

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PAULO ROBERTO COSTA PORTO

A ARITMÉTICA MODULAR DAS ESTRELAS E DOS CHRYZODES

CURITIBA

2024

PAULO ROBERTO COSTA PORTO

A ARITMÉTICA MODULAR DAS ESTRELAS E DOS CHRYZODES

Modular arithmetic of stars and Chryzodes

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.

Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani.

Coorientadora: Profa. Dra. Mari Sano.

CURITIBA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba



PAULO ROBERTO COSTA PORTO

A ARITMÉTICA MODULAR DAS ESTRELAS E DOS CHRYZODES

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 02 de Dezembro de 2024

Dra. Patricia Massae Kitani, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Adriano Verderio, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Fernanda Diniz De Melo Hernandez, Doutorado - Universidade Estadual de Maringá (Uem)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 03/12/2024.

Dedico este trabalho à minha avó Maria Aparecida, ainda entre nós, e em memória de meus avós Eduardo, Maria Magdalena e Antonio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter colocado em minha vida a oportunidade, bem como por ter me dado a sabedoria e a perseverança necessárias para a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos, que ao longo dos últimos anos estiveram ao meu lado, me ajudando de diversas formas.

Agradeço aos meus colegas de curso do PROFMAT, que através de seu companheirismo e união me incentivaram a completar esta etapa.

Agradeço aos meus pais, que com seus esforços, me possibilitaram chegar a este ponto de minha vida e, mesmo distantes nesse momento, me acompanham em minha trajetória.

Agradeço a todos os professores que passaram pela minha vida até aqui, pois todos contribuíram para minha formação, com seus conhecimentos e ensinamentos.

Agradeço especialmente aos docentes da UTFPR do campus Curitiba, em particular às professoras Patrícia e Mari, que pacientemente me auxiliaram e orientaram ao longo deste trabalho com muita dedicação e excelência.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

RESUMO

PORTO, Paulo Roberto Costa. **A aritmética modular das estrelas e dos Chryzodes**. 85 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

Este trabalho trata de padrões aritméticos formados em figuras específicas chamadas polígonos estrelados e Chryzodes. O foco deste trabalho é aprimorar a base teórica e a capacidade de aplicação da aritmética modular no ensino básico. Os polígonos estrelados apresentam padrões relacionados à soma enquanto os Chryzodes se relacionam a ciclos de multiplicações. Neste trabalho selecionamos e descrevemos alguns destes padrões, enquanto abordamos a matemática presente em cada caso através da aritmética modular, na maioria dos casos utilizando as propriedades das congruências aritméticas. Também disponibilizamos construções dinâmicas através do software GeoGebra e propomos atividades para que o leitor, docente ou discente, possa aplicar os conceitos tratados.

Palavras-chave: Aritmética; polígonos estrelados; Chryzodes; congruências aritméticas; desenho geométrico.

ABSTRACT

PORTO, Paulo Roberto Costa. **Modular arithmetic of stars and Chryzodes**. 85 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

This study examines arithmetic patterns formed in specific shapes named star polygons and Chryzodes. The focus of this work is to improve the theoretical basis and the ability to apply modular arithmetic in elementary school. Star polygons show patterns related to addition while Chryzodes are related to multiplication cycles. In this work, we select and describe some of those patterns while addressing the mathematics present in each case through modular arithmetic, in most cases using the properties of arithmetic congruences. We also provide dynamic constructions through the GeoGebra software and propose activities so that the reader, teacher, or student, can apply the concepts discussed.

