



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CÂMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO

PPGMAT

ANNA FLÁVIA MAGNONI VIEIRA

ELEMENTOS VALORIZADOS POR PROFESSORES DE
MATEMÁTICA NA ELABORAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE
TAREFAS NO CONTEXTO DA ÁLGEBRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

LONDRINA - PR

2018

ANNA FLÁVIA MAGNONI VIEIRA

**ELEMENTOS VALORIZADOS POR PROFESSORES DE
MATEMÁTICA NA ELABORAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE
TAREFAS NO CONTEXTO DA ÁLGEBRA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Londrina como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan
Coorientadora: Profa. Dra. Loreni Aparecida
Ferreira Baldini

LONDRINA - PR

2018

TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105,USA.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

V658e Vieira, Anna Flávia Magnoni

Elementos valorizados por professores de matemática na elaboração e implementação de tarefas no contexto da álgebra / Anna Flávia Magnoni Vieira. - Londrina : [s.n.], 2018.
99 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

Orientadora: Prof^a Dr^a Loreni Aparecida Ferreira Baldini.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2018.
Bibliografia: f. 79-82.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Álgebra - Problemas, questões, exercícios.
3. Professores de matemática. 4. Prática de ensino. I. Trevisan, André Luis, orient.
II. Baldini, Loreni Aparecida Ferreira, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. IV. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. V. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Paraná Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação Programa de
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Câmpus
Londrina/Cornélio Procópio
Nome da Diretoria
Nome da Coordenação
Nome do Curso



TERMO DE APROVAÇÃO

ELEMENTOS VALORIZADOS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA ELABORAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE TAREFAS NO CONTEXTO DA ÁLGEBRA

por

ANNA FLÁVIA MAGNONI VIEIRA

Esta dissertação foi apresentada às 14h00min do dia 03 de setembro de 2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Profa. Dra. Loreni Aparecida Ferreira Baldini
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Marcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

- A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática -

DEDICATÓRIA

Dedico este estudo à minha família, em especial, à minha filha Clara.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder o dom da vida e me proporcionar mais este aprendizado.

À minha mãe, Sandra, pelo amor e pelo incentivo na realização de meus objetivos, e ao meu pai, *in memoriam*, por tudo o que representou em minha vida.

A meu esposo Raphael, pelo apoio e incentivo em todos os momentos desta caminhada, que, sempre com muita paciência, cedeu momentos em que eu poderia estar em sua companhia para a realização deste estudo.

À minha filha Clara, que, apesar de ainda não conseguir compreender a dimensão da importância que este trabalho representa para mim, foi minha maior fonte de amor e de estímulo para querer me capacitar ainda mais.

Ao professor Dr. André Luis Trevisan, pela oportunidade e pela confiança, além do apoio e da disposição em me orientar, onde e quando fosse necessário, com sua competência, dedicação e, principalmente, paciência.

A professora Dra. Loreni Aparecida Ferreira Baldini, por aceitar o convite de co-orientação e por fazer parte desta etapa tão importante da minha vida; pelo incentivo para que eu pudesse dar início ao mestrado e, ainda, por todo o apoio durante este estudo.

Aos professores que participaram desta pesquisa, pela dedicação a seus alunos, e pela disponibilidade e compromisso para com o desenvolvimento do grupo.

Aos professores Dra. Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha, Dra. Marcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman e Dr. Alessandro Jacques Ribeiro por terem aceitado fazer parte da minha banca de defesa, cujas sugestões e recomendações foram de fundamental importância na realização deste estudo.

Aos meus amigos e docentes do PPGMAT, pelos momentos de discussões, trocas de experiências e confraternizações, em especial, a minha amiga Adriele Waideman pelo apoio nos momentos de desânimo.

Enfim, a todos os envolvidos que, de alguma forma, contribuíram para esta conquista.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.

Marthin Luther King

RESUMO

VIEIRA, Anna Flávia Magnoni. **Elementos valorizados por professores de Matemática na elaboração e implementação de tarefas no contexto da Álgebra.** 2018. 99 folhas. Dissertação - Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

No presente estudo investigamos elementos valorizados por professores de Matemática, em momentos de elaboração e implementação de tarefas no contexto da Álgebra. Para o desenvolvimento, a pesquisadora participou de encontros de estudos e acompanhou as aulas de participantes de um grupo de estudos em andamento desde 2013. Os dados para esta pesquisa foram coletados em encontros realizados em 2017, período em que o grupo contou com a participação de cinco professores que trabalhavam em escolas públicas. Foram utilizados, como instrumentos para coleta de informações, o diário de campo, gravações de áudio dos encontros do grupo, registros escritos realizados pelos professores envolvidos e a produção escrita dos alunos advinda da implementação das tarefas. A análise realizada foi qualitativa de cunho interpretativo e teve como pressupostos teóricos aspectos relacionados ao trabalho com tarefas em aulas de Matemática, em articulação com pressupostos para o Ensino da Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. Foram identificados os seguintes elementos valorizados pelos professores nesse processo: a constituição de um ambiente oportuno para aprendizagem matemática; a manutenção do nível de demanda cognitiva das tarefas e a atribuição de significados à linguagem algébrica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Tarefas matemáticas. Ensino da Álgebra. Aprendizagem profissional docente.

ABSTRACT

VIEIRA, Anna Flávia Magnoni. **Elements valorized by Mathematics teachers in the elaboration and implementation of exercises in the context of Algebra.** 2018. 99 sheets. Dissertation - Professional Master's Degree in Mathematics Teaching - Federal Technological University of Paraná. Londrina, 2018.

In the present study we have investigated elements valued by Mathematics teachers, in moments of elaboration and implementation of exercises in the context of Algebra. For the development, the researcher participated in study meetings and followed the classes of participants of a group of studies in progress since 2013. Data for this research were collected in meetings held in 2017, during which time the group had the participation of five teachers who worked in public schools. The field diary, audio recordings of the group meetings, written records by the teachers involved and the students' written output from the implementation of the exercises were used as instruments for gathering information. The analysis was qualitative of an interpretative nature and had as theoretical presuppositions aspects related to the work with exercises in Mathematics classes, in articulation with assumptions for the Teaching of Algebra in the final years of Elementary School. The following elements were identified by the teachers in this process: the constitution of a suitable environment for mathematical learning; the maintenance of the level of cognitive demand of the exercises and the attribution of meanings to the algebraic operations.

Keywords: Mathematics Teaching. Mathematical exercises. Teaching Algebra. Professional teacher learning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
1.1 Motivação para o estudo	9
1.2 Um breve histórico do grupo de estudos	10
1.3 Pertinência e objetivo do estudo	12
2 SOBRE TAREFAS MATEMÁTICAS	17
2.1 Tarefa e Atividade	17
2.2 Papel do professor no trabalho com tarefas: elaboração e implementação.....	18
3 SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA	24
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	32
4.1 Caracterização da pesquisa	32
4.2 Caracterização dos sujeitos	33
4.3 Dos procedimentos e instrumentos para a coleta de dados.....	34
4.4 Das ações ocorridas no grupo.....	35
4.5 O processo de análise.....	38
5 DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS DE ELABORAÇÃO DAS TAREFAS	41
5.1 Trajetória de construção das tarefas	41
5.2 Pré-testagem da tarefa.....	44
5.3 Reelaboração da tarefa	46
5.4 Discussão dos itens da tarefa	49
5.5 Potencialidades das tarefas	50
6 ANÁLISE DOS DADOS	54
6.1 Constituição de um ambiente oportuno para aprendizagem matemática.....	54
6.2 Manutenção da demanda cognitiva da tarefa.....	59
6.3 Atribuição de significados à linguagem algébrica.....	63
6.3.1 Criar condições para uma gradativa transição da linguagem natural para a linguagem algébrica	68
6.3.2 Promover a articulação entre diferentes tipos de representação	71
6.3.3 Oportunizar a simplificação da escrita no uso da linguagem simbólica.....	73
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
REFERÊNCIAS	79
APÊNDICES	83
APÊNDICE A.....	84
APÊNDICE B.....	86
APÊNDICE C	88
APÊNDICE D	94
APÊNDICE E.....	96
ANEXO – Produto Educacional.....	100

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação para o estudo

Minha¹ trajetória como professora da Educação Básica teve início em 2008. Nesse ano, estava cursando o terceiro semestre de Licenciatura em Matemática com Ênfase em Informática na Faculdade de Apucarana (FAP), na cidade de Apucarana – PR. Porém, desde o início da graduação, já trabalhava como monitora nas aulas de reforço escolar em uma escola da rede particular.

O fato de já atuar como professora desde a graduação me fez ter um olhar paraX além da teoria ensinada pelos professores, já que, muitas vezes, associava o que estava sendo ensinado na graduação com minha prática pedagógica. Muitos de meus professores realizavam suas pesquisas e estudos na área da Educação Matemática. Relembro que, certa vez, em uma aula na qual a professora estava utilizando a abordagem metodológica de Resolução de Problemas, indaguei-a no sentido de duvidar de tal metodologia, pois não conseguia conceber que, por meio de um problema, um aluno poderia elaborar uma ideia ou um conceito matemático; isso foi motivo de grande discussão naquela aula.

O motivo que me fez agir daquela forma, provavelmente, foi a experiência que tive como aluna da Educação Básica, visto que a maior parte de meus professores ministrava uma aula de forma tradicional e puramente expositiva. Assim, ia para a sala de aula crente de que esse era o único caminho a seguir.

No decorrer de minha trajetória enquanto professora, como trabalhei frequentemente com conteúdo de Álgebra nos oitavos anos (no colégio onde atuo nos últimos anos, o 8º ano era dividido em duas frentes: álgebra e geometria), não conseguia responder a algumas inquietações de meus alunos em relação à utilidade de aprender, por exemplo, operações com polinômios. Isso me levou a alguns questionamentos: seria possível ensinar esse conteúdo de modo que os alunos atribuíssem significado para tais operações? Ou, por outro lado, os alunos deveriam

¹Nesta subseção, optei por utilizar a primeira pessoa do singular, por relatar aspectos da minha trajetória acadêmica e profissional, que refletem minhas motivações para o estudo. Ao longo do restante do texto, será utilizada a primeira pessoa do plural, por remeter a reflexões que construí, mediante a pesquisa junto com meu orientador e co-orientadora.

entender que diversos conteúdos matemáticos têm aplicação somente dentro da própria Matemática? Essas e outras questões começaram a me incomodar. Foi nesse momento que comecei a buscar outros meios para ensinar, o que despertou meu interesse para outras abordagens de ensino.

Ao terminar a graduação e com o ingresso na especialização em Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina – UEL, tive a oportunidade de discutir questões acerca do ensino dessa disciplina e refletir sobre alguns aspectos da minha prática pedagógica. Tive também a oportunidade de aprofundar estudos relacionados à temática Tarefas Matemáticas e tomar contato com alguns autores que discutem esse tema².

Em 2016, tive a oportunidade de retomar, de forma mais intensiva, meus estudos em Educação Matemática e prestar seleção para o ingresso no Programa de Mestrado. Meu pré-projeto, intitulado “Pensamento algébrico: articulando álgebra e geometria em uma proposta de ensino”, refletiu o ensino da Álgebra como um dos “protagonistas” na busca de novos conhecimentos. Com o início do mestrado em 2017, fui convidada a participar de um grupo de estudos constituído por meu orientador e alguns professores da rede Estadual de Ensino. Com isso tive a oportunidade de aprofundar estudos teóricos e discutir questões relacionadas às tarefas matemáticas e ao ensino da Álgebra, como detalhado na seção a seguir.

1.2 Um breve histórico do grupo de estudos

O grupo de estudos, que ainda está em andamento, é constituído por professores de Matemática interessados em investigar a própria prática profissional, resultado de uma parceria consolidada entre escola pública e universidade por meio de projetos de extensão desenvolvidos nesse contexto desde o ano de 2013. Em suas várias fases (que serão detalhadas a seguir), o projeto contou com a participação de professores de Matemática que ministravam aulas do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio em escolas estaduais do município

² Destacam-se aqui trabalhos de Mary Kay Stein e Margaret Schwan Smith, João Pedro da Ponte e colaboradores, e Márcia Cristina da Costa Trindade Cyrino e colaboradores, retomados e referenciados na continuidade deste texto.

de Rolândia-PR³. Os encontros ocorrem em umas dessas escolas, em horário de hora-atividade comum entre os participantes.

No ano de 2013, o grupo contou com a participação de dez professores, além do formador do grupo e orientador desta pesquisa e de uma estudante de iniciação científica. A intenção era discutir questões acerca da temática avaliação, com destaque para os instrumentos de avaliação utilizados pelos professores e o modo como avaliavam os estudantes no cotidiano escolar. Já no segundo semestre de 2013, o grupo assumiu nova configuração, com três professores que já haviam participado anteriormente e mais dois novos. Os estudos prosseguiram atrelados à temática avaliação⁴.

Em 2014, os encontros ocorreram semanalmente e contaram com a participação de sete professores, cinco do período anterior e dois que entraram, além da estudante de iniciação científica. Desse modo, num desejo de estudar e trabalhar em parceria (preparando suas aulas, coletando dados a partir delas e depois refletindo a respeito), o grupo negociou com suas escolas um horário comum de três horas-atividade semanais, durante as quais passaram a ocorrer os encontros. Os participantes também assumiram aulas em anos de mesma escolaridade (no caso, 6º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio)⁵.

Em função da dificuldade em conciliar horários e assumir aulas em turmas em comum, o grupo passou a se reunir em períodos mais espaçados de tempo, ora quinzenalmente, ora mensalmente, entre os anos de 2015 e 2016, contando com a participação de quatro professores. Esse período foi dedicado ao estudo de textos relacionados ao pensamento algébrico e à aprendizagem da Álgebra (temática elencada pelos participantes e que perpassa conteúdos presentes nos diferentes anos de escolaridade nos quais atuavam – entre 6º do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio). Como resultado, destacamos a elaboração pelo grupo de um material didático com tarefas matemáticas para o ensino de Álgebra, cujo objetivo principal foi auxiliar a prática dos professores integrantes do grupo de estudos e

³ Município de médio porte, da região metropolitana de Londrina, com cerca de 60.000 habitantes, conta com seis escolas estaduais, sendo duas localizadas na região central, três em bairros periféricos e uma distrital. Participaram do projeto em suas várias fases professores que possuem seu padrão de aulas em três dessas escolas.

⁴ Os trabalhos de Trevisan e Mendes (2015a, 2015b), Trevisan e Amaral (2016) e Trevisan, Delamuta e Lalin-Soato (2017) apresentam reflexões acerca do projeto desenvolvido naquele ano.

⁵ Investigações sistematizadas por Souza e Trevisan (2015), Mendes, Trevisan e Souza (2016) e Souza, Mondek e Trevisan (2016) ilustram parte do trabalho do ano de 2014.

disponibilizar tal material para outros professores de Matemática interessados em utilizá-lo em suas aulas (STRASSACAPA; ZUBIOLO; TREVISAN; SCHÜRMAN; MONDEK, 2016).

No artigo intitulado “Tarefas enquanto material curricular para aulas de Matemática: reflexões de um grupo de professores de Matemática” (SOUZA; TREVISAN; VIEIRA, 2017), apresentado no 4º Fórum Nacional sobre currículos de Matemática pela autora deste texto, discutimos, com base no trabalho desenvolvido no grupo no período supracitado, questões relacionadas à concepção e ao uso que esses professores fizeram de tarefas matemáticas enquanto material curricular para auxiliar a aprendizagem dos alunos. A partir da análise de dados provenientes da transcrição de uma entrevista com os quatro professores participantes do projeto, verificou-se que os encontros ocorridos no grupo de estudos representam uma importante ação no auxílio de suas práticas. Salientam, ainda, “que o grupo é admirado por outros professores, os quais dizem que esse tipo de trabalho deveria ocorrer no período de hora atividade de todos os professores, para que discutam com antecedência o conteúdo que vão dar para seus alunos” (SOUZA; TREVISAN; VIEIRA, 2017, p. 7).

Em 2017, quando a autora deste trabalho iniciou sua participação no grupo de estudos, enquanto pesquisadora, a proposta de trabalho em desenvolvimento abordava a temática “ambientes de aprendizagem de Matemática pautados em episódios de resolução de tarefas”⁶. Participaram dos encontros cinco professores, sendo que três deles continuaram da fase anterior e outros dois se inseriram nessa nova fase, além da pesquisadora/integrante do grupo, uma estudante de iniciação científica e o formador do grupo. É nesse contexto atual que se insere a autora desta pesquisa, na qual assume papel ativo como participante do grupo e pesquisadora.

1.3 Pertinência e objetivo do estudo

⁶ Expressão que vem sendo utilizada nos trabalhos desenvolvidos no âmbito do grupo de pesquisa na qual se insere a realização deste trabalho. *Ambiente de aprendizagem* refere-se ao contexto em que ao indivíduo são oferecidas oportunidades para aprender. Organizamos nosso ambiente em episódios de resolução de tarefas. Esses *episódios* (momentos) são organizados a partir da proposição de tarefas elaboradas e/ou adaptadas de materiais curriculares, que não sejam precedidas da apresentação de definições ou exemplos similares, e que seu desenvolver em grupos em sala de aula contribua para elaboração provisória e posterior sistematização.

Cyrino e Jesus (2014) afirmam que as tarefas propostas pelos professores em sala de aula merecem destaque quando se levam em conta os diversos elementos que exercem influência no processo de aprendizagem dos alunos. Entretanto, alguns professores, ao realizarem o planejamento de suas aulas, selecionam tarefas tendo como base os conteúdos já trabalhados ou sua similaridade com outras tarefas propostas previamente, em geral oriundas de livros didáticos, resumindo-se, muitas vezes, em uma lista de exercícios repetitivos, que pouco (ou nada) contribuem para que os alunos elaborem ou atribuam significados aos conceitos matemáticos.

Cabe ao professor planejar e conduzir situações em sala de aula de forma a promover um ambiente que oportunize ao aluno a elaboração de conhecimento, mas, para isso, é necessária preparação e segurança ao tomar decisões relacionadas à sua prática, especialmente no que se refere à seleção, elaboração/criação e implementação de tarefas. Assim, argumenta-se que, quando são oportunizados aos professores momentos para refletir e discutir suas práticas de forma conjunta, visando à elaboração de seus planos de aula, seleção e discussão de tarefas, essas ações, quando desencadeadas de modo compartilhado, podem promover reflexões que possivelmente não ocorreriam, se o trabalho fosse feito de forma individual, ou sem o apoio de um grupo de estudos.

Portanto, o oportunizar um espaço no qual os professores possam refletir de forma conjunta pode promover a constituição de tarefas com potencial para proporcionar aos alunos uma atribuição de significados aos conteúdos de matemática, no nosso caso, a Álgebra.

Tal proposta de trabalho está alinhada com discussões atuais acerca das práticas de desenvolvimento profissional (DP) de professores presentes na literatura. Em uma revisão da literatura⁷ que busca compreender as características e as formas das atividades de aprendizagem do professor (APP) que resultam nas mudanças das práticas de ensino e, conseqüentemente, melhora a aprendizagem dos estudantes, Opfer e Pedder (2011) apontam três importantes fatores, identificados como presentes no contexto deste estudo: a) o tempo dos cursos do DP; b) as

⁷Incluem-se aqui trabalhos produzidos por Déborah Ball e colaboradores (que exploram questões relacionadas ao conhecimento especializado do conteúdo do professor de Matemática e APP baseada na prática), Harold Borko (que considera o ser professor como um processo que se desenvolve antes da formação inicial e que continua ao longo do seu percurso profissional) e Jean Lave/Etienne Wenger, que abordam o papel das comunidades de práticas na APP.

características pedagógicas (didáticas) das atividades do DP e (c) a colaboração na prática.

Em relação ao tempo dos cursos, os autores destacam que as atividades que contribuem efetivamente para a APP precisam ser contínuas e intensivas, ao invés de breves e esporádicas. Os professores precisam de tempo para desenvolver, absorver, discutir e praticar novos conhecimentos. Acerca das características pedagógicas (didáticas) das atividades do DP, os professores aprendem mais efetivamente quando as atividades (i) requerem engajamento com os materiais da prática, ii) são baseadas na realidade da escola e integradas ao trabalho diário do professor e (iii) quando a pedagogia (didática) do DP é ativa e requer que os professores aprendam de modo que reflitam como eles deveriam ensinar seus estudantes.

Por fim, o DP é mais efetivo quando envolve a colaboração na prática, afetando a APP e as práticas do professor. Pesquisas com foco na aprendizagem situada⁸, como é este caso, consideram as interações entre os indivíduos, das comunidades dos professores, os contextos específicos em que ocorrem, e reforçam a importância da colaboração para a aprendizagem e mudança do professor.

