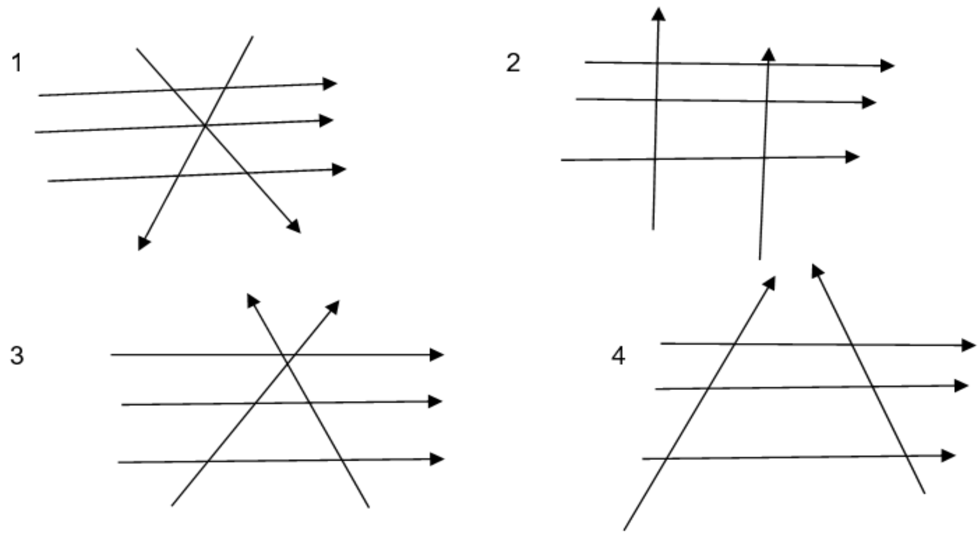
(A) (B) (C)

Figura 10: representação de prédios
Fonte: as autoras

a) Construa três prédios semelhantes aos das figuras com as medidas indicadas (considere a primeira medida sendo a altura e a segunda medida como sendo a lateral do prédio):
A: 20m e 10m
B: 10m e 5m
C: 5m e 2,5m
b) Depois de construídos os prédios, determine a razão entre os lados (altura e largura) do prédio A com os lados dos prédios B e C que foram reduzidos.
c) O que você observou? Houve alteração nos valores obtidos? Como você definiria com suas palavras o conceito de razão?
d) Você considera que há "retas" paralelas nos prédios? Onde? E "retas" transversais? Represente através de desenhos.

27) Relembrando: Faça um resumo com as ideias centrais do que foi desenvolvido até o momento.

28) Observe as posições das retas abaixo:



a) Quais as posições ocupadas pelas retas em 1, 2, 3 e 4?

b) Você consegue relacionar as posições das retas acima com os conceitos estudados até o momento. Justifique.

c) Esboce duas outras posições entre retas paralelas e transversais.

4.5.2 Análise *a Priori* das Tarefas de 20 a 28

O objetivo desse conjunto de tarefas é evidenciar[6] a compreensão dos conceitos de razão e proporção, por meio da apresentação de vídeos, exercícios digitais (objetos de aprendizagem) e outras tarefas de medição.

Silva (2011, p. 41), em pesquisa sobre a utilização de vídeos como recursos didáticos, destaca:

> O vídeo é um recurso que, se aplicado como material pedagógico, por meio de um planejamento criterioso, pode auxiliar na transposição didática dos conteúdos curriculares de maneira adequada e proporcionar resultados significativos.

[6]O professor que quiser aplicar essa sequência didática em sala pode suprimir esse bloco de atividades se compreender que os seus alunos têm conhecimento adequado sobre razão e proporção.

Ainda nesse contexto, Ferreira, Nogueira e Oliveira (2008, p. 26) afirmam:

> [...] os recursos didáticos quando assertivamente empregados contribuem positivamente nos processos de ensinar e aprender matemática, em: melhoria da prática pedagógica do professor, através da investigação na elaboração e execução das atividades; mudança de postura dos alunos demonstrando maior interesse e participação nas aulas, desenvolvendo assim melhor suas potencialidades a ponto de reelaborar e construir seu próprio conhecimento, entre outros.

Sobre os objetos de aprendizagem, Aguiar e Flôres (2014, p.12) explicam que eles se apresentam "[...] como uma vantajosa ferramenta de aprendizagem e instrução, a qual pode ser utilizada para o ensino de diversos conteúdos e revisão de conceitos". Destacam também que a utilização de um Objeto de Aprendizagem deve ocorrer a partir do objetivo que se pretende atingir com a aprendizagem de um determinado conteúdo, através de um cuidadoso planejamento.

Comentamos, no bloco anterior, que os estudantes não associaram o termo razão a conceitos matemáticos, nem citaram a importância deles para o estabelecimento de figuras matematicamente chamadas de semelhantes (que exigem proporcionalidade entre lados correspondentes). Devido à centralidade desses conceitos no Teorema de Tales, esse bloco de questões retoma esses saberes levando os estudantes a discuti-los entre si e confrontar as definições apresentadas por eles, pelo dicionário e por um vídeo aula de matemática. Espera-se que, após essa etapa, os alunos obtenham sucesso na resolução das tarefas propostas (tanto as tarefas virtuais – no computador, como as no papel) e possam mobilizar tais saberes nas tarefas do próximo bloco.

Este bloco de questões reforça as dialéticas de ação, formulação e validação estabelecidas por Brousseau, uma vez que a partir do enfrentamento das diferenças observadas, em comum acordo os estudantes estabelecerão, mesmo que empiricamente, um conceito para razão e proporção que lhes tenha algum significado matemático, e que possa ser testado por meio das resoluções das tarefas de 23 a 26, as quais se espera que sejam resolvidas sem dificuldades. A tarefa 27 reforça a importância da língua natural como forma de representar o conhecimento adquirido, enquanto a tarefa 28 reforça o conceito de feixe de retas paralelas e transversais.

Na questão 22, pode ser que haja maior discussão porque o enunciado não explica quais as grandezas a serem observadas nas árvores. Espera-se que, pelo desenho, os alunos intuam que as grandezas possíveis, relacionadas ao desenho das árvores no papel quadriculado, sejam número de quadradinhos ocupados pela altura da primeira árvore e o número de quadradinhos ocupados pela altura na segunda árvore a comparar, e que a razão entre as alturas será, por exemplo, 1, se forem consideradas as duas primeiras árvores da imagem, o que indica que as árvores têm a mesma altura.

4.5.3 Análise *a Posteriori* das Tarefas de 20 a 28

A possibilidade de aprender matemática usando outros meios que não apenas a lousa e o giz estimulou os alunos e os fez prestar atenção ao vídeo, como indica a Figura 4.19.

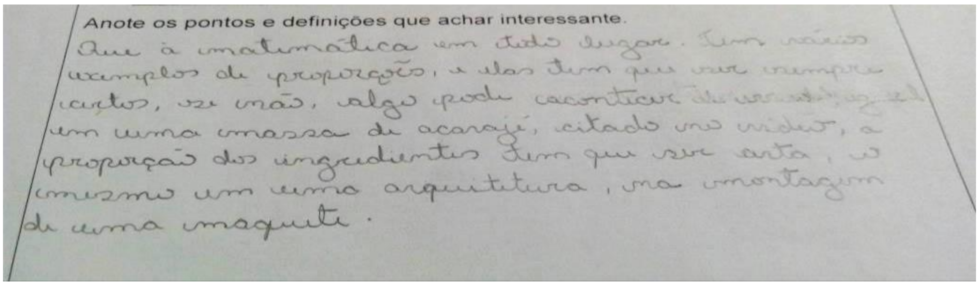

Anote os pontos e definições que achar interessante.

Figura 4.19: resposta da dupla 04
Fonte: as autoras

(Transcrição – anote os pontos e definições que achar interessante: que à [há] matemática em todo lugar. Tem vários exemplos de proporção, e elas tem que ser sempre certos, se não, algo pode acontecer de errado, como em uma massa de acarajé, citado no vídeo, a proporção dos ingredientes tem ser certa, o mesmo em uma arquitetura, na montagem de uma maquete)

Embora tenham se atentado ao vídeo, todas as equipes mencionaram a questão do certo/errado, comentado no vídeo sobre a receita de acarajé, o que foi assunto para mais uma discussão coletiva. O que é esse certo e errado na Matemática?

Na tarefa 22, esperava-se que os estudantes pudessem perceber que uma razão é calculada mediante a comparação de duas grandezas, as quais, nesse contexto, deveriam ser altura e largura, entretanto nenhuma dupla conseguiu perceber isso, indicando a necessidade de revisão desse enunciado.

Fato semelhante aconteceu na tarefa 23, na qual foi necessária a intervenção da professora pesquisadora, por meio de questionamentos sobre as ações que deveriam ser realizadas para solucionar as atividades. Neste momento, os alunos participaram com perguntas e dúvidas sobre como poderiam calcular as razões entre as figuras desenhadas (original, ampliada e reduzida). A situação de devolução foi imprescindível para que os estudantes pudessem responder à tarefa. As figuras 4.20 e 4.21 ilustram os cálculos e desenho (apenas do quadro) da dupla 08 e a Figura 4.22 ilustra os cálculos da dupla 07.

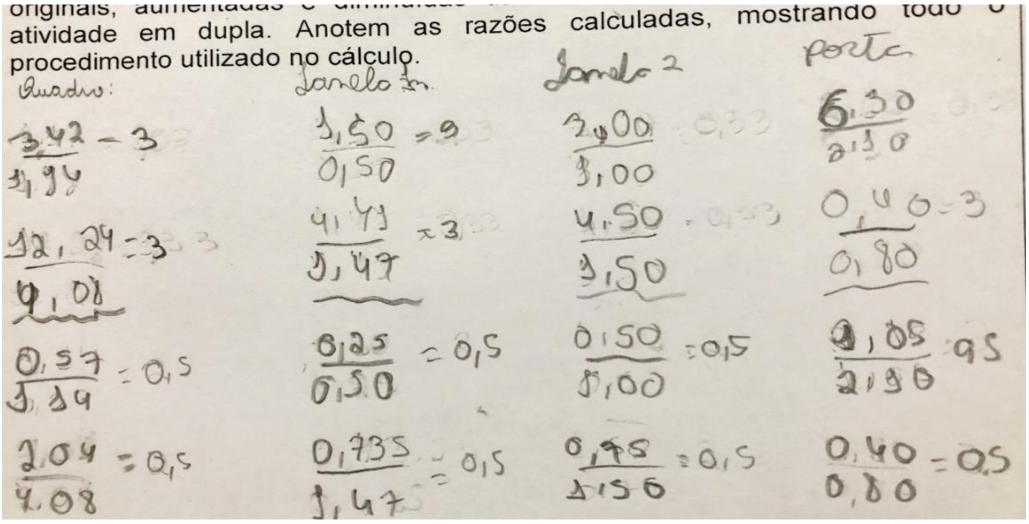


Figura 4.20: Cálculos de razão da Dupla 08
Fonte: as autoras

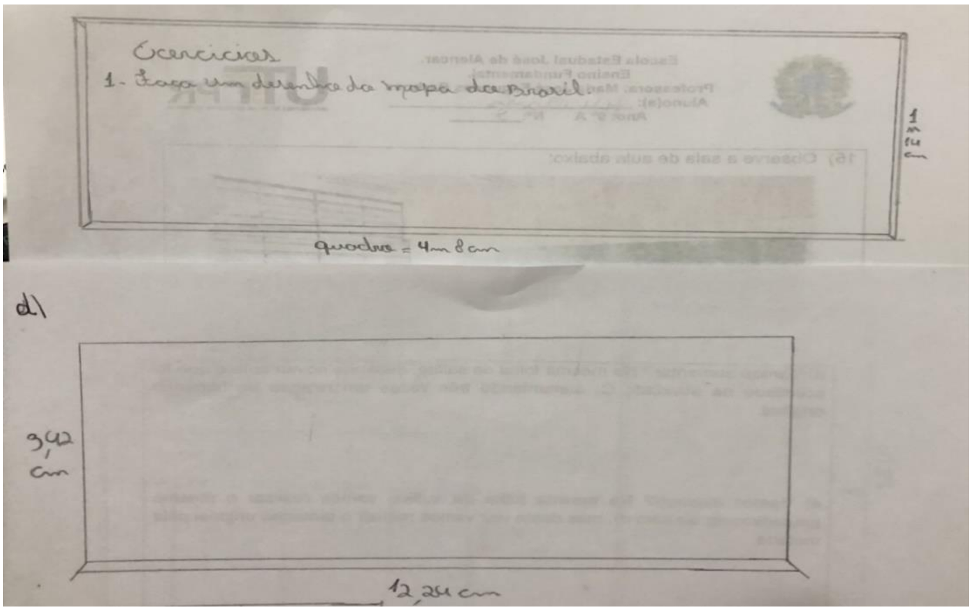


Figura 4.21: Desenho (quadro) da Dupla 08, para o qual calcularam a primeira razão da Figura 4.20.
Fonte: as autoras

Observe na Figura 4.20 que, apesar das razões estarem constantes, a resposta foi apagada diversas vezes, o que pode dar indícios da dificuldade de utilização do conceito de razão em uma situação real. Além disso, percebe-se na Figura 4.21 que houve confusão entre as unidades de medidas, o que pode indicar também uma certa confusão ou distração por parte dos alunos.

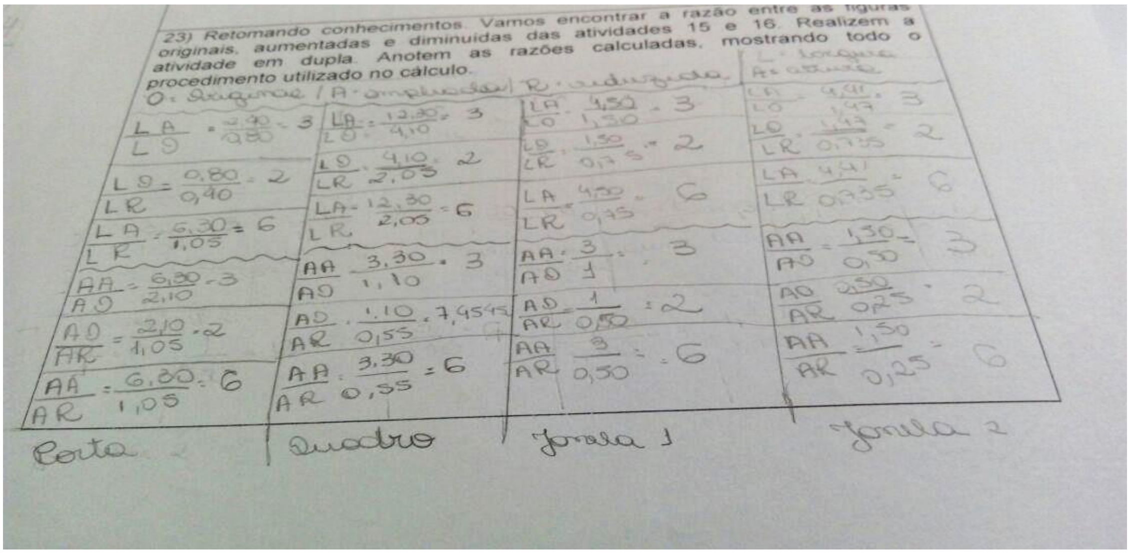
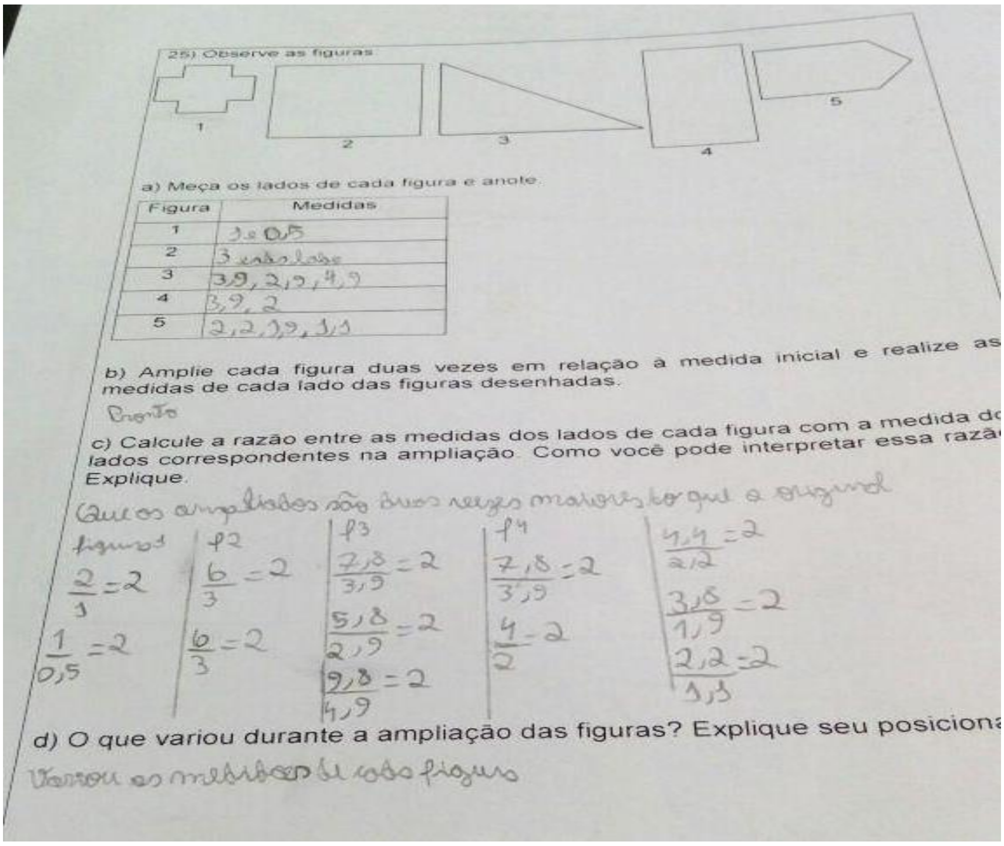


Figura 4.22: cálculo de razões da dupla 07
Fonte: as autoras

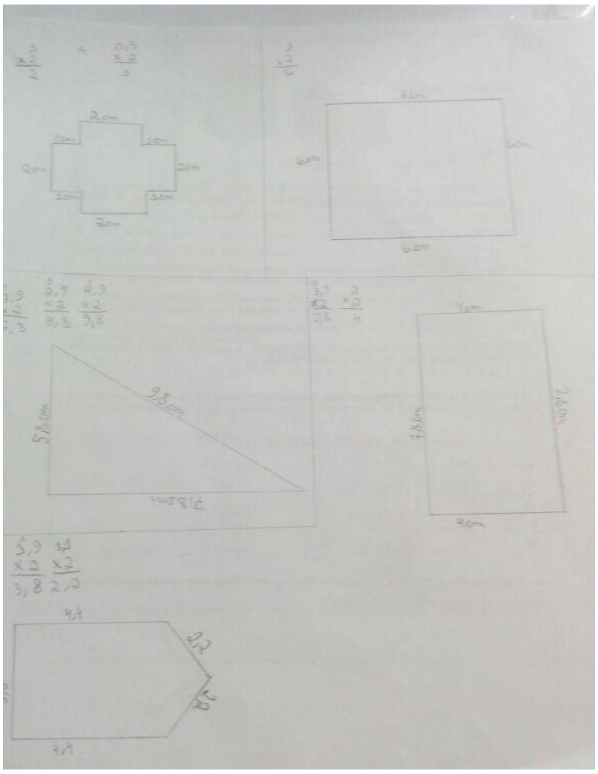
Na Figura 4.22, percebemos que os cálculos das razões entre as respectivas alturas das figuras aumentadas e diminuídas não obtiveram o mesmo resultado para a variável largura, indicando que os desenhos não eram proporcionais.