Keywords: Arithmetic; star polygons; Chryzodes; arithmetic congruences; geometric drawing.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Polígono estrelado e Chryzode	13
Figura 2.1 – Polígono $\{5/2\}$	18
Figura 2.2 – Exemplos de polígonos estrelados	20
Figura 2.3 – Exemplos de figuras que não são polígonos estrelados	20
Figura 2.4 – Figuras congruentes associadas às combinações do tipo $\{m/a\}$ e $\{m/(m-a)\}$	21
Figura 2.5 – Figuras obtidas por combinações $\{12/a\}$, com $(12, a) = d \neq 1$	23
Figura 2.6 – Figuras congruentes produzidas a partir de rotações das figuras iniciais $\{m/a\}$	25
Figura 2.7 – Portas com as quais cada hóspede a interage, com $m = 7$ e $0 < a \leq 7$	27
Figura 2.8 – Portas com as quais cada hóspede a interage, com $m = 10$ e $0 < a \leq 10$	28
Figura 2.9 – Movimentação dos hóspedes 5 e 10, com $m = 10$	30
Figura 3.1 – Exemplo de Chryzode	31
Figura 3.2 – Construção do Chryzode de multiplicação por 3, módulo 10 - I	32
Figura 3.3 – Construção do Chryzode de multiplicação por 3, módulo 10 - II	33
Figura 3.4 – Construção do Chryzode de multiplicação por 9, módulo 12	34
Figura 3.5 – Alguns exemplos de Chryzodes	35
Figura 3.6 – Chryzodes de multiplicação por 3 em diversos módulos	36
Figura 3.7 – Chryzodes de multiplicação por 5 em diversos módulos	37
Figura 3.8 – Chryzodes com multiplicador 0 e 1	38
Figura 3.9 – Chryzodes obtidos fixando-se m e variando a de 2 até 7	39
Figura 3.10 – Chryzodes obtidos fixando-se m e variando a de 8 até 10	40
Figura 3.11 – Alguns Chryzodes interessantes	41
Figura 3.12 – Mais alguns Chryzodes interessantes	42
Figura 3.13 – Chryzodes onde $a = (m - 1)$	43
Figura 3.14 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{2}$	44
Figura 3.15 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{3}$	45
Figura 3.16 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{4}$	45
Figura 3.17 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{b} + 1$	46
Figura 3.18 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} + 1$	47
Figura 3.19 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{b} - 1$	48
Figura 3.20 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} - 1$	49
Figura 3.21 – Chryzodes com 100 pontos - Comparação de casos $a = 10 \cdot k + 1$ e $a =$ $100 - 10 \cdot k + 1$	50
Figura 3.22 – Chryzodes com 100 pontos - Comparação de casos $a = 10 \cdot k + 1$ e $a =$ $100 - 10 \cdot k + 1$	51

Figura 4.1 – Exemplos de construções com diferentes valores de m	57
Figura 4.2 – Exemplos de construções com $m = 8$ e $m = 10$	57
Figura 4.3 – $m = 30$ e $a = 14$	61
Figura 4.4 – $m = 30$ e $a = 15$	62
Figura 4.5 – $m = 30$ e $a = 16$	62
Figura 4.6 – Polígono estrelado $\{8/3\}$	65
Figura 4.7 – Polígono estrelado $\{10/3\}$	66
Figura 4.8 – Desenho de um círculo com 16 pontos	68
Figura 4.9 – Desenho da primeira forma obtida	69
Figura 4.10–Cálculo de α e desenho das formas	69
Figura 4.11–Cálculo de α e desenho das demais formas	70
Figura 4.12–Base para os Chryzodes	73
Figura 4.13–Resíduos módulo 6	73
Figura 4.14–Chryzode de multiplicação por 5, módulo 6	74
Figura 4.15–Preenchimento dos valores relativos à cada resíduo módulo 6	75
Figura 4.16–Chryzode de multiplicação por 9, módulo 6	76
Figura 4.17–Preenchimento dos valores relativos à cada resíduo módulo 6	76

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Justificativa para a escolha do tema	12
1.1.1	Relevância à educação básica	13
1.1.2	Impactos nas práticas em sala de aula	14
1.2	Revisão da bibliografia	14
1.3	Objetivos	15
1.3.1	Objetivo geral	15
1.3.2	Objetivos específicos	15
1.4	Procedimentos metodológicos	15
2	POLÍGONOS ESTRELADOS	16
2.1	Condição de existência	19
2.2	Contagem de polígonos estrelados e de figuras congruentes	22
2.3	O problema do Hotel	26
3	CHRYZODES	31
4	PROPOSTAS DE ATIVIDADES	52
4.1	Atividade 1 - O problema do Hotel	52
4.1.1	Informações gerais.	52
4.1.2	Objetivos	52
4.1.3	Material didático.	53
4.1.4	Encaminhamentos metodológicos	53
4.2	Atividade 2 - Construindo estrelas	55
4.2.1	Informações gerais.	55
4.2.2	Objetivos	55
4.2.3	Material didático	55
4.2.4	Encaminhamentos metodológicos	56
4.3	Atividade 3 - Desenhando Chryzodes	59
4.3.1	Informações gerais.	59
4.3.2	Objetivos	59
4.3.3	Material didático	59
4.3.4	Encaminhamentos metodológicos	60
4.4	Atividade 4 - Encontrando polígonos	63
4.4.1	Informações gerais	63
4.4.2	Objetivos	63