O ensino da Álgebra para o Ensino Fundamental foi a temática escolhida para o trabalho no grupo de estudos. Trata-se de uma questão muito discutida no âmbito da Educação Matemática, em especial por conta das dificuldades encontradas pelos professores em ensinar algo que, na visão de muitos alunos, é considerado bastante “abstrato”. Ponte (2005) salienta que a Álgebra, geralmente, é ensinada como um conjunto de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais) e técnicas para resolver equações e sistemas de equações. Para ele, essa forma de ensino desvaloriza aspectos importantes da álgebra, necessários para a formação do aluno.

O grupo teve por objetivo pensar em tarefas que proporcionassem aos alunos a elaboração de conceitos algébricos para além de um tratamento “mecânico” e desarticulado entre a Álgebra e a Geometria usualmente presente em sala de aula. Tal intencionalidade está alinhada com as recomendações curriculares mais atuais.

⁸ Aprendizagem situada decorre da participação do indivíduo nas práticas sociais de comunidades que eles valorizam e em que são reconhecidos como membro (LAVE, WENGER, 1991).

Há exatos 20 anos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) propuseram um “novo enfoque para o tratamento da Álgebra, apresentando-a de forma integrada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo” (BRASIL, 1998, p. 60). Mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC – BRASIL, 2017)⁹apresenta a unidade temática Álgebra¹⁰ como presente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo por finalidade desenvolver o pensamento algébrico, “que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2017, p. 268). Para esse desenvolvimento ocorrer, o documento destaca que, dentre outras habilidades, os alunos sejam capazes de criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas.

Desse modo, os elementos supracitados justificam a relevância da pesquisa que resultou nesta dissertação, e que teve como objetivo *evidenciar elementos valorizados pelos professores de Matemática, em momentos de elaboração e implementação de tarefas de aprendizagem no contexto da Álgebra*. A análise que resultou da pesquisa ofereceu subsídios para a organização do produto educacional atrelado a este estudo: uma proposta de tarefas com potencial para atribuição de significado a conteúdos de matemática da Educação Básica, com enfoque na elaboração da linguagem algébrica¹¹.

Para tal, este texto está organizado em sete capítulos, incluindo esta introdução, além dos elementos finais. Os Capítulos 2 e 3 apresentam o referencial teórico da pesquisa, abordando questões relativas às tarefas matemáticas e ao ensino de Álgebra, respectivamente. O capítulo 4 trata dos aspectos metodológicos da pesquisa. O Capítulo 5 traz a narrativa do processo de elaboração das tarefas matemáticas no grupo de estudos, com recorte das ações ocorridas entre os meses

⁹Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Neste trabalho, consideramos a versão disponível no [site http://basenacionalcomum.mec.gov.br/](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/), acessada em 01 de agosto de 2018.

¹⁰As demais são Números, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística.

¹¹O conteúdo matemático que “circunscreve” as tarefas faz parte da Álgebra. Embora se reconheça a importância do tema no âmbito da Educação Matemática e a existência de uma vasta literatura que trata dele (inclusive em termos da caracterização de expressões como “Álgebra” e “pensamento algébrico”), destaca-se que, pelas opções feitas durante a organização deste trabalho, seu foco está nas ações dos professores no processo de elaboração e implementação dessas tarefas.

de maio e junho de 2017, e finaliza com a descrição do processo de implementação das tarefas em salas de aulas dos anos finais do Ensino Fundamental, em turmas de três professores participantes do grupo. No Capítulo 6, são apresentadas as análises realizadas a partir dos dados coletados, organizadas segundo três unidades de análise. O Capítulo 7 organiza-se no intuito de responder ao objetivo de pesquisa, a partir da análise realizada, além de apresentar questões que emergiram dos dados e permanecem em aberto. Por fim, são trazidas as referências, os apêndices e o produto educacional.

2 SOBRE TAREFAS MATEMÁTICAS

O presente capítulo apresenta alguns aspectos teóricos sobre tarefas matemáticas, no sentido de distinguir os termos *tarefa* e *atividade*, bem como evidenciar elementos que permitam caracterizar as ações envolvidas nos processos de sua elaboração/seleção e implementação em sala de aula. Destaca-se, ainda, a caracterização de ambientes pautados em episódios de resolução de tarefas e, por fim, o papel do professor no trabalho com tarefas, que se julga de suma importância para o processo de ensino e aprendizagem do aluno, e o modo como as tarefas podem auxiliar o professor na tomada de decisões em sua prática pedagógica.

2.1 Tarefa e Atividade

Os termos tarefa e atividade, apesar de interligados, representam conceitos distintos, porém ainda é comum no âmbito educacional serem considerados como sinônimos. Para Ponte (2005), uma tarefa configura-se como o objetivo de cada uma das ações em que a atividade de um sujeito se desdobra, sendo exterior ao aluno, porém podendo ser decidida por ele. Assim, “a tarefa proposta torna-se o objeto da atividade dos alunos e a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizada pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida aos alunos” (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986, p.254, *apud* PONTE, 2014, p. 15).

Documentos organizados pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) são tarefas, como projetos, problemas, questões, construções, aplicações e exercícios em que os alunos se envolvem e que lhes fornecem os contextos necessários para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Para Stein e Smith (2009, p.105), a tarefa se apresenta “como um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular”, podendo envolver um trabalho prolongado a respeito de somente um problema, ou vários problemas relacionados. Para Ponte (2005), as tarefas representam o elemento organizador da atividade de quem aprende, podendo

desenvolver diversos papéis. Assim, ao formular tarefas adequadas, o professor poderá provocar a atividade do aluno.

Em resumo, as tarefas se configuram como um importante veículo para ensino da Matemática, no entanto propor uma tarefa aos seus alunos poderá, ou não, desencadear a atividade dos mesmos.

Uma *tarefa* pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos, que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a *atividades* diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. É pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor (PONTE, 2014, p.16-17).

Portanto, a escolha da tarefa requer do professor um olhar criterioso, pois as tarefas usadas em sala de aula serão um dos constructos para a aprendizagem dos alunos.

2.2 Papel do professor no trabalho com tarefas: elaboração e implementação

Uma vez que as tarefas representam oportunidades de aprendizagem para os alunos, é essencial a compreensão do papel do professor no trabalho com elas, já que “as ações do professor influenciam o modo como os alunos aprendem a pensar matematicamente” (STEIN; SMITH, 1998). Dessa forma, é fundamental reconhecer as características na prática do professor¹² no momento de elaboração/construção de tarefas, assim como em sua implementação¹³ em sala de aula.

Thompson (2009) aponta que é papel do professor:

- criar um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam à vontade para falar das suas estratégias;

¹² Entende-se a expressão práticas do professor como “as atividades que eles realizam regularmente, tomando em consideração o seu contexto de trabalho e as suas interpretações e intenções” (PONTE; CHAPMAN, 2006, p. 481).

¹³ Utiliza-se o termo implementação nesta pesquisa para representar a fase em que o professor propõe a tarefa ao aluno, que passa a desenvolvê-la.

- escutar atentamente as suas explicações acerca das estratégias e procedimentos pessoais adotados no desenvolvimento das tarefas;
- ser capaz de identificar estratégias particulares dos alunos e reforçar positivamente o seu uso;
- valorizar o conhecimento matemático e a capacidade dos alunos para elaborarem estratégias eficientes;
- assegurar que os alunos passem por experiências suficientes que lhes permitam desenvolver progressivamente estratégias cada vez mais sofisticadas.

Nessa direção, as autoras Gafanhoto e Canavarro (2011) ressaltam que uma das decisões mais importantes para o professor, nesse contexto, é a escolha das tarefas propostas aos seus alunos. Muitos deles acabam baseando-se apenas nos livros didáticos e outros mediadores curriculares acessíveis. No entanto, “nem sempre estes recursos se adéquam da melhor maneira aos alunos de uma dada turma e ao propósito de ensino dos professores. A seleção, adaptação ou criação de boas tarefas para a sala de aula constitui um desafio para muitos professores” (GAFANHOTO; CANAVARRO, 2011, p. 115).

Ao planejarem suas aulas, professores acabam frequentemente selecionando somente tarefas similares àquelas já propostas em sala de aula anteriormente. Nessa situação, as tarefas podem tornar-se sinônimo de listas de exercícios, nas quais o trabalho dos alunos se limita a resolvê-las de forma mecânica e, em alguns casos, tendo como ponto de partida um modelo explicado anteriormente pelo professor e reproduzido posteriormente por ele (CYRINO; JESUS, 2014). No entanto, não basta o professor selecionar boas tarefas, é necessário também ter atenção ao modo que irá propor essas tarefas e de como conduzirá a sua realização na aula (PONTE, 2014).

Mediante o exposto, Cyrino e Jesus (2014, p.754) ressaltam que conhecer as tarefas e refletir a respeito de sua importância nos processos de ensino e de aprendizagem pode permitir ao professor:

- escolher tarefas adequadas a seus objetivos de ensino;

- iniciar um processo de ensino que priorize tarefas desafiadoras¹⁴ nas quais o aluno pode estabelecer conexões com significados ou com ideias e conceitos matemáticos;
- reconhecer que as tarefas podem expressar mais do que o conteúdo;
- perceber como as tarefas influenciam o seu ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos;
- proporcionar um ambiente de aprendizagem durante as aulas de matemática;
- perceber qual o impacto de suas ações no processo de ensino e de aprendizagem.

Portanto, o conhecimento do professor é imprescindível tanto no momento da escolha da tarefa, como em seu desenvolvimento em sala de aula, uma vez que até pode propor uma tarefa interessante aos seus alunos, mas se ela não for bem explorada, suas “potencialidades podem ser diminuídas e traduzir-se em experiências matemáticas pouco ricas para os alunos” (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2014, p. 354).

Tendo em vista as potencialidades da tarefa, ressaltamos que elas podem ser analisadas sob diversos aspectos. Segundo Ponte (2005), existem duas dimensões fundamentais na análise de tarefas: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O primeiro refere-se à percepção do nível de dificuldade de uma questão, variando entre os polos de desafio “reduzido” e “elevado”. Quanto ao grau de estrutura, este varia entre os polos “aberto” e “fechado”. Para esse autor, “uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (PONTE, 2005. p.7).

Outro aspecto sobre a dimensão de análise de uma tarefa relaciona-se ao nível de demanda cognitiva que apresenta, ou seja, os tipos de raciocínio matemático exigidos para a sua realização e também o tipo de aprendizagem proporcionada aos estudantes. Pesquisadores do projeto QUASAR¹⁵ classificam as tarefas, em relação ao nível de demanda cognitiva¹⁶, como tarefas de memorização,

¹⁴Tarefas desafiadoras, para as autoras, são “aquelas que têm o potencial de envolver os alunos em um trabalho que desencadeia formas complexas de pensamento” (CYRINO; JESUS, 2014, p. 754).

¹⁵ QUASAR é um projeto americano que envolveu o desenvolvimento e implementação de novos programas de ensino da Matemática, situado no Centro de Investigação da Universidade de Pittsburgh, cujos principais representantes são Silver; Stein; Smith; Lane, Grover, Henningsen (STEIN; SMITH, 1998).

¹⁶ Segundo Stein e Smith (2009, p.17), “as demandas cognitivas das tarefas de ensino de matemática estão relacionadas com o nível e o tipo de aprendizagem dos alunos”.

de procedimentos sem conexão com significados, de procedimentos com conexão com significados e de fazer matemática.

Segundo esses autores, tarefas que recorrem a reprodução, memorização e elaboração de procedimentos, sem estabelecimento de conexão com as ideias matemáticas, são consideradas tarefas com baixo nível de demanda cognitiva. As tarefas que exigem o estabelecimento de conjecturas, comparações, relações e justificações matemáticas, por outro lado, são consideradas de alto nível de demanda cognitiva.

Cyrino e Jesus (2014), respaldadas por Stein e Smith (1998), elaboraram um quadro para categorizar tarefas matemáticas de acordo com esses níveis de demanda cognitiva (Quadro 1).

Características de tarefas que envolvem baixo nível de demanda cognitiva	Memorização	Procedimentos sem conexão com significados
	<ul style="list-style-type: none"> • envolvem ou a reprodução dos fatos aprendidos previamente, regras, fórmulas, ou a memorização de fatos, regras, fórmulas ou definições; • não podem ser resolvidas usando procedimentos porque estes não são exigidos ou porque o tempo no qual a tarefa será completada é curto para utilização de um procedimento; • não são ambíguas: tanto a questão que • envolve uma reprodução exata do material visto previamente quanto o que é para ser reproduzido está claro e diretamente apresentado; <ul style="list-style-type: none"> • não têm conexão alguma com os conceitos ou significados que embasam os fatos, regras, fórmulas ou definições que estão sendo aprendidos ou reproduzidos. 	<ul style="list-style-type: none"> • são algorítmicas, de modo que o uso do procedimento ou é especificamente pedido ou está evidente a partir de uma instrução prévia, experiência, ou localização da questão; • requerem uma demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem-sucedida, e existe pequena ambiguidade sobre o que necessita ser feito e como fazê-lo; • não têm conexão com conceitos ou significados que estão por trás dos procedimentos usados inicialmente; • estão focadas na produção de respostas corretas ao invés do desenvolvimento da compreensão matemática; • não exigem explicação, ou, quando exigem, são explicações que focam, unicamente, a descrição do procedimento que foi usado.
Características de tarefas que envolvem elevado nível de	Procedimentos com conexão com significado	Fazer Matemática
	<ul style="list-style-type: none"> • focam a atenção dos alunos sobre o uso de procedimentos, a fim de desenvolver, mais profundamente, os níveis de entendimento dos conceitos e ideias matemáticas; • sugerem explícita ou implicitamente caminhos a serem seguidos, que são procedimentos amplos e gerais que têm íntima conexão com as ideias conceituais; • usualmente, permitem representação em múltiplos 	<ul style="list-style-type: none"> • exigem um pensamento complexo e não algorítmico, e não é sugerido explicitamente, pela tarefa, um caminho previsível, instruções para sua execução, ou um exemplo a ser seguido, que bem treinado leva à resolução da mesma; • exigem que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos matemáticos, procedimentos, ou relações; • exigem alta monitoração ou alta

	<p>caminhos, com diagramas visuais, manipuladores, símbolos, e situações problemas, fazendo conexões entre múltiplas representações que ajudam a desenvolver os significados;</p> <ul style="list-style-type: none"> • exigem esforço cognitivo. Apesar de procedimentos gerais poderem ser seguidos, eles não podem ser seguidos sem compreensão. Os alunos precisam envolver-se com ideias conceituais que estão por trás dos procedimentos a serem seguidos para completarem a tarefa com sucesso e desenvolvendo a compreensão. 	<p>regulamentação de seu próprio processo cognitivo;</p> <ul style="list-style-type: none"> • exigem que os alunos mobilizem conhecimentos relevantes e experiências, e façam uso apropriado destes no trabalho durante a resolução da tarefa; • exigem que os estudantes analisem a tarefa e examinem ativamente se ela pode ter possibilidades limitadas de estratégias de resoluções e soluções; • exigem um considerável esforço cognitivo e podem envolver alguns níveis de ansiedade para o aluno por não ter uma lista antecipada de processos exigidos para a solução.
--	--	---

Quadro 1: Categorização dos níveis de demanda cognitiva de tarefas matemáticas.
Fonte: Cyrino e Jesus, adaptado de Stein e Smith (1998, p. 755).

Stein e Smith (1998) distinguem três fases pelas quais passam as tarefas (Figura 1), podendo mudar sua natureza ao passar de uma fase para outra. Destacam, ainda, que essas fases, em especial a da implementação da tarefa, são consideradas como importantes influências no modo como os alunos realmente aprendem.

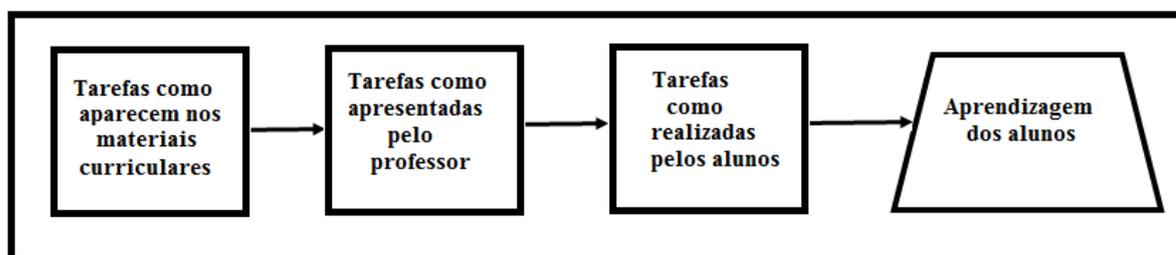


Figura 1: Quadro das Tarefas Matemáticas.
Fonte: Stein e Smith (1998, p. 4).

Desse modo, muitas vezes tarefas de nível elevado são implementadas de modo que os alunos, ao raciocinarem sobre ela, levam em consideração a sua complexidade e significado. No entanto, outras vezes, tarefas apresentadas para estimular o pensamento dos alunos em níveis elevados de exigência cognitiva mudam de forma drástica sua natureza quando os alunos trabalham realmente sobre elas, assim, quando o professor consegue identificar esse fenômeno, ele pode tornar os processos de ensino e aprendizagem um foco fértil para reflexão (STEIN; SMITH, 1998). Nessa direção, Stein e Smith (1998) elaboraram um quadro (Quadro

2) para ilustrar os fatores que contribuem para a manutenção ou o declínio do nível de demanda cognitiva.

Fatores associados com a manutenção de exigências cognitivas de nível elevado

1. É dado apoio ao pensamento e raciocínio do aluno.
2. São dados aos alunos os meios para avaliar o seu próprio progresso.
3. O professor ou alguns alunos ilustram desempenhos de nível elevado.
4. O professor estimula justificações, explicações e significados através de questões, comentários e *feedback*.
5. As tarefas baseiam-se no conhecimento prévio dos alunos.
6. O professor estabelece frequentes conexões conceituais.
7. É permitido tempo suficiente para explorar, nem de menos, nem de mais.

Fatores associados com o declínio de exigências cognitivas de nível elevado

1. Aspectos problemáticos da tarefa tornam-se rotineiros (por exemplo, os alunos pressionam o professor para reduzir a complexidade da tarefa especificando procedimentos explícitos ou passos para realizá-la; o professor «toma conta» do pensamento e raciocínio e diz aos alunos como resolver o problema).
2. O professor muda a ênfase dos significados, conceitos ou compreensão para a correção ou perfeição das respostas.
3. Não é dado tempo suficiente para lidar com aspectos exigentes da tarefa, ou é dado demasiado tempo e os alunos distraem-se da tarefa.
4. Problemas de gestão da sala de aula impedem o envolvimento apoiado em atividades cognitivas de nível elevado.
5. A tarefa é inadequada para um dado grupo de alunos (por exemplo, os alunos não se envolvem em atividades cognitivas de nível elevado por causa da falta de interesse, motivação ou conhecimento prévio necessário para realizar; as expectativas das tarefas não estão suficientemente claras para colocar os alunos num adequado espaço cognitivo).
6. Os alunos não são responsabilizados pelos resultados ou processos de nível elevado (por exemplo, embora se lhes diga para explicar o seu pensamento, são aceites explicações incorretas ou pouco claras; é dada a impressão aos alunos que o seu trabalho não será tido em consideração para a avaliação).

Quadro 2: Fatores associados com a manutenção e declínio de exigências cognitivas de nível elevado.

Fonte: Stein e Smith (1998, p. 13).

É no envolvimento dos alunos com as tarefas que essas revelam o seu potencial, sendo determinante o papel exercido pelo professor nessa fase da tarefa. A opção que fizer para trabalhar com a tarefa, os recursos que proporcionar, a gestão do tempo e das interações na sala de aula, o papel que se reservar a si mesmo e aos alunos irão limitar ou potenciar as oportunidades de aprendizagem criadas a partir das tarefas (STEIN; SMITH, 1998).

3 SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA

O ensino da Álgebra, geralmente, tem sido associado, por grande parte dos professores, ao uso de símbolos literais e operações que são realizadas com esses símbolos, e a aprendizagem tem se limitado à memorização de regras para a manipulação simbólica. Assim, muitas das dificuldades com as quais os alunos se deparam em relação à aprendizagem da Álgebra podem ser decorrentes desse modelo de ensino baseado apenas em um “amontoado” de regras e procedimentos. Nesse sentido, Ponte (2005) salienta que essa forma de ensino desvaloriza aspectos importantes da Álgebra, necessários para a formação do aluno.