No dia da aplicação desse bloco de tarefas, apenas 5 das 26 máquinas estavam funcionando, então a tarefa 24 foi deixada a cargo do estudante para ser resolvida em casa. Não será analisada.

Após todas as discussões entre os próprios estudantes e a intervenção da professora pesquisadora, por meio de questionamentos, em relação ao cálculo de razões e proporção, os alunos obtiveram êxito nas tarefas 25 e 26, calculando adequadamente as razões (como ilustram as Figuras 4.23 (a) e (b) e Figura 4.24), corroborando a afirmação de Brousseau (2009, p.92): “o ensino que propomos pretende fazer com que o aluno faça a si mesmo as perguntas que são de domínio do professor – tão importantes quanto as respostas - e, dentro do possível, que os conhecimentos façam sentido.”

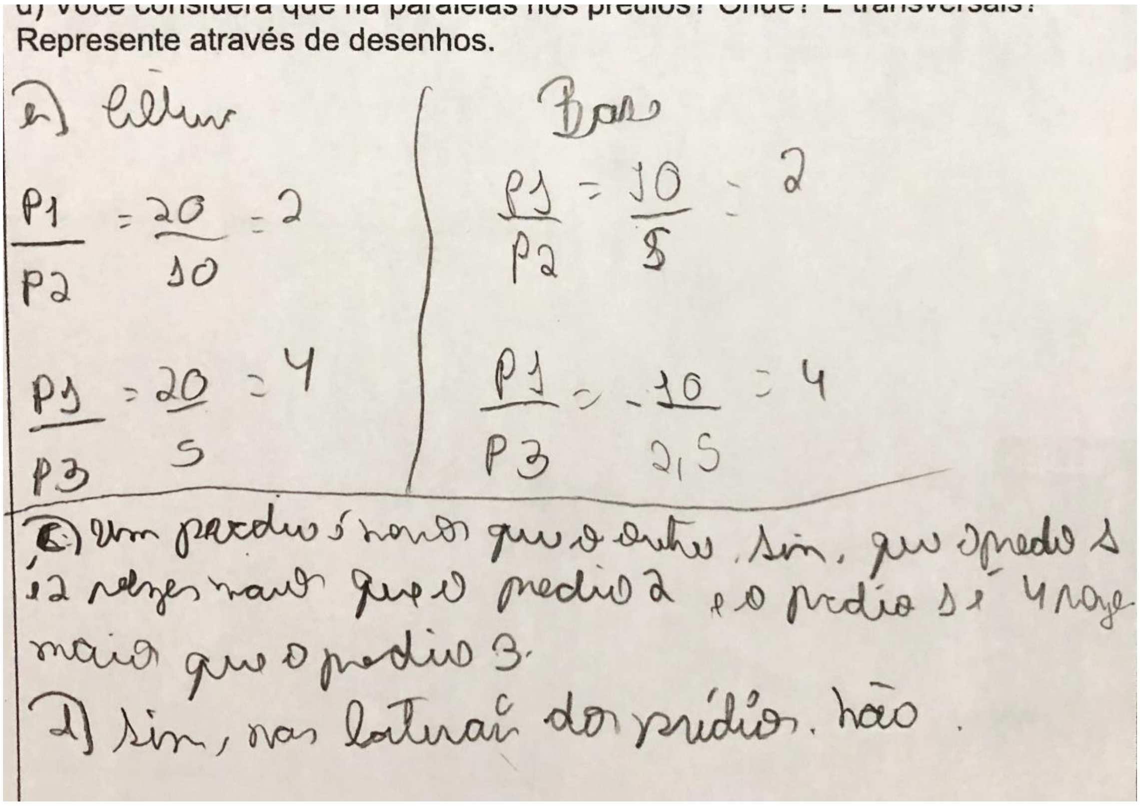


(a)



(b)

Figura 4.23. Cálculo das Razões (a) e desenho ampliado com razão 2 (b) da dupla 07.
Fonte: as autoras


Represente através de desenhos.

c) Altura

$\frac{P1}{P2} = \frac{20}{10} = 2$

$\frac{P1}{P3} = \frac{20}{5} = 4$

Base

$\frac{P1}{P2} = \frac{10}{5} = 2$

$\frac{P1}{P3} = \frac{10}{2,5} = 4$

Figura 4.24: Cálculo das razões entre os prédios apresentados na Tarefa (Dupla 08)
Fonte: as autoras

(Transcrição*: c) Um predio é menor que o outro. Sim. Que o predio 1 é 2 vezes maior que o predio 2 e o predio 1 é 4 vezes maior que o predio 3. D) sim, nas laterais dos prédios*[indicando a presença de paralelas e onde]. *Não* [indicando a não existência de transversais]*).*

A tarefa 27 pretendia revisar os conceitos estudados ao longo da sequência didática justamente por ser o próximo bloco de questões que abrangem diretamente o Teorema de Tales. Apenas 5 das 15 duplas apresentaram uma definição dos conceitos. As demais apenas mencionaram os conceitos: reta, segmento de reta, retas paralelas, retas transversais, razão e proporção. Mesmo que tenham apenas mencionado, essa atitude foi considerada positiva, pois esses nomes foram lembrados sem a necessidade de pesquisar nas folhas de tarefas.

Na Figura 4.25, é apresentada a resposta da dupla 06, considerada a mais completa.

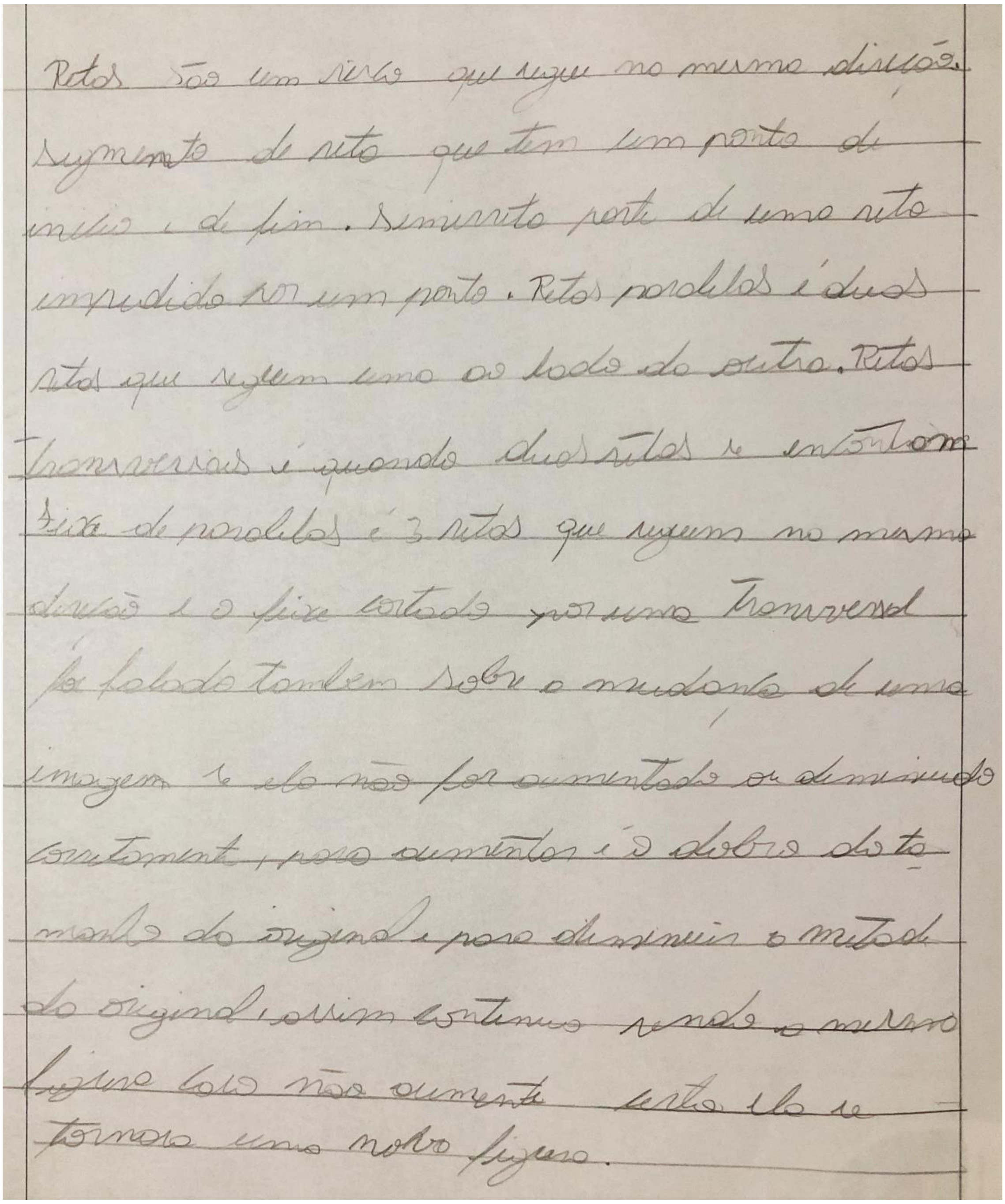

Retas são um risco que segue na mesma direção.
Segmento de reta que tem um ponto de
inicio e de fim. Semirreta parte de uma reta
impedida por um ponto. Retas paralelas é duas
retas que seguem uma ao lado da outra. Retas
Transversais é quando duas retas se encontram
Feixe de paralelas é 3 retas que seguem na mesma
direção e o feixe cortado por uma Transversal
foi falado tambem sobre a mudança de uma
imagem se ela não for aumentada ou diminuida
corretamente, para aumentar é o dobro do ta-
manho do original e para diminuir a metade
do original, assim continua sendo a mesma
figura caso não aumenta certo ela se
tornara uma nova figura.

Figura 4.25: Síntese dos conceitos abordados – Dupla 06.
Fonte: as autoras

(Transcrição*: retas são um risco que segue na mesma direção. Segmento de reta que tem um ponto de início e de fim. Semirreta parte de uma reta impedida por um ponto. Retas paralelas é duas que seguem uma ao lado da outra. Retas transversais é quando duas retas se encontram. Feixe de paralelas é 3 retas que seguem na mesma direção e o feixe cortado por uma transversal foi falado também sobre a mudança de uma imagem se ela não for aumentada ou diminuida corretamente, para aumentar é o dobro do tamanho original e para diminuir a metade do original, assim continua sendo a mesma figura caso não aumenta certo ela se tornara uma nova figura*).

Não houve dificuldades das duplas em reconhecer feixe de retas paralelas e transversais na tarefa 28.

Nessa segunda etapa, os conceitos de razão e proporção ainda foram aqueles que os estudantes mais tiveram dificuldade de assimilar e acomodar, entretanto, com os vídeos e tarefas dadas, essa dificuldade parece ter sido resolvida (ao menos reduzida). Contudo, ressalta-se que um fator que parece ter sido relevante nesse processo de superação da dificuldade foi a colaboração e discussão entre pares, o que contribuiu também, acredita-se, para que os estudantes pudessem mencionar os temas estudados ao longo de 26 tarefas sem ter que recorrer a elas para lembrar.

Tudo isto pode ser uma consequência da dialética de ação, formulação e validação empírica utilizada ao longo da sequência didática.

Terceira Parte da Sequência Didática: Teorema de Tales

A terceira parte da Sequência Didática contém tarefas que têm como objetivo oportunizar aos alunos condições de reconhecer o significado de Teorema de Tales e identificar, nele, todos os conceitos previamente estudados, como, por exemplo, feixe de retas paralelas, razão e proporção.

Inicialmente, esse bloco de tarefas tem um cunho mais teórico, para resgatar os conceitos já trabalhados, mas culmina em tarefas práticas que possibilitam a atribuição de significado ao Teorema de Tales, foco dessa dissertação.

Mais uma vez, utilizam-se as dialéticas de ação, formulação e validação ao longo do processo de resolução das tarefas, sendo dado especial destaque às ações conjuntas, nas quais a dupla deve compartilhar sensações, percepções e argumentar sobre suas conjecturas. União de duplas será fortemente incentivada, haja vista a contribuição que tais discussões entre os próprios alunos têm trazido para o entendimento conceitual e esclarecimento de dúvidas, percebida pela professora pesquisadora.

Considera-se que todas as tarefas presentes nesta etapa apresentem situações que permitam ao aluno compreender a importância do Teorema de Tales em si e a sua utilização em diversas situações que envolvem o cotidiano e também servem de suporte para a aprendizagem de outros conceitos matemáticos.

4.6 TAREFAS DE 29 A 38: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

4.6.1 Apresentação das Tarefas de 29 a 38

29) Você já ouviu falar em teorema? Explique o que é um teorema com suas palavras.

30) Pesquise o significado de teorema.

30.1) Em um dicionário, pesquise a definição de teorema.

30.2) Na *internet*, pesquise e enuncie algum teorema que esteja relacionado às atividades que você está desenvolvendo. Que palavras-chave você usou na pesquisa?

31) Vamos fazer a representação de um teorema:

1.ª Etapa: Construção no papel milimetrado:

- Desenhar três retas paralelas entre si e escolher distâncias diferentes entre elas, duas a duas.
- Nomear essas retas por r, s e t.
-Traçar duas retas transversais e nomeá-las por m e n.
- Nomear os pontos de intersecção pertencentes a m por A, B e C e os pontos de intersecção pertencentes a n por D, E e F;
- Medir os segmentos AB, BC, DE e EF;
- Registrar essas medidas em uma tabela semelhante a seguinte:

Segmento	***Medida***

Calcular as razões AB/BC e DE/EF (Pode utilizar a calculadora). Anotar os valores encontrados.

Responda:

a) Compare os resultados que você obteve. Qual é a relação entre essas medidas? ____

2.ª Etapa

- Alterar as distâncias entre as retas paralelas r, s e t.
- Novamente, medir os segmentos AB, BC, DE e EF e registrar em uma nova tabela semelhante à construída anteriormente.
- Calcular as razões AB/BC e DE/EF, utilizando a calculadora, e anotar os resultados.

Responda:

a) O que se pode afirmar sobre os segmentos de reta paralelas quando são cortados por retas transversais?

b) Há alguma relação entre as ações realizadas na 1ª e 2ª etapas? Qual?

32) Observe a definição apresentada para o Teorema de Tales:

Teorema de Tales: Dados um feixe de retas paralelas e retas transversais, a razão entre as medidas dos segmentos quaisquer de uma das retas transversais é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra reta ransversal.

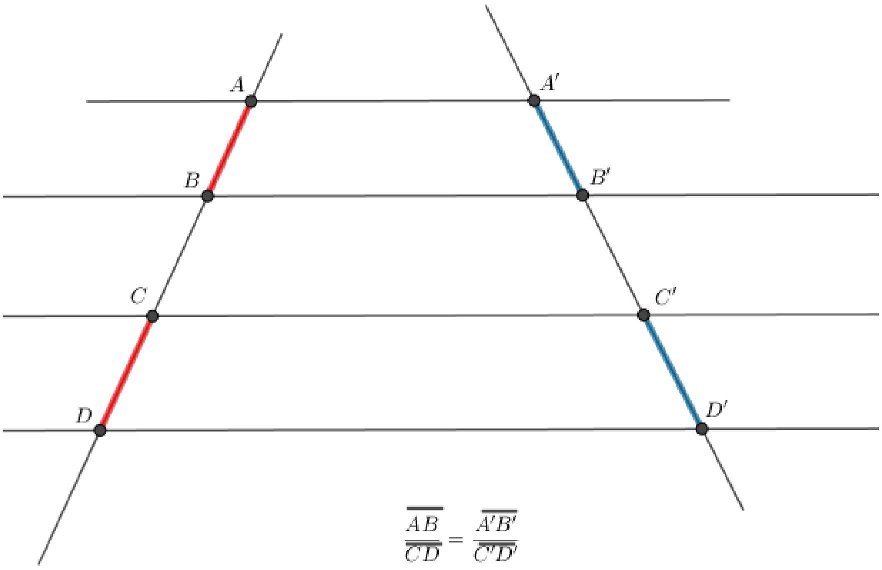


Figura 11: retas paralelas cortadas por duas retas transversais
Fonte: as autoras

a) Do que trata o Teorema de Tales? Para que ele serve? Explique com suas palavras.

b) Você conhecia o Teorema de Tales? Quais conceitos que você estudou estão presentes no enunciado do Teorema?

33) Veja os vídeos que abordam o Teorema de Tales em algumas situações:

- A: https://www.youtube.com/watch?v=sNAEqGG4ec8&t=22s
- B:https://www.youtube.com/watch?v=kmemd29j7hA

a) Anote as ideias centrais de cada vídeo apresentado.

b) A partir dos vídeos, quais outras situações podem ser resolvidas com o uso desse teorema, na sua opinião. Por quê?

34) O Teorema de Tales originou-se, segundo a História da Matemática, através da medida da altura da Pirâmide de Quéops no antigo Egito. A ação-atividade realizada por Tales está demonstrada no vídeo Tales e a Pirâmide, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=JuJ7l4gidoI. Após o video visualisado e os procedimentos demonstrados pela professora, descreva como Tales realizou a medida da altura da pirâmide.