4.4.3	Material didático.	63
4.4.4	Encaminhamentos metodológicos	64
4.5	Atividade 5 - Polígonos congruentes	67
4.5.1	Informações gerais	67
4.5.2	Objetivos	67
4.5.3	Material didático	67
4.5.4	Encaminhamentos metodológicos	68
4.6	Atividade 6 - Jogo da multiplicação.	71
4.6.1	Informações gerais	71
4.6.2	Objetivos	71
4.6.3	Material didático	71
4.6.4	Encaminhamentos metodológicos	72
5	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICE A - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 1	81
	APÊNDICE B - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 3	82
	APÊNDICE C - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 4	83
	APÊNDICE D - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 6	84

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

“A matemática é a rainha das ciências e a aritmética é a rainha das matemáticas”. Esta frase, atribuída a Johann Carl Friedrich Gauss, famoso matemático alemão, exemplifica a beleza e o poder da compreensão da aritmética no estudo da matemática em geral.

O primeiro contato da maioria dos estudantes com a matemática se dá com o aprendizado da aritmética. Os processos de contagem, operações básicas e relações entre os números naturais servem como base para todo o desenvolvimento matemático que virá ao longo do ensino fundamental e médio. Destacamos aqui as congruências aritméticas e sua relação próxima com as operações de multiplicação e divisão, abordadas no PROFMAT na disciplina de aritmética, que tem como base a obra *Aritmética*, escrita por Abramo Hefez (2016).

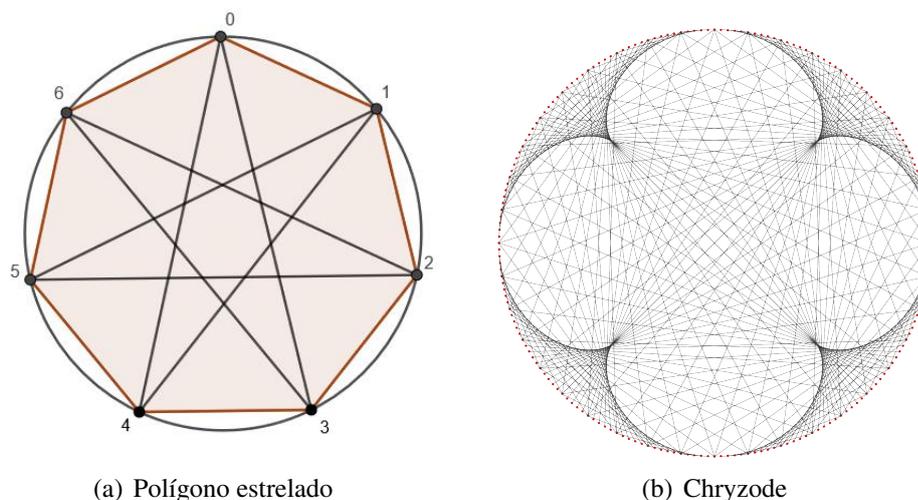
Sobre a congruência aritmética:

Uma das ferramentas mais importantes na teoria dos números é a aritmética modular, pois a mesma envolve o conceito de congruência. Onde suas bases teóricas foram iniciadas pelo matemático suíço Euler, em meados de 1750, tornando-se mais acessível através das ideias do matemático alemão Carl Friedrich Gauss[...] (Almeida, 2019, p. 11).

Sendo assim, se justifica a exploração das propriedades e possíveis aplicações deste tema para o enriquecimento profissional dos docentes da educação básica, que é um dos objetivos desta dissertação.

Quanto às aplicações das congruências abordadas neste trabalho, se tratam dos polígonos estrelados ou estrelas de Poinot, e dos Chryzodes. Estas aplicações foram selecionadas, para além do interesse pessoal, devido ao fato de que há uma infinidade de padrões criados e que podem ser observados através da aritmética. Além disso, especificamente no caso dos Chryzodes há uma escassez de publicações tratando do assunto. Portanto, se faz relevante a formalização e demonstração de alguns dos conceitos relacionados, bem como sugestões metodológicas. Na Figura 1.1 temos um exemplo de polígono estrelado e um exemplo de Chryzode.