Ribeiro e Cury (2015) salientam que a Álgebra deveria ser explorada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que se configura como um fio condutor do currículo escolar e do desenvolvimento do pensamento algébrico, ou seja, ela faz parte de um conjunto de processos e pensamentos originados de experiências com números, padrões, entes geométricos e análise de dados, assim, o ensino da Álgebra pode permitir ao aluno abstrações e generalizações.

O pensamento algébrico é “um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos” (Cyrino; Oliveira, 2011, p.103).

Dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico passíveis de serem trabalhados desde os anos finais do Ensino Fundamental (representar dados graficamente, descobrir relações funcionais, prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos, identificar e descrever padrões numéricos e geométricos), destaca-se o chamado *pensamento funcional*, mais especificamente a subcategoria referente ao “simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas” (BLANTON, KAPUT, 2005, p. 423). O foco, nesse caso, é sobre o uso de símbolos para modelar problemas ou para operar em expressões simbolizadas, não a resolução de uma equação para descobrir um valor desconhecido ou a generalização de propriedades aritméticas.

A sistematização proposta por Fernandes e Savioli (2016), realizada por meio de uma análise documental¹⁷, permite destacar algumas características do pensamento algébricas relacionadas ao pensamento funcional:

- utilizar diferentes sistemas de representação;
- analisar e representar relações matemáticas;
- revelar ideias algébrica e argumentar a respeito delas, mesmo que em linguagem natural;
- desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente;
- interpretar símbolos matemáticos;
- operar com números desconhecidos como se fossem conhecidos (analiticidade).

No que tange à caracterização do pensamento algébrico, em especial o pensamento funcional, as autoras destacam “a necessidade de estabelecimento de uma linguagem simbólica que tenha significado para os estudantes”, bem como “a possibilidade de desenvolver o pensamento algébrico com auxílio da aritmética e de estruturas algébricas que permitem a construção de significados” (FERNANDES; SAVIOLI, 2016, p. 133-134).

Silva e Savioli (2012) destacam que, desde os anos iniciais, pode-se desenvolver o pensamento algébrico, utilizando formas de pensar a partir de tarefas nas quais a linguagem simbólica pode ser uma ferramenta. Tais formas de pensar não são exclusivas para a Álgebra e podem ser envolvidas sem a utilização de uma linguagem simbólica, ou seja, o aluno é capaz de perceber relações entre quantidades, analisar mudanças, resolver problemas, generalizando, modelando e justificando sem o intermédio de uma linguagem formal.

Tradicionalmente, a Álgebra, na fase simbólica, é introduzida no currículo escolar brasileiro somente nos anos finais do Ensino Fundamental. Geralmente é “a partir do final do sexto ano do Ensino Fundamental que aparecem as primeiras menções à álgebra escolar, em um ambiente estritamente mecânico, isolado dos outros conhecimentos matemáticos, aparentemente sem relação alguma entre eles” (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p.32).

¹⁷ Foram consultados os seguintes autores: Kieran; Fiorentini, Cristovão e Fernandes; Blanton e Kaput; Kaput; Fiorentini, Miguel e Miorim; Ponte, Branco e Matos; Lins e Gimenez.

A respeito da linguagem simbólica, Viola dos Santos (2007) destaca três fases associadas ao seu desenvolvimento histórico: a retórica (ou verbal), sincopada e simbólica. A primeira refere-se ao processo de resolução de problemas, aritméticos ou geométricos, utilizando somente a linguagem natural, sem o uso de símbolos ou abreviações. A segunda é caracterizada pelo uso de algumas abreviações ou símbolos específicos para quantidades ou elementos geométricos que se repetiam com certa frequência, existindo uma combinação entre algumas abreviações de palavras, símbolos e a linguagem corrente na resolução dos problemas. A terceira fase diz respeito ao uso de letras para quantidades, expressão de soluções gerais e à formulação de regras para as relações numéricas.

Para entender o que acontece em sala de aula, é também importante o conhecimento do que é enfatizado nos documentos que norteiam a prática dos professores de Matemática no Brasil. Para tanto, apresentam-se, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – BRASIL, 1998), as Diretrizes Curriculares para o ensino de Matemática do estado do Paraná (DCE, 2008) e a (BRASIL, 2017), direcionamentos que contribuem para subsidiar discussões acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da álgebra.

Os PCN, enquanto documento que inspira propostas de trabalho para a disciplina de Matemática, alinhadas às questões mencionadas, destacam, no bloco Número e Operações, que, desde as séries iniciais, já podem ser desenvolvidos alguns aspectos da Álgebra, mas propõem que seja tratada de forma integrada aos demais blocos (Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação), privilegiando o “desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo” (BRASIL, 1998, p. 60). Destacam ainda que,

[...] no decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra (BRASIL, 1998, p. 68).

Ressaltam, ainda, que é

[...] interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades (BRASIL, 1998, p.117).

O esquema mostrado na Figura 2 sintetiza diferentes interpretações da Álgebra escolar e diferentes funções das letras presentes nos PCN. Destaca-se, do esquema, a dimensão funcional, foco de interesse. O documento aponta que o professor deve propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades, estabelecendo relações, que o estudo da álgebra não apenas enfatizar procedimentos com expressões e equações, de uma forma mecânica. Nessa perspectiva, cumpre observar que o uso das representações geométricas auxilia na construção da linguagem algébrica, uma vez que, por meio das construções geométricas, os alunos passam a estabelecer relações e generalizações de forma significativa.

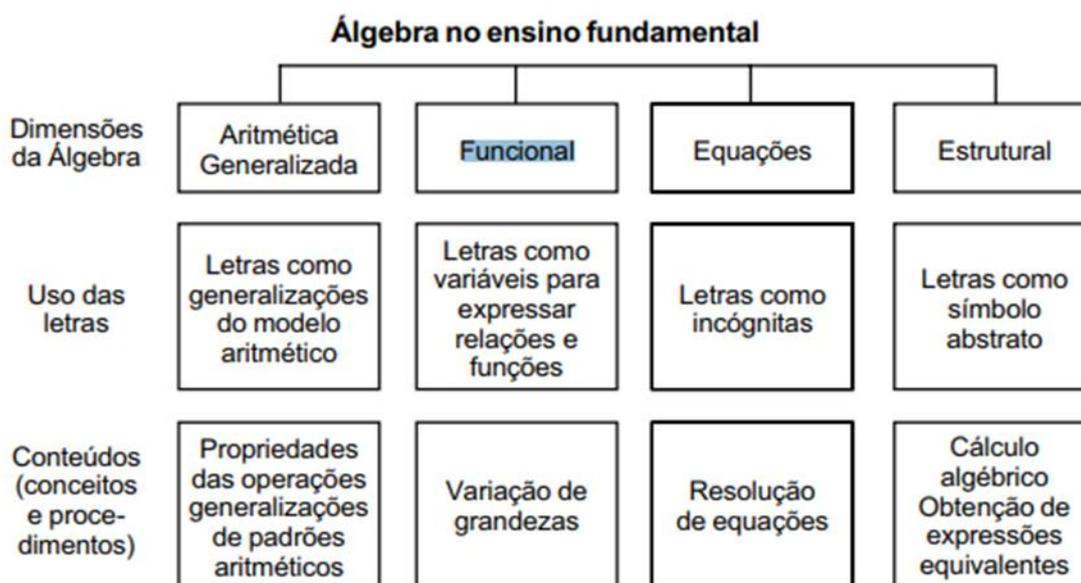


Figura 2: Álgebra no Ensino Fundamental

Fonte: BRASIL (1998, p. 11)

Quanto à articulação entre Álgebra e Geometria, Oliveira e Laudares (2012, p.7) destacam a importância das representações geométricas para a resolução de alguns problemas algébricos. Para esses autores,

[...] a importância de trabalhar Geometria e Álgebra relacionando conceitos, se explica com razões plausíveis, porque a geometria é um assunto do cotidiano do estudante e de acesso fácil, basta que o professor a explore para que sirva como motivação para o desenvolvimento dos conteúdos em concomitância, fazendo da abstração e do uso de símbolos uma consequência do trabalho desenvolvido, dando oportunidade para a construção e/ou consolidação de conceitos (OLIVEIRA; LAUDARES, 2012, p.7).

Como possibilidade de promover essa articulação, os PCN destacam que o trabalho com o cálculo de áreas, por exemplo, oportuniza aos alunos identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica, sendo, dessa forma, estimulados a construir procedimentos que levem à obtenção de fórmulas e expressões algébricas. Salienta, também, que a visualização de expressões algébricas, por meio dos cálculos de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas, como, exemplo, $a.(a + 2) = a^2 + 2a$. Portanto, o uso desses recursos pode possibilitar ao aluno conferir um tipo de significado às expressões. Entretanto, o trabalho do professor não deve apoiar-se apenas nesse tipo de situações, já que “a interpretação geométrica dos cálculos algébricos é limitada, pois nem sempre se consegue um modelo geométrico simples para explicá-lo” (BRASIL, p.121).

As Diretrizes Curriculares do Paraná (DCE, 2008) para o ensino da matemática defendem também que o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela mera manipulação dos conteúdos abordados de forma isolada, afirmando, nesse sentido, que deve haver uma articulação entre eles, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados.

Assim, as DCE apontam, para o Ensino Fundamental, a necessidade de que haja articulação entre a Álgebra e os números, de modo que os alunos compreendam o conceito de incógnita; realizem a escrita de uma situação-problema na linguagem matemática; reconheçam e resolvam equações numéricas e algébricas, inequações, sistemas de equações, e diferenciem e realizem operações com monômios, binômios, trinômios e polinômios; equações quadradas, biquadradas e irracionais (PARANÁ, 2008).

Alinhada a esses documentos (PCN e DCE), a BNCC traz que, para o desenvolvimento de habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), previstas para os anos finais do Ensino Fundamental,

[...] é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas (BRASIL, 2017, p. 296).

Tais situações precisam articular, além dos múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos (equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência), habilidades indicadas para as diferentes unidades temáticas. Recomenda-se, assim, uma leitura (vertical) de cada unidade temática a fim de reconhecer como foi estabelecida a progressão das habilidades, comparando

[...] as habilidades de um dado tema a ser efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores e também para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes (BRASIL, 2018, p. 296).

Acerca da unidade temática Álgebra, no Ensino Fundamental, deve-se “ênfatar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL, 2018, p. 268). O Quadro 3 destaca os objetos de conhecimento e habilidades associadas a essa unidade temática para turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
6º	Propriedades da igualdade	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7º	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade

	proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax+b=c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
8º	Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2=b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$.
	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
9º	Funções: representações numérica, algébrica e Gráfica	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Quadro 3: Objetos de conhecimento e habilidades relacionadas à unidade temática Álgebra
Fonte: Brasil (2018)

De forma sucinta, no ensino da Álgebra, defende-se (com respaldo nos referenciais apresentados) o trabalho com tarefas que possibilitem ao aluno articular conceitos geométricos, no contexto específico de área e perímetro, com a linguagem algébrica, como proposto nesta pesquisa em todos os anos finais do Ensino Fundamental, o que pode oportunizar ao aluno desenvolver o pensamento algébrico, contribuindo, dessa forma, para a construção de ideias matemáticas.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo descreve os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa: sua natureza, a caracterização dos sujeitos envolvidos, os instrumentos de coleta de dados e o seu processo de análise.

4.1 Caracterização da pesquisa

Esta é uma pesquisa de natureza qualitativa e de cunho interpretativo. Uma pesquisa dessa natureza produz dados a partir de observações retiradas de forma direta do estudo de pessoas, lugares ou de processos com os quais o pesquisador procura estabelecer uma interação direta para compreender os fenômenos estudados, partindo geralmente de questões mais amplas, que só vão tomando uma forma mais definida à medida que se desenvolve o trabalho (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para esses autores, em um universo qualitativo, é possível realizar algum trabalho de campo antes de escrever qualquer proposta de pesquisa. Assim, o

[...] investigador qualitativo evita iniciar um estudo com hipóteses previamente formuladas para testar questões específicas para responder, defendendo que a formulação das questões deve ser resultante da recolha de dados e não efectuada a priori. É o próprio estudo que estrutura a investigação, não idéias preconcebidas ou um plano prévio detalhado (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 106).

Tal citação sustenta a estrutura segundo a qual este trabalho foi realizado. Assim, os episódios que se sucederam no grupo de estudos (e que serão detalhados na continuidade deste texto) permitiram, inicialmente, recolher um conjunto de dados ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas “[...] em função de um contacto aprofundado com indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16). Embora já houvesse algum contato com a temática tarefas matemáticas, uma revisão de literatura mais aprofundada foi realizada em paralelo e posteriormente à coleta de dados, no intuito de confrontá-los sistematicamente. Esse estudo teórico buscou fornecer elementos para que melhor se compreendessem as ações dos professores

envolvidos, mais especificamente de alguns aspectos apontados por Cyrino e Jesus (2014), e também por Stein e Smith (1998), que serviram como base para a organização de das unidades de análise (e serão apresentados no capítulo seguinte).

Esta pesquisa constitui-se num processo no qual a pesquisadora desenvolveu as seguintes etapas:

- (i) Inserção no grupo de estudos;
- (ii) Acompanhamento do processo de elaboração de tarefas matemáticas, no grupo de estudos;
- (iii) Acompanhamento da implementação das tarefas elaboradas, em turmas de professores participantes do grupo;
- (iv) Estudos teóricos sobre tarefas matemáticas e ambientes de aprendizagem de Matemática pautados em episódios de resolução de tarefas;
- (v) Análise das ações dos professores nos processos de elaboração e implementação das tarefas, no intuito de evidenciar elementos que, em sua perspectiva, são considerados potenciais para aprendizagem dos alunos;
- (vi) Construção do produto educacional levando em consideração todo o processo de elaboração e implementação das tarefas.

4.2 Caracterização dos sujeitos

Participaram dos encontros que compõem a pesquisa cinco professores. Optou-se por utilizar nomes fictícios para denominá-los, de modo a preservar a sua identidade, a fim de evitar qualquer constrangimento. Além disso, quando do seu ingresso no grupo, haviam assinado um termo de consentimento livre e esclarecido autorizando o uso de suas informações. Os nomes usados foram: professora Alice (P-Alice); professora Andrea (P-Andrea); professor Gustavo (P-Gustavo); professora Marcela (P-Marcela) e professora Marlene (P-Marlene). Todos os encontros aconteceram em uma escola estadual de um município da região metropolitana de Londrina-PR, no período compreendido entre fevereiro e julho de 2017.

O Quadro 4 apresenta as informações obtidas acerca da formação dos professores participantes desta investigação e de suas atividades profissionais. Algumas características comuns ao grupo de professores: todos têm experiência em turmas, tanto dos anos finais do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio; todos

são concursados e têm padrão fixo em suas escolas de atuação e, portanto, têm prioridade na escolha das aulas no início de cada ano letivo; exceto por P-Marlene, todos participaram (ou estavam em fase de conclusão, como no caso de P-Gustavo) do Programa do Desenvolvimento Educacional¹⁸ (PDE) do estado do Paraná.

Professor(a)	Turmas em que atuou em 2017	Tempo de atuação como docente	Formação
P-Alice	7º e 8º anos	24 anos	Licenciada em Matemática e Bacharel em Engenharia Civil, com especialização em Ensino de Matemática
P-Andrea	6º e 7º anos	22 anos	Licenciada em Matemática, com especialização em Ensino de Matemática
P-Gustavo	8º ano e EM	15 anos	Licenciado em Matemática, com Mestrado em Matemática.
P-Marcela	EM	20 anos	Licenciada em Ciências/Habilitação em Matemática.
P-Marlene	8º ano	7anos	Licenciada em Ciências/Habilitação em Matemática, com especialização em metodologia e didática do ensino e Educação Especial.

Quadro 4: Caracterização dos participantes do grupo.

Fonte: autora.

4.3 Dos procedimentos e instrumentos para a coleta de dados

Os instrumentos utilizados para a recolha das informações desta pesquisa incluíram as gravações de áudio dos encontros do grupo, o diário de campo da pesquisadora e de seu orientador, os registros escritos realizados pelos professores envolvidos (anotações em seus cadernos pessoais, fotografadas pela pesquisadora), produção escrita dos alunos advinda da implementação das tarefas (quando necessário). Assim, mediante dados coletados durante o desenvolvimento da investigação, procurou-se organizar todo o material para fins de análise, conforme encaminhamentos a serem descritos em capítulo posterior.

Para Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 118), o diário de campo é “um dos instrumentos mais ricos de coleta de informação durante o trabalho de campo”. Portanto, após cada encontro, buscou-se relatar por escrito as ações realizadas pelo

¹⁸ O PDE é uma política pública do estado do Paraná que estabelece o diálogo entre os professores do ensino superior e os da educação básica, por meio de atividades teórico-práticas orientadas, que tem como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense.

grupo fazendo uso do diário de campo e das gravações de áudios¹⁹. Tais relatos contribuíram substancialmente para todo o processo de análise dos dados.

4.4 Das ações ocorridas no grupo

Esta seção apresenta, de forma detalhada, a dinâmica de trabalho ocorrida no grupo e que culminou na elaboração e implementação de tarefas nas salas de aulas de três dos professores participantes.

Os encontros que compõem a pesquisa ocorreram durante o período matutino, sempre às sextas-feiras, todos previamente agendados e com duração, em média, de duas horas e meia. Para facilitar o agendamento dos encontros e também estabelecer um meio rápido de interação entre todos os integrantes do grupo, foi criado um grupo no aplicativo Whatsapp.

No Quadro 5, há uma síntese do cronograma das atividades desenvolvidas ao longo do primeiro semestre de 2017.

Mês	Nº de encontros	Nº de professores presentes	Ações realizadas
Fevereiro	2	5	Definição de um plano de ações para o trabalho ao longo do semestre. Retomada do trabalho realizado no ano anterior.
Março	2	5	Discussão a respeito da empregabilidade das palavras área e perímetro no cotidiano, a fim de entender como esses conceitos são concebidos de forma intuitiva pelos alunos. Breve análise de livros didáticos trazidos pelos professores, com o objetivo de verificar como são apresentadas tarefas que contemplam os conceitos de área e perímetro e como se relacionam com o ensino de Álgebra.
		5	Apresentação de tarefas, inéditas ou não, relacionadas aos conceitos de área e perímetro, levadas pelos professores.
Abril	---	--	-----
Mai	3	4	Construção de um material manipulável para o ensino da Álgebra, especificamente, as operações algébricas. Discussão das potencialidades do material para o ensino de Álgebra e possíveis encaminhamentos de tarefas para a sala de aula.
		1	Elaboração de uma primeira versão da tarefa com base no material construído pelo grupo e implementação em uma turma (8º ano B da P-Alice).
			Discussão sobre a experiência de implementação da tarefa.

¹⁹Para fins de análise, foram transcritos trechos que evidenciavam elementos para alcançar o objetivo de pesquisa.

		2	Apresentação de ideias trazidas pelos professores para a elaboração de novas tarefas com uso do material manipulável. A partir das ideias de tarefas apresentadas pelos professores, houve a construção de um primeiro esboço de uma possível tarefa.
Junho	2	3	Resolução conjunta, discussão e ajustes na tarefa construída.
		2	Discussão das potencialidades do conjunto de tarefas para o Ensino da Álgebra.
Julho			Implementação das tarefas nas turmas.

Quadro 5: Cronograma de atividades do grupo no primeiro semestre de 2017.

Fonte: autora.

Entre os meses de fevereiro e março, o grupo esteve envolvido com discussões a respeito do desenvolvimento do pensamento algébrico em articulação com os conceitos de área e de perímetro. Conforme foi relatado no artigo intitulado “Novas enunciações de uma tarefa: reflexões de um grupo de professores de Matemática” (VIEIRA; TREVISAN, 2017), apresentado pela autora deste texto no VII CIEM – Congresso Internacional de Ensino de Matemática, a discussão nos encontros realizados no mês de março de 2017 foi sobre a empregabilidade das palavras área e perímetro no cotidiano, bem como a análise de como tarefas matemáticas que envolvem esses conceitos são propostas pelos materiais didáticos.

O foco deste trabalho, porém, está nas ações ocorridas entre os meses de maio e junho (detalhadas no capítulo seguinte), momento em que o trabalho do grupo se direcionou para a elaboração e a implementação de tarefas no contexto da Álgebra. A intenção do grupo naquele momento era a elaboração de tarefas, diferentes daquelas rotineiramente encontradas nos livros didáticos, que pudessem contribuir para o trabalho com expectativas de aprendizagem (PARANÁ, 2012) relacionado às operações algébricas, em diferentes anos de escolaridade.