35) Em grupos vamos utilizar o processo descrito por Tales e o seu Teorema para o cálculo da altura dos itens propostos. Em cada cálculo faça um desenho que represente a situação e descreva os procedimentos realizados para obtenção das medidas (Não esqueça de inserir os cálculos):

a) Poste da Praça

Figura 12: poste da praça
Fonte: as autoras

b) Prédio

Figura 13: prédio
Fonte: as autoras

c) Árvore

Figura 14: árvore
Fonte: as autoras

d) Ginásio de Esportes

Figura 15: ginásio de esportes
Fonte: as autoras

e) Hotel

Figura 16: hotel
Fonte: as autoras

f) Poste da Rede de Transmissão

Figura 17: poste de rede de transmissão
Fonte: as autoras

36) A figura abaixo indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A medem, respectivamente, 15m, 20m e 25m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28m.

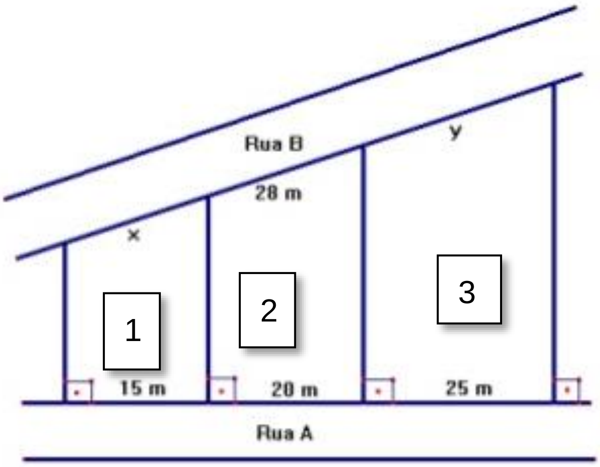


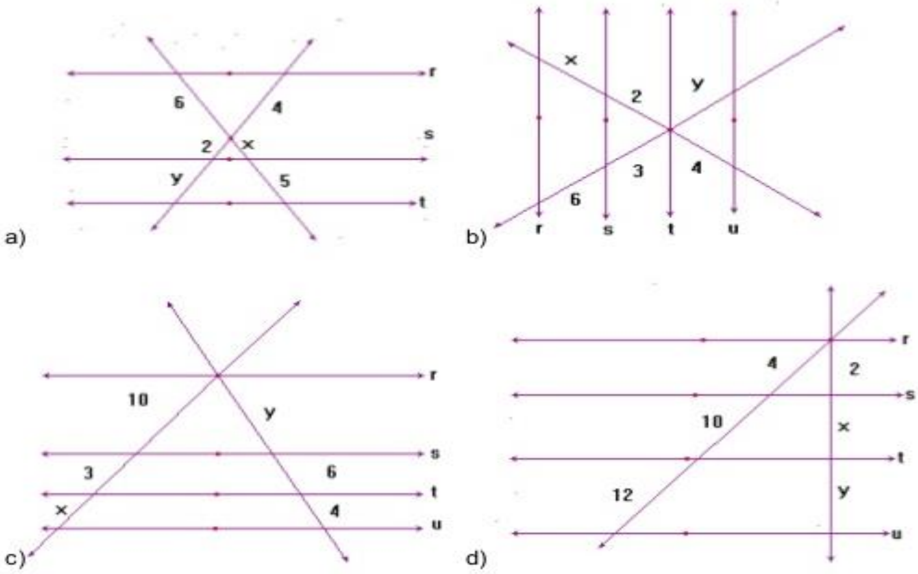
Figura 18: representação dos três lotes de um terreno
Fonte: https://pt.slideshare.net/valtergomes10/lista-de-exercicios-teorema-de-tales

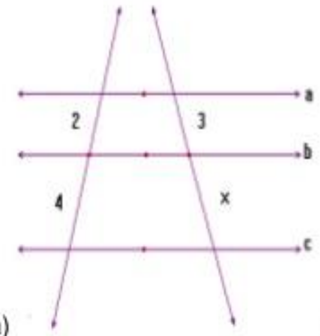
a) Qual é a medida de frente para a rua B dos lotes 1 e 3? Apresente os cálculos realizados ou explique seu raciocínio para determinar essas medidas.

b) Na figura apresentada no enunciado, existem segmentos que podem ser associados a retas paralelas e/ou transversais? Se sim, quais? Explique seu posicionamento.

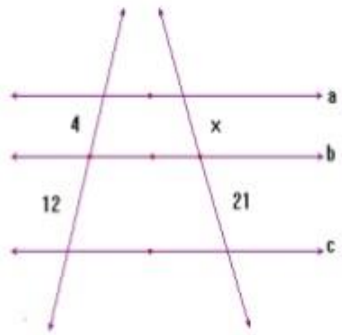
37) De acordo com as tarefas já realizadas, crie uma situação em que haja a aplicação do Teorema de Tales.

38) Determine o valor das incógnitas (x e y) em cada um dos casos seguintes. Apresente os cálculos realizados e/ou explique como chegou aos resultados.

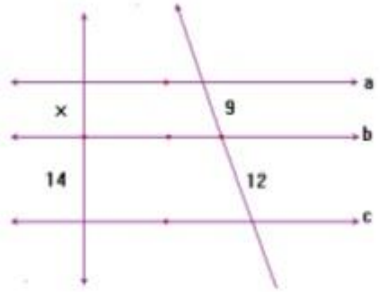



a
b
c
2
3
4
x

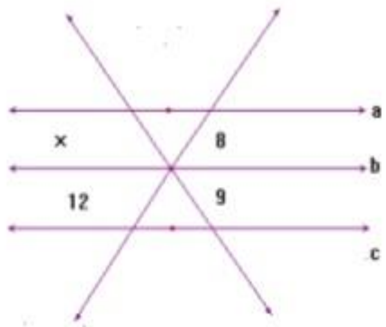
a)


a
b
c
4
x
12
21

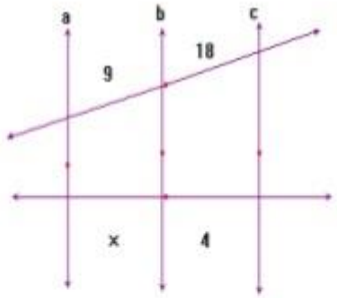
b)


a
b
c
x
9
14
12

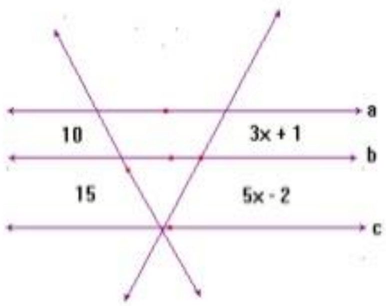
c)


a
b
c
x
8
12
9

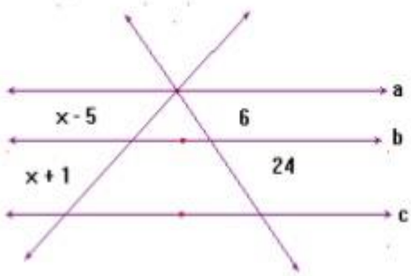
d)


a
b
c
9
18
x
4

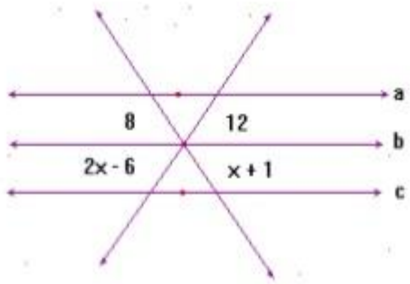
e)


a
b
c
10
3x + 1
15
5x - 2

f)


a
b
c
x - 5
6
x + 1
24

g)


a
b
c
8
12
2x - 6
x + 1

h)

4.6.2 Análise *a Priori* das Tarefas de 29 a 38

O objetivo desse conjunto de tarefas é proporcionar aos alunos a compreensão do Teorema de Tales de modo que eles sejam capazes de utilizá-lo para o cálculo de alturas inacessíveis. Para tanto, parte-se do princípio de que é necessário conhecer o significado da palavra “teorema” no contexto matemático, cuja pesquisa e reflexão é proposta nas tarefas 29 e 30. É provável que os alunos mencionem o Teorema de Pitágoras quando questionados sobre o que sabem sobre teoremas, já que é estudado desde o sexto ano ou sétimo do Ensino Fundamental, conforme a escola.

Para uma transição mais suave às situações reais, propõe-se, na Tarefa 32, uma representação do Teorema de Tales por meio da geometria, mesmo sem menção direta ao Teorema. Essa construção, além de estar associada às atividades já realizadas, permite a internalização de conceitos anteriores e, ainda, a disposição de retas paralelas e transversais em posições diferentes da usualmente apresentada em livros didáticos, que é a figura utilizada na tarefa 32, momento no qual o Teorema de Tales é formalmente apresentado aos estudantes nesta sequência didática. A finalidade da construção geométrica ser solicitada antes da apresentação formal do teorema está apoiada na pesquisa de Almeida (2016), para o qual o uso de construções e manipulações geométricas favorece o entendimento do significado de um teorema (na pesquisa dele tratou-se do teorema de Pitágoras) e de Vital, Martins e Souza (2016), os quais indicam maior motivação dos estudantes após trabalhos com materiais manipuláveis[7]. Espera-se que as construções dos alunos na Tarefa 31 mostrem posições diferentes da apresentada na tarefa 32.

Visando à aplicabilidade do Teorema de Tales, as tarefas 33 e 34 tratam de problemas que podem ser resolvidos a partir do uso deste conceito. Na tarefa 35, o estudante tem a possibilidade de pôr em prática todos os conceitos estudados,

---

[7] Mesmo que a construção dada pela Tarefa 31 não envolva diretamente o uso de materiais manipuláveis, acreditamos que o desenho das etapas solicitadas atende ao mesmo princípio de manipulação.

inclusive o Teorema de Tales. Espera-se que as tarefas sejam resolvidas sem dificuldades.

As tarefas 36 a 38 voltam à aplicação do Teorema em situações presentes em livros didáticos, para testar se os educandos percebem relações entre esses estudos e a prática. A finalidade é verificar se, a partir das tarefas exploratórias propostas até o momento, os estudantes são capazes de identificar elementos essenciais para a resolução de um exercício típico de livro didático

Espera-se, por exemplo, que no exercício 38, no item a, os alunos possam escrever:

$$\frac{x}{6} = \frac{2}{4} \quad e \quad \frac{5}{6+x} = \frac{y}{6}$$

para determinar os valores de x e y.

Espera-se que esse conjunto de tarefas, apoiadas na base pelas tarefas anteriores a esse bloco, e aliadas à discussão e cooperação entre os estudantes, possibilite a aplicação do Teorema de Tales na resolução de problemas associados ao cotidiano dos alunos, dados na Tarefa 35, bem como de problemas típicos de livros didáticos, como os apresentados nas tarefas 36 a 38.

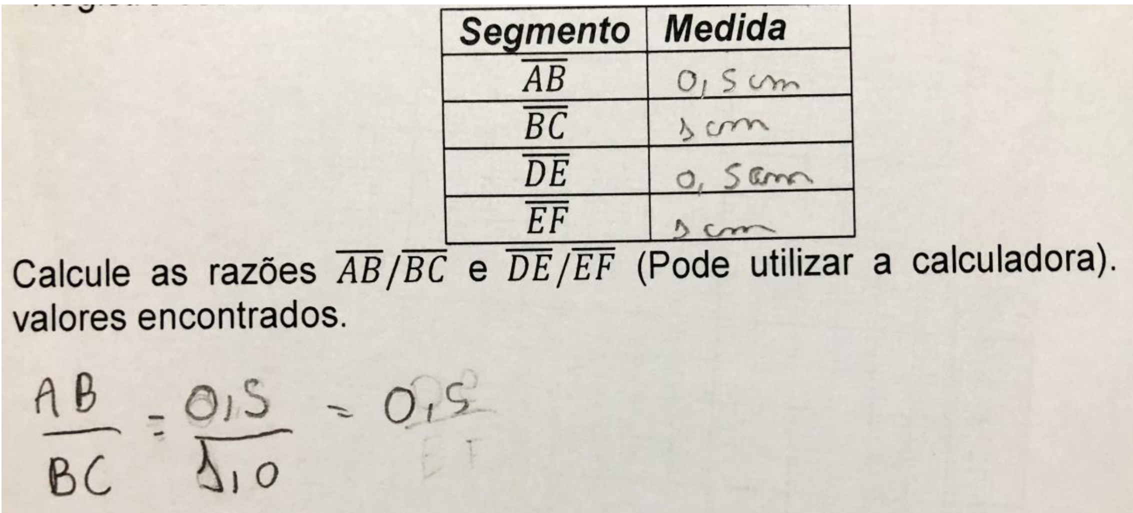
4.6.3 Análise *a Posteriori* das Tarefas de 29 a 38

Como era esperado, os alunos relacionaram a palavra teorema ao Teorema de Pitágoras, já estudado em anos anteriores. No dicionário, encontraram a definição de que teorema é "proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico" (dupla 15) ou algo muito similar, que indica a necessidade de uma demonstração para ser considerada válida.

Na tarefa 30, algumas duplas pesquisaram teoremas associados aos conceitos que vinham estudando com expressões de busca como: "tipo de teorema relacionado com retas", e tiveram como retorno o Teorema de Tales. A tarefa 30 foi realizada em dupla no laboratório de Informática, sem intervenção direta da professora pesquisadora. Verificou-se que durante a realização desta tarefa os alunos identificavam os conceitos e reconheciam os elementos presentes no Teorema de

Tales, como o feixe de retas, as retas paralelas e transversais, bem como a razão e proporção. Não se mostravam surpresos com tais fatos e demonstravam a compreensão, por meio de seus comentários, das interrelações presentes nas tarefas e nos conceitos.

Na tarefa 31, 12 duplas desenharam as retas transversais como sendo duas retas paralelas que "cortavam" o feixe de retas paralelas mencionado. A Figura 4.26 (c) representa as posições da maior parte das retas desenhadas pelas equipes. Embora não seja visível na imagem apresentada na Figura 4.26, essa dupla desenhou retas na mesma posição anteriormente e apagaram.

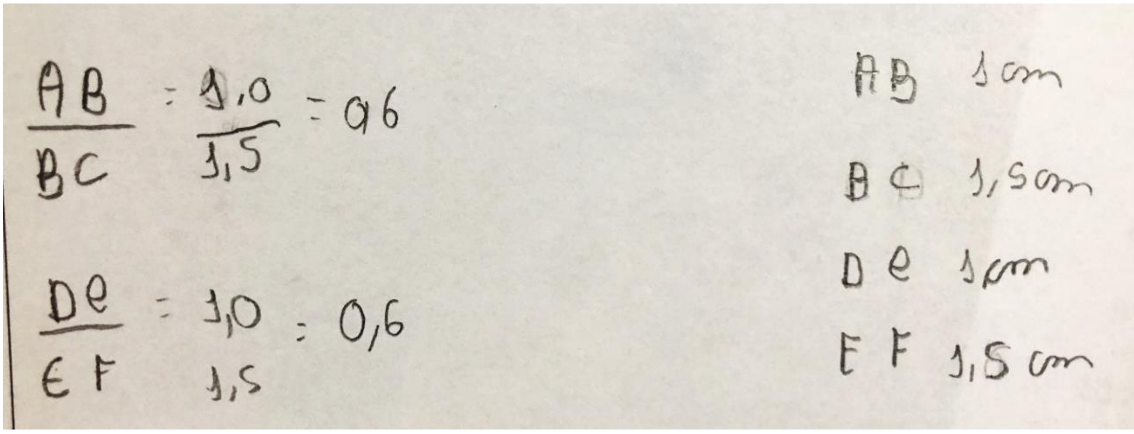


Segmento	Medida
$\overline{AB}$	0,5 cm
$\overline{BC}$	1 cm
$\overline{DE}$	0,5 cm
$\overline{EF}$	1 cm

Calcule as razões $\overline{AB}/\overline{BC}$ e $\overline{DE}/\overline{EF}$ (Pode utilizar a calculadora). valores encontrados.

$\frac{AB}{BC} = \frac{0,5}{1,0} = 0,5$

(a) Etapa 1 – Tarefa 31

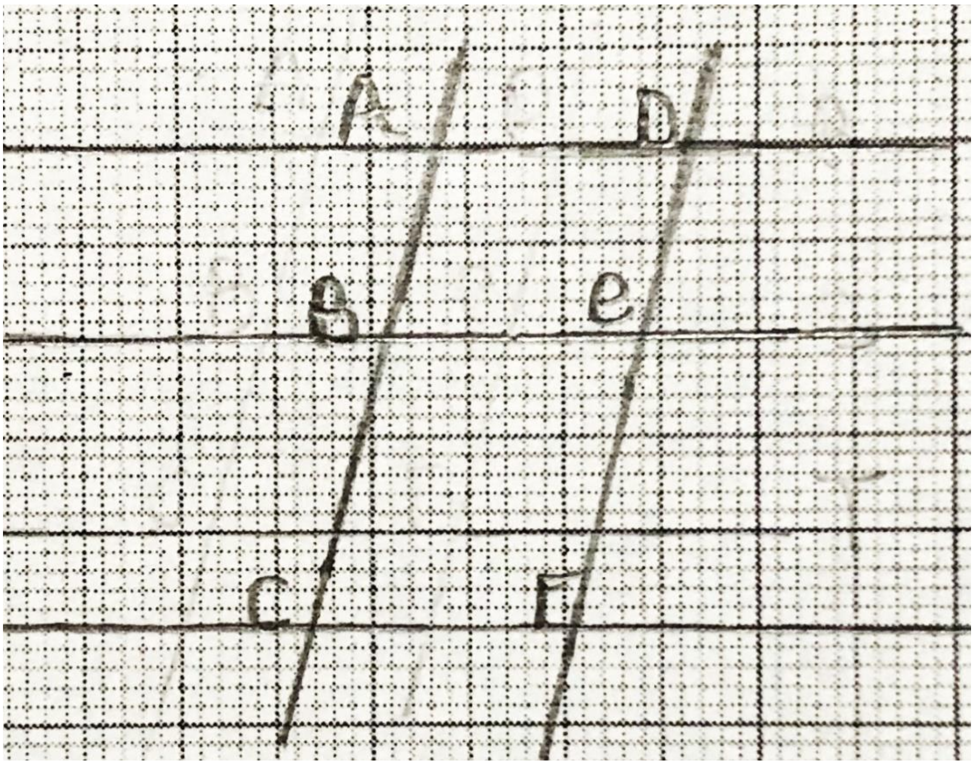


$\frac{AB}{BC} = \frac{1,0}{1,5} = 0,6$

$\frac{DE}{EF} = \frac{1,0}{1,5} = 0,6$

AB 1 cm
BC 1,5 cm
DE 1 cm
EF 1,5 cm

(b) Etapa 2 – Tarefa 31 – Dupla 10



(c) Desenho da etapa 2 – Tarefa 31 – Dupla 10

Figura 4.26: Resolução da Tarefa 31 – Dupla 10
Fonte: as autoras

O fato de um grande número de duplas apresentar a reta na mesma posição é, no mínimo, curioso (mas podem ter sido influenciados por dados obtidos em consulta à *internet*), porém demonstra que compreenderam a relação estabelecidas entre as retas paralelas e transversais.