Figura 1.1 – Polígono estrelado e Chryzode



(a) Polígono estrelado

(b) Chryzode

Fonte: Autor.

1.1.1 RELEVÂNCIA À EDUCAÇÃO BÁSICA

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca o estudo da aritmética como um campo central dentro da área de matemática :

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas (Brasil, 2018, p. 265).

De fato, o estudo da aritmética é fundamental para a compreensão dos demais campos dentro da matemática no ensino básico, porém, a BNCC ignora em seu texto a aritmética modular. Entretanto, há uma unidade temática inteiramente destinada ao estudo da teoria dos números, onde, dentre outras competências, “[...] espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras.” Desta forma, justifica-se o estudo e a aplicação de técnicas da aritmética modular na educação básica de forma a diversificar estratégias de resolução e facilitar a compreensão de diversos conceitos, inclusive relacionados a outros campos de estudo. Além disso, examinar a matemática elementar sob uma perspectiva avançada pode contribuir significativamente para que os professores aprimorem sua compreensão conceitual da disciplina, que é fundamental para fortalecer a sua base pedagógica.

Neste trabalho abordaremos conceitos e atividades diretamente relacionados a competências e habilidades listadas na BNCC. O foco do trabalho está nas habilidades do sétimo ano do ensino fundamental mas é interessante observar que há habilidades também do quarto e do sexto ano, mostrando uma ligação entre os conceitos mais fundamentais da aritmética e o tema abordado. As habilidades estão listadas abaixo:

- (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
- (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
- (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
- (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
- (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

1.1.2 IMPACTOS NAS PRÁTICAS EM SALA DE AULA

Espera-se que, com o auxílio deste trabalho, o docente possa ter uma referência das propriedades da aritmética modular, além de ter um escopo básico de atividades sobre o tema. Ao aprofundar seu conhecimento sobre o assunto deste trabalho, incorporando as ferramentas e teoremas da aritmética modular em diversos objetos de estudo abordados ao longo do ensino fundamental e médio, o docente pode reconhecer as diversas aplicabilidades das ferramentas estudadas, de modo a enriquecer as abordagens e práticas em aula.

As atividades propostas no quarto capítulo também podem ser adaptadas e revisadas para trabalhar conceitos mais básicos de multiplicação e divisão em casos de defasagem ou adaptadas em atividades para estudantes do primeiro ciclo do ensino fundamental.

1.2 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Para a elaboração deste trabalho, utilizamos livros, dissertações e artigos, de modo a fundamentar cada capítulo.

A teoria básica de aritmética modular mencionada ao longo do texto tem como referências as publicações de Hefez (2016), Polcino e Coelho (2006) e Plínio (2011). Estas três obras são livros introdutórios da teoria elementar dos números, com abordagens e demonstrações distintas.

O livro *Aritmética*, de Abramo Hefez, é o livro base da disciplina no curso PROFMAT e discorre sobre vários elementos da aritmética, com ênfase em divisibilidade e congruências, já os livros *Números: Uma introdução à matemática*, de César Polcino Milies e Sônia Pitta Coelho e o livro *Introdução à teoria dos números*, de José Plínio de Oliveira Santos, são obras direcionadas a estudantes de graduação, com demonstrações diretas e problemas resolvidos.

Referente aos polígonos estrelados e Chryzodes encontramos as dissertações de mestrado de Bruno Cole (2013), que trata dos polígonos estrelados regulares e Dionatan Konageski (2019), que é um dos poucos trabalhos que abordam os Chryzodes. Também utilizamos notas de aula de autoria de Karl Scheffel (2004) sobre congruências e polígonos estrelados publicadas pela Universidade Deanza, na Califórnia. Estas notas foram sistematicamente revisadas e servem como base para algumas das demonstrações presentes neste trabalho.

Já as atividades propostas no último capítulo são de autoria própria, embasadas nos conceitos apresentados ao longo do trabalho, bem como no artigo de Hodgson (2004).

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é aprofundar o escopo de conhecimento sobre a teoria dos números e a aritmética modular para professores de matemática, mostrando aplicações e ferramentas úteis para docentes do ensino médio.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar e elencar os axiomas, teoremas e propriedades das congruências aritméticas.
- Explorar as propriedades de objetos matemáticos e geométricos relacionados às congruências aritméticas.
- Propor práticas de sala de aula condizentes com os conceitos abordados pelo trabalho.