Nesse sentido, o Algeplan²⁰ foi apresentado pelo coordenador do projeto ao grupo, que o identificou como potencial para atingir o objetivo. Trata-se de um material manipulativo utilizado para o ensino de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios de grau no máximo dois, cuja ideia fundamental é estudar as operações com polinômios usando áreas de retângulos e quadrados (articulação entre Álgebra e Geometria).

O material (Figura 3) foi constituído por representações em formas retangulares (incluindo algumas quadradas) construídas com cartolina de diversas cores, designando com as letras x , y e z as medidas dos seus lados.

²⁰<http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/Ofertados-neste-Campus/matematica/laboratorios/material-didatico/algeplan>.



Figura 3: O material manipulável.
Fonte: autora.

A partir das propostas de tarefas apresentadas pelas professoras P-Alice e P-Andrea, ocorreu uma pré-testagem na turma da professora P-Alice. Com base no relato da atividade feito pela P-Alice e pela pesquisadora aos demais integrantes do grupo, foi possível a elaboração de uma versão ampliada da tarefa (Apêndice A), resolvida de forma coletiva, com os ajustes que, no entendimento do grupo, mostravam-se necessários. Originou-se dessa reflexão conjunta uma versão final da tarefa (Apêndice B), que os professores P-Alice (7º e 8º anos), P-Andrea (6º e 7º anos) e P-Gustavo (8º anos) dispuseram-se a implementar em suas aulas²¹. Por essa razão, esses três professores constituíram-se sujeitos da pesquisa.

Por fim, combinou-se com os professores a implementação das tarefas no início do mês de julho. Para isso, cada professor as adaptou de acordo com os conteúdos próprios do ano de escolaridade em que atuava e com suas próprias concepções, encaminhando o trabalho em sala da forma que julgava coerente para cada uma de suas turmas (Apêndices C, D e E).

A implementação das tarefas aconteceu durante a primeira quinzena do mês de julho, conforme combinado com os professores P-Alice, P-Andrea e P-Gustavo. Foram acompanhadas pela pesquisadora 19 aulas de cinquenta minutos cada uma, distribuídas em sete turmas. As professoras P-Alice e P-Andrea trabalharam na escola central onde ocorreram os encontros do grupo; e P-Gustavo, em uma escola situada na região periférica da cidade. O Quadro 6 apresenta os dados de cada turma.

²¹P-Marcela não atuava no Ensino Fundamental e P-Marlene estava afastada de sala de aula naquele momento.

Professor	Ano	Data	Nº de aulas
P-Alice	8º A	06/07/17-manhã	1
P-Andrea	6º B	06/07/17-manhã	1
P-Andrea	7ºA	06/07/17-manhã	1
P-Andrea	6º A	06/07/17-manhã	1
P-Gustavo	8ºC	06/07/17-tarde	2
P-Gustavo	8ºB	06/07/17-tarde	2
P-Alice	7ºB	11/07/17-manhã	2
P-Alice	8ºA	11/07/17-manhã	2
P-Gustavo	8ºB	11/07/17-tarde	2
P-Alice	8º A	13/07/17-manhã	1
P-Andrea	6ºB	13/07/17-manhã	1
P-Andrea	6ºA	13/07/17-manhã	1
P-Gustavo	8ºC	13/07/17-tarde	2

Quadro 6: Dados das turmas cuja tarefa foi implementada/professor.

Fonte: autora.

A implementação em sala de aula teve autorização das direções das escolas envolvidas, que foram devidamente informadas a respeito do projeto. Além disso, em cada uma das turmas nas quais a pesquisadora acompanhou o trabalho dos professores, os alunos foram esclarecidos a respeito do trabalho que seria desenvolvido. Produções escritas eventualmente recolhidas não serão divulgadas neste trabalho. Serviram apenas como apoio para a análise dos dados acerca das ações dos professores no encaminhamento das tarefas, e não é objetivo deste trabalho realizar uma análise sistemática, no intuito de categorizá-las.

4.5 O Processo de análise

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), o processo de análise envolve o trabalho com as informações, bem como com sua organização, divisão em unidades

manipuláveis, síntese, busca de padrões, descoberta dos aspectos relevantes para a pesquisa e escolha do que vai ser comunicado.

Nesta pesquisa, várias reflexões surgiram durante os encontros ocorridos no grupo, e procurou-se, para fins de análise, destacar as informações que foram consideradas relevantes para a pesquisa, tendo em vista o seu objetivo de “evidenciar elementos valorizados pelos professores, em momentos de elaboração e implementação de tarefas de aprendizagem no contexto da Álgebra”. Para tanto, foram retomadas as gravações em áudio dos encontros, procurando confrontá-las com os registros dos diários de campo, tanto da pesquisadora como do seu orientador. Assim, o primeiro passo dado na direção de sistematizar os dados obtidos, por meio dos diários e das gravações de áudios, foi a descrição do processo de elaboração das tarefas, buscando explicitar cada uma de suas etapas (Capítulo 5). Nessa etapa de construção da narrativa descritiva dos processos de elaboração das tarefas, emergiram alguns elementos (negritados na construção do Capítulo 5), que forneceram indicativos (serviram como “rastros²²”) para a posterior organização de unidades de análise.

Na sequência, exploraram-se, de modo sistemático,²³ as informações obtidas a partir de novas leituras dos diários referentes à etapa de implementação das tarefas, assim como transcrições de partes das gravações em áudio coletadas nessa fase (tanto em sala de aula, na interação do professor com os estudantes, quanto em conversas dos professores com a pesquisadora no intervalo das aulas e horas-atividade, nos dias em que ocorreram essas implementações), a fim de confrontá-las à luz dos referenciais teóricos adotados, para obter novas informações.

Nessa etapa de transcrição, destacam-se trechos de diálogos que, de algum modo, mostraram-se recorrentes: (i) ou de um mesmo professor em várias turmas; (ii) ou entre os três professores observados. Nesse caso, optou-se por transcrever apenas um deles, que se julgou mais representativo.

A partir daí, as informações foram organizadas sistematicamente, buscando evidenciar aquelas que constituíram as unidades de análise (que serão tratadas no

²² Inspirado em Baldini (2014).

²³ Recorreu-se a alguns princípios da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1977), que considera que a análise ocorre em diferentes fases: pré-análise; exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Capítulo 6), elementos que os professores valorizaram, no processo de elaboração e implementação de tarefas no contexto da Álgebra:

- Constituição de um ambiente oportuno para a aprendizagem matemática;
- Manutenção da demanda cognitiva da tarefa;
- Atribuição de significados à linguagem algébrica;

5 DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS DE ELABORAÇÃO DAS TAREFAS

Este capítulo apresenta a descrição do processo de elaboração das tarefas, ocorrido entre os meses de maio e junho de 2017 (Quadro 5), buscando explicitar cada uma de suas etapas, de modo a propiciar uma visão geral do trabalho desenvolvido pelo grupo de professores, na busca de elementos que permitam reflexões a respeito do objetivo desta pesquisa.

5.1 Trajetória de construção das tarefas

No primeiro encontro (05/05/2017) dessa etapa do projeto, havia sido combinado antecipadamente que os professores levariam cartolinas coloridas e tesouras no intuito de construir um material manipulável visando trabalhar operações algébricas, inspirado no material conhecido como Algeplan. O objetivo principal seria utilizá-lo como uma base para a construção de tarefas que conduzissem os alunos a “perceber regras” envolvidas nas quatro operações, ou seja, **promover situações em que pudessem reconhecer propriedades envolvidas sem que o professor precisasse antecipá-las de forma expositiva.**

Um exemplo disso ocorre com a operação $2x^2 + x^2$. Enquanto, em um livro didático usual, apresentam-se definições de monômio, parte literal, coeficiente e termo semelhante, para, em seguida, apresentar a “regra”, segundo a qual, “para adicionar ou subtrair monômios, soma-se/subtrai-se apenas os coeficientes e conserva-se a parte literal”, o resultado dessa operação decorre intuitiva e naturalmente do reconhecimento de $2x^2$ e x^2 como representações de áreas.

Antes de iniciar a construção do material, o coordenador mostrou as figuras que deveriam ser construídas, ou seja, representações de formas retangulares (incluindo quadradas), cada uma com dimensões diferentes. Em seguida, foram discutidas as dimensões que deveriam ser utilizadas para cada figura. A escolha não foi aleatória, pois se pensou que deveriam existir duas medidas-base para representarem as dimensões x e y . Um dos professores mencionou a importância de ser um tamanho que facilitasse o manuseio pelo aluno. As dimensões escolhidas foram: retangular (rosa) 12 cm x 8 cm, retangular (branco) 8 cm x 3 cm, retangular (vermelho escuro) 12 cm x 3 cm, quadrada (verde) 12 cm x 12 cm, quadrada

(amarelo) 3 cm x 3 cm e quadrada (vermelho) 8 cm x 8cm. Assim, foi dividida entre os integrantes do grupo a tarefa de construir peças em cada formato.

Como a ideia principal foi **utilizar o material para explorar operações algébricas**, usualmente representam-se as dimensões das peças por x , y e 1. Entretanto, um dos aspectos que P-Alice mencionou, em relação às medidas adotadas na construção do material, foi o de não utilizar como dimensão um valor numérico (no caso, 1). Assim, evitar-se-ia que ao monômio x , por exemplo, fosse atribuído o duplo significado de “lado da forma quadrada” e “área da forma quadrada”. Designaram-se, então, com as letras x , y e z os lados de medidas 12 cm, 8 cm e 3 cm, respectivamente.

Após a construção do material, a discussão voltou-se para possíveis encaminhamentos do seu uso em sala de aula, objetivando as operações com polinômios. Assim, alguns encaminhamentos surgiram durante a discussão no grupo²⁴:

- Fornecer uma expressão algébrica e pedir que fosse representada por meio do material, e vice-versa;

Exemplo:

Represente, utilizando o material, o monômio $2x^2$.



- Explorar formas de representar uma mesma área;

Exemplo:

$$x^2 + x^2 = 2 \cdot x^2 = 2x \cdot x$$

- Determinar a área da figura e uma de suas dimensões e, em seguida, solicitar a medida da outra dimensão;

O entendimento do grupo foi que esses encaminhamentos poderiam contribuir no sentido de, por exemplo, minimizar a dificuldade com que os alunos se deparam para distinguir $x^2 + x^2 = 2x^2$ de $x^2 \cdot x^2 = x^4$. Mediante as ideias discutidas acerca de

²⁴ Destaca-se que essas possibilidades foram elaboradas pelo próprio grupo, uma vez que, quando o coordenador propõe a construção do material, não foram apresentados encaminhamentos sobre possibilidades para sua utilização. O intuito foi que decorressem da reflexão conjunta.

possíveis encaminhamentos para a construção de tarefas que visassem trabalhar com as quatro operações envolvendo polinômios, concluiu-se que a adição poderia surgir por meio da decomposição das figuras. Para a subtração, foram destacadas duas possibilidades de representação: a primeira seria trabalhar com a sobreposição de figuras e a segunda com a ideia de “retirar” peças após a figura montada. Trata-se de possibilidades diferentes daquela usualmente encontrada na literatura para o trabalho com a subtração: a utilização, para cada peça já construída, de outra na cor preta ou cinza, para indicar o seu “oposto”. O coordenador mencionou esse fato ao grupo; porém essa opção foi imediatamente descartada, sob a hipótese de que não faria sentido para os alunos duas peças, por exemplo, x^2 e $-x^2$, representando juntas o valor zero. “Confusão” similar foi apontada por P-Alice e P-Andrea no que tange ao recurso de “bolinhas brancas e pretas” apresentado por alguns livros didáticos para o trabalho com operações com números inteiros.

Para a multiplicação, poderiam ser solicitadas diferentes representações da área de uma determinada figura a partir de suas dimensões. Por fim, a divisão poderia ser trabalhada no sentido de determinar uma das dimensões da figura como sendo conhecida sua área. No encerramento do encontro, combinou-se que os professores ficariam responsáveis por elaborar, para o próximo, tarefas visando ao trabalho com as quatro operações com polinômios, com base no uso do material construído.

O segundo encontro (18-05-2017) contou com a presença da P-Alice e da pesquisadora, apenas, e foi dedicado à elaboração de uma proposta inicial de tarefa (Figura 4) a partir do material construído pelo grupo e das discussões realizadas no encontro anterior²⁵. Além disso, como estava atuando com turmas de 8º ano, P-Alice dispôs-se a aplicar a tarefa em uma delas. A implementação da tarefa em sala de aula aconteceu na semana seguinte a esse encontro, e foi acompanhada pela pesquisadora.

²⁵A professora optou por designar cada peça do material por um “nome” ou símbolo particular, ao invés das cores das formas (Ana, B, C, estrela, coração, etc.), pois, segundo ela, havia um combinado com seus alunos de que eles poderiam nominar as figuras como julgassem mais conveniente e assim ela o fez naquela tarefa. No caso da questão 2, houve um uso inadequado da expressão “todas as figuras”, visto que não havia clareza, por exemplo, se as peças poderiam se sobrepor. Por fim, a palavra “tabela” tecnicamente está incorreta, pois se trata de um quadro.

1) Complete as tabelas.

Nome	Poligono	Cor	Dimensões	
			Comprimento	Largura
Ana				
☆				
B				
☼				
C				
♡				

Nome	Perímetro	Area
Ana		
☆		
B		
☼		
C		
♡		

2) Escolha 3 peças e monte todas as figuras possíveis, anotando cada montagem com suas respectivas medidas.

3) Calcule o perímetro e a área de cada figura montada.

Figura 4: Primeira versão da tarefa, proposta por P-Alice.
Fonte: autora.

5.2 Pré-testagem da tarefa

Em sala, P-Alice primeiramente fez uma explanação da dinâmica do trabalho, explicando aos alunos que, para a realização da tarefa proposta, eles poderiam utilizar apenas o material entregue, composto pelas peças coloridas e pela tarefa impressa. Estipulou uma única regra: eles não poderiam usar régua para fazer qualquer medição. Uma de suas intenções na implementação da tarefa foi que os alunos utilizassem o material para comparar as dimensões de cada figura com aquelas determinadas no material manipulável entregue, as quais foram previamente determinadas no momento da elaboração da tarefa, como exposto na Figura 5.

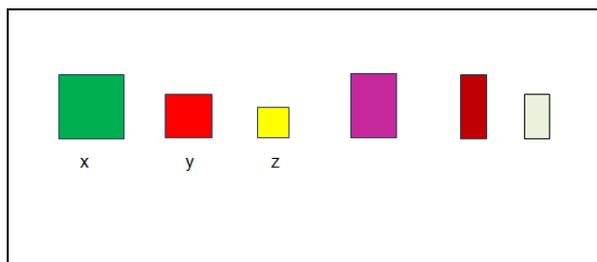


Figura 5: Medidas das dimensões das formas quadradas.
Fonte: autora.

O objetivo da professora era que os alunos pudessem comparar as medidas das dimensões das formas retangulares com as medidas das dimensões determinadas nas formas quadradas. Inicialmente, não expôs isso aos alunos, apenas estipulou a regra de não usar a régua. Salientou ainda que não havia a preocupação de apresentar medidas em unidades (centímetros, por exemplo), e que utilizara as letras para representá-las.

Em um primeiro momento, foi entregue apenas o item 1 da tarefa (Figura 4). Após a explicação, os alunos começaram a trabalhar e as dúvidas foram surgindo. A professora foi, então, passando pelos grupos, buscando esclarecê-las. A maioria delas estava relacionada a como proceder para encontrar as medidas das dimensões das formas retangulares. Um aluno perguntou à professora se medir era comparar, e **ela encaminhou uma discussão coletiva com a intenção de que percebessem que, para encontrar as dimensões pedidas, deveriam comparar as formas para determinar as dimensões de mesmo comprimento** (Figura 6).

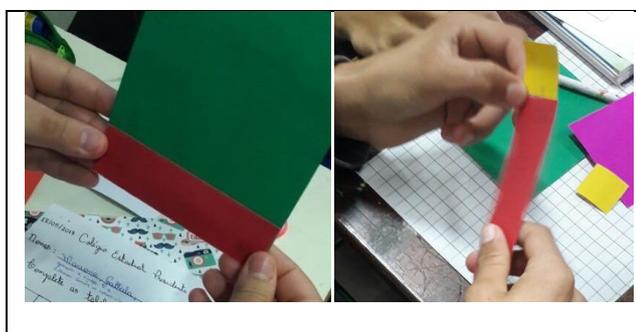


Figura 6: Ações de comparação dos alunos com o material.
Fonte: autora.

Foi possível observar que a maioria dos alunos não teve dificuldades para apresentar a área e o perímetro das figuras, talvez devido ao fato de a professora já

ter realizado outros trabalhos com a turma que abordavam tais conceitos. Entretanto, não ficou claro se, de fato, compreendiam, ou se apenas sabiam como efetuar os cálculos, no caso de regiões com formas retangulares e quadradas.

Após isso, para os grupos que já haviam terminado esse primeiro item, a professora entregou os demais. Ao observar o modo como esses alunos resolviam o item 2, a professora identificou representações diferentes do que havia pensado durante o planejamento. Os alunos mostraram que existem diversas representações de figuras utilizando três peças, o que não seria conveniente, já que no enunciado havia sido pedido “Escolha 3 peças e monte todas as figuras possíveis, anotando cada montagem com suas respectivas medidas”. Portanto, sua opção foi não entregar para os demais grupos essa segunda parte da tarefa, para que pudesse reformular e desenvolvê-la com eles em outro momento²⁶.

5.3 Reelaboração da tarefa

O terceiro encontro (26-05-2017) ocorreu no dia seguinte à implementação desse primeiro desenho da tarefa. Em um primeiro momento, P-Alice e a pesquisadora relataram suas observações aos demais integrantes do grupo.

Em relação à primeira parte da tarefa, foi exposto que os alunos apresentaram dúvidas sobre como determinar as dimensões das formas retangulares, e que levaram certo tempo para descobrirem que bastava comparar as medidas das peças com formas quadradas que já haviam sido fornecidas no material manipulável. Alguns grupos de alunos utilizaram como estratégia a sobreposição de peças, no sentido de buscar equivalência entre as medidas de áreas das peças do material, ou seja, não, a professora precisou fazer algumas intervenções para esclarecer o que havia solicitado no enunciado. A respeito da representação da área e do perímetro, apesar de terem conhecimento de que a área de figuras retangulares resulta do produto de suas dimensões, não utilizaram uma

²⁶No trabalho intitulado “Conhecimentos mobilizados por uma professora na elaboração e implementação de uma tarefa matemática” (VIEIRA, TREVISAN; BALDINI; ROCHA, 2018, no prelo), foram analisados os momentos do processo vivenciado por P-Alice, articulando as ações com os conhecimentos mobilizados pela professora. Embora o contexto, do qual decorre a pesquisa, perpassasse questões relacionadas aos conhecimentos e saberes profissionais, esse não é foco neste trabalho.

escrita simplificada, por exemplo, para o quadrado verde de lado igual a x , e, em geral, escreveram, para designar a área, somente $x \cdot x$ e não x^2 .

Sobre a segunda parte da tarefa, relatou-se aos professores que, no momento da elaboração, a professora não havia pensando que haveria diversas maneiras para compor figuras distintas utilizando apenas três peças diferentes do material. Assim iniciou-se uma discussão acerca do cálculo do perímetro de figuras distintas que apresentavam perímetros de mesma medida. O grupo trabalhou, então, com a investigação do perímetro de algumas figuras resultantes da composição de peças do material que não fossem “regulares”.

Num segundo momento, P-Andrea apresentou a proposta de uma tarefa que elaborara com foco para o 8º ano (Figura 7), conforme fora pedido aos professores no encontro anterior. Em sua versão, não utilizou todas as peças do material, nem as mesmas cores, segundo ela, por não ter em mãos o material manipulável enquanto preparava a tarefa. Na Figura, x , y e z representam, respectivamente, as medidas dos lados dos quadrados cinza, azul e amarelo.

1- Utilizando as peças confeccionadas, represente as seguintes áreas:

a) $x^2 + y^2$ b) $x^2 + 2y^2$ c) $xy + 4$ d) $3xy + y^2$ e) $4x^2 + 4$

f) $xy - 1$ g) $x^2 - y^2$ h) $2xy - y^2$ i) $x^2 - 3$

j) $(x+y) \cdot (x)$ k) $3 \cdot (x^2 + y^2)$ l) $2 \cdot (x^2 + 4)$ m) $(2y) \cdot x$

n) $(x^2 + xy) : x$ o) $(3y^2) : y$

2- Utilizando a linguagem algébrica, represente as seguintes áreas.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Figura 7: Versão da tarefa proposta por P-Andrea.
Fonte: autora.