A tarefa 32 ajudou-os a perceber que o Teorema de Tales trata de medidas e é usado especialmente para cálculos "de medidas de coisas enormes" e reconheceram os conceitos de razão, retas, feixe de paralelas e transversais estudados anteriormente. Na tarefa 33, os estudantes já citaram o cálculo de alturas de prédios, casas e árvores como sendo possível a partir da utilização do teorema de Tales (e a medida das sombras).

Outro fator a destacar é a evolução na forma de escrever as respostas, que estão sendo mais criteriosas e mais completas à medida que a sequência didática avança.

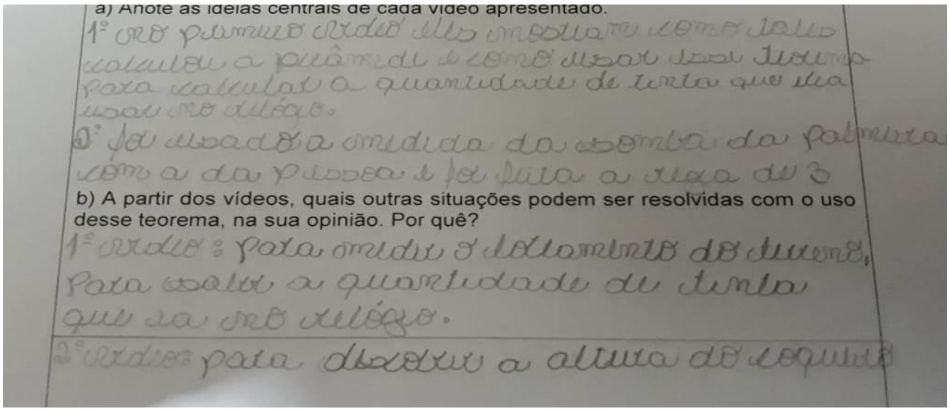


Figura 4.27: resposta da dupla 07 para a Tarefa 33
Fonte: as autoras

(Transcrição: *a) 1º no primeiro vídeo eles mostram como Tales calculous a pirâmide e como usar esse teorema e a quantidade de tinta que ele iria usar no relógio, 2º foi usado a medida da sombra da palmeira com a da pessoa e foi feita a regra de 3; b) 1º video: para medir o loteamento do terreno, para saber a quantidade de tinta que ia no relógio, 2º video para descobrir a altura do coqueiro).*

Mesmo já sendo possível observar um grande progresso, em termos colaborativos, na turma em que a sequência didática foi aplicada, para a tarefa 34, que requeria a construção de uma pirâmide em grupo, foi necessário o auxílio da professora para que conseguissem concluí-la. A tarefa foi então adaptada: a professora realizou a construção da pirâmide e, juntamente com os alunos, utilizando os procedimentos realizados por Tales, calculou a altura da pirâmide. Foi solicitado aos alunos que descrevessem os procedimentos realizados por Tales para o cálculo da altura da pirâmide. A Figura 4.28 ilustra uma resposta.

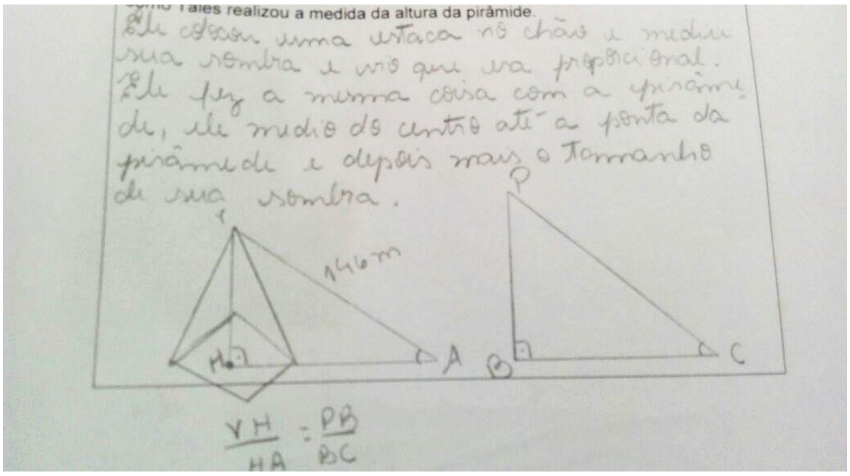


Figura 4.28: resposta da dupla 04 para a Tarefa 34
Fonte: as autoras

(Transcrição: *ele colocou uma estaca no chão e mediu sua sombra e vio que era proporcional. Ele fez a mesma coisa com a pirâmide, ele médio do centro até a ponta da pirâmide e depois mais o tamanho da sua sombra.* Abaixo do desenho: $\frac{VH}{HA} = \frac{PB}{BC}$)

Na tarefa 35, destaca-se a presença de espaços físicos que estão presentes no cotidiano do aluno, porém fora do espaço escolar. A realização desta tarefa ocorreu em contraturno, no período vespertino, com quase todos os alunos[8]. Para a efetivação da tarefa, e melhor acompanhamento, os alunos foram organizados em equipes e a pesquisadora indicou, para cada equipe de 4-5 alunos, um membro como responsável para efetuar as medições dos monumentos (poste, ginásio, edifício, ...), com o auxílio dos demais componentes da equipe.

A professora pesquisadora acompanhou todos os alunos. Durante a realização das medidas, todos se empenhavam em auxiliar, ficavam atentos e interessados e na sequência realizavam as medidas e comparavam os resultados obtidos. Foram usados os mesmos procedimentos descritos nos vídeos das Tarefas 33 e 34.

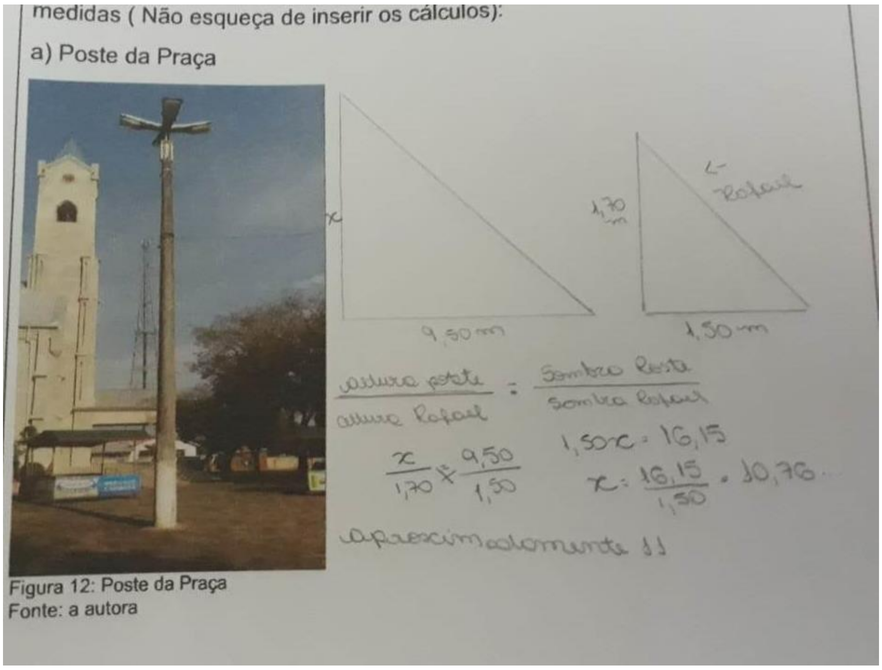
Foram realizadas medidas em seis espaços físicos do município e percebeu-se que todos os alunos ficaram extremamente felizes de participar deste momento, pois tinham saído do ambiente escolar a que sempre estavam restritos para fazer algo diferente. Os estudantes chegaram a comentar que "nem parecia aula de Matemática."[9]

Os alunos realizavam as medidas da altura e da sombra do aluno responsável pela medição em cada grupo e da sombra do monumento cuja altura iria ser medida, anotavam os valores e utilizavam o Teorema de Tales para efetuar o cálculo da altura pretendida, obtendo os resultados como indicam as figuras 4.28, 4.29, 4.30, 4.31 e 4.32 da dupla 07.

---

[8] Apenas 6 alunos não compareceram, justificaram a ausência devido à falta de transporte escolar ou problemas pessoais.

[9] Por meio deste e de outros comentários que demonstravam a satisfação, conscientizei-me ainda mais da necessidade de inovar minhas práticas pedagógicas.


medidas (Não esqueça de inserir os cálculos):

a) Poste da Praça

$\frac{\text{altura poste}}{\text{altura Rafael}} = \frac{\text{Sombra Poste}}{\text{sombra Rafael}}$

$\frac{x}{1,70} = \frac{9,50}{1,50}$

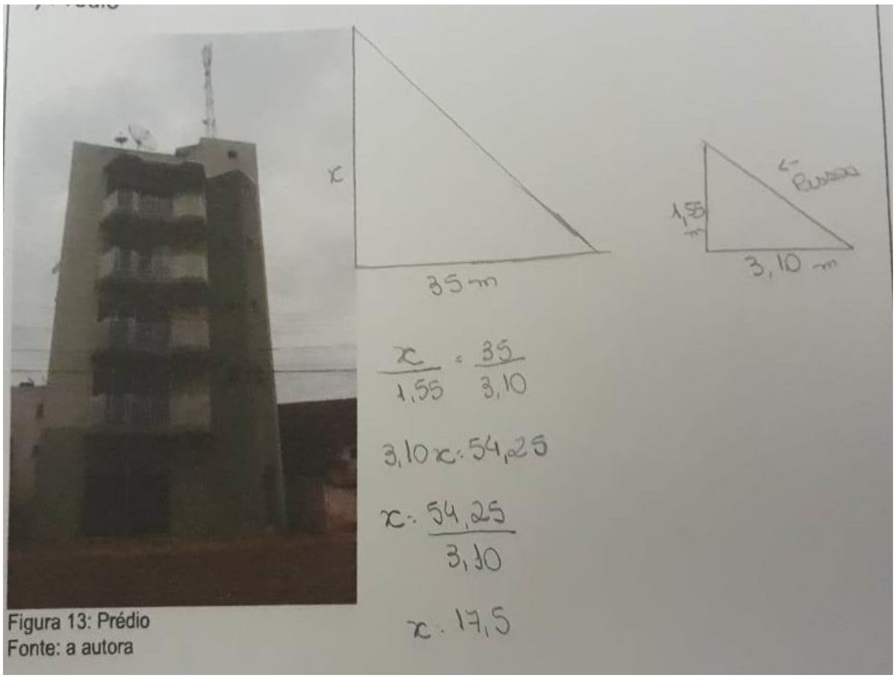
$1,50x = 16,15$

$x = \frac{16,15}{1,50} = 10,76...$

aproximadamente 11

Figura 12: Poste da Praça
Fonte: a autora

Figura 4.29: cálculo da altura do poste da praça – resposta da dupla 07
Fonte: as autoras



$\frac{x}{1,55} = \frac{35}{3,10}$

$3,10x = 54,25$

$x = \frac{54,25}{3,10}$

$x = 17,5$

Figura 13: Prédio
Fonte: a autora

Figura 4.30: cálculo da altura do prédio – resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

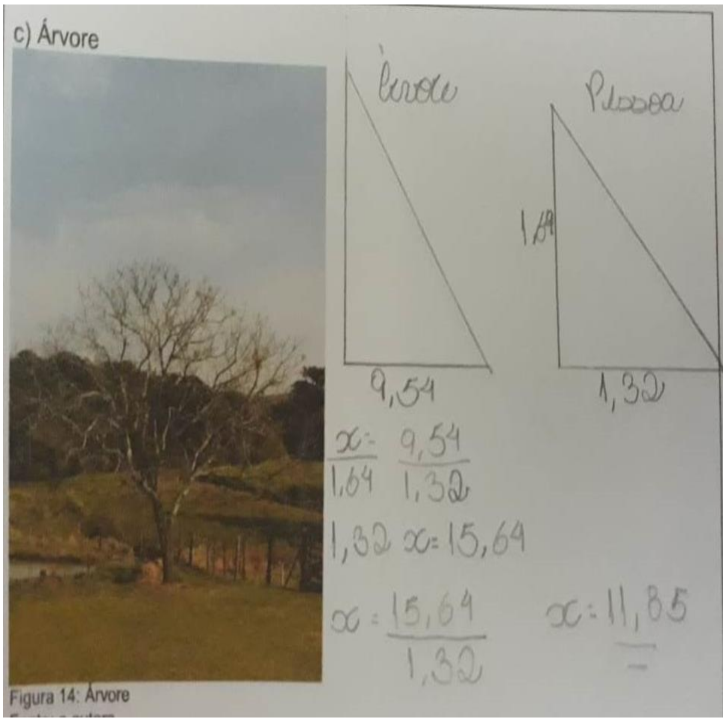


Figura 4.31: cálculo da altura da árvore– resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

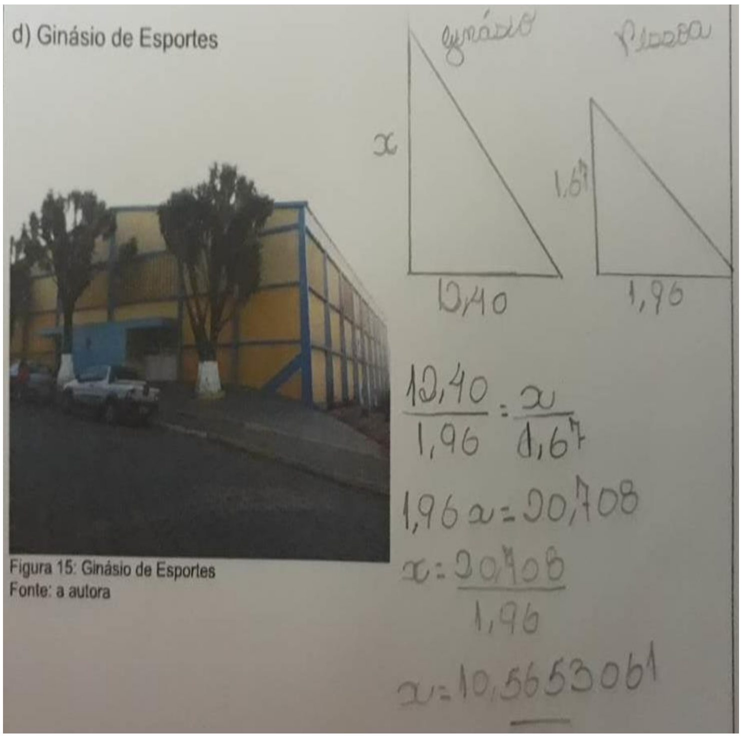


Figura 4.32: cálculo da altura do ginásio de esportes – resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

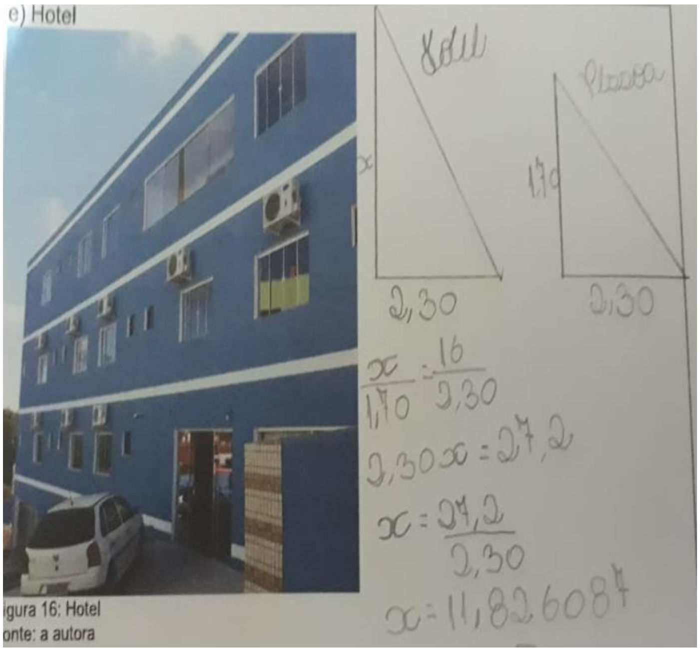


Figura 4.33: cálculo da altura do Hotel – resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

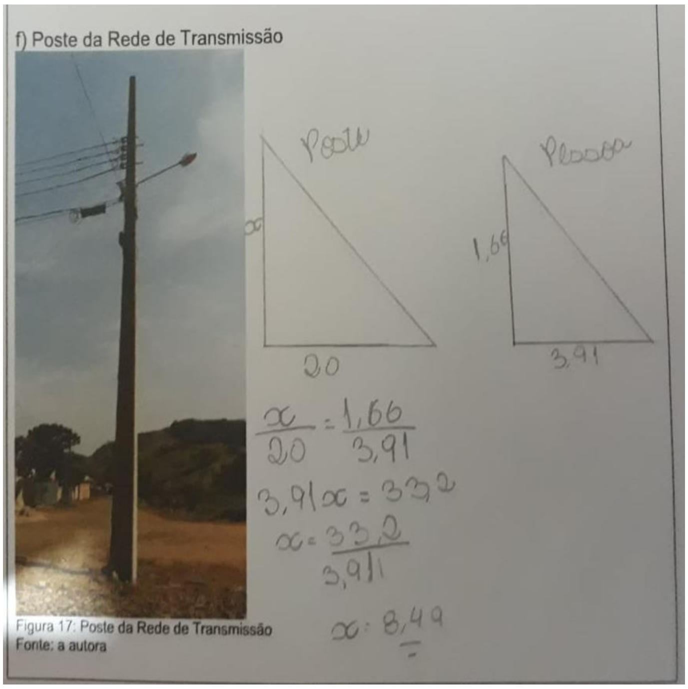


Figura 4.34: cálculo da altura do poste da luz – resposta da dupla 07
Fonte: as autoras

As tarefas 36 e 37 tiveram como objetivo verificar se os alunos, após todas as tarefas realizadas, teriam condições de aplicar o Teorema de Tales em situações cotidianas (tarefa 36) e elaborar uma situação-problema que pudesse ser solucionada com o auxílio dele (Tarefa 37). Todas as equipes conseguiram resolver o problema proposto na tarefa 36, porém apenas 08 duplas conseguiram propor um problema que pudesse ser resolvido pelo Teorema de Tales.