1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho está estruturado em 4 capítulos, sendo o primeiro esta introdução, seguindo de um capítulo dedicado aos polígonos estrelados e de um capítulo dedicado aos Chryzodes. O quarto e último capítulo apresenta algumas propostas de encaminhamento metodológico para professores de ensino fundamental e médio. Para a construção das imagens, utilizamos o software livre de matemática dinâmica GeoGebra.

2 POLÍGONOS ESTRELADOS

Neste capítulo abordaremos os polígonos estrelados, ou estrelas de Poinot. Segundo o artigo de Brigaglia, Palladino e Vaccaro (2018), o estudo de tais formas geométricas nos remete inicialmente ao século VI, quando Boethius (c. 480 - 524) fala sobre pentágonos estrelados e mostra um pentagrama inscrito num círculo, em sua obra *Geometria*. Tais figuras eram amplamente conhecidas na época e estão presentes em diversas composições artísticas e artesanatos produzidos pelos gregos e árabes, mas o estudo detalhado de suas propriedades progride principalmente durante a Idade Média, quando Giovanni Campano (1220 - 1296) descreve novamente os pentagramas e a propriedade de que a soma de seus ângulos internos é igual a dois ângulos retos. A partir de suas próprias traduções das obras de Euclides, Adelard of Bath (1080 - 1152) publicou o primeiro estudo sistemático dos polígonos estrelados, onde deduz que a soma dos ângulos internos de polígonos estrelados relaciona-se com o número de intersecções entre cada lado e os demais. Estes resultados também foram obtidos e publicados, provavelmente de forma independente, por Thomas le Byer (1290 - 1349), conhecido como Bradwardine, que publicou um capítulo onde aborda os polígonos estrelados chamado *figurae egredientium angulorum*, ou figuras dos ângulos salientes, em tradução livre, na primeira parte de sua obra *Tractatus de proportionibus velocitatum*. Bradwardine também separa as figuras obtidas em “ordens” e descreve algumas de suas características em uma série de afirmações.

No século XVI, Charles de Bouvelles (1479 - 1567) estudou a decomposição de pentágonos regulares em triângulos, obtendo polígonos estrelados e novamente relacionou a soma dos ângulos internos à quantidade de triângulos. Jan Brožek (1585 - 1652) progrediu esta teoria no século seguinte e, usando os ângulos centrais da circunferência circunscrita, demonstrou a propriedade de que é possível se criar uma infinidade de polígonos estrelados tais que a soma de seus ângulos internos seja igual a dois ângulos retos.

Posteriormente, estes estudos serviram de base para que outros matemáticos desenvolvessem suas teorias sobre os poliedros estrelados, um tipo de poliedro convexo cuja construção se relaciona com os polígonos estrelados. Dentre tais estudos, destacamos os de Albrecht Dürer (1471-1528), que apresentou construções geométricas para polígonos de três a dezesseis lados, além de figuras estreladas construídas a partir de arcos de circunferências.

Em 1619, Johannes Kepler (1571-1630) apresentou definições e demonstrações de poliedros estrelados e abordou os polígonos estrelados no artigo *Harmonices Mundi*. Posteriormente Louis Poinot (1777-1859) publicou estudos apresentando aplicações para os polígonos estrelados. É interessante comentar que Poinot desconhecia os estudos de Kepler, assim ele reapresentou algumas das figuras descritas por Kepler.

O estudo dos polígonos estrelados avançou então a partir de vários artigos publicados ao redor do mundo, dos quais destacamos alguns neste trabalho.

Como ponto de partida para o estudo dos polígonos estrelados, tomaremos o problema do “Hotel Circular”, proposto por Hodgson e Cassidy no artigo “*Because a door has to be open or closed...*” (1982) e revisitado por Hodgson posteriormente em seu artigo “*The mathematical education of school teachers: A baker’s dozen of fertile problems*” (2004). O problema descrito propõe um hotel onde há m hóspedes e m quartos dispostos ao redor de um pátio circular, numerados de 1 a m . Os hóspedes participam de um jogo onde todas as portas se iniciam fechadas e os hóspedes passam pelas portas interagindo com elas (abrindo ou fechando). Os hóspedes terminam sua rodada apenas quando interagem pela primeira vez com a porta m . O primeiro hóspede passa por cada porta, partindo da porta de número 1 e abre todas as portas, uma a uma. O segundo hóspede então passa pelas portas, na mesma ordem, fechando as portas de número par. O terceiro hóspede repete o processo realizado pelos hóspedes anteriores, interagindo com cada porta de número múltiplo de 3, abrindo as portas fechadas e fechando as abertas. Isto segue até o hóspede de número m . Ao final do jogo, quais portas estarão abertas e quais portas estarão fechadas?