Ao explorar a tarefa, a atenção voltou-se para as operações de multiplicação e divisão, uma vez que a professora relatara ao grupo que eram as operações em que tinha encontrado mais dificuldade no momento de elaborar sua tarefa. Dessa forma, a partir das tarefas elaboradas pela P-Alice (Figura 4) e pela P-Andrea (Figura 7), o grupo começou a pensar em um desenho conjunto de tarefa para futuramente implementar nas turmas dos professores participantes do grupo.

Primeiramente, o grupo dedicou-se a elaborar tarefas voltadas para o 8º ano, nas quais os professores entenderam já poder utilizar letras para representar as dimensões de cada peça do material. Logo, mediante discussões geradas no grupo acerca das tarefas já existentes, concordou-se que era possível utilizar as tabelas propostas na Figura 4, somente acrescentando uma coluna para o cálculo da área de cada peça (na opinião de P-Andrea, utilizando cores ao invés dos “nomes” que P-Alice escolheu). O segundo e terceiro itens seriam aqueles propostos na Figura 7, porém utilizando mais configurações envolvendo as peças que constituem o material.

No entanto, ao olhar criticamente para os itens que comporiam essa tarefa, o grupo percebeu que pareciam se voltar apenas para exploração das operações de adição e subtração de polinômios. Nesse momento, os professores relataram que pensar em tarefas que explorem multiplicação e divisão exige mais esforço. Dessa forma, o grupo começou a discutir e a esboçar ideias para a construção de mais itens voltados para essas operações. Foi, então, que o grupo elaborou um quarto item para a tarefa, mostrado na Figura 8 a seguir.

4) Complete as lacunas em branco da tabela a seguir:

Polígono	Comprimento	Largura	Área
			_____ ou _____
			$2xy + xz$ ou _____
	$x + y$	x	_____ ou _____
			_____ ou _____
	$3z + y$	y	_____ ou _____

Figura 8: Quarto item da tarefa construída no grupo.

Fonte: autora.

Nesse encontro, o grupo começou a pensar também em como encaminhar tarefas utilizando o material, mas agora destinadas ao 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. A primeira sugestão foi utilizar a sobreposição de peças, no intuito de trabalhar equivalência entre áreas. Entretanto, o modo como foi construído o material não permitiria relacionar todas as peças; assim, surgiu da P-Andrea a proposta de utilizar palitos de fósforos e de sorvetes como unidade de medida para as dimensões das figuras, porém novas peças que possibilitassem isso teriam de ser construídas. Para o próximo encontro, ficou combinado que a pesquisadora digitaria a proposta esboçada em papel pelo grupo e a P-Andrea trabalharia em sua proposta de tarefa utilizando os palitos de fósforo e de sorvete.

5.4 Discussão dos itens da tarefa

O quarto encontro (09-06-2017) destinou-se a resolver e discutir os itens presentes na tarefa já construída no encontro anterior, no sentido de **antecipar algumas das resoluções, dúvidas e equívocos que poderiam surgir com os alunos, e, desse modo, realizar alguns ajustes na formulação, se necessário.**

Durante a resolução, a P-Andrea sugeriu que fossem retirados os “nomes” dados às figuras e que se utilizassem imagens para representá-los. Outra sugestão foi entregar aos alunos/grupos cada item da tarefa separadamente, para que não pulassem nenhuma etapa. Os professores **salientaram a importância de a tarefa**

começar de forma mais simples e ser gradativa no nível de complexidade, por isso julgaram necessário os itens, por exemplo, solicitarem a cor da figura e a nomenclatura da forma que a figura representava. São itens que provavelmente a maioria iria resolver sem dificuldade. Eles justificaram dizendo que, quando a tarefa já começa com um nível de complexidade elevado, os alunos podem se desmotivar logo no início.

Acerca do segundo item da tarefa, os professores destacaram que não estava claro para o aluno como ele devia representar a área pedida nos subitens, uma vez que podiam apenas utilizar as próprias peças do material, ou, ainda, desenhar numa escala menor. As sugestões que surgiram foram que os alunos poderiam utilizar o papel quadriculado para desenhar e ficaria a critério deles decidir qual a melhor forma de representar, visto que a tarefa não fazia menção a isso. Outra ideia foi que os alunos apenas montassem na própria carteira, assim não perderia tempo desenhando. O consenso final no grupo foi que a primeira sugestão seria mais conveniente, já que seria difícil para o professor observar as montagens de todos os grupos no momento da aula.

Quanto ao terceiro item, foi observado que nos subitens em que havia sobreposição de peças, cuja intenção era que fosse feita a subtração, deveria ficar explícita no enunciado a área solicitada. Por exemplo, quando o quadrado amarelo ficasse sobre o quadrado verde, a pergunta deveria: Qual a área verde que se pode observar para se obter a resposta $x^2 - y^2$?

Por fim, ao resolver o quarto item juntos, algumas falhas nas representações solicitadas foram observadas. A partir dessa observação foi feita a mudança de alguns deles e acrescentados mais subitens que explorassem a subtração e não só a adição, como estava inicialmente. Resultou daí uma nova formulação (Apêndice B).

5.5 Potencialidades das tarefas

Além dos ajustes realizados, a pesquisadora indagou os professores a respeito da potencialidade da tarefa proposta para o ensino das operações com polinômios. A P-Alice, responsável pela turma em que se implementou um primeiro esboço da tarefa, expôs e explicitou sua opinião dizendo que seus alunos já haviam

aprendido as operações com polinômios antes da proposição das tarefas. No entanto, acreditava que elas serviram para “reforçar e complementar aquilo que já haviam aprendido”²⁷. Cabe ressaltar que a professora possui em sua turma alunos de inclusão e, durante e após a implementação, ela relatou que ficara satisfeita com a **interação e a participação da turma no uso do material manipulável**. Por outro lado, os professores ressaltaram que somente a tarefa e o uso do material não são suficientes para ensinar o conteúdo almejado, que eles serviriam para complementar uma “aula tradicional”.

Ante isso, a discussão encaminhou-se para o uso de metodologias diferentes da tradicional. P-Marcela explicitou ao grupo que, muitas vezes, não tem paciência de esperar o aluno chegar sozinho a um determinado conceito e acaba intervindo na resolução das tarefas. A P-Andrea expôs que, em sua prática de sala de aula, muitas vezes não consegue que os alunos, por si mesmos, generalizem e formulem os conceitos almejados para determinada tarefa. A professora justifica dizendo que os alunos não têm maturidade nem paciência para escutar as estratégias e resoluções dos colegas e que são imediatistas, desejando somente chegar a um resultado de forma rápida.

Outros aspectos que influenciariam no encaminhamento da tarefa foram citados durante a conversa, por exemplo: implementação em aulas antes do intervalo, quando há mais participação e concentração da turma; ou em dia de algum evento no colégio, quando os alunos ficam mais dispersos, fatores que são observados por eles de acordo com suas experiências.

Ainda nesse encontro, a P-Andrea apresentou sua proposta de tarefa para o 6º e o 7º anos (Figura 9). Para tal, a professora construiu um novo material manipulável (Figura 10), com novas dimensões, utilizando os palitos como unidade de medida.

²⁷ Embora a intenção com o uso do material fosse que ele servisse como uma base para a construção de tarefas que levassem os alunos a “perceber regras” envolvidas nas quatro operações com polinômios, sem que o professor precisasse antecipá-las de forma expositiva, P-Alice e P-Gustavo, que atuavam com turmas do 8º ano, já estavam “trabalhando” com essas operações, como relataram.

1- Complete corretamente a tabela:					2- Complete corretamente a tabela:	
Figura	Comprimento	Largura	Perímetro (Contorno)	Superfície (Área)	Figura	Superfície (Área)
						
						
						$2F^2 + 5F$
						
						
						$\frac{1}{2}S^2 - F^2$
						
						
						
						

Figura 9: Segunda tarefa elaborada por P-Andrea.

Fonte: autora.



Figura 10: Material reconstruído pela P-Andrea.

Fonte: autora.

A professora expôs ao grupo que seu objetivo com a tarefa era fazer com que os alunos escrevessem as dimensões das figuras utilizando como instrumento e unidade de medida palitos de fósforo e de sorvete, de modo a **oportunizar a simplificação da escrita, utilizando letras para representar medidas**. Por

exemplo, ao invés de escreverem “2 palitos de fósforo”, os alunos poderiam pensar em usar uma abreviação, como $2P$, ou qualquer outra que surgisse²⁸. Após a apresentação, o grupo resolveu de forma coletiva os itens da tarefa, buscando antecipar estratégias e procedimentos que os estudantes poderiam utilizar em sala de aula.

O quinto encontro (30-06-2017) com o relato da P-Alice da experiência que teve com uma de suas turmas de 7º ano no desenvolvimento de uma tarefa que explorava algumas ideias já discutidas pelo grupo, como a equivalência entre áreas das peças do material manipulável. Ela contou que, para sua turma de 7º ano, não pretendeu utilizar a tarefa proposta como fora construída no último encontro. Ela esperava que, por meio da tarefa, o aluno sentisse a necessidade de utilizar a linguagem algébrica para simplificar sua escrita, e que não viu problema em designar previamente com letras as dimensões de cada peça (ao invés de utilizar os palitos como “indutores” de representação, como sugeriu P-Andrea).

Logo após, discutiu-se com os professores se as tarefas elaboradas poderiam proporcionar o desenvolvimento de outras expectativas de aprendizagem que constam no currículo, além daquelas elencadas inicialmente. Os professores destacaram que o material manipulável, por conter peças que representam formatos bidimensionais, limita a trabalhar com polinômios de grau um (para a representação do perímetro) ou dois (no caso da área). Assim, seria interessante elaborar outros tipos de tarefas para exploração de polinômios com maior grau. Percebeu-se, ao analisar rapidamente alguns livros didáticos que estavam ao alcance naquele momento, que, quando há um apelo geométrico, o máximo que dá para ser explorado são os polinômios de grau três. Poder-se-ia, então, trabalhar com a tarefa para introduzir as operações com polinômios e, de forma complementar, utilizar o livro didático para explorar outros casos, na opinião dos professores.

Por fim, o grupo planejou, em conjunto, os horários para a implementação das tarefas nas turmas, prevendo a quantidade de aulas necessárias para o desenvolvimento de cada tarefa.

²⁸ No trabalho intitulado (provisoriamente) “Manifestações da linguagem algébrica evidenciadas na produção escrita de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental” (VIEIRA, TREVISAN; BALDINI; DALTO, 2018, no prelo), busca-se analisar que tipo de linguagem os alunos desse ano de escolaridade utilizam ao realizar uma tarefa que faz uso dos palitos de fósforo e sorvete na representação de perímetros de formas do material manipulável, bem como a simbologia que surge dentro de cada linguagem adotada por eles.

6 ANÁLISE DOS DADOS

O objetivo deste capítulo é discutir elementos valorizados pelos professores no trabalho com operações algébricas, nos momentos de elaboração e implementação de tarefas. A fim de evidenciar tais elementos, foram construídas, com base nos dados obtidos, as seguintes unidades de análise:

- Constituição de um ambiente oportuno para a aprendizagem matemática;
- Manutenção da demanda cognitiva da tarefa;
- Atribuição de significados à linguagem algébrica.

6.1 Constituição de um ambiente oportuno para aprendizagem matemática

Nesta seção procura-se evidenciar elementos revelados por meio das ações dos professores que contribuíram para a formação de um *ambiente oportuno para a aprendizagem do aluno*, baseados em alguns aspectos ressaltados por Cyrino e Jesus (2014, p.754): a percepção de como as tarefas influenciam o ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos e como os professores podem proporcionar um ambiente de aprendizagem durante as aulas de Matemática, de modo que percebam o impacto de suas ações no processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes.

Nesse sentido, destaca-se a fala da P-Andrea com a pesquisadora, durante uma conversa:

Fiquei surpresa com o envolvimento dos alunos com a tarefa e o manuseio do material, acreditava que eles ficariam mais agitados (P-Andrea, 06/07/17, 6ºano B).

Por meio da fala da P-Andrea, constata-se que, ao propor aos alunos tarefas que os levem a construir uma ideia matemática, é possível que isso potencialize o seu envolvimento e, ainda, resulte em uma mudança de atitude dos alunos, passando de sujeitos passivos a sujeitos ativos em seu processo de aprendizagem.

Nessa direção, como é destacado por Cyrino e Oliveira (2016), o preparo de uma aula envolve toda a complexidade de uma sala de aula, portanto o professor deve procurar realizar suas escolhas na tentativa de sempre trazer o aluno para o centro da aprendizagem.

Outro relato que se salienta é o da P-Alice para a pesquisadora, no qual a professora expõe que foi surpreendida ao perceber como os alunos de inclusão que faziam parte da turma envolveram-se com a tarefa. Ressalta, ainda, que esses alunos começaram a tarefa com toda a turma, mas, por conta do tempo, não conseguiram terminar, mas existe um combinado entre a professora e eles de que, quando isso acontecesse, eles poderiam dar sequência ao trabalho com a professora responsável por atividades do contraturno. Assim, essa professora repassa para a P-Alice suas observações, para que ela possa avaliá-los. Em relação ao desenvolvimento da tarefa, ficou retratado que esses alunos demonstraram mudança em sua atitude, uma vez que evidenciaram total interesse e engajamento na resolução da tarefa.

Tanto na fala da P-Andrea como no relato da P-Alice, observou-se que os professores *perceberam que as tarefas propostas são capazes de influenciar o ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos*. Em momentos de hora-atividade, após a implementação da tarefa na turma da P-Andrea, em conversa com a pesquisadora e a P-Alice, ela faz a seguinte observação:

Eu penso que quando chegar num momento da tarefa e você não interferir na resolução do aluno, ou aceita a resposta do jeito que eles estavam apresentando, que não estava errada, ou eu interfiro de modo a encaminhar para o jeito que eu quero. Mesmo que eu não esteja esperando que eles cheguem no S^2 , até porque eles ainda não têm esse pensamento algébrico, mas eu acho legal eles já terem contato com isso para ficar em algum lugar da memória, para quando for discutir sobre isso eles já terem uma ideia construída (P-Andrea, 06-07-17).

Observa-se, na fala da professora, sua percepção da importância de conduzir o desenvolvimento da tarefa de modo a explorar todo o seu potencial. Essa ação da professora vai ao encontro do que Ponte (2005) aponta, se uma tarefa não for bem explorada pelo professor, isso poderá trazer experiências matemáticas pouco ricas para os alunos.

Um exemplo dessa situação ocorreu nas turmas da P-Andrea. Alguns alunos, ao responderem ao item 1 (Figura 11), sobre a medida da superfície, adotaram

estratégias diferentes, como, por exemplo, preencher as figuras utilizando os palitos de sorvete e de fósforo que tinham à sua disposição. Já outros pensaram na sobreposição de peças, conforme ilustrado na Figura 12.

1- Complete corretamente a tabela:

Figura	Comprimento	Largura	Perímetro (Contorno)	Superfície (Área)
				
				
				

Figura 11: Parte do item 1 da segunda tarefa elaborada por P-Andrea.
Fonte: autora.

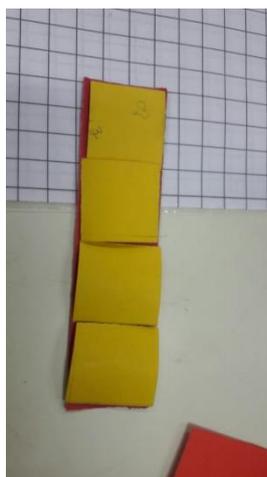


Figura 12: Sobreposição de peças.
Fonte: autora.

P-Andrea, ao observar as estratégias adotadas pelos alunos, inicialmente não interfere em suas resoluções, deixando que explorem o material por mais um tempo. Porém, decorrido algum tempo da aula, a professora percebe que os alunos, ao não conseguirem uma quantidade exata de palitos para preencher as figuras solicitadas na tarefa, começam a quebrá-los na tentativa de preencher toda a figura, e aqueles que tentaram sobrepor as peças percebem que não é possível com todas as figuras, uma vez que o material não foi construído com esse objetivo.

Desse modo, P-Andrea sente a necessidade de ir até o quadro, e expõe que gostaria que eles escrevessem a área de cada figura, utilizando apenas a medida dos lados das figuras, e não o preenchimento com os palitos ou a sobreposição das

peças. Assim ela encaminha uma resolução desenhando o quadrado vermelho e colocando suas dimensões, a fim de ilustrar tal situação, como destacado na transcrição do diálogo a seguir.

Discussão (parte 1) – P-Andrea e alunos 7º A (06/07)

P-Andrea: *Pessoal, vou ajudar vocês um pouquinho na parte da área. Prestem atenção aqui. Eu não quero que vocês apaguem o que escreveram, pode deixar aí, pois não está errado, mas quero colocar outras coisas para a gente pensar. Todo mundo entendeu o perímetro, onde vamos procurar o perímetro do quadrado vermelho, alguém pode me explicar?*

Aluno A: *Com os palitos professora, fui colocando o palito em volta.*

P- Andrea: *E como que eu posso representar a área do quadrado vermelho?*

Aluno B: *Colocando os palitos dentro.*

P- Andrea: *Não está errado o que fizeram, mas eu quero que vocês pensem na medida do lado do quadrado, qual a medida do lado do quadrado?*

Aluno C: *Um palito de sorvete.*

P- Andrea: *Isso, um palito de sorvete de comprimento e um de largura [Nesse momento, a professora desenha no quadrado o quadrado de lado com (?) um palito de sorvete].*

P- Andrea: *Então esse quadrado vermelho é o quadrado de quem? Ele é o quadrado de qual medida?*

Aluno D: *Do palito de sorvete.*

P- Andrea: *Então esse quadrado vermelho é o quadrado de quem? [Ela repete a pergunta, buscando obter a resposta da área do quadrado e não do lado]. Como a gente poderia escrever o quadrado do palito de sorvete? Alguém tem alguma ideia? Pode falar pessoal, estamos aqui para errar e acertar, não tem problema.*

[Nenhum aluno sugere ideia]

P- Andrea: *Como ninguém tem nenhuma ideia, vou deixar vocês pensarem.*

Por meio da discussão promovida por P-Andrea, podem-se apontar alguns elementos que são revelados. Em “*Eu não quero que vocês apaguem o que escreveram, pode deixar aí, pois não está errado, mas quero colocar outras coisas para a gente pensar*”, é possível constatar que ela valoriza o conhecimento matemático e a capacidade de seus alunos, permitindo que eles exponham suas estratégias e, ainda, oportuniza que desenvolvam progressivamente suas estratégias por meio de tentativas e erros, a fim que atinjam o objetivo idealizado.

Após a discussão, a professora circula pela sala, observando as respostas dos alunos, e percebe que uma dupla escreveu por extenso “um palito de sorvete ao quadrado”. Nota-se que o aluno não utilizou a linguagem simbólica, mas fez uso da linguagem retórica, por extenso na linguagem natural em sua tarefa, no entanto,

apresentou a ideia de modo correto. Assim, passado algum tempo, no final da aula, a P-Andrea retoma a discussão no quadro.

Discussão (parte 2) – P-Andrea e alunos 7º A (06/07)

P- Andrea: Pessoal, já aprendemos que, para calcular a área de uma figura, devemos fazer o que com as medidas dos lados?

Aluno E: Vezes.

P- Andrea: Então, como podemos escrever 1 Sorvete vezes 1 Sorvete?

Aluno E: Um vezes um.

P- Andrea : Como posso escrever 3 vezes 3?

Aluno F: Nove.

P- Andrea: Mas usando uma outra “continha” que a gente estudou, como posso escrever 3 vezes 3?

Aluno G: Potência, né professora?

P- Andrea: Isso, então como é 3 vezes 3 em potência?

Aluno H: Três elevado ao quadrado.

P- Andrea: Porque é ao quadrado?

Aluno H: Porque a figura é um quadrado.

P- Andrea: Não queremos escrever o quadrado do sorvete, como vamos escrever isso?

Aluno I: Sorvete ao quadrado.

P- Andrea: Isso. Então, a partir dessa ideia, quero que vocês escrevam as áreas das figuras em forma de potência quando possível, mas não apaguem o que fizeram antes.