Um exemplo de resolução da questão 36 está apresentado na Figura 4.32 enquanto a Figura 4.33 ilustra um problema apresentado na Tarefa 37.

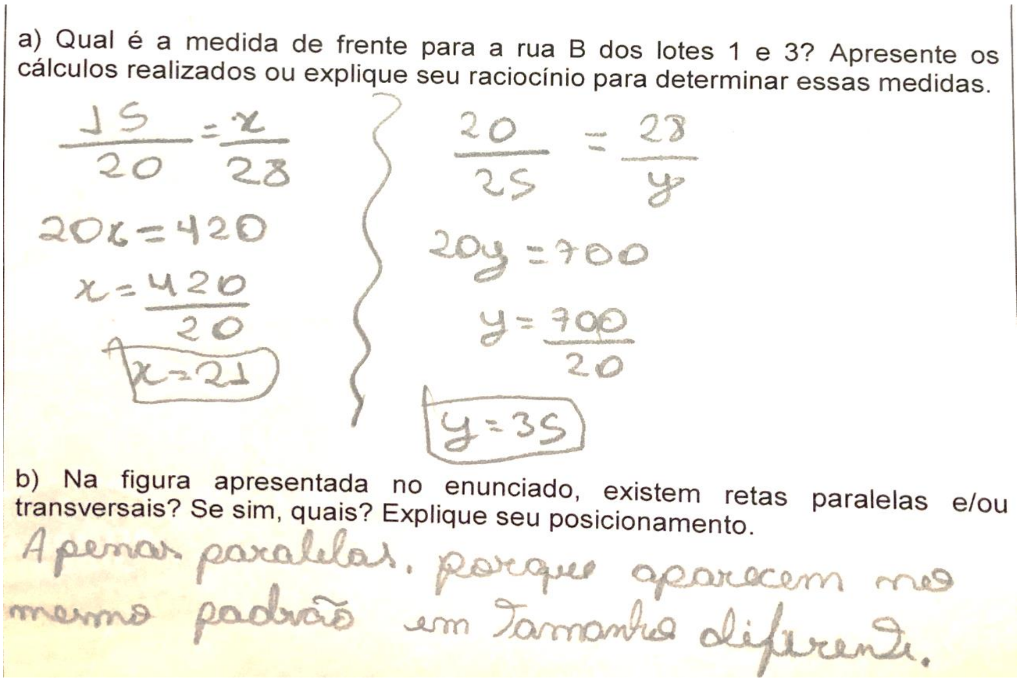


Figura 4.32. Resolução da Tarefa 36 pela Dupla 10
Fonte: as autoras

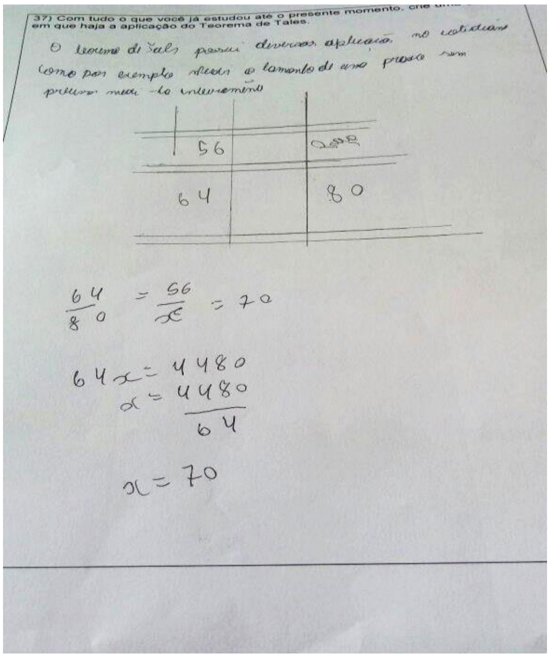


Figura 4.33: resposta da dupla 03 para aTarefa 37
Fonte: as autoras

(Transcrição: *o Teorema de Tales possui diversas aplicações no cotidiano como por exemplo medir o tamanho de uma praça sem precisar medi-la inteiramente).*

A Tarefa 38 é uma tarefa padrão de livro didático. Mesmo o conteúdo não tendo sido trabalhado de maneira tradicional, 12 duplas conseguiram resolver adequadamente as questões propostas, inclusive aquelas nas quais as retas encontravam-se em posições diferenciadas do modelo padrão, o que indica a viabilidade da utilização dessa sequência didática como recurso pedagógico ao ensino do Teorema de Tales.

As figuras 4.34 e 4.35 indicam as resoluções das duplas 12 e 14.

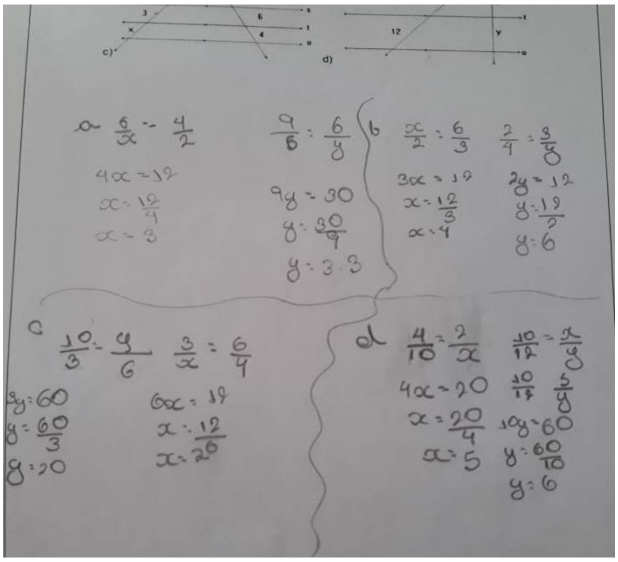


Figura 4.34: resposta parcial da dupla 12 à Tarefa 38
Fonte: as autoras

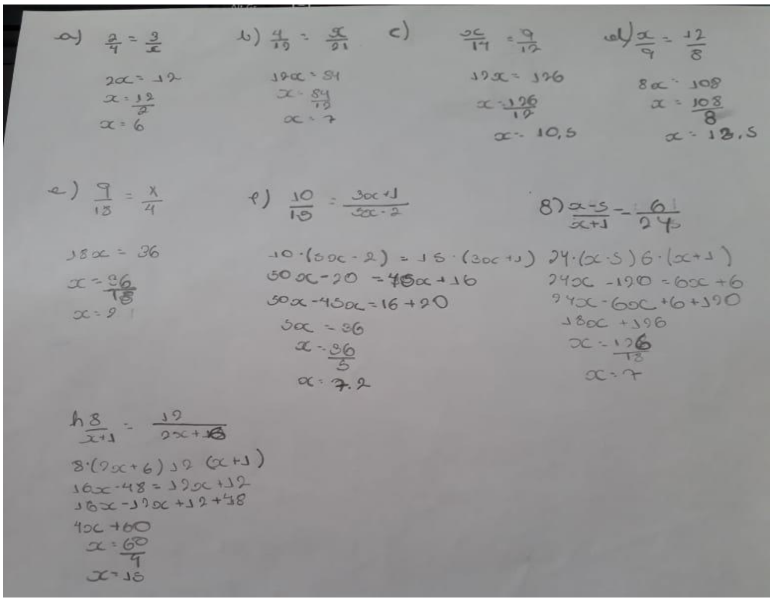


Figura 4.35: resposta parcial da dupla 14 à Tarefa 38
Fonte: as autoras

Por meio da realização das tarefas da Sequência Didática observou-se que os alunos conseguiram compreender os conteúdos que estão inseridos no Teorema de Tales e conseguiram aplicá-lo para solucionar as atividades propostas, porém ressalta-se a necessidade de ampliar cada vez mais as práticas metodológicas para que os alunos sejam ativos na busca do conhecimento e, principalmente, compreendam em que contexto estão utilizando o conhecimento adquirido, para que a aprendizagem seja realmente significativa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo principal responder ao seguinte questionamento: “*Uma sequência de tarefas criada para apropriação gradativa de conteúdos na qual o aluno tenha acesso a diferentes recursos para resolver as questões que lhe são propostas proporciona a aprendizagem do Teorema de Tales*?”

Conforme indicam Barbosa e Cargnim (2016), a análise de seis livros didáticos indicou a presença de situações de ação, formulação, validação e institucionalização na abordagem do tema, em quase todos os livros, entretanto, eram escassas tais questões, sendo que, na seção de exercícios, a maioria das proposições referia-se a aplicações abstratas do Teorema de Tales, como apresentado na tarefa 38.

Diferentemente da abordagem do livro didático, a sequência didática elaborada aborda conceitos anteriores, necessários à adequada compreensão do Teorema de Tales, e trabalha o conteúdo associado a situações possíveis de serem vivenciadas pelos estudantes, além de inserir recursos tecnológicos como vídeos, calculadoras e celulares em sala de aula.

Durante a aplicação das tarefas, alguns pontos foram observados pela professora pesquisadora:

- os alunos demonstraram dificuldades para realizar atividades em dupla (especialmente no início da implementação), pois a dinâmica não era utilizada nas aulas de Matemática, e o trabalho em equipe requer competências como saber ouvir o outro e respeitar limites; em contrapartida, ao longo da sequência estes saberes atitudinais foram sendo desenvolvidos e os estudantes começaram a trabalhar mais cooperativamente com mais frequência;
- os conhecimentos prévios dos alunos em relação aos conteúdos abordados (retas, semirretas, segmento de reta, paralelismo e transversalidade, razão e proporção) em determinados momentos eram insuficientes para a realização da tarefa, sendo necessário que a professora realizasse momentos de revisão dos conteúdos – os quais correspondem à dialética da institucionalização de Brousseau, e tem por finalidade a adequada aquisição do saber matemático sistematizado; entretanto, ao final da sequência, os estudantes estavam usando esses conceitos com mais desenvoltura;

● os estudantes demonstraram muita dificuldade para realizar as justificativas (em língua natural) presentes nas tarefas, mencionando que não sabiam se expressar nas aulas de Matemática. O problema foi superado mediante o incentivo da professora pesquisadora para que os alunos sempre tentassem escrever algo, sem medo de errar, pois com o tempo se tornaria natural dar justificativas usando a língua natural. O estímulo parece ter funcionado porque observou-se maior facilidade dos alunos em justificar respostas ao longo da implementação da sequência didática.

● os alunos tinham dificuldade de utilizar a calculadora, sendo que em determinados momentos realizavam as operações sem o seu auxílio, mesmo sendo permitido, fato que novamente é resultante da falta de uso nas aulas de Matemática (eu como professora da turma já há 2 anos não permitia).

Durante as aulas de Matemática não é “normalmente” permitido o uso do celular, sendo que no decorrer da implementação da Sequência ele foi utilizado em diversos momentos. Nos primeiros dias, os alunos mostraram-se encantados com a presença do celular, porém no decorrer de algumas aulas, simplesmente deixaram sobre suas carteiras, utilizando-o quando necessário.

Os alunos mostraram-se entusiasmados e motivados durante todo o período da implementação da Sequência, sempre realizando o que estava sendo proposto, trocando ideias com o colega. Mostraram-se ativos e participantes, discutindo, demonstrando suas dúvidas e sempre preocupados em realizar as tarefas. O maior entusiasmo foi percebido no momento em que foi realizado em contraturno as medidas de alguns edifícios, árvores e postes da cidade, aplicando o Teorema de Tales. Citaram, neste momento, que perceberam que a Matemática tem grande participação no seu cotidiano e que anteriormente não haviam percebido.

Ao término da aplicação das tarefas, indagaram se as aulas de Matemática continuariam daquele modo ou retornariam ao “normal”, dizendo que prefeririam àquela maneira, pois não “viam a aula passar”. Desde então, como professora, tenho me esforçado para ministrar aulas com metodologias diferentes, nas quais os alunos possam ser mais atuantes e ativos.

A análise dos dados indicou que uma das maiores dificuldades apresentadas pelos alunos foi realmente escrever “matematicamente”, pois não estavam habituados, isso porque, em geral, lhes era apresentado um modo de resolução e eles seguiam esse modelo, não precisavam pensar muito a respeito. Isso não aconteceu durante a implementação da sequência didática, eles tiveram que pensar num modo de responder às tarefas sem a minha intercessão. A justificativa em língua natural foi outra dificuldade, que foi diminuindo ao longo da aplicação das tarefas.

Em relação às tarefas presentes na Sequência Didática, observou-se a necessidade de uma reformulação nelas, para que fossem realizadas em um período menor. A abordagem das situações de ação, formulação, validação e institucionalização, porém, deveria permanecer, pois atingiu os objetivos propostos, visto que os alunos conseguiram aprender e utilizar o Teorema de Tales, observado pela resolução de tarefas abstratas, mais condizentes com o "modo tradicional de fazer exercícios". Além disso, esta aprendizagem pode ser observada nas médias escolares obtidas pelos alunos nas avaliações bimestrais, que aumentaram consideravelmente, após a aplicação da Sequência Didática.

Respondendo à questão da pesquisa, pelo já exposto, considera-se haver indícios que as tarefas propostas contribuíram à aprendizagem do Teorema de Tales no 9° ano do Ensino Fundamental, pois 90% dos alunos conseguiram resolver adequadamente as questões relativas ao Teorema de Tales na avaliação escrita realizada ao final da sequência didática Além disso, destaca-se a importância do trabalho em grupo, da atenção ao vocabulário discente, da utilização de diversos recursos didáticos e do desenvolvimento da autonomia dos alunos para o aprendizado.

Enfim, para concluir, por meio da realização deste trabalho, como professora pesquisadora, pude perceber a importância de se trabalhar uma Matemática real, concreta e que faça sentido para os alunos.

Destacamos a importância da Teoria das Situações Didáticas no desenvolvimento desta pesquisa, pois ao formular as tarefas baseadas nas dialéticas de ação, formulação e validação, observamos o desenvolvimento e a participação dos alunos durante o processo, sendo que no inicio da implementação agiam passivamente, aceitando as informações sem questionar, porém percebeu-se que ao término da implementação já eram atuantes, trocavam ideias, perguntavam e emitiam suas opiniões. Consideramos que este progresso alcançado pelos alunos é resultante da proposta apresentada por Brousseau em sua teoria.

A Engenharia Didática também contribuiu para o êxito das tarefas realizadas na sequência didática desta dissertação, pois as fases que a compõem possibilitaram a reflexão e a posterior análise das ações dos alunos perante as tarefas propostas.

Destacamos a grande contribuição da TSD e da Engenharia Didática para o êxito obtido pelos alunos durante a implementação da sequência didática, pois ao realizar as tarefas foram progressivamente mudando de atitudes e sendo participantes de seu aprendizado, trabalhando colaborativamente.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, E. V. B. FLÔRES, M. L. P. **Objetos de Aprendizagem:** Conceitos Básicos. Porto Alegre, 2014. Disponível em: < http://penta3.ufrgs.br/ObjetosAprendizagem/LivroOA-total.pdf>. Acesso em jun. 2017.

ALMEIDA, I. A. T. de. **Uma Prática de Ensino do Teorema de Pitágoras:** Manipulando e Construindo no Software Geogebra. Anais do XII ENEM. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4641_2243_ID.pdf >. Acesso em 15 jul. 2017.

ALMOULOUD, S. A. **A Teoria das Situações Didáticas.** São Paulo: PUC-SP, 2004.

_______________. **Fundamentos da Didática da Matemática.** 2. ed. Curitiba: Editora UFPR, 2014.

ARTIGUE, M. Ingéniere Didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourdh'hui ? **Les Dossiers de la Science de l'Education**, n.8, 2002. Didactique des disciplines scientifiques et tecnologiques: concepts et méthods, pp.59-72. Disponível em :< http://www.persee.fr/doc/dsedu_1296-2104_2002_num_8_1_1010 > Acesso em 21 abr 2018.

___________. Ingénierie didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, vol 9 n°3, pp. 281- 308, Grenoble: La pensée Sauvage éditions, 1988.

AZAMBUJA, M. T. **O uso do cotidiano para o ensino de Matemática em uma Escola de Caçapava do Sul.** Caçapava do Sul: UNIPAMPA. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Exatas) – Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA, Caçapava do Sul, 2013.

BARBOSA, M. J. F.; CARGNIN, C. **Teorema de Tales e sua Abordagem nos Livros Didáticos.** III Seminário de Ensino e Aprendizagem. Universidade Tecnológica do Paraná. Londrina, 2016. Disponível em: < http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-profissional-em-ensino-de-ciencias-humanas-sociais-e-da-natureza/documentos/Anais_III_SEA_artigo_MIOLOCOMPLETO.pdf>. Acesso em 05 mai. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 5ª a 8ª séries**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BONGIOVANNI, V. **O Teorema de Tales:** uma ligação entre o geométrico e o numérico. REVEMAT Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 2, p. 94-106, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide – 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

________________ .**Premières Découvertes des Obstacles Épistémologiques et Didactiques, en Mathématiques**, 2010. Disponível em: < http://guy-brousseau.com/541/presentation-du-dossier-1-%C2%AB-obstacles-epistemologiques-%C2%BB/>. Acesso em 10 julho 2018.

____________. **Processus de Mathématisation**.Conférence prononcée Clermont-Ferrand lors des Journées de l'A.P.M. en mai1970 sous le titter "Apprentissage des structures". Disponível em: < www.guy-brousseau.com>. Acesso em 21 abr. 2018.

CARGNIN, C. **Ensino e Aprendizagem da Integral de Riemann de Funções de uma Variável Real:** possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Simeóticas. 2013. 417 p. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

CUNHA, B. M. ALELUIA, J.S. dos R**. A geometria no contexto educacional: sua análise através da utilização de atividade prática em sala de aula.** Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/A-GEOMETRIA-NO-CONTEXTO-EDUCACIONAL-SUA-AN%C3%81LISE-ATRAV%C3%89S-DA-UTILIZA%C3%87%C3%83O-DE-ATIVIDADE-PR%C3%81TICA-EM-SALA-DE-AULA.pdf.> Acesso em 15 jul. 2017.

Dicionário Priberam. Disponível em:<https://www.priberam.pt/DLPO/>. Acesso em 05 mai. 2017.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

FERREIRA, A.P.O.; NOGUEIRA, C.M.I.; OLIVEIRA, L.A. **Os Recursos Didáticos Como Mediadores Dos Processos De Ensinar E Aprender Matemática.** Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. Curitiba, 2008.