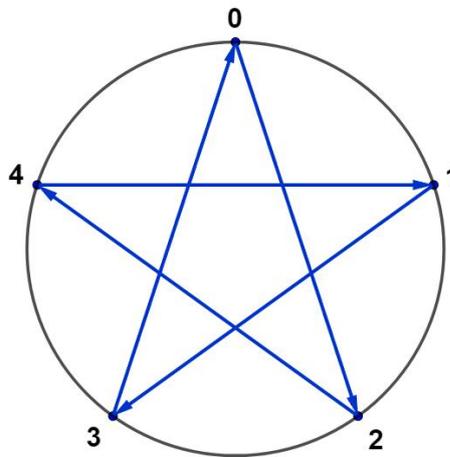
Uma possível abordagem para solucionar tal problema é observá-lo a partir das relações de congruência presentes nos polígonos estrelados. Neste capítulo demonstraremos tais relações e então retornaremos ao problema enunciado.

Os polígonos estrelados são obtidos ao se distribuir uma quantidade m , com $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, fixa de pontos igualmente espaçados ao redor de uma circunferência e então ligar cada ponto p ao ponto $(p + a)$ módulo m formando os vértices do polígono. O processo de construção consiste em selecionar um ponto inicial, cuja localização tomaremos como 0, e ligá-lo ao ponto localizado a unidades adiante, então ligar o ponto a ao ponto $2 \cdot a$, ligar o ponto $2 \cdot a$ ao ponto $3 \cdot a$ e assim sucessivamente, até retornar ao ponto original 0.

Para as demonstrações presentes neste capítulo, consideraremos m como a quantidade de pontos distribuídos ao redor da circunferência e a como a distância ou frequência pela qual os pontos são conectados. Ainda, consideraremos k como a variável que descreve a quantidade de passos a partir do ponto 0, em sentido horário. Assim, partindo-se do ponto 0, a localização p de cada ponto pode ser obtida pela expressão $p = k \cdot a$. Usaremos a notação $\{m/a\}$, conhecida como Símbolo de Schläfli (Coxeter, 1989) para representar a figura formada distribuindo m pontos e conectando-os a cada a unidades. Nem todas as combinações possíveis entre m e a , em $\{m/a\}$, geram polígonos estrelados. Quando $a = 1$ ou quando $a = (m - 1) \equiv -1 \pmod{m}$, cada ponto será ligado ao seu sucessor ou antecessor e como os pontos estão igualmente espaçados ao redor de uma circunferência, nestes casos estaremos formando polígonos regulares. Portanto, por definição, consideraremos como polígonos estrelados apenas as figuras que apresentem segmentos consecutivos, passando por todos os pontos não consecutivos distribuídos através da circunferência.

Por exemplo, na Figura 2.1 temos o polígono obtido ao se distribuir 5 pontos ao redor de uma circunferência, onde cada ponto está ligado ao ponto que está duas unidades adiante, sendo $m = 5$ e $a = 2$, ou seja trata-se do polígono $\{5/2\}$. Veja que o ponto 0 foi ligado ao ponto 2, já que $0 + 1 \cdot 2 = 2$ e o ponto 2 foi ligado ao ponto 4, já que $2 \cdot 2 = 4$. Note que o ponto 4 foi ligado ao ponto 1, que está duas unidades adiante na circunferência. Isto se dá pois $3 \cdot 2 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$. O ponto 1, por sua vez, foi ligado ao ponto 3, pois $4 \cdot 2 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$ enquanto o ponto 3 foi ligado ao 0, dado que $5 \cdot 2 = 10 \equiv 0 \pmod{5}$.

Figura 2.1 – Polígono $\{5/2\}$



Fonte: Autor.

Assim, sempre que a expressão $k \cdot a$ resultar em um valor maior ou igual a m , pela distribuição dos pontos no círculo, teremos como resultado o ponto de localização congruente a $k \cdot a$ módulo m . Repare que, como temos m pontos na circunferência e o ponto inicial tem localização 0, as localizações dos m pontos assumem os mesmos valores que as classes residuais módulo m . Esta relação de congruência que permite a formação dos polígonos estrelados. As figuras obtidas através das variações desse processo seguem alguns padrões e estes são os objetos de estudo deste capítulo.