A P-Andrea direciona a aula, nesse momento, de forma mais expositiva, no entanto, levanta questionamentos para os alunos na tentativa de entender suas explicações acerca das estratégias e procedimentos adotados. Cabe ressaltar que ela busca direcioná-los a fim de explorar toda a potencialidade da tarefa, ao invés de fornecer diretamente as respostas. Dessa forma, inferimos que houve *percepção da professora em relação às suas ações no processo de ensino e de aprendizagem por meio da tarefa*, uma vez que reconhece que suas intervenções são necessárias, porém devem ser bem conduzidas no sentido de atingir seus objetivos de ensino e não limitar as ideias matemáticas dos alunos.

Para sintetizar os elementos evidenciados nessa unidade de análise, construiu-se o Quadro 7, que apresenta tais elementos.

Ações	Rastros que evidenciam os elementos
<i>Influenciar o ensino e a aprendizagem por meio das tarefas</i>	Percepção pelos professores observados de que as tarefas propostas são capazes de influenciar o ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos, levando-os a elaborarem uma ideia matemática.
<i>Favorecer um</i>	Proposição de um ambiente no qual os alunos são convidados a explorar

<i>ambiente que oportunize a exploração de ideias matemáticas</i>	ideias matemáticas de forma intuitiva, sendo suas estratégias tomadas como ponto de partida para a sistematização de conceitos.
<i>Incentivar o papel ativo do aluno</i>	Valorização da participação do aluno, reconhecendo seu conhecimento matemático prévio e sua capacidade de resolver problemas, permitindo que eles exponham suas estratégias.
<i>Oportunizar o desenvolvimento progressivo de estratégias</i>	Oportunidades para que os alunos desenvolvam progressivamente suas estratégias a fim de que atinjam o objetivo idealizado.
<i>Propor questionamentos aos alunos</i>	Levantamento de questionamentos para os alunos na tentativa de entender suas explicações acerca das estratégias e procedimentos adotados por eles.
<i>Explorar toda a potencialidade da tarefa</i>	Busca direcioná-los a fim de explorar toda a potencialidade da tarefa, sem validar suas respostas apenas como certas ou erradas, e ainda, não se limitando apenas nas resoluções dos alunos.

Quadro 7: Elementos que colaboraram para a constituição de um ambiente oportuno para a aprendizagem matemática

Fonte: autora

6.2 Manutenção da demanda cognitiva da tarefa

Nesta unidade de análise, destacamos episódios dos diálogos entre professor e aluno, por meio dos quais foi possível constatar atitudes que demonstram fatores ligados à manutenção do nível cognitivo da tarefa proposta. Com base no Quadro 2, conforme indicado por Stein e Smith (1998), identificam-se os fatores associados à manutenção ou ao declínio de exigências cognitivas, uma vez que tais fatores relacionam-se diretamente com as atitudes do professor durante a implementação da tarefa.

Nesse contexto, notam-se atitudes distintas entre os professores observados. Por exemplo, P-Alice e P-Gustavo determinaram os alunos que compuseram cada grupo e entregaram a tarefa juntamente com o material manipulável. Na sequência, apresentaram a tarefa para os alunos, fazendo a leitura de cada item. Esse procedimento foi adotado por esses professores em todas as suas turmas nas quais a tarefa foi implementada.

Por outro lado, P-Andrea dividiu os alunos em duplas, no entanto deixou livre a escolha. Nos 6º anos, entregou primeiramente o material manipulável para que eles pudessem explorá-lo antes de iniciar a tarefa (aproximadamente quinze minutos). A professora relatou à pesquisadora que julgou importante que eles “brincassem” um pouco com o material, já que isso pode contribuir para a interação com a tarefa.

Desse modo, durante a implementação da tarefa, observou-se que os três professores procuraram apoiar todos os alunos, circulando por toda sala, esclarecendo as dúvidas de cada grupo. Como destaca Ponte (2005), o professor, ao propor tarefas adequadas aos alunos, poderá provocar ou não a atividade deles, cabendo a ele explorar toda sua potencialidade. Assim, a gestão do tempo, nas interações em sala de aula, servirá como limitador ou potencializador das oportunidades de aprendizagens criadas por meio das tarefas (SMITH; STEIN, 1998).

Portanto, entende-se que tais ações dos professores se relacionam com o primeiro fator, o qual se associa à manutenção de exigência cognitiva de nível elevado, *dar apoio ao pensamento e raciocínio do aluno* (STEIN; SMITH, 1998). Assim, a fim de ilustrar tais situações, a seguir destacam-se diálogos ocorridos durante a implementação da tarefa:

Diálogo 2 – P-Alice e alunos 8º B (06-07)

Aluno A: Posso colocar a medida que quiser? Temos que usar a régua? [referindo-se às peças do material]

P-Alice: Não podem usar a régua. Eu não me preocupei com a medida real, eu utilizei letras para representar as dimensões. Procurem no material, que estão indicadas todas informações que precisam para a tarefa. Leiam primeiro a tarefa e troquem ideia com seus colegas do grupo.

Aluno B: Professora, mas o comprimento e a largura posso medir com a régua?

P-Alice: Procure nas peças que elas estão mostrando as dimensões.

Aluno C: Professora, mas tem peça que não tem medida.

P-Alice: Pessoal medir não é comparar? Então, comparem as peças, não são todas que têm a medida, vocês quem devem descobrir.

Nota-se a preocupação da P-Alice em conduzir o diálogo de modo que seus alunos conseguissem estabelecer conexões acerca da medição das dimensões da figura, não perdendo de vista um de seus objetivos com a proposição da tarefa, ou seja, que os alunos pudessem comparar as medidas das dimensões das formas retangulares com as medidas já indicadas nas formas quadradas.

Diálogo 3 – P-Gustavo e alunos 8º C (06-07)

Aluno A: Professor, posso escrever, no perímetro do quadrado verde, $4x$ ao invés de $x + x + x + x$?

P-Gustavo: Você acha que representa a mesma coisa?

Aluna A: Sim, porque são quatro lados iguais, né?

P-Gustavo: Sim, você pode representar dessa forma, representam a mesma coisa.

[Momento posterior]

Aluno B: Professor, como essa figura... é quadrado ou um retângulo?

[Professor pega duas peças do material e mostra ao grupo do Aluno B]

P-Gustavo: O que uma figura geométrica precisa apresentar para ser um quadrado?

Aluno B: Ter quatro pontas?

P-Gustavo: Mas as duas têm quatro pontas. Por que esse é um retângulo e não um quadrado? Como fazemos para diferenciar?

Aluno C: No retângulo um lado é mais largo que o outro, e no quadrado todos têm a mesma largura.

P-Gustavo: Isso. No quadrado, os quatro lados possuem a mesma medida, e no retângulo não necessariamente.

As questões levantadas por P-Gustavo levam o aluno a refletir sobre os elementos que definem um retângulo. Assim, ao afirmar que em um retângulo “um lado é mais largo que o outro” (*Aluno C*), esse aluno levantou uma conjectura que o permitiu distinguir o retângulo do quadrado. P-Gustavo não contrapôs sua hipótese, mas reformulou a fala de modo que estivesse coerente com as propriedades matemáticas das figuras (em especial com o termo “não necessariamente”).

Nessa direção, evidencia-se que os professores não forneceram a resposta imediata, mediante as dúvidas dos alunos, mas procuraram instigá-los de modo a proporcionar o desenvolvimento do seu raciocínio acerca do que havia sido solicitado em cada item da tarefa. Essa ação praticada pelos professores pode fazer com que os alunos se sintam à vontade para expor suas estratégias, a fim de que fossem capazes de levantar suas próprias conjecturas e formular ideias quanto aos conceitos matemáticos. Tais ações são apontadas por Thompson (2009) como um papel que deve ser exercido pelo professor no momento da implementação da tarefa.

Apesar de os três professores estimularem seus alunos por meio de seus questionamentos, como já apresentado nos diálogos anteriores, somente P-Gustavo promoveu uma discussão coletiva de cada item da tarefa, no sentido de sistematizar as soluções dadas pelos alunos. As demais professoras optaram por corrigir a tarefa de cada grupo e depois entregar aos grupos as tarefas já corrigidas, uma vez que houve um combinado de atribuição de uma “nota” para essas tarefas. P-Gustavo, por sua vez, estabeleceu desde o início que não iria atribuir nota para a tarefa realizada. Vale ressaltar que essa atitude do professor apresentou-se como um possível fator para manter a exigência cognitiva de nível elevado da tarefa, no

sentido de não deixar os alunos preocupados em acertar ou errar no momento de suas resoluções.

É preciso colocar que P-Gustavo já realizou estudos a respeito do Ensino Exploratório²⁹ (desenvolvia, no momento de implementação das tarefas, seu trabalho de conclusão do PDE na perspectiva do Ensino Exploratório). Portanto, existe a possibilidade de que sua ação de sistematizar junto aos alunos seja decorrente dessa experiência, já que essa é umas fases da aula encaminhada nessa perspectiva de trabalho.

O professor encaminha a sistematização a partir das diferentes soluções apresentadas pelos alunos. Por exemplo, para representar o perímetro e área da peça em forma quadrada, algumas expressões surgiram durante a discussão e o professor procurou explorar as diversas formas de representação algébrica para o perímetro ($x + x + x + x$, $4x$, $x \cdot 4$, $2x + 2x$ e $x + 3x$) e a área ($x \cdot x$, $2x \cdot 4x$ e $4 \cdot x$) da forma quadrada verde.

Ao perceber que os alunos apresentaram dificuldade para representar a área, o professor levantou a seguinte questão:

P-Gustavo: Como que calculamos a área deste quadrado?

Aluno A: Fazendo comprimento vezes largura, é isso, né?

P- Gustavo: Sim. Então qual das respostas aqui representa a área do quadrado?

Dessa forma, os alunos entraram em um consenso de que, entre as resposta fornecidas, somente $x \cdot x$ poderia representar a área do quadrado, mas o professor ainda pergunta se existe outra maneira de escrever essa resposta, e os alunos não se lembram da potenciação, ou seja, que $x \cdot x = x^2$. Desse modo, a discussão é conduzida pelo professor na direção de relembrar o conceito de potenciação, que pergunta qual é o produto entre 3 e 3. Um aluno responde que é 9, e outro que é 3^2 . Nesse momento, alguns alunos rapidamente entendem a intenção do professor, e já falam que $x \cdot x = x^2$. Assim, item a item a tarefa foi discutida e sistematizada no quadro pelo professor, na busca de reforçar os procedimentos que envolvem as operações algébricas, já que esse era o objetivo pretendido com a tarefa. Conclui-se

²⁹Abordagem de ensino que visa trazer o aluno para o centro das atividades matemáticas. Assim, uma aula desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório se constitui com quatro fases: proposição e apresentação da tarefa; desenvolvimento da tarefa; discussão coletiva da tarefa e sistematização (GAFANHOTO; CANAVARRO, 2011).

que a ação realizada por esse professor promoveu, ao final de cada item da tarefa, uma discussão para sistematizar as soluções apresentadas pelos grupos com outro fator destacado no Quadro 2, no sentido de manter o nível de exigência cognitiva da tarefa, *o professor estimula justificações, explicações e significados através de questões, comentários e feedback.*

O Quadro 8 apresenta os elementos evidenciados nesta unidade de análise, pelos quais foi possível perceber a presença de fatores nas ações dos professores envolvidos para que houvesse a manutenção do nível cognitivo da tarefa.

Ações	Rastros que evidenciam os elementos
Permitir a exploração do material manipulável.	Permissão para que os alunos manipulem o material antes da entrega da tarefa.
<i>Dar apoio à realização da tarefa</i>	Incentiva todos os alunos a desenvolverem a tarefa, circulando por toda a sala, esclarecendo as dúvidas de cada grupo por meio de questionamentos, buscando compreender suas estratégias e apoiando ideias matemáticas.
<i>Estabelecer conexões entre unidades temáticas</i>	Condução de discussões de modo que seus alunos consigam estabelecer conexões entre diferentes unidades temáticas da Matemática escolar (no caso, Álgebra e Geometria).
<i>Não direcionar respostas</i>	Os professores não forneceram a resposta imediata, diante das dúvidas dos alunos, mas procuraram instigá-los de modo a proporcionar o desenvolvimento do seu raciocínio.
<i>Incentivar os alunos na formulação de ideias</i>	Incentivo aos alunos a levantar suas próprias conjecturas e formular ideias acerca das propriedades envolvidas nas operações algébricas.
<i>Valorizar várias soluções, com foco no objetivo de ensino</i>	Sistematização a partir das diferentes soluções apresentadas pelos alunos, na busca de focar os procedimentos que envolvem as operações algébricas, já que esse era o objetivo pretendido com a tarefa.
<i>Estimular à comunicação de ideias matemáticas</i>	Estímulo à comunicação de ideias matemáticas, por meio da elaboração de argumentações e intervenções que possibilitassem ao aluno validar ou reformular suas resoluções.

Quadro 8: Elementos que evidenciam a manutenção do nível de demanda cognitiva da tarefa.
Fonte: autora

6.3 Atribuição de significados à linguagem algébrica

Como já colocado inicialmente, os professores participantes do grupo de estudos, ao elaborarem as tarefas propostas nesta pesquisa, tiveram a intenção de trabalhar as operações algébricas de forma diferente daquelas rotineiramente encontradas nos livros didáticos, ou seja, o objetivo foi propor tarefas que oportunizassem aos alunos construir ideias matemáticas relacionadas à atribuição de significados à linguagem algébrica.

Visto isso, esta seção busca apresentar elementos que foram valorizados pelos professores, tanto nas escolhas realizadas de acordo com o objetivo preestabelecido, quanto nas atitudes em sala de aula no intuito de promover que os alunos atribuam significados às operações algébricas, ou seja, oferecer oportunidades para que eles pensem conceitualmente nessas operações, articuladas às áreas e aos perímetros das peças, e não apenas memorizem fatos ou procedimentos. Essa ideia coaduna com o que Stein e Smith (2009) apontam, isto é, que as tarefas são instrumentos que servem para conectar os objetivos de aprendizagem dos alunos. Assim, é importante que, ao elaborar ou selecionar tarefas, o professor tenha clareza dos objetivos que pretende alcançar, podendo, dessa forma, proporcionar ao aluno um ambiente propício à aprendizagem.

Durante a fase de elaboração da tarefa, o grupo partiu de ideias inicialmente propostas por P-Alice e por P-Andrea (Figuras 4 e 7) e, com a contribuição de todos os participantes, chegou a uma tarefa com vários itens, que seria posteriormente implementada em sala de aula. Desse modo, evidenciam-se episódios que retratam os motivos relatados pela P- Alice ao grupo, que justificam o modo pelo qual se deu a elaboração da primeira versão de sua tarefa (Figura 4). A professora fez os seguintes relatos:

Ao colocar as dimensões x , y , z somente nos quadrados, eu queria que eles identificassem que os retângulos apresentavam as mesmas dimensões dos quadrados. Minha intenção é que percebessem que medir é comparar. Perímetro e área estão intimamente relacionados com as dimensões, mas o perímetro está ligado com o contorno e a área com a superfície (P-Alice, terceiro encontro).

O meu objetivo é que o aluno saiba o que é área e o que é perímetro, ele sabendo o que é cada um, ele vai saber representar isso, $x + x + x + x$ (mostra por escrito), e junto a isso vem à simplificação da escrita, essa escrita mais simplificada surge como um facilitador e não uma obrigação (P-Alice, quinto encontro).

Por meio dos relatos da P-Alice, observa-se que seu objetivo está pautado em articular o ensino da álgebra com a geometria. Entende-se que a professora utiliza a geometria como “ponte” para ensinar procedimentos algébricos de uma forma contextualizada, como foi explicitado na frase sublinhada. Essa atitude da professora está em consonância com os autores Oliveira e Laudares (2012) e com os PCN (1998), que apontam a importância de trabalhar a Álgebra articulada com a

Geometria, uma vez que esta última é um assunto do cotidiano do aluno. Dessa forma, o professor dá oportunidade ao aluno de elaborar conceitos.

Salienta-se, ainda, que o discurso da P-Alice explicita o reconhecimento da possibilidade de o aluno, no trabalho com tarefas, estabelecer conexões com significados ou com ideias e conceitos matemáticos (CYRINO, JESUS, 2014) – no caso, propriedades envolvidas nas operações com monômios e polinômios, sem que o professor precise defini-las de forma expositiva. Demonstra reconhecer a possibilidade de que a compreensão dessas expressões possa ocorrer antes da introdução de nomenclaturas ou simbologia formal. Por meio dessa ação da professora, identifica características primordiais da tarefa e, assim, direciona de modo a alcançar seus objetivos de ensino com a tarefa. Trata-se, portanto, de uma característica fundamental no trabalho com tarefas, como indicado por Canavarro e Santos (2011).

A P-Andrea explicita seu objetivo ao propor sua versão da tarefa (Figura 5) ao grupo. Tal tarefa foi elaborada por ela visando ao trabalho com o 8º ano:

Não pensei em falar em perímetro com este material, eu utilizei na tarefa para explorar as operações algébricas [...] primeiro pensei em fornecer as expressões algébricas para eles montarem com as peças, e em seguida, ao contrário [...] não sai naturalmente a exploração da divisão e da multiplicação, vou ter que direcionar, não enxerguei outra forma de explorar essas operações (P-Andrea, segundo encontro).

Nota-se que a tarefa proposta pela professora permite a utilização de dois tipos de representação: primeiro são fornecidas as expressões e o aluno manipula as peças do material para representá-las; depois é realizado o contrário. Essa ideia da professora é destacada pelas NCTM (2007) como uma oportunidade dada aos alunos de lidarem com diversas formas de representação de ideias matemáticas, podendo, desse modo, passar uma informação de uma forma de representação para outra e estabelecer relações entre diferentes ideias matemáticas. Segundo Silva e Savioli (2016), utilizar diferentes sistemas de representação é uma das características do pensamento algébrico relacionada ao pensamento funcional.

Ainda em relação à tarefa elaborada por P-Andrea, ressaltam-se aspectos relacionados ao enunciado de um dos itens. Na visão da pesquisadora, o enunciado pode se tornar um obstáculo no momento da implementação, uma vez que, ao solicitar que o aluno represente as áreas pedidas utilizando peças do material, a

palavra representar é polissêmica. Dessa forma, entende-se que o enunciado não se faz claro no que diz respeito a sua intenção com o uso desse comando, já que o aluno tem a possibilidade de desenhar as figuras no tamanho real, ou simplesmente montá-las sobre a carteira, ou representá-las sem cuidado com a escala. Dessa forma, não realizaria nenhum registro no papel para que a professora pudesse observar depois, ou seja, o enunciado dá uma abertura para que cada aluno interprete de um modo diferente.

Como já foi descrito, a partir das ideias apresentadas por essas duas professoras é que o grupo elaborou um esboço de tarefa composto por cinco itens (Apêndice A), objetivando sua implementação nas turmas dos professores. Porém, antes de levá-las para a sala de aula, cada professor adaptou-a da forma que julgava mais conveniente para cada uma de suas turmas (Apêndices B, C e D). Essa atitude dos professores demonstra que, apesar de o grupo ter discutido as possíveis habilidades a serem trabalhadas por meio da tarefa, por exemplo, operações algébricas, cada um direcionou de acordo com seu objetivo específico na turma e ano de escolaridade em que atuava.

A P-Alice, baseada no que havia sido discutido no grupo, realizou algumas adaptações na tarefa (Apêndice B). Foi possível observar que a professora manteve o primeiro item da tarefa tanto para as turmas do 7º ano, como para as do 8º ano, porém os demais itens, apesar de envolverem explorações com base no cálculo de áreas e perímetros, são propostos de formas diferentes para cada uma delas, conforme é apresentado nas Figuras 13 e 14.

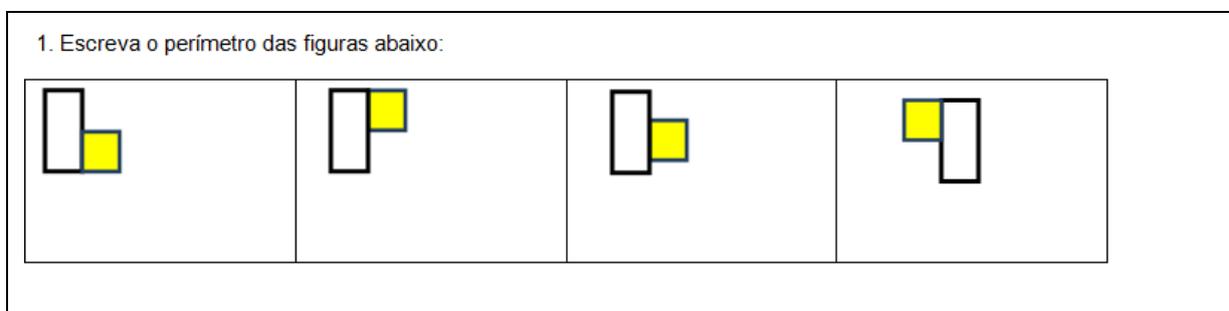


Figura 13: Item da tarefa para o 7º ano.
Fonte: autora.