GERHARDT, T.E.; SILVEIRA, D.F. **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GUERREIRO, A.M.C. **Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática:** práticas no 1º ciclo do ensino básico. Lisboa: Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, 2011. Publicada como tese de doutorado. Disponível em :<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5494/1/ulsd062110_td_Antonio_Guerreiro.pdf>. Acesso em 04 mai. 2017.

HARUNA, N. C. H. **Teorema de Thales:** uma abordagem no processo de ensino e aprendizagem. 2000. 294 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**: 9º Ano. São Paulo. 6ª edição: Atual. Coleção Matemática e Realidade, 2009.

LUCCHES, I.L.; LIMA, V.M.R.; GESSINGER, R.M. **A autonomia dos estudantes e o ensino de matemática.** Revista Zetetiké. Campinas, v. 20, n. 37, p. 69-84, jan/jun 2012.

MARCO, F.F. MOURA, A. R. L. **O Conceito Matemático (Re)Significado no Contexto da Atividade de Ensino Naformação Inicial de Professores.** Revista Contexto & Educação. Ed. Unijuí. Unijuí, nº 84, jul/dez 2010.

MIGUEL, J. C. **O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos:** implicações teórico-metodológicas. Disponível em:< file:///C:/Users/ACER/Downloads/O%20ensino%20de%20matematica%20(2).pdf>. Acesso em 24 jan. 2018.

NUNES, T. **É hora de ensinar proporção.** Entrevista. Revista Nova Escola, 2003. Disponível em :< https://novaescola.org.br/conteudo/958/e-hora-de-ensinar-proporcao>. Acesso em 15 jul. 2017.

PEREIRA, A. C. C. **Teorema de Thales:** uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de matemática. 2005. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

SANTOS, M. N. **A História da Matemática como desencadeadora de atividades investigatórias sobre o Teorema de Tales:** análise de uma experiência realizada com uma classe do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2012. 180 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

SANTOS, M. C. LIMA, P. F. **Considerações sobre a Matemática no Ensino Fundamental.** Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2010-pdf/7166-3-2-consideracoes-matematica-marcelo-camara-e-paulo/file>. Acesso em 15 mai. 2017.

SANTOS, P. R. **Um Estudo sobre a Trigonometria no Triângulo Retângulo**. 2014. 111 f. São Paulo, 2014. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade do Cruzeiro do Sul. São Paulo,2014.

SCHMIDT, G. M. **História da Matemática como recurso didático para o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos.** 2014. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática). Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

SILVA, F. L. C. F. da. **Analisando Contribuições da Teoria das Situações Didáticas no Ensino e na Aprendizagem da Estatística e das Probabilidades no Ensino Fundamental.** 2015. 195 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015.

SILVA, M. R. **Gomes da. Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática**. Mimesis, Bauru, v. 19, n. 2, p. 135-145, 1998.

SILVA, L.C.; SOUZA, C.F. **Investigação sobre alguns conhecimentos geométricos de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental**. In: IV CONEDU – Congresso Nacional de Educação. João Pessoa- PB: Realize eventos, 2017. Disponível em: < http://editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID5494_10092017233543.pdf > Acesso em 01 mai. 2018.

SILVA, A.M. **O Vídeo Como Recurso Didático No Ensino De Matemática.** Goiânia, 2011. Dissertação (Mestrado em Educação, Ciências e Matemática). Universidade Federal de Goiás. Goiânia.

TEIXEIRA, P.J.M.; PASSOS, C.C.M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau.** Zetetiké, v.21, n.39, 2013.

VASCONCELOS, M. B. F. **A Escrita na Produção do Conhecimento Matemático.** ANAIS do X ENEM. Disponível em:< http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T3_RE2097.pdf>. Acesso em 08 mai. 2017.

VIALI, L.; SILVA, M.M. **A Linguagem matemática como dificuldade para alunos do Ensino Médio.** Anais do IX ENEM. Disponível em : <www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/.../CC45872422091T.doc. >. Acesso em 05 mai. 2017.

VITAL, C. MARTINS, E. R. SOUZA, J. R. **O Uso de Materiais Concretos no Ensino de Geometria.** 2016. Anais do XII ENEM. Disponível em :< http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5465_3722_ID.pdf>. Acesso em 15 de jul. 2017.

APÊNDICE A - Produto Educacional

MARIA JOSÉ FAGUNDES BARBOSA

TAREFAS PARA REVISAR PRE-REQUISITOS E ESTUDAR O TEOREMA DE TALES

Produto Educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profª. Drª. Claudete Cargnin

LONDRINA

2018

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PPGMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARIA JOSÉ FAGUNDES BARBOSA

TAREFAS PARA REVISAR PRE-REQUISITOS E ESTUDAR O TEOREMA DE TALES

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA

2018

APRESENTAÇÃO

Caros Professores

É com prazer que compartilhamos o resultado de uma rica experiência de sala de aula para trabalhar o Teorema de Tales. A versão inicial deste conjunto de tarefas está apresentada na dissertação intitulada “Uma Sequência Didática para o Teorema de Tales”, cujas tarefas foram testadas em uma turma de 9º ano de uma escola estadual do município de Curiúva- PR, no período de agosto a setembro de 2017. Após esta implementação inicial, foram realizadas diversas alterações, e uma nova versão está apresentada neste produto educacional, que foi submetido a uma banca composta pelas professoras Dra. Claudete Cargnin (UTFPR), Dra. Veridiana Rezende (UNESPAR), Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman (UTFPR) e Dra. Silvia Terezinha Frizzarini (UDESC) e julgada aprovada.

Nessa proposta, levamos em conta, ao fazer o planejamento da sequência didática, que o estudante pudesse usar recursos com os quais estivesse constantemente em contato, como a *internet* e celulares, mas que não fossem corriqueiramente utilizados em sala de aula. O resultado foi uma sequência que despertou o interesse dos estudantes e envolveu-os no estudo do Teorema de Tales.

Apresentamos as atividades com comentários sobre os cuidados e as ações a serem tomados em sala de aula para obter melhores resultados.

Vale a pena ressaltar que essa é uma proposta que se mostrou frutífera, entretanto pode (e deve) ser adequada às realidades e necessidades dos professores que forem utilizá-la.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Procurando contribuir para a dinamização da ação docente, com uma ressignificação da prática escolar, este material apresenta uma sequência didática que aborda o Teorema de Tales contendo tarefas que permitem ao professor inovar e aperfeiçoar as suas ações em sala de aula, utilizando os recursos disponíveis em seu cotidiano escolar e favorecendo a aprendizagem dos alunos em relação ao conteúdo citado.

As tarefas propostas encontram-se fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD), que procura compreender as interações que ocorrem entre o professor, o aluno e o saber, presentes na sala de aula, e modelizá-las. Tais interações didáticas ocorrem em diferentes níveis, mas dois merecem destaque: o nível das situações adidáticas e o nível das situações didáticas.

É no nível das situações adidáticas que o estudante aceita o desafio de se responsabilizar pela aquisição do saber, mediante interações entre o estudante, o meio (*milieu*) e o próprio saber matemático.

Dentro da TSD, o *milieu* é um sistema antagônico, produtor de desequilíbrios, mas favorece a aquisição do saber, por meio de adaptações, sendo necessário que o professor crie e organize situações de ensino que proporcione aos alunos a apreensão dos saberes matemáticos. Nesse processo, ocupa importante papel as dialéticas de ação, formulação e validação, sendo as relações entre saber e conhecimentos governados por dois processos antagônicos: o de devolução e a institucionalização, os quais são responsabilidade do professor.

As tarefas presentes nesta Sequência Didática privilegiam as situações citadas, sempre tendo como foco as ações dos alunos em relação ao Teorema de Tales, valorizando os seus conhecimentos prévios e incentivando a sua participação ativa no processo de aprendizagem. As tarefas utilizam instrumentos acessíveis ao professor e recursos tecnológicos que, embora estejam presentes no cotidiano dos alunos, ainda não fazem parte da sala de aula, como os celulares e computadores. Destaca-se também a presença de tarefas contextualizadas, que abordam situações do dia a dia dos alunos, levando-os a perceber a aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos em situações concretas e inseridas em sua vivência.

A sequência é formada por três partes que estão interligadas entre si. Na primeira delas (tarefas de 1 a 5), estão as tarefas que abordam retas, semirretas, retas paralelas e transversais, feixe de paralelas – considerados conceitos que são pré-requisitos para a adequadas compreensão do Teorema de Tales. Na segunda parte, estão inseridos os conteúdos de ampliação e redução de figuras, razão e proporção (tarefas 6 a 11), finalizando com o Teorema de Tales, propriamente dito (tarefas 12 a 20).

As tarefas apresentadas visam a oportunizar aos alunos condições de apropriar-se do conhecimento matemático relativo ao Teorema de Tales, por meio de um processo significativo, no qual eles compreendam sua importância e aplicação em diferentes situações do cotidiano.

Elas foram inicialmente aplicadas em uma turma de nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Município de Curiúva- PR, remodeladas, reavaliadas e, agora, estão sendo apresentadas neste texto. Na aplicação inicial, foram usadas 25 aulas de 50 minutos.

Optamos por apresentar as tarefas com comentários relativos a cada uma delas, no intuito de fornecer elementos norteadores (e por que não facilitadores) ao professor que pretender usar essa sequência didática em sala de aula.

2 DESCRIÇÃO DAS TAREFAS

Sugerimos que as tarefas sejam acessadas de uma em uma, e sejam realizadas em grupos de 2 ou 3 alunos, para incentivar a discussão coletiva e a reflexão proposta em cada questão.

As tarefas serão apresentadas dentro de retângulos, e os comentários sobre a aplicação serão dados logo na sequência.

1. Olhe ao seu redor e observe se há entes geométricos chamados de retas, segmentos de reta ou semirreta. Em caso positivo, indique onde e porque você identificou esses entes.

O objetivo desta questão é fazer o estudante refletir sobre a matemática no seu cotidiano, saber diferenciar e relacionar os entes matemáticos dos objetos palpáveis de sua realidade. Para esse confronto, é preciso que o aluno busque os conceitos matemáticos para associá-los ao seu ambiente. Escrever sobre as observações contribui para o desenvolvimento cognitivo discente, pois como afirma Nacarato (2013, p.66): "Se pensar matematicamente é ser capaz de analisar, estabelecer relações e generalizar, a palavra é constituidora desse pensamento. "

Sendo assim, professor, incentive seus alunos a escreverem e debaterem sobre os conceitos matemáticos. Além disso, fique atento e busque esclarecer, se for o caso, que, no mundo físico, há apenas segmentos de reta, mesmo que possamos estabelecer associações com as retas e semirretas.

Esta é uma tarefa de ação, pois incentiva o estudante a pensar sobre o que são os entes mencionados.

2. Pesquise a definição matemática de retas, segmentos de reta e semirreta e verifique se as correspondências que você fez na questão 1 estão adequadas.

Nessa tarefa, busca-se contribuir com a significação de conceitos matemáticos por parte dos alunos. Nessa tarefa, não basta apenas ver o que o dicionário diz sobre os conceitos em discussão, mas é preciso fazer correspondências com o mundo real, quando isso for possível. Esse processo pode ajudar na materialização da matemática, importante nessa fase de estudo.

Escrever sobre as observações matemáticas, principalmente tentando vinculá-las à realidade, não é uma tarefa fácil. É um processo longo, no qual “a mediação do professor e dos próprios colegas em sala de aula é central, pois é a partir da relação com o outro que o sujeito se reorganiza e transforma os sentidos e os significados das palavras e, portanto, suas significações” (NACARATO, 2013, p. 66).

Podemos classificar esse tipo de tarefa como envolvendo as dialéticas de ação-formulação–validação, porque, ao mesmo tempo, o estudante pesquisa a definição, confronta e discute as versões pessoal e do dicionário, argumentando sobre as possíveis diferenças.

Para concluir a tarefa 2, os alunos terão que rever as respostas dadas na tarefa 1. É importante, professor, observar se os alunos estão trabalhando em equipe e dirimir as possíveis dúvidas existentes.

3. Observe as seguintes definições[10]:

1) Duas retas são denominadas de <u>paralelas</u> quando elas estão no mesmo plano e não se cruzam, ou seja, quando elas têm a mesma inclinação.

2) Duas retas são chamadas de <u>transversais</u> se estão em um mesmo plano e apresentam apenas um ponto em comum.

3) Um conjunto de três ou mais retas paralelas num plano é chamado de feixe de retas paralelas.

4) Uma reta transversal a um feixe de retas paralelas é uma reta que intercepta todas as retas do feixe.

De acordo com essas definições, desenhe:

a) Duas retas paralelas entre si.

b) Duas retas transversais entre si.

c) Um feixe de retas paralelas.

d) Duas retas paralelas a uma reta t dada.

e) Uma reta transversal ao feixe de retas paralelas desenhadas no item c.

f) Duas retas transversais a uma reta t dada.

[10] Definições 1 e 2 são baseadas em Gerônimo e Franco (2010), respectivamente, páginas 71, 84.

O intuito da tarefa 3 é verificar a compreensão de definições matemáticas. Aqui, o professor tem a oportunidade de investigar se os conceitos envolvidos estão claros para todos os estudantes e fazer revisões, se for o caso. Considera-se que, nesta tarefa, os alunos terão a oportunidade de apresentar as suas respostas por meio de desenhos, expondo as suas concepções das definições apresentadas, tendo acesso a uma forma diferenciada de responder a uma questão. A Matemática oferece diversas formas para se resolver uma tarefa, e essa diversificação deve ser incentivada pelos professores, uma vez que nem sempre todos conseguem compreender da mesma forma os conceitos apresentados.

Portanto, professor, ao aplicar esta tarefa aos alunos, destaque as diversas formas de se "resolver" uma questão em Matemática, orientando-os a sempre procurar explicar os procedimentos que utilizaram para realizar as tarefas que lhe foram propostas. E se você, professor, precisar de maiores informações sobre retas paralelas e transversais, sugerimos consultar o capítulo 5 – axioma das paralelas, do livro Gerônimo e Franco (2010).

4. Observe o ambiente ao seu redor (sala de aula, quadra, etc.). Identifique situações que possam representar ou estar associadas a:

a) Duas retas paralelas entre si.
b) Duas retas transversais entre si.
c) Um feixe de retas paralelas.
d) Duas retas paralelas a uma reta *t* dada.
e) Uma reta transversal ao feixe de retas paralelas do item c.
f) Duas retas transversais a uma reta *t* dada.

Represente sua associação por meio de desenhos ou explicações escritas.

Basicamente associadas à dialética da ação, mais uma vez, o objetivo é verificar se os alunos compreenderam os conceitos abordados e se conseguem identificá-los em espaços inseridos em seu cotidiano, haja vista que os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p.38) salientam a importância da aplicabilidade prática da Matemática, para que os estudantes possam atuar decisivamente em sua vida.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, 1998, p.38).

A tarefa 4 proposta oportuniza aos alunos condições de compreender e visualizar que os conhecimentos matemáticos fazem parte de seu dia a dia, mesmo com adaptações, e não estão restritos a situações abstratas e sem ligação com a vida real.

Sugere-se que você, professor, estimule seus alunos a procurar ao seu redor situações que possam estar associadas às retas solicitadas, mesmo que essas retas só existam no mundo das ideias – pois assim desenvolve-se, a nosso ver, o senso crítico e a capacidade de observação. Neste momento, deve-se dar oportunidade aos alunos de se expressarem e perguntarem ou promoverem a troca de ideias entre os colegas, sendo importante o professor intervir apenas quando solicitado.

5. Observe os mapas que representam alguns bairros de sua cidade e responda aos questionamentos abaixo:

Figura 1: Mapa do Bairro Verd's Campos
Fonte: as autoras

a) Na Morada Verd’s Campos há ruas paralelas entre si? E ruas transversais entre si? Explique.

b) Quais ruas são paralelas à Rua Otacílio Luiz Pereira?

c) Quais ruas são paralelas à rua Vicente Pinto Ribeiro?

d) Cite pelo menos uma rua que seja paralela à rua Vicente Pinto Ribeiro.

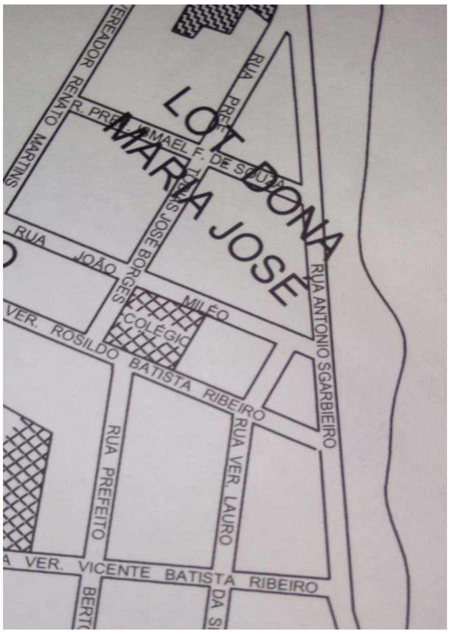


Figura 2: Mapa da Vila Maria José
Fonte: as autoras

No Loteamento Maria José considere que cada rua represente uma reta.

e) Classifique (como paralela ou transversal) a Rua Antonio Sgarbiero em relação à rua Pref. Tobias José Borges.

f) Classifique a rua Vereador Renato Martins em relação à rua Vereador Rosildo Batista Ribeiro. E em relação à rua Pref. Tobias José Borges, como fica a classificação?

g) Cite o nome de duas ruas transversais à Rua João Miléo.

O objetivo desta tarefa é verificar se os alunos conseguem identificar a presença de ruas paralelas e transversais em mapas de ruas que fazem parte da sua cidade. Esta tarefa 5 também contém aspectos que proporcionam ao aluno a compreensão de que os conceitos matemáticos estão inseridos em diversos contextos de seu cotidiano e eles podem aplicá-los concretamente. Ela evidencia a importância de tornar a Matemática uma disciplina mais presente na vida dos alunos, e não apenas composta por conteúdos abstratos, sem nenhum vínculo com a sua realidade.

Sugere-se que nesta tarefa você, professor, estimule seus alunos a conversar sobre o local em que residem, dando-lhes condições para que possam expressar-se e trocar ideias sobre diversos assuntos “matemáticos” que possam surgir de acordo com a realidade de cada um. Responder aos questionamentos do próprio grupo é também uma forma de aprender. Utilize um mapa de sua cidade ou do seu bairro.

6. Escolha uma imagem de uma revista (essa imagem será chamada de imagem original).
a) Amplie-a, a seu critério em relação à imagem original.

b) Observe seu desenho e a imagem. Você diria que elas são semelhantes, matematicamente falando? Explique.