O leitor poderá encontrar uma construção no GeoGebra das figuras descritas neste capítulo através do seguinte link: <<https://www.geogebra.org/classic/mc29jhe3>>. Nesta construção, pode-se verificar diferentes figuras, associadas a cada combinação $\{m/a\}$. As figuras são formadas a partir de uma circunferência e um ponto inicial, que é então rotacionado m vezes, em α graus ao redor do centro, com $\alpha = \frac{360}{m}$. Em seguida, liga-se cada ponto gerado ao ponto a unidades adiante na circunferência. As figuras presentes neste capítulo foram geradas desta maneira e editadas para melhor visualização do leitor.

2.1 CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Como citado anteriormente, consideramos polígonos estrelados apenas as figuras cujos segmentos passem por todos os pontos não consecutivos distribuídos ao redor da circunferência. Desta construção, ao analisarmos a relação de divisibilidade entre m e a , podemos propor alguns resultados. O leitor pode encontrar alguns desses resultados no texto publicado por Nakahara (2010).

Inicialmente fixamos a notação do máximo divisor comum entre x e y por (x, y) . Demonstraremos que obteremos polígonos estrelados somente se $(m, a) = 1$. No Quadro 2.1, por exemplo, temos a tabela de multiplicação no módulo 7. Tanto na primeira linha quanto na primeira coluna temos todas as possíveis classes residuais módulo 7 e cada célula da tabela mostra o resíduo da multiplicação entre os valores da respectiva linha e coluna, no módulo 7. Denotando $[a]$ à classe residual de a módulo m , temos que numa tabela de multiplicação módulo m , cada linha $[a]$ nos mostra os resíduos dos possíveis produtos de $[a]$, no módulo m .

Quadro 2.1 – Tabela de Multiplicação módulo 7

Mod 7	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]	[0]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]	[0]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]	[0]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]	[0]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]	[0]
[7]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]

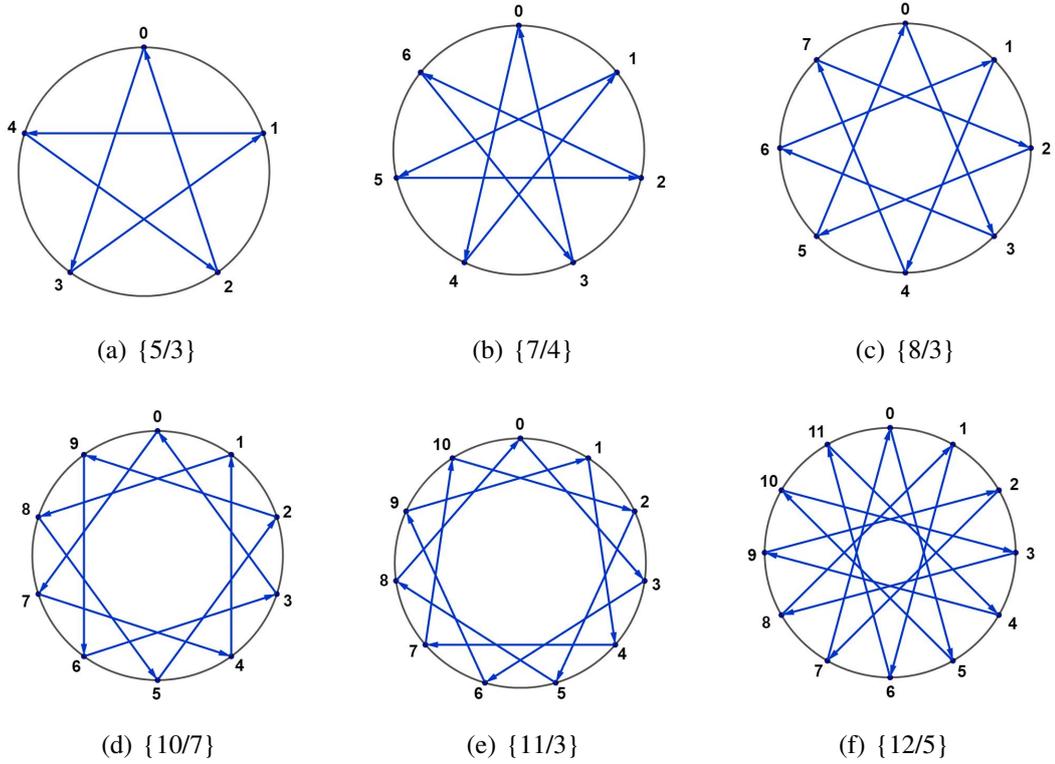
Fonte: Autor.