3. Complete a tabela.

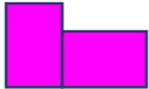
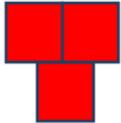
Polígono	Que área você vê, na cor	Qual o perímetro da figura
	Rosa	Rosa
	Vermelha	Vermelha
	Verde	Verde
	Rosa	Rosa

Figura 14: Item da tarefa para o 8º ano.
Fonte: autora.

A primeira formulação (Figura 13) visa apenas à exploração do perímetro, no sentido de levar o aluno do 7º ano a perceber que, utilizando peças iguais, podem ser formadas figuras diferentes que apresentam perímetros de mesma medida, ideia já colocada em discussão durante os encontros do grupo. Na segunda formulação (Figura 14), a professora explora o cálculo da área e do perímetro fazendo uso da composição de peças do material (8º ano).

Em relação à segunda tarefa elaborada por P-Andrea (Figura 7), que a professora a implementou tanto no 6º ano como no 7º ano, no entanto, seu objetivo para cada série era diferente. Ressalta-se isso com seguinte fala da professora:

Eu vou usar a mesma tarefa no sexto e no sétimo, mas no sétimo eu já vou fazer a exigência que eles utilizem a forma mais simplificada para escrever a área, por exemplo, $S \cdot S = S^2$, pois eles já estudaram essa matéria. No sexto, eu já vou querer que eles escrevam o comprimento, largura, perímetro e a área, mas não vou me preocupar como irão escrever isso (P- Andrea, quarto encontro).

A professora explicou que já trabalhou com os alunos do 6º ano situações que exigiam o cálculo da área de quadrado e retângulo, mas, como eles ainda não aprenderam a potenciação, não teve a intenção de encaminhar a tarefa nessa direção, sendo seu objetivo *a priori* somente o uso da linguagem simbólica. Para o 7º ano, além da linguagem simbólica, seu foco também foi utilizar a simplificação da escrita algébrica.

Desse modo, ao analisar a tarefa proposta pela P-Andrea, infere-se que ela apresenta potencial para alcançar seus objetivos de ensino e, ainda, serve como uma oportunidade de iniciar o uso da linguagem simbólica em turmas nas quais isso usualmente não ocorre (6º ano), ou seja, a tarefa poderá proporcionar a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica, de forma natural, surgindo como uma ferramenta para a simplificação da escrita.

Conforme já ressaltado pelos professores no momento da elaboração, como descrito no capítulo anterior, as tarefas, da forma que foram propostas, limitaram-se ao trabalho com polinômios de no máximo grau dois, uma vez que as peças que compõem o material manipulável representam figuras planas. No entanto, cabe salientar que compreendem que, por meio das tarefas elaboradas, é possível levar os alunos a generalizarem as “regras”, de modo análogo às determinadas nas operações com polinômios de grau dois para outros graus. Assim, pode-se concluir que as tarefas propostas pelos professores e pelo livro didático são recursos complementares que, quando utilizados de forma articulada, podem possibilitar que os alunos atribuam significado aos conceitos envolvidos. O que vemos, porém, é que muitas vezes o modo como são abordados pelos livros configuram-se apenas como um amontoado de expressões algébricas que não revelam significado algum para eles (PONTE, 2005).

No intuito de melhor detalhar elementos valorizados pelos professores no que diz respeito à atribuição de significados às operações algébricas, foram identificados três aspectos que serão discutidos a seguir.

6.3.1 Criar condições para uma gradativa transição da linguagem natural para a linguagem algébrica

Como destacado por P-Andrea, um de seus objetivos, ao elaborar/adaptar a tarefa para suas turmas, foi o de introduzir, já no 6º ano do Ensino Fundamental,

contextos que envolvessem aspectos da Álgebra e pudessem ser expressos em linguagem natural, para uma posterior transição para a linguagem algébrica (passando pela linguagem sincopada). Assim, uma das suas intenções era que, por meio da tarefa, os alunos percebessem que poderiam utilizar a linguagem sincopada como ferramenta para a simplificação da escrita, sendo, dessa forma, uma estratégia de ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico e também uma introdução para uma linguagem algébrica já no 6º ano, como aponta Ribeiro e Cury (2015).

As Figuras 15, 16 e 17 apresentam algumas resoluções que ilustram os tipos de linguagem utilizados por grupos de alunos no momento da realização da tarefa (linguagem natural, linguagem sincopada e a linguagem algébrica).

Figura	Comprimento	Largura	Perímetro (Contorno)	Superfície (Área)
	1 Palito de Sorvete	1 Palito de Sorvete	4 Palitos de Sorvete	$1 \cdot S^2$
	1 Palito de Fósforo	1 Palito de Fósforo	4 Palitos de Fósforo	$1 \cdot F^2$
	1 Palito de Sorvete e 1 P.F.	1 Palito de Sorvete	$3 \cdot S$ $2 \cdot F$	$1 \cdot F \cdot S$ $2 \cdot S^2$
	$1 S$ e $1 F$	$1 P.S$	$4 S$ e $2 F$	$1 \cdot S \cdot F$ $2 \cdot F \cdot S$
	$\frac{1}{2} S$	$1 P.S$	$3 P.S$	$\frac{1}{2} S^2$

Figura 15: Primeira resolução - Transição entre diferentes tipos de linguagem
Fonte: autora

Assim, por exemplo, na resolução mostrada na Figura 15, foi possível observar o uso de algumas abreviações de palavras, como S e também P.S, para representar palito de sorvete, e F para palito de fósforo, evidenciando que fizeram uso da linguagem natural e, no desenvolvimento da tarefa recorreram a alguns símbolos, ou seja, à linguagem sincopada.

Figura	Comprimento	Largura	Perímetro (Contorno)	Superfície (Área)
	1 P/S	1 P/S	4 P/S	1 P/S ²
	1 P/F	1 P/F	4 P/F	1 P/F ²
	1 P/F	1 P/S	2 P/F + 2 P/S	1 P/F x 1 P/S
	M P/S	M P/S	2 P/S	M P/S ²
	M P/S	1 P/S	3 P/S	M P/S x P/S

Figura 16: Segunda resolução - Transição entre diferentes tipos de linguagem
Fonte: autora

Na resolução mostrada pela Figura 16, os alunos optaram por utilizar desde o início da tarefa algumas abreviações: P/S para palito de sorvete; P/F para palito de fósforo, e a letra M para representar a quantidade “meio”, evidenciando, com isso, a fase sincopada da álgebra.

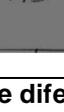
Figura	Comprimento	Largura	Perímetro (Contorno)	Superfície (Área)
	1 palito de sorvete	1 palito de sorvete	4 B. de sorvete	1 palito de sorvete S ²
	1 palito de fósforo	1 palito de fósforo	4 palito de fósforo	1 palito de fósforo F ²
	1 palito de sorvete	1 palito de fósforo	1 palito de sorvete + 1 palito de fósforo	1 palito de sorvete x 1 palito de fósforo
	2 e meio palito de fósforo	2 e meio palito de sorvete	4 e meio palito de sorvete	1 palito de sorvete x 2 e meio palito de fósforo
	2 palitos de fósforo	1 palito de sorvete	4 palitos de fósforo	2 palitos de fósforo x 1 palito de sorvete

Figura 17: Terceira resolução - Transição entre diferentes tipos de linguagem
Fonte: autora

Por fim, na resolução mostrada na Figura 17, os alunos mantiveram o uso da linguagem natural em todos os itens da tarefa. Essa diversidade de linguagem presente nas resoluções dos alunos evidencia a potencialidade da tarefa e seu papel na atribuição de significado à linguagem algébrica. Assim, ao utilizar abreviações,

evidenciam a habilidade em *desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente* (Figuras 16 e 17). Mesmo recorrendo somente ao uso da linguagem natural, a resolução mostrada na Figura 11 evidencia a habilidade do grupo em *revelar ideias algébricas nas diferentes linguagens e argumentar a respeito dessas ideias*.

Aqui, destaca-se que tanto o modo como a tarefa foi organizada (os elementos nela presentes que foram valorizados pela professora na fase de elaboração e implementação) quanto suas atitudes em sala de aulas criaram condições para os alunos se envolvessem em uma gradativa transição da linguagem natural para a linguagem algébrica. É evidente que, por si só, essa tarefa não propicia tal transição, mas evidencia que P-Andrea reconhece a importância de utilizar abreviações na linguagem como ação necessária à atribuição de significado à linguagem algébrica.

6.3.2 Promover a articulação entre diferentes tipos de representação

P-Andrea ressalta que julga importante a tarefa proporcionar ao aluno a articulação entre diferentes tipos de representações, por exemplo, ora são fornecidas as expressões e o aluno as representa por meio das peças do material, ora são dadas as figuras para escreverem as expressões que as representem. Dessa forma, os alunos são convidados a trabalhar com diferentes formas de representar ideias matemáticas.

A Figura 18 traz um item da tarefa proposta pela professora. Nele, é fornecida a expressão algébrica e, em seguida, é solicitada sua representação por meio das peças que constituem o material manipulável. Percebe-se nesse item que há diversas maneiras de representar a mesma expressão algébrica utilizando as mesmas peças do material, porém com formas distintas. Nesse caso, em um momento de sistematização, o professor poderia explorar que áreas iguais podem gerar perímetros diferentes.

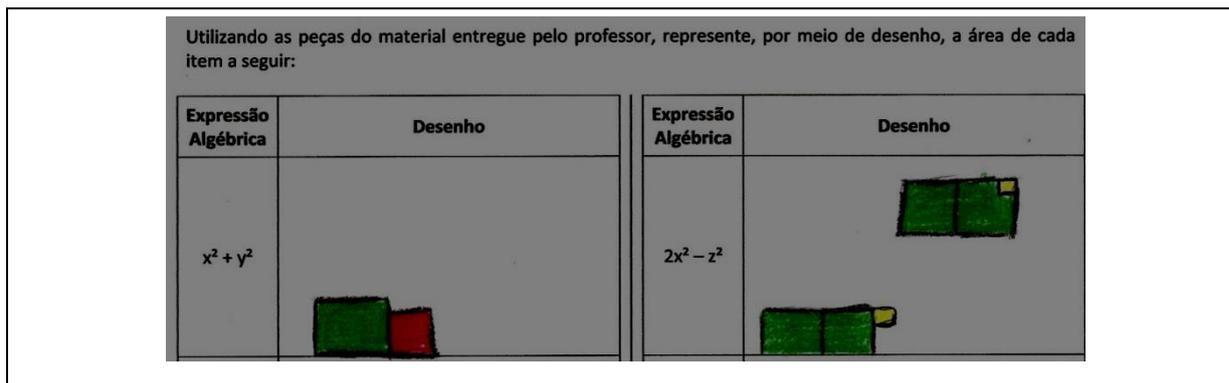


Figura 18: Recorte de tarefa proposta por P-Andrea.

Fonte: autora

Na Figura 19, apresenta-se outro item da tarefa. São fornecidas as figuras que devem ser montadas, para que, a partir delas, sejam representadas expressões algébricas para a área.

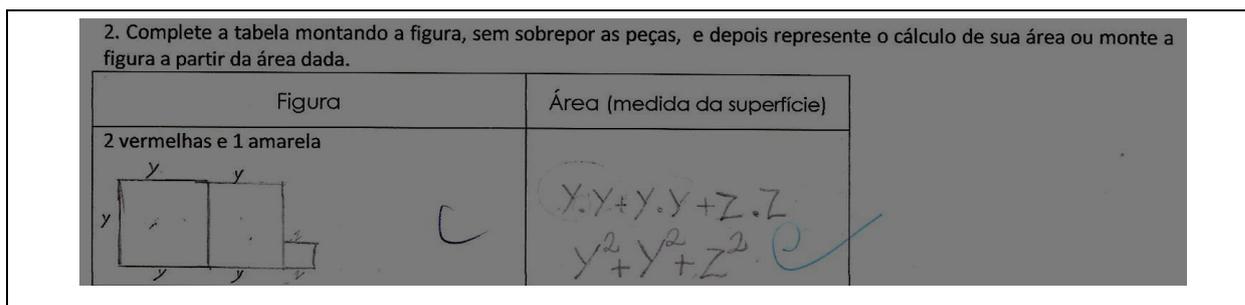


Figura 19: Recorte de tarefa proposta por P-Andrea.

Fonte: autora

Evidencia-se, pelas escolhas que realizou na organização da tarefa, que P-Andrea valoriza a articulação entre diferentes tipos de representação para a atribuição de significado às expressões algébricas. Essa necessidade de articular diferentes registros de representação, muitas vezes trabalhados em sala de aula de forma independente, é fundamental para a aprendizagem da Matemática e, em especial, para a elaboração, com significado, da linguagem algébrica, fato preconizado em recomendações presentes em documentos curriculares. Aqui, além da articulação entre Álgebra e Geometria, as questões propostas por P-Andrea possibilitam a conversão de um registro de representação em outro.

6.3.3 Oportunizar a simplificação da escrita no uso da linguagem simbólica

A P-Alice em seus relatos ressalta como julga importante o conhecimento matemático em relação a conceitos geométricos, nesse caso específico, sobre área e perímetro, bem como a distinção entre tais conceitos. Para isso, ela indica que seu objetivo é que, por meio da tarefa, os alunos consigam fazer tal distinção e que, durante o seu desenvolvimento, a simplificação da escrita surja como um facilitador para a escrita algébrica.

Visto isso, a seguir duas das resoluções apresentadas pelos alunos são retratadas a fim de ilustrar o modo como a tarefa foi proposta, assim como exemplos de simplificação identificados nas respostas.

Observe as figuras e a representação de suas medidas. Depois complete a tabela com o que se pede.

Figura	Nome	Cor	Dimensões		Perímetro (medida do contorno)	Área (medida da superfície)
			Comprimento	Largura		
	quadrado verde		x	x	4x	x.x
	Retângulo rosa		x	y	2x + 2y	2x.y
	Retângulo laranja		x	z	2x + 2z	2x.z
	quadrado vermelho		y	y	4y	4y.y

Figura 20: Primeira resolução – Simplificação da escrita
Fonte: autora

Por meio da resolução mostrada na Figura 20, percebe-se que os alunos empregaram a simplificação da escrita em todos os itens da tarefa em relação ao perímetro, por exemplo, $4x$ ao invés de $x + x + x + x$. Nota-se que, ao escrever os perímetros dos retângulos, não utilizaram o operador da adição, no entanto a simplificação foi utilizada. No que diz respeito à área, não houve a simplificação, no sentido de substituir $x.x$ por x^2 . Assim, embora não tenha havido reconhecimento por parte dos alunos dessa equivalência na escrita, a intervenção da professora nos grupos levou a essa linguagem.

Figura	Nome	Cor	Dimensões		Perímetro (medida do contorno)	Área (medida da superfície)
			Comprimento	Largura		
	Quadrado verde		x	x	$x+x+x+x=4x$ $2x+2x=$ $3x+xc$	$x \cdot x$
	Retângulo Rosa		y	x	$x+y+x+y=$ $y+x+y+x=$ $2y+2x$ $2y+2x=$ $2y+2x=$ $2y+2x=$	$x \cdot y =$ $y \cdot x =$
	Retângulo vinho		z	x	$z+x+z+x=$ $x+z+x+z=$ $2z+2x$ $2z+2x=$ $2z+2x=$	$x \cdot z =$ $z \cdot x =$
	quadrado vermelho		y	y	$y+y+y+y=$ $4y$	$y \cdot y$

Figura 21: Segunda resolução – Simplificação da escrita

Fonte: autora

Na resolução mostrada pela Figura 21, os alunos utilizaram diversas formas de escrita para representar a mesma situação, ou seja, escritas diferentes, porém equivalentes, algumas na forma mais simplificada, outras não. Assim, a tarefa proposta, juntamente com as intervenções da professora, favoreceu o uso de escritas equivalentes para representar os perímetros das figuras e, ainda, o uso da simplificação da escrita, que surgiu como ferramenta para facilitar seu trabalho, cabendo ao aluno decidir em que momento é mais conveniente usar uma escrita mais abreviada ou uma escrita mais longa.

Por fim, no Quadro 10, elencamos elementos evidenciados nesta unidade de análise, pelos quais foi possível perceber a presença de fatores nas ações dos professores envolvidos para que se mantivesse o nível cognitivo da tarefa.

Ações	Rastros que evidenciam os elementos
Favorecer a elaboração de ideias matemáticas	Proposição de tarefas que oportunizassem aos alunos a elaboração de ideias matemáticas que possibilitam atribuição de significados às operações algébricas.
Possibilitar o pensamento conceitual	Oferecer oportunidades para que os alunos pensem conceitualmente nessas operações, articuladas às áreas e aos perímetros das peças, e não apenas memorizem fatos ou procedimentos.
Articular as temáticas Álgebra e Geometria	Favorecimento do trabalho com tarefas que proporcionam a articulação entre conceitos algébricos aos geométricos.
Estabelecer conexões	Estabelece conexões com significados ou com ideias e conceitos matemáticos entre as propriedades envolvidas nas operações com monômios e polinômios.
Compreender antes de simbolização	Reconhece a possibilidade de compreensão de que as expressões algébricas podem ocorrer antes da introdução de nomenclaturas ou simbologia formal.
Utilizar diferentes	Apresenta situações que permite a exploração de diferentes sistemas de

<i>sistemas de representação</i>	representação
<i>Utilizar a simplificação da escrita algébrica</i>	Propõem tarefas que favorecem a utilização da simplificação da escrita algébrica de modo que o aluno reconheça a sua necessidade.

Quadro 10: Elementos que revelam a atribuição de significados à linguagem algébrica.

Fonte: autora.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, buscou-se evidenciar e discutir “*quais elementos foram valorizados por professores de Matemática em momentos de elaboração e implementação de tarefas no contexto da Álgebra*”. Para isso, foram observadas e analisadas ações dos professores de matemática participantes do grupo de estudos, tanto nos momentos destinados a elaboração e discussão das tarefas como na implementação nas suas turmas de alunos.

Durante o grupo de estudos, várias ações dos professores evidenciaram elementos que foram destacados e sistematizados posteriormente pela pesquisadora, e agrupados em três unidades: *constituição de um ambiente oportuno para a aprendizagem matemática, manutenção da demanda cognitiva da tarefa, atribuição de significados à linguagem algébrica*, discutidos no Capítulo 6.

Considerando a participação dos professores que buscavam seu desenvolvimento profissional a partir de suas práticas didáticas e pedagógicas, o grupo de estudo foi um espaço de reflexão e formação. Os encontros selecionados para a pesquisa evidenciaram que o grupo se envolveu em discussões de tarefas no contexto da Álgebra, levando em conta suas práticas que assinalavam as dificuldades de aprendizagem dos alunos quando o assunto é Álgebra.

Ao longo da convivência com os professores, foi possível perceber seu interesse e empenho em inovar e melhorar suas metodologias de ensino, ou seja, suas práticas didáticas, em especial na elaboração de tarefas que favorecessem a aprendizagem de seus alunos, uma vez que as opiniões, argumentos, reflexões apresentados pelos participantes do grupo foram todos considerados e respeitados. Na dinâmica do grupo, os professores foram convidados a interagir e refletir nos seus conhecimentos profissionais, constituindo, assim, um espaço para partilhar experiências, discutir e refletir aspectos de suas práticas.

No que diz respeito ao ensino da Álgebra, constatou-se que o trabalho desenvolvido por meio do movimento de idas e vindas, ou seja, no qual os professores elaboraram, modificaram tarefas e também propuseram tarefas que articulavam conceitos geométricos e algébricos, serve como uma oportunidade para esses professores aplicarem, em diferentes contextos, aos alunos dos anos finais do

Ensino Fundamental a fim de que desenvolvam o pensamento funcional e, conseqüentemente, o pensamento algébrico.