Considere a seguinte definição: **Duas figuras A e B são ditas semelhantes (ou proporcionais) quando a razão entre os lados da figura A é a mesma razão entre os lados correspondentes da figura B. Essa razão de semelhança é chamada de constante de proporcionalidade.**

c) Volte novamente à imagem da revista e ao seu desenho e verifique a semelhança das duas figuras de acordo com a definição apresentada. Para isso, inscreva-as num retângulo e calcule a razão entre os lados do retângulo $\left(\frac{base}{altura}\right)$para as duas figuras (ampliada e original). Analise a definição e compare seus cálculos de razão. Explique como você pode garantir que as figuras são semelhantes, matematicamente falando.

Levar os alunos a compreender o conceito de semelhança entre figuras, por meio da ampliação e redução e analisando os aspectos geométricos que possuem em comum, é objetivo da tarefa 6, a qual possibilita ao aluno realizar uma análise das ações que efetivou, pois, ao aumentar ou diminuir a imagem, ele terá que argumentar sobre as operações efetuadas e as conclusões que obteve. Novamente, temos uma tarefa que está associada às dialéticas de ação, formulação e validação, sendo que a apresentação da definição pode ser associada à dialética da institucionalização.

Professor, atente-se para o fato de que, na matemática, duas figuras são semelhantes se tiverem lados correspondentes proporcionais, entretanto não é bem dessa forma que usamos o conceito de “semelhante” no nosso dia a dia. Se preferir, você pode usar imagens dos próprios alunos, mas aumentadas em apenas uma das dimensões, para incentivar a discussão sobre o que é ser semelhante, num contexto matemático.

Professor, caso seu aluno insista em afirmar a dificuldade em justificar as escolhas e procedimentos utilizados na resolução, estimule-o, afinal, tudo é uma questão de prática. Pode ser que eles não estejam habituados a esse modo de agir na matemática, mas, como afirmam Martinho e Gil (2014, p.314): “A argumentação é uma dimensão da aprendizagem da Matemática. De facto, uma cultura de aula em que se promove a argumentação suscita a participação dos alunos na sua própria aprendizagem”.

7. Observe a imagem:

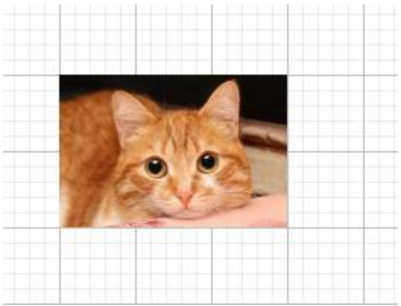


Figura 4: representação de um gato
Fonte: https://meusanimais.com.br/como-posso-saber-se-meu-gato-esta-doente/

A representação do gato está inscrita num retângulo de medidas da base igual a 15 unidades e 10 unidades como medida da altura. Maria fez uma redução dessa figura, que ficou inscrita num retângulo onde a medida da largura é 12 unidades. Maria insiste em dizer que as figuras são semelhantes. Se a afirmação é verdadeira, quanto deve ser a medida da altura do retângulo da figura reduzida?

Nesta tarefa 7, pretende-se que o estudante articule a proporcionalidade tratada na questão 6 com o cálculo que deve ser realizado aqui. Com isso, o professor pode verificar a compreensão dos alunos referente à redução e ampliação de figuras e a noção de figuras semelhantes. Ao realizarem esta tarefa em duplas, eles poderão trocar ideias e compreensões individuais sobre os conteúdos abordados. Aproveite o momento para explorar as concepções individuais acerca dos temas de estudo e sanar possíveis dúvidas.

8. Para compreender melhor as definições da razão e proporção, assista aos vídeos da série Matemática na Vida: Razão e Proporção, disponíveis nos *links*:

- A: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001056.mp4
- B: https://www.youtube.com/watch?v=wkjlps0B3Jc

Assista os pontos que achar interessante e apresente aos colegas.

Mesmo que os conceitos de razão e proporção tenham sido estudados em anos anteriores, objetiva-se, nesta tarefa 8, ampliar e consolidar tais conceitos, sendo que o vídeo apresenta uma linguagem acessível aos alunos e, também, exemplos práticos. Ao assistir aos vídeos, os alunos poderão relacionar seu conteúdo aos conceitos apresentados nas tarefas anteriores.

Professor, a utilização de recursos como vídeos em sala de aula motiva os alunos, porém alertamos que todas as suas ações devem ter um objetivo pedagógico. Ao disponibilizar um vídeo para seus alunos, deve solicitar que apresentem um retorno, como na tarefa 8, para que o objetivo pretendido com o vídeo seja atingido.

9. Considerando que “Razão é o quociente entre duas grandezas.” Determine a razão entre as alturas das árvores:

a) 1 e 2
b) 1 e 3
c) 1 e 4
d) 3 e 1
e) 4 e 1
f) 5 e 3

Obs: Considere cada quadradinho como unidade de altura.

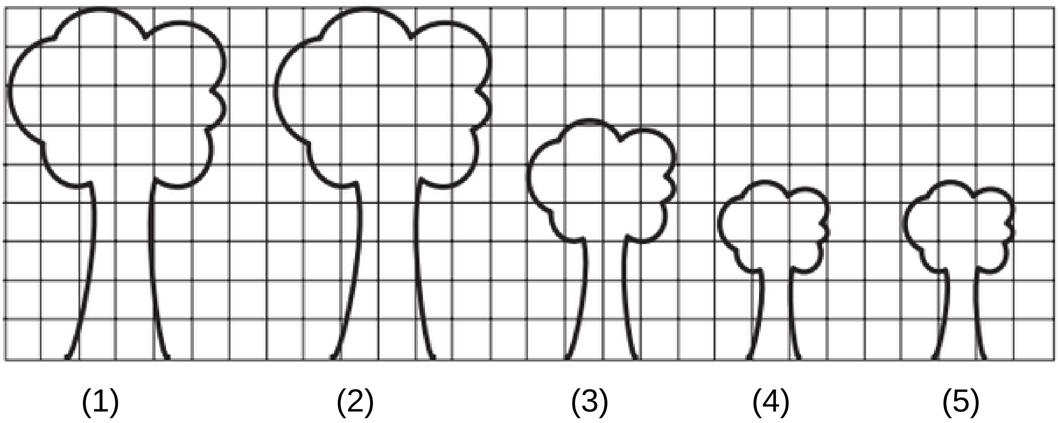


Figura 5: representação de 05 árvores
Fonte: http://questoes_casa.s3.amazonaws.com/24137.jpg

O objetivo desta questão é a aplicação de conceitos referentes à razão que vêm sendo abordados em questões anteriores, ao mesmo tempo que prepara os alunos para tarefas mais práticas, que serão apresentadas mais adiante nessa sequência didática. Com as definições e exemplos apresentados nos vídeos e nas tarefas anteriores, estima-se que os alunos tenham condições de realizar os cálculos solicitados sem dificuldade.

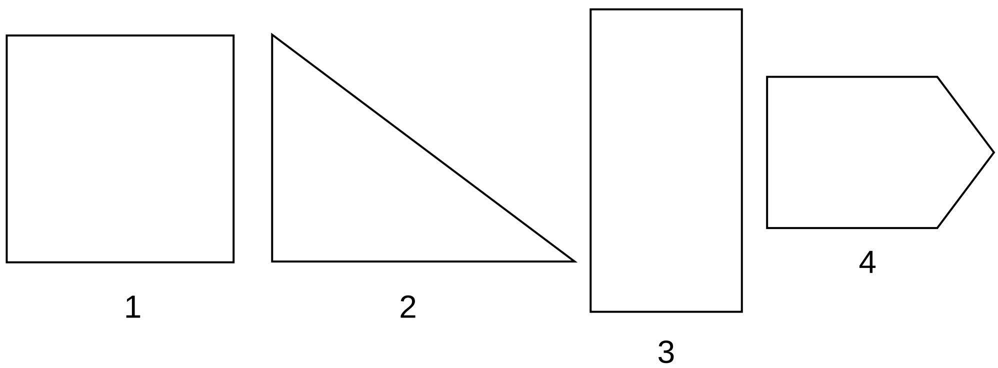
Vale destacar a importância de você, professor, discutir com seus alunos o significado da palavra "razão". Na pesquisa realizada em minha dissertação (BARBOSA, 2018), muitos estudantes associaram a palavra razão a um "porquê" ou a "estar certo". A não compreensão do termo no sentido matemático (que também pode assumir outras conotações) pode acarretar dificuldades na compreensão das resoluções das tarefas e, consequentemente, do Teorema de Tales.

10. Vamos aprender um pouco mais sobre os conceitos matemáticos acessando os Objetos de Aprendizagem presentes nos *links* abaixo: **Proporcionalidade e Semelhança:** http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/proporcionalidde/AtividadeMat.html **Semelhança de Figuras:** http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/semelhanca_atraves_da_ampliacao/index2.html a) As informações e atividades presentes nestes Objetos de Aprendizagem abordaram conceitos que vocês já conheciam? Quais? Explique. b) O que mais chamou atenção nos *links* apresentados? Por quê?

Buscando diversificar os recursos utilizados para proporcionar a aprendizagem de noções importantes para a compreensão do Teorema de Tales – objeto fim dessa sequência didática, esta tarefa visa proporcionar aos alunos a aplicação dos conhecimentos referentes à semelhança de figuras, razão e proporção num ambiente virtual. Espera-se que durante a realização desta tarefa os alunos troquem ideias entre si e associem o conteúdo em estudo àqueles apresentados em tarefas anteriores. Esta tarefa disponibiliza aos alunos o acesso aos recursos tecnológicos que causam grande motivação, justamente por não estarem presentes no cotidiano escolar tão frequentemente. Os Objetos de Aprendizagem (OA) abordam os conceitos trabalhados nesta etapa da Sequência Didática e podem ser realizados individualmente ou em duplas. A realização da tarefa em dupla pode ampliar o conhecimento dos alunos, ao partilharem e trocarem ideias sobre os procedimentos de realização de cada etapa dos OA.

Destacamos, professor, a necessidade de estar sempre preparado para as dificuldades que podem surgir quando for utilizar recursos tecnológicos como o indicado nessa tarefa, por exemplo a falta de *internet*. Os OA mencionados podem ser inseridos previamente nos computadores, não necessitando de acesso à *internet* para a sua utilização.

11. Inscreva cada uma das figuras abaixo em um retângulo.



a) Meça as dimensões dos retângulos em cada figura e anote na tabela abaixo:

Figura	Medidas (base X altura)
1	
2	
3	
4	

b) Amplie cada figura duas vezes em relação à medida inicial e realize as medidas dessas figuras ampliadas. Anote-as.

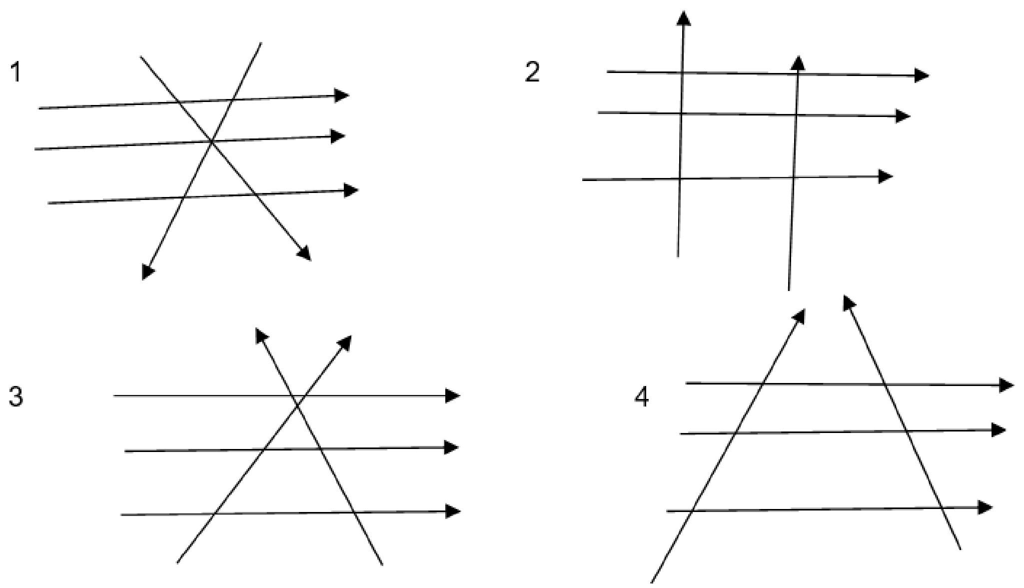
c) Calcule a razão entre as medidas dos lados de cada figura original (obtida no item a) com a medida dos lados correspondentes na ampliação (obtida no item b). Como você pode interpretar essa razão? Explique.

d) O que você considera que ocorreu entre as figuras originais e aumentadas? Com qual conceito (ou quais conceitos) já estudado ao longo dessa sequência didática você pode relacionar o que você fez nessa tarefa 11? Explique.

O objetivo desta tarefa é a aplicação do conceito de razão em figuras geométricas, utilizando a ampliação e redução de figuras, consolidando os conceitos abordados. A etapa da TSD presente nesta tarefa é a formulação e validação, sendo que ao realizar os procedimentos solicitados os alunos estão confrontando os saberes adquiridos e, ao explicar o que ocorreu com as figuras, estão demonstrando o seu próprio conhecimento, oriundo das informações que recebeu durante a realização das tarefas anteriores.

Professor, atente-se para as respostas dos seus alunos e, se for o caso, oriente para que as conexões que estão sendo formadas na mente dos estudantes estejam corretamente interligadas aos conceitos matemáticos.

12. Observe as posições das retas abaixo:



a) Considerando o que já foi estudado nessa sequência didática, quais são as posições ocupadas pelas retas em 1, 2, 3 e 4?

b) Ao analisar as posições das retas no item a, de quais assuntos abordados ao longo dessa sequência você se lembrou? Por quê?

c) Desenhe duas outras posições (diferentes das apresentadas no enunciado dessa tarefa) entre retas paralelas e retas transversais.

Com essa tarefa 12, pretende-se incentivar os alunos a desenhar posições não habituais para retas paralelas e transversais, o que, a nosso ver, aumenta as possibilidades de uso do Teorema de Tales em tarefas seguintes.

Professor, durante a resolução desta tarefa poderá perceber se os seus alunos estão conseguindo compreender os conceitos que estão sendo abordados e, se necessário, realizar uma revisão deles, enfatizando sempre a interligação entre eles. São nesses momentos de revisão que os processos de devolução e institucionalização ocorrem. Ao questionar seus estudantes sobre o desenvolvimento das tarefas, sobre os modos de pensar, sem lhes dar respostas prontas, você está usando a dialética da devolução de Brousseau, enquanto que nos momentos em que você retoma os conteúdos em sala de aula, para mostrar a sua sistematização, você está usando a dialética da institucionalização. Para Brousseau (2008), esses processos são fundamentais para garantir a aquisição do saber matemático sistematizado.

13. Você já ouviu falar em teorema?

a) Explique com suas palavras o que é um teorema.

b) Em um dicionário, pesquise a definição de teorema e anote.

c) Na *internet*, pesquise e enuncie algum teorema que esteja relacionado com as atividades que você está desenvolvendo.

d) Converse com seus colegas e descubra quais os teoremas encontrados nessa busca. Para que serve um teorema? Explique.

Além de compreender o significado da palavra teorema, inclusive mediante o confronto dicionário-conhecimento pessoal, essa tarefa 13 busca incentivar o estudante a elaborar pesquisas e questionar resultados, uma vez que pode acontecer de ter alunos que encontrem outros resultados, que não seja o Teorema de Tales, ou ainda, encontrem enunciados diferentes para o mesmo teorema. Se isto acontecer, professor, aproveite a oportunidade de discutir com seus alunos essa variação de possibilidades de resposta, e procure mostrar o que todas as versões têm em comum.

Ao se propor a busca por um teorema que esteja relacionado com as atividades desenvolvidas, pretende-se que os alunos comecem a ter conhecimento do Teorema de Tales e a inserção dos diversos conceitos em sua estrutura.

Professor, aproveite a oportunidade para tratar de outros termos não usuais no cotidiano dos estudantes, como os axiomas, corolários, etc.

14. Vamos fazer a representação de um teorema?

- Desenhe três retas paralelas entre si e escolha distâncias diferentes entre elas, duas a duas.
- Nomeie essas retas por r, s e t.
- Trace duas retas transversais e nomeie-as por m e n.
- Nomeie os pontos de intersecção pertencentes a m por A, B e C e os pontos de intersecção pertencentes a n por D, E e F;
- Meça os segmentos AB, BC, DE e EF;
- Registre essas medidas em uma tabela semelhante a seguinte:

Segmento	***Medida***
$\overline{AB}$	
$\overline{BC}$	
$\overline{DE}$	
$\overline{EF}$	

a) Calcule as razões $\overline{AB}/\overline{BC}$ e $\overline{DE}/\overline{EF}$ (pode utilizar a calculadora). Anote os valores encontrados.

b) Compare os resultados que você obteve para as duas razões. Qual é a relação entre essas medidas? Explique

c) Analise o que você fez nessa tarefa e compare com o teorema pesquisado na tarefa 13. Você percebe alguma relação? Comente.

O objetivo desta tarefa é levar os alunos a compreender um teorema matemático por meio das etapas que serão realizadas. Espera-se que, ao longo dessa tarefa, os estudantes associem os passos ao Teorema de Tales, e que não tenham dificuldade de desenhar retas paralelas ou transversais e calcular as razões solicitadas. É importante destacar a necessidade do professor estar atento e, se for o caso, indagar os alunos se eles reconhecem esse procedimento, sem no entanto dizer que se trata do Teorema de Tales - o momento de descoberta é importante para o estudante.

Esperamos, professor, que você tenha percebido nossa construção paulatina de conhecimentos sobre o Teorema de Tales, sem, no entanto, deixar claro o objeto de estudo. Isto faz parte do processo de descoberta. Pretende-se que quando o estudante for ler o enunciado do Teorema de Tales, isso não lhe cause surpresa.

15. Observe o enunciado para o Teorema de Tales:

Teorema de Tales[11]: Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais.