Cabe ressaltar que, durante a fase da implementação da tarefa, foram revelados elementos que evidenciaram o potencial da tarefa com base em aspectos relacionados ao ensino da Álgebra. Portanto, pode-se dizer que a tarefa apresentou os seguintes potenciais:

- Criar condições para uma gradativa transição da linguagem natural para a linguagem com simplificação (fase sincopada) e linguagem algébrica;
- Promover a articulação entre diferentes tipos de representação;
- Oportunizar a simplificação da escrita no uso da linguagem simbólica;
- Abstrair e generalizar

Outro aspecto, que vale salientar, remete aos encaminhamentos dados pelos professores à tarefa em sala de aula. Apesar de os três professores estimularem seus alunos por meio de seus questionamentos, apoio, sem dar respostas prontas, sem validar as resoluções tanto as erradas como as corretas, somente um deles conseguiu promover uma discussão coletiva acerca de cada item da tarefa, no sentido de sistematizar os conceitos matemáticos, levando em conta as diferentes resoluções apresentadas pelos alunos. Diante disso, enfatiza-se a importância do papel do professor, pois suas ações influenciam diretamente na aprendizagem de seus alunos. Em consequência, quando a tarefa não é explorada adequadamente, suas “potencialidades podem ser diminuídas e traduzir-se em experiências matemáticas pouco ricas para os alunos” (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2014, p. 354).

A identificação de regularidades, de padrões, de regras, a realização de generalizações são aspectos importantes na aprendizagem da Álgebra, no entanto os professores não solicitaram, diretamente na tarefa, esses aspectos. Um exemplo é caso da tarefa que envolve área e perímetro de polígonos em que se pode trabalhar a sistematização algébrica de fórmulas de modo que o aluno atribua significados a essas fórmulas.

Infere-se, portanto, que uma possibilidade para a implementação de tarefas, como as propostas no presente trabalho, é o uso de uma abordagem, em perspectivas investigativas e exploratórias, que desafie o aluno a cumprir etapas da tarefa a fim de que isso o ajude ele a construir significados para o conhecimento

matemático. Considera-se que o material produzido (produto educacional) poderá ser implementado ou utilizado em uma sala de aula por professores que buscam tarefas diferentes das rotineiras encontradas nos livros didáticos.

Conclui-se que o trabalho realizado de forma coletiva e desenvolvido em longo prazo oportunizou aos professores de matemática desempenhar um papel ativo no seu processo de formação, pois não se tratou de um curso imposto verticalmente, com ações direcionadas somente ao formador, mas de um espaço em que os docentes tiveram oportunidade de propor tarefas, encaminhar discussões, refletir nas tarefas propostas em sua sala de aula, compartilhar suas experiências, discutir os fatores que influenciam na aprendizagem dos alunos. Tudo isso culminou no desenvolvimento profissional do grupo de professores.

No entanto, embora tenha sido observado que o ambiente colaborou para que os professores refletissem nas suas práticas didáticas e pedagógicas, também se observou que alguns se mostraram mais envolvidos que outros. Logo, pode-se inferir que o engajamento é essencial, tanto para a aprendizagem do professor como para seu desenvolvimento profissional. Esses aspectos foram essenciais para evidenciar os elementos, já destacados, que forneceram indícios do desenvolvimento profissional (DP) dos professores participantes do grupo.

Entende-se que é possível, a partir deste estudo, avançar para outros, tal como investigar aspectos das práticas didáticas de professores que ensinam Matemática a respeito do trabalho com tarefas que envolvem o pensamento funcional, ou seja, no contexto da Álgebra, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano).

Espera-se que esta pesquisa possa provocar a reflexão dos professores acerca do trabalho com tarefas matemáticas no contexto da Álgebra e que o produto educacional gerado possa contribuir para o ensino da Álgebra, visando a atribuição de significados por parte dos alunos a conceitos algébricos, para além do tratamento “mecânico” e desarticulado utilizado no ensino de Álgebra e Geometria usualmente presente em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra**. 2014. 219 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 1977.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação: uma introdução às teorias e aos métodos**. Porto: Ed. Porto, 1994.
- BRASIL. Secretaria de Ensino Fundamental (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>, acessada em 01 de agosto de 2018.
- CYRINO, M.C.C.T.; JESUS, C.C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência e Educação**, Bauru, v.20, n. 3, p. 751-764, 2014.
- CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (Org.). **Elaboração de recursos multimídias para a formação de professores que ensinam Matemática**. Londrina: EDUEL - Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2016, p. 19-32.
- _____. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. **Boletim de Educação Matemática**, 24(38), 97-126.
- FERNANDES, R. K.; SAVIOLI, A. M. P. D. Características de Pensamento Algébrico Manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 5, p. 131-151, 2016.
- FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

GAFANHOTO, A., CANAVARRO, A. P. Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. In: NUNES, C. *et al.* (Eds.). **Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: APM, 2011, p. 1-15.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning**: legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LAUDARES, J. B. O conceito e a definição em matemática: aprendizagem e compreensão. In: Encontro Nacional de Educação Matemática 11. **Anais...** Curitiba, 2013, p. 1-13.

MENDES, M. T. ; TREVISAN, A. L. ; SOUZA, T. S. . Observação do trabalho em grupo como instrumento de avaliação da aprendizagem em aulas de Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, p. 581-593, 2016.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**, Lisboa: APM, 2007.

OPFER, V. D; PEDDER, D. Conceptualizing teacher professional learning. **Review of educational research**, v. 81, n. 3, p. 376-407, 2011.

OLIVEIRA,S.; LAUDARES,J. Pensamento algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. In: Encontro Mineira de Educação Matemática, 7. **Anais...** EMEM, São João Del Rei – MG, 2015, p. 1-10.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná** (DCE de Matemática). 2008.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Mathematicsteachers' knowledgeandpractices. In: GUTIÉRREZ, A.; BOENO, P (Ed.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: Past, presentand future. Roterdham: Sense, 2006, p. 461-494.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.) **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

_____. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.13 – 27.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor – explorando conceitos de equação e de função**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Tarefas matemáticas no ensino da álgebra. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática. **Anais...** Sesimbra, 2014, p. 353-367.

SOUZA, T. S.; TREVISAN, A. L. Desenvolvimento profissional de um grupo de professores de Matemática. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 13. **Anais...** Ponta Grossa: Editora da UEPG, 2015, p. 1-11.

SOUZA, T. S.; MONDEK, S. A.; TREVISAN, A. L. Desenvolvimento profissional de professores de Matemática por meio da reflexão compartilhada: retratos de uma experiência. In: Simpósio Nacional de Ensino e aprendizagem, 3. **Anais...** Londrina: Editora da UTFPR, 2016. v. 1. p. 1-8.

SOUZA, T. S.; TREVISAN, A. L.; VIEIRA, A. F. M. Tarefas enquanto material curricular para aulas de Matemática: reflexões de um grupo de professores. In: Fórum Nacional sobre currículos de Matemática, 4. **Anais...** São Paulo: USP, 2017. v. 1. p. 1-10.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 206-222, 2012.

STEIN, M.H.; SMITH, M.S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, n. 3, p. 268-275, 1998.

_____. Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. **Educação e Matemática**, n.105, p. 22-28, 2009.

STRASSACAPA, A.; ZUBIOLO, A. R.; TREVISAN, A. L.; SCHURMAN, H. A.; MONDEK, S. A. **Tarefas para o ensino e a aprendizagem de álgebra**. 2016. (Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Material didático).

TREVISAN, A. L. O que podemos aprender com as resoluções 'incorretas'? Uma experiência com sistemas de equações lineares. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 2, p. 1-14, 2015.

_____; MENDES, M. T. Aprendizagens de um grupo de professores que discutem avaliação da aprendizagem escolar. In: Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática, 5. **Anais...** Campinas. Editora da Unicamp, 2015a, p. 115-127.

_____; MENDES, M. T. Currículos praticados e avaliados em aulas de Matemática: o papel dos mitos e dos ritos perpetuados no cotidiano escolar. In: Fórum Nacional Sobre Currículos de Matemática: Investigações, Políticas e Práticas Curriculares, 3. **Anais...** Ilha Solteira: Unesp, 2015b, p. 211-221.

_____; AMARAL, R. G. A Taxionomia revisada de Bloom aplicada à avaliação: um estudo de provas escritas de Matemática. **Ciência & Educação**, v. 22, p. 451-464, 2016.

_____; SOUZA, T. S.; MONDEK, S. A. Práticas avaliativas de professores de Matemática: uma análise na perspectiva do desenvolvimento profissional docente. In: Congresso Nacional de Formação de Professores (CNFP), 3. **Anais...** Águas de Lindóia: Editora da Unesp, 2016,p. 1-10.

_____; DELAMUTA, B. H.; SOATO, A. M. L. O que pensam professores a respeito de avaliação. **Unión**, v. 49, p. 61-72, 2017.

_____; SANTOS, D. P.; SOUZA, T. S. Caderno de tarefas para o ensino de álgebra elaborado no âmbito de um grupo de estudos de professores de Matemática. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 14. **Anais...** Cascavel: SBEM, 2017, p. 1-8.

THOMPSON, I. **Mental calculation**. Mathematics Teaching.40-42,2009.

VIEIRA, A. F. M.; TREVISAN, A. L. Novas enunciações de uma tarefa: reflexões de um grupo de professores de Matemática. In: Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 7. **Anais...** Canoas: Ulbra, 2017. v. 1. p. 1-10.

VIEIRA, A. F. M.; TREVISAN, A. L.; BALDINI, L. A. F.; ROCHA, Z. F. D. C. Conhecimentos mobilizados por uma professora na elaboração e implementação de uma tarefa matemática, **Revista da SBEM-RS**, 2018, no prelo.

VIEIRA, A. F. M.; TREVISAN, A. L.; BALDINI, L. A. F.; DALTO, J. O. Manifestações da linguagem algébrica evidenciadas na produção escrita de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, **Revista Paranaense de Educação Matemática**, 2018, no prelo.

VIOLA DOS SANTOS, J. R..**O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em Matemática**. 2007, 108 p. Dissertação. (Mestradoem Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

APÊNDICES

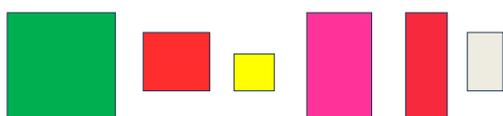
APÊNDICE A

Primeiro esboço da tarefa constituído pelo grupo

1) Complete as tabelas.

Nome	Polígono	Cor	Dimensões		Área
			comprimento	Largura	
Ana					
					
B					
					
C					
					

2) Utilizando as peças do material entregue pelo professor, represente a área de cada item a seguir:



a) $x^2 + y^2$

b) $x^2 + y^2 + y^2$

c) $xy + z^2$

d) $3xy + y^2$

e) $2x^2 - z^2$

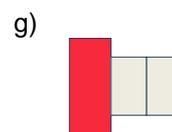
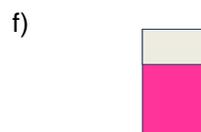
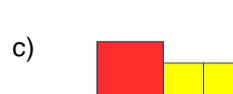
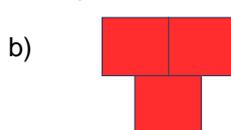
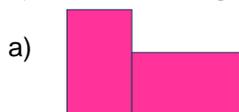
f) $2xy + 3xz$

g) $x^2 - y^2$

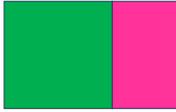
h) $xy + xy - y^2$

i) $2xz + 2xy$

3) Utilizando a linguagem algébrica, represente as seguintes áreas.



4) Complete as lacunas em branco da tabela a seguir:

Polígono	Comprimento	Largura	Área
			_____ ou _____
			$2xy + xz$ ou _____
	$x + y$	x	_____ ou _____
			_____ ou _____
	$3z + y$	y	_____ ou _____

Fonte : autora

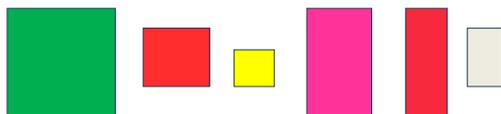
APÊNDICE B

Versão final da tarefa constituída no grupo

1) Complete as tabelas.

Nome	Polígono	Cor	Dimensões		Área
			comprimento	Largura	
					
					
					
					
					
					

2) Utilizando as peças do material entregue pelo professor, represente a área de cada item a seguir:



a) $x^2 + y^2$

b) $x^2 + 2y^2$

c) $xy + z^2$

d) $3xy + y^2$

e) $2x^2 - z^2$

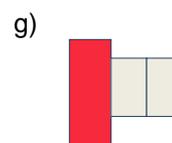
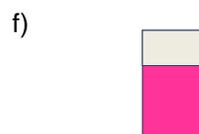
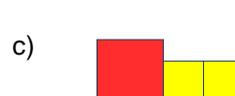
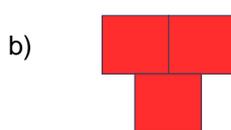
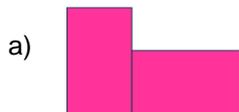
f) $2xy + 3xz$

g) $x^2 - y^2$

h) $2xy - y^2$

i) $2xz + 2xy$

3) Utilizando a linguagem algébrica, represente as seguintes áreas.



4) Complete as lacunas em branco da tabela a seguir:

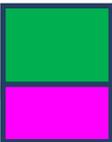
Polígono	comprimento	Largura	Area
			_____ ou _____
			$2xy+xz$ ou _____
	$3z+y$	Y	_____ ou _____
			_____ ou _____
	$y - z$	X	_____ ou _____

Fonte: autora

APÊNDICE C

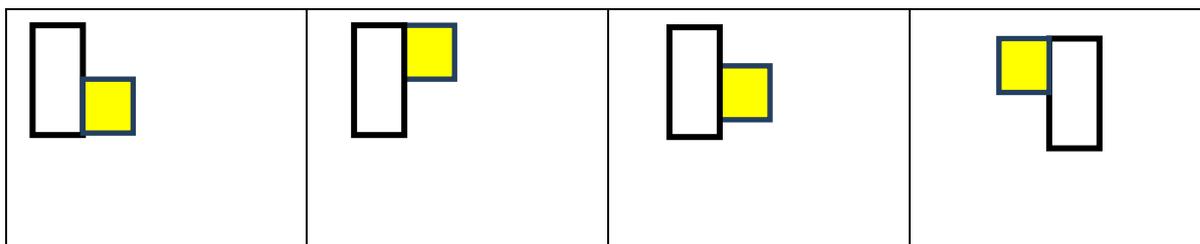
Tarefas adaptadas pela P- Alice

7º ano						
Parte I						
Observe as figuras e a representação de suas medidas. Depois complete a tabela com o que se pede.						
Figura	Nome	Cor	Dimensões		Perímetro (medida contorno)	do Área (medida da superfície)
			Comprimento	Largura		

Parte II

1. Escreva o perímetro das figuras abaixo:



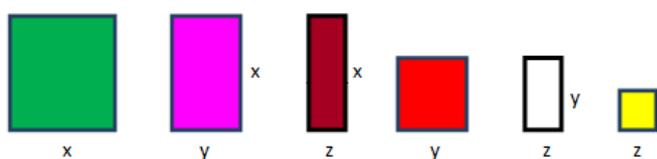
2. Complete a tabela montando a figura, sem sobrepor as peças, e depois represente o cálculo de sua área ou monte a figura a partir da área dada.

Figura	Área (medida da superfície)
2 vermelhas e 1 amarela	
1 amarela e 1 grená	
2 brancas e 1 rosa	
1 vermelha, 1 amarela e 1 branca	

	$x y + x z + y^2$
	$y z + 3 z^2$

8º ano

Parte I



Observe as figuras e a representação de suas medidas. Depois complete a tabela com o que se pede.

Figura	Nome	Cor	Dimensões		Perímetro (medida do contorno)	Área (medida da superfície)
			Comprimento	Largura		
						
						
						
						

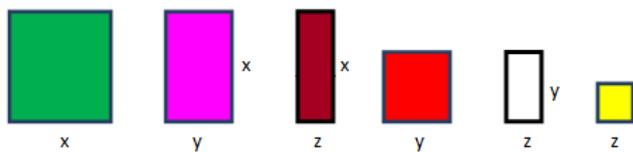
						
						

Parte II

A área $x^2 + z^2$ pode ser representada pelas figuras ao lado, ou outras formas que combinem a figura verde com a figura amarela.



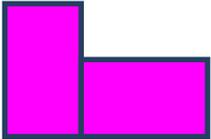
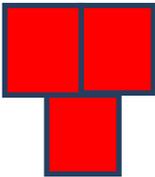
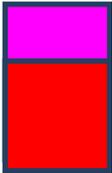
Utilizando as peças do material entregue pelo professor, represente a figura sem sobrepor às peças, e depois apresente o cálculo de sua área.



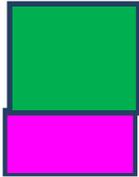
Área	Representação
$x^2 + y^2$	
$x^2 + y^2 + y^2$	
$xy + z^2$	
$2y^2 + zy$	

$x \cdot (x + y)$	
-------------------	--

3. Complete a tabela.

Polígono	Que área você vê na cor	Qual o perímetro da figura
	Rosa	Rosa
	Vermelha	Vermelha
	Verde	Verde
	Rosa	Rosa

4. Complete a tabela

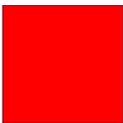
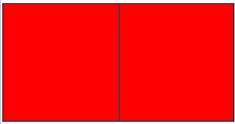
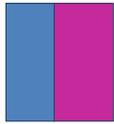
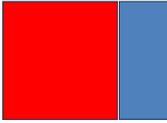
Polígono	Comprimento	Largura	Perímetro	Área
	x	$(x + y)$	$x + x + (x + y) + (x + y)$ ou $x + x + x + y + x + y$ ou $4x + 2y$	$x \cdot x + y \cdot y$ ou $x^2 + y^2$

				
	$2z + y$	Y		
	$x + y$	X		

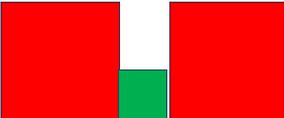
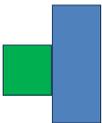
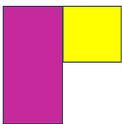
Fonte: P- Alice

APÊNDICE D

Tarefa adaptada pela P- Andrea

6º e 7º anos				
1- Complete corretamente a tabela:				
Figura	Comprimento	Largura	Perímetro (Contorno)	Superfície (Área)
				
				
				
				
				
				
				
				
				

2- Complete corretamente a tabela:

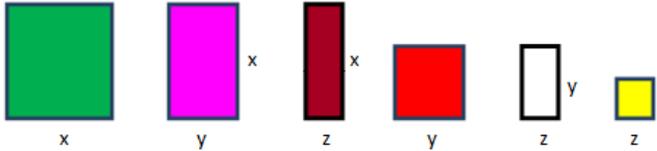
Figura	Superfície (Área)
	
	
	$2F^2 + S.F$
	
	
	$\frac{1}{2}S^2 - F^2$

APÊNDICE E

Tarefa adaptada pelo P- Gustavo

8º ano

Parte I



Observe as figuras e a representação de suas medidas. Depois complete a tabela com o que se pede.

Figura	Nome	Cor	Dimensões		Perímetro (medida do contorno)	Área (medida da superfície)
			Comprimento	Largura		
						
						
						
						
						

						
---	--	--	--	--	--	--

Parte II

A área $x^2 + z^2$ pode ser representada pelas figuras ao lado, ou outras formas que combinem a figura verde com a figura amarela.



Utilizando as peças do material entregue pelo professor, represente a figura sem sobrepor às peças, e depois apresente o cálculo de sua área.

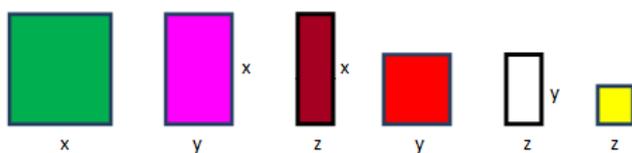
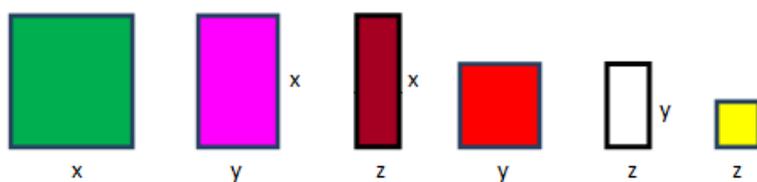


Figura	Área (medida da superfície)
1 amarela e 1 grená	
2 verdes, 1 rosa e 1 grená	
2 brancas e 1 rosa	

1 vermelha, 1 amarela e 1 branca	
2 vermelhas e 1 amarela	

Parte III



Utilizando as peças do material entregue pelo professor, represente, por meio de desenho, a área de cada item a seguir:

Expressão Algébrica	Desenho
$x^2 + y^2$	
$x^2 + 2y^2$	
$xy + z^2$	
$3xy + y^2$	

$2x^2 - z^2$	
$2xy + 3xz$	
$x^2 - y^2$	
$2xy - y^2$	

Fonte: P-Gustavo

ANEXO – Produto Educacional