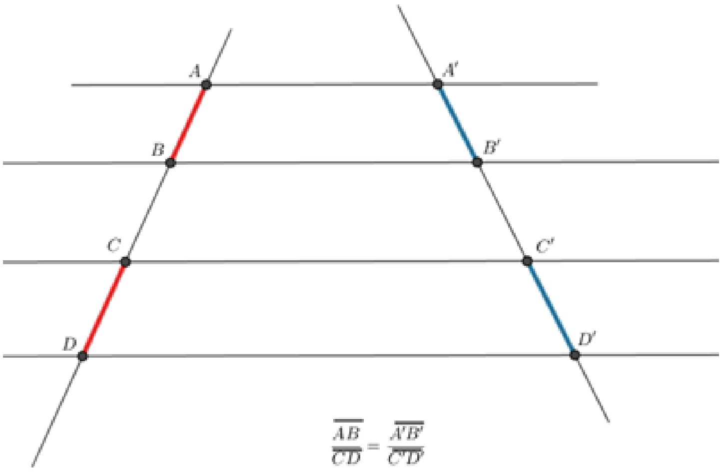


Figura 6: retas paralelas cortadas por duas retas transversais
Fonte: as autoras

a) Analise o enunciado do Teorema de Tales e explique, com suas palavras, em quê ele pode ser usado.

b) Dentre os conceitos já revisados nesta sequência didática, quais você consegue perceber no enunciado do Teorema? Explique.

Nesta tarefa 15, desvela-se o assunto principal de toda sequência didática. Pretende-se que os estudantes observem e concluam que todas as tarefas anteriores buscavam, em última instância, consolidar conhecimentos utilizados no enunciado do

[11] Definição retirada de Gerônimo e Franco (2010, p.122).

Teorema de Tales. Essa é uma tarefa diretamente ligada à dialética da institucionalização, porque o Teorema de Tales é oficialmente apresentado.

A partir de agora, estimula-se os estudantes a pensarem em possibilidades para a utilização desse teorema. É importante deixar um momento para que os estudantes, em grupos, discutam tais possibilidades.

16. Veja os vídeos que abordam o Teorema de Tales em algumas situações:

- A: https://www.youtube.com/watch?v=oQly4aClog8&t=11s
- B :https://www.youtube.com/watch?v=kmemd29j7hA

a) Anote as ideias centrais de cada vídeo apresentado.

b) A partir dos vídeos, quais outras situações podem ser resolvidas com o uso desse teorema, na sua opinião? Por quê?

O objetivo desta tarefa é levar os alunos a conhecer o Teorema de Tales em aplicações cotidianas. Ao assistir os vídeos, os alunos poderão visualizar a grande aplicabilidade prática do Teorema de Tales e estabelecer uma compreensão de diversos detalhes que permeiam o Teorema, desde o seu processo histórico de construção como a sua aplicabilidade.

Professor, novamente, nesta tarefa, os vídeos apresentados possuem um caráter pedagógico e de grande importância para que os alunos compreendam a importância deste teorema em situações concretas de seu dia a dia.

17. O Teorema de Tales originou-se, segundo a História da Matemática, por meio da medida da altura da Pirâmide de Quéops no antigo Egito. Pesquise como isso ocorreu e descreva os procedimentos realizados por Tales. Represente em desenhos.

Com a pesquisa solicitada na tarefa 17, espera-se que os alunos compreendam como ocorreu o processo realizado por Tales para calcular a medida da altura da Pirâmide e posterior relação com o Teorema de Tales. A História da Matemática é uma fonte na qual os alunos podem identificar e imaginar como tal conhecimento se originou. Durante a investigação e a realização da tarefa, os alunos podem perceber que a Matemática é uma ciência cujas descobertas e inovações são frutos de um processo histórico, bem como a importância de Tales de Mileto. Os alunos podem participar ativamente de todo o processo, interagindo entre si, trocando ideias, confrontando opiniões e conhecimentos para atingir o objetivo que é a utilização da situação descrita por Tales.

Professor, durante esta tarefa, atue apenas no sentido de esclarecer algumas dúvidas que forem surgindo no decorrer da pesquisa e do desenho. Os alunos terão condições de serem agentes ativos na construção de seu conhecimento.

18. Em grupos vamos utilizar o processo descrito por Tales e o seu Teorema para o cálculo da altura da pirâmide? Para cada um dos itens seguintes, calcule a altura. Mostre seu processo de resolução, apresentando:

i) um desenho que represente a situação

ii) os procedimentos realizados para obtenção das medidas. (Não esqueça de inserir os cálculos):

a) Poste da Praça

Figura 7: Poste da praça
Fonte: as autoras

b) Prédio

Figura 8: Prédio
Fonte: as autoras

c) Árvore

Figura 9: Árvore
Fonte: as autoras

d) Ginásio de Esportes

Figura 10: Ginásio de esportes
Fonte: as autoras

e) Hotel

Figura 11: Hotel
Fonte: as autoras

f) Poste da Rede de Transmissão

Figura 12: Poste de rede de transmissão
Fonte: as autoras

O objetivo desta tarefa é levar os alunos a aplicar o Teorema de Tales no cálculo de distâncias inacessíveis em locais presentes em seu cotidiano, ou seja, poderão ver na prática a utilização de algo estudado na escola. Para isso, professor, adapte os itens conforme sua realidade. Lembre-se de verificar, antecipadamente, as condições necessárias para a realização da tarefa. Por exemplo, certificar-se se será possível calcular a sombra do monumento, se não há riscos de acidentes com os estudantes enquanto estiverem distraídos com as medidas, etc.

Professor, nesta tarefa, destaca-se a presença de espaços físicos que estão presentes no cotidiano do aluno e a realização de ações fora do espaço escolar que serão realizadas em equipe. Essas ações motivam e ampliam os interesses dos alunos, pois são situações diferentes do dia a dia em sala de aula e proporcionam excelentes resultados.

19. A figura abaixo indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para a rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A medem, respectivamente, 15m, 20m e 25m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28 m.

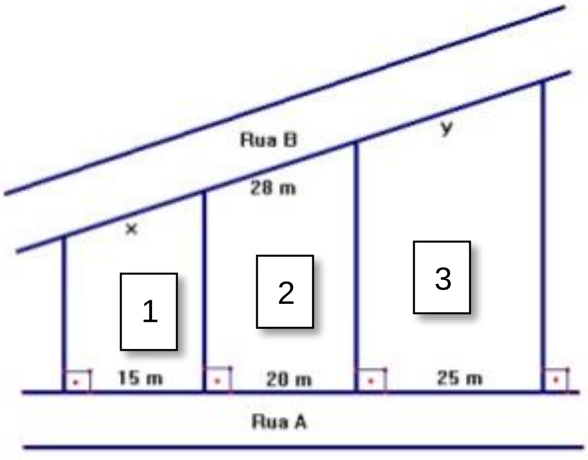


Figura 13: representação de 03 lotes
Fonte: https://pt.slideshare.net/valtergomes10/lista-de-exercicios-teorema-de-tales

a) Qual a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3? Apresente os cálculos realizados ou explique seu raciocínio para determinar essas medidas.

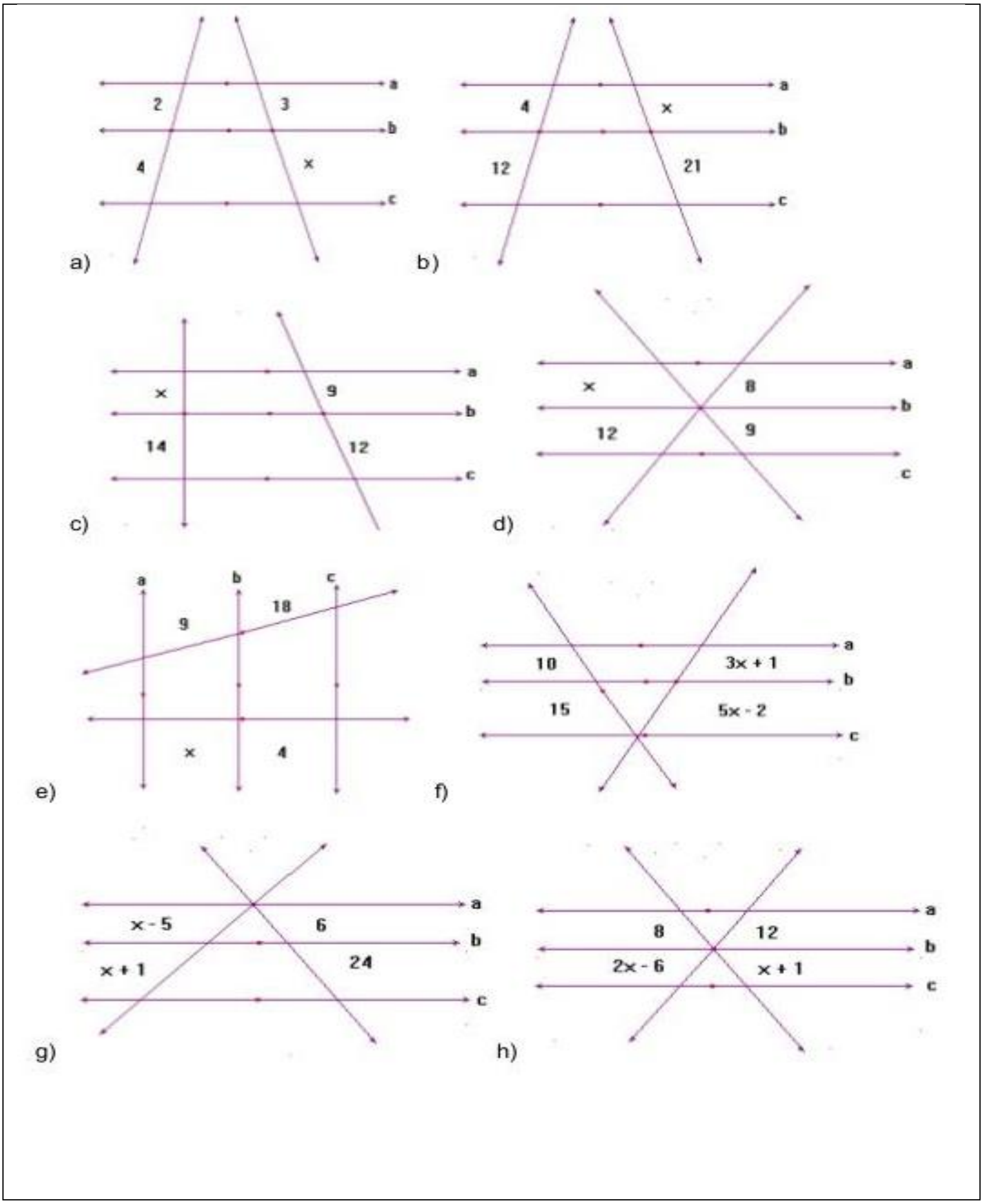
b) Na figura apresentada no enunciado, existem ruas paralelas e/ou transversais? Se sim, quais? Explique seu posicionamento.

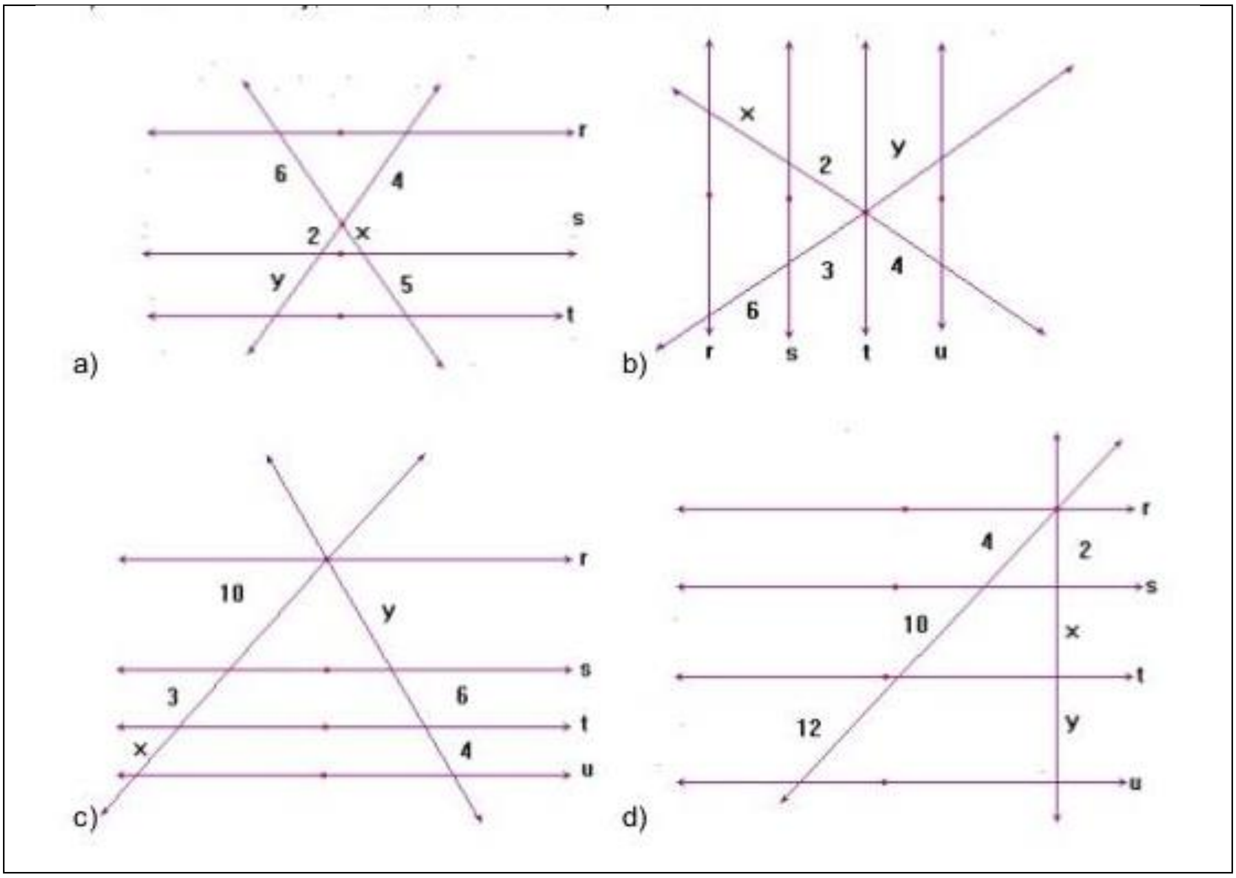
A situação da tarefa 19 é levar os alunos a aplicar o Teorema de Tales em cálculos de dimensões que não se conhecem suas medidas. Nesta tarefa, os alunos deverão interpretar a situação-problema proposta e aplicar os conceitos referentes ao Teorema de Tales para solucioná-la.

Sugere-se, professor, que ao realizar esta atividade proponha aos alunos a realização de outras situações semelhantes, utilizando o Teorema de Tales para realizá-la, para que os alunos percebam a utilização do Teorema em diversos momentos do cotidiano. Com isso, você, professor, estará estimulando o desenvolvimento da criatividade nos seus estudantes.

20. Determine o valor das incógnitas (x e y) em cada um dos casos seguintes. Apresente os cálculos realizados e/ou explique como chegou aos cálculos.[12]

[12] Lista de Exercícios referentes ao Teorema de Tales. Disponível em: < https://matematicaressucat.files.wordpress.com/2009/07/9.doc.> Acesso em jan. 2018.


a
2
3
b
4
x
c
a)
a
4
x
b
12
21
c
b)
a
x
9
b
14
12
c
c)
a
x
8
b
12
9
c
d)
a
b
c
18
9
x
4
e)
a
10
3x + 1
b
15
5x - 2
c
f)
a
x - 5
6
b
x + 1
24
c
g)
a
8
12
b
2x - 6
x + 1
c
h)



A tarefa 20 apresenta uma situação típica de livro didático. Seu objetivo é levar os alunos a aplicar o Teorema de Tales em feixes de retas paralelas, numa situação mais abstrata. As situações propostas proporcionam aos alunos a oportunidade de aplicar o Teorema de Tales para o cálculo da incógnita X.

Professor, as questões presentes na tarefa são aquelas que normalmente são utilizadas para aprendizagem dos conteúdos referentes ao Teorema de Tales. Ao realizarem esta tarefa, os alunos já terão tido acesso ao teorema propriamente dito, em situações reais e concretas. Espera-se que eles consigam utilizar todo o conhecimento adquirido ao longo dessa sequência didática na resolução dessa tarefa.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O intuito ao se elaborar o presente material consiste na disponibilização de um suporte ao professor, que lhe permita proporcionar uma aprendizagem mais ampla do Teorema de Tales mediante uma abordagem diferenciada, na qual o estudante seja o agente principal neste processo de aquisição do conhecimento e o professor o sujeito que oferece condições adequadas para esta finalidade.

A Teoria das Situações Didáticas ofereceu o embasamento teórico para que esta Sequência Didática fosse elaborada, pois ela destaca a importância de se propor aos alunos situações nas quais ele desenvolva sua autonomia no processo de aprendizagem ao mesmo tempo que adquire o conhecimento pretendido.

Inicialmente, foi elaborada uma Sequência Didática com a mesma proposta, porém com uma quantidade maior de tarefas (38 – disponível em Barbosa, 2018). Durante a sua aplicação em uma turma, verificou-se que, embora ela tenha trazido resultados satisfatórios, algumas tarefas eram repetitivas, pois os alunos tinham que realizar os mesmos procedimentos, além de ser extensa, o que levou os alunos a demorarem um bom tempo para concluí-la e, aos poucos, diminuiu o interesse pelas resoluções.

Diante disso, compreendeu-se a necessidade de uma reelaboração da Sequência Didática, visando a uma agilidade na sua resolução, porém com o mesmo aprendizado.

O presente Produto Educacional é, portanto, uma reformulação da sequência didática anterior com um número menor de atividades, porém com a mesma estrutura e enfoque. Destaca-se, Professor, que ao utilizá-lo em sua prática pode (e deve) realizar as adaptações que considerar necessárias, de acordo com a sua realidade e clientela. Espera-se que esta sequência traga bons resultados em sua prática cotidiana.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Maria José Fagundes.CARGNIN, Claudete. **Uma Sequência Didática para o Teorema de Tales**. Londrina, 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 5ª a 8ª séries**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

GERÔNIMO, J.R.; FRANCO, V.S. **Geometria plana e espacial:** um estudo axiomático. 2a ed. Maringá: EDUEM, 2010.

MARTINHO, M.H. GIL, P.D.B. **O professor e o desenvolvimento da capacidade de argumentação:** equações do 2. Grau na antiga Babilónia com alunos do 9o ano. In: PONTE, J.P. (org). Práticas profissionais dos professores de Matemática.Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, 1a edição (Projeto P3M).

NACARATO, A.M. **A escrita nas aulas de matemática**: diversidade de registros e suas potencialidades. Leitura: Teoria & Prática, Campinas, v.31, n.61, pp.63-79, 2013