Proposição 2.1. *Se $(a, m) = 1$, então a linha $[a]$ contém todas as classes residuais módulo m .*

Demonstração. Se na linha $[a]$ nenhuma classe aparece mais de uma vez então nessa linha aparecem todas as classes já que temos m posições na linha $[a]$ e m classes residuais módulo m . Tome $(a, m) = 1$ e suponha que uma certa classe módulo m aparece mais de uma vez na linha $[a]$, isto é, $[a][p] = [a][q]$, onde $[p] \neq [q]$. Disto, temos $(a \cdot p) - (a \cdot q) = a \cdot (p - q) = m \cdot r$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Como $(a, m) = 1$, segue que m divide $(p - q)$, logo $[p] = [q]$ o que contradiz o fato de que $[p] \neq [q]$ nos levando a um absurdo. \square

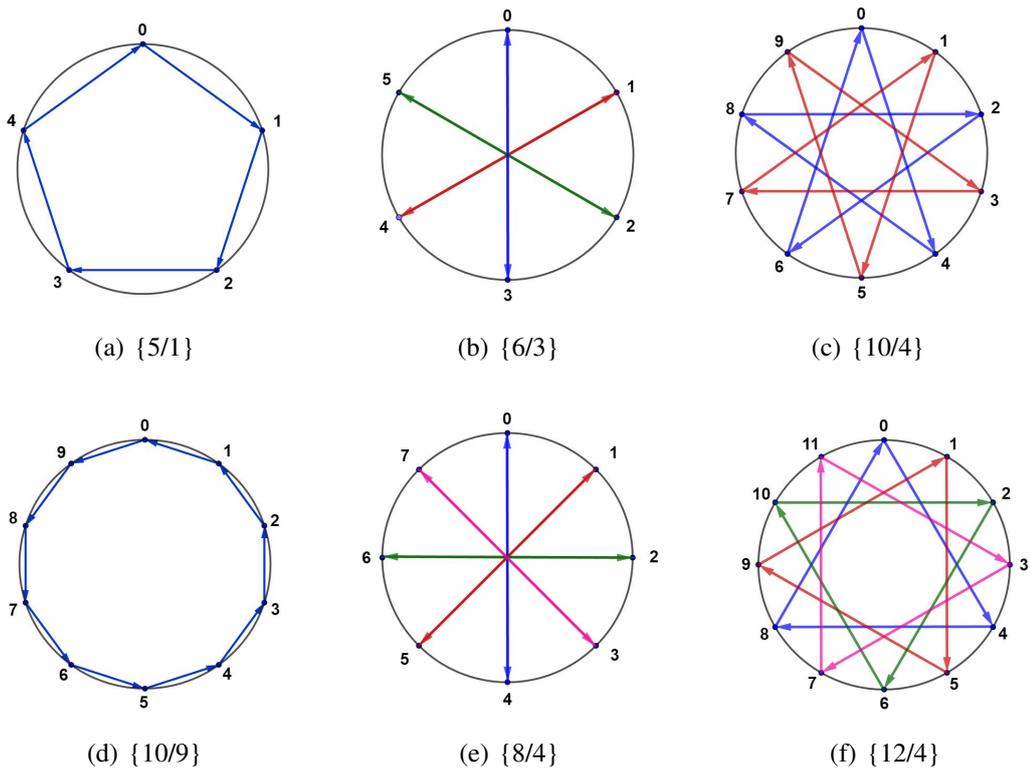
Assim, se $(a, m) = 1$ teremos uma condição de existência do polígono estrelado. A seguir, exibimos exemplos de polígonos estrelados na Figura 2.2 e de polígonos não estrelados na Figura 2.3.

Figura 2.2 – Exemplos de polígonos estrelados



Fonte: Autor.

Figura 2.3 – Exemplos de figuras que não são polígonos estrelados



Fonte: Autor.

Convém demonstrar, neste momento, que as figuras associadas às combinações $\{m/a\}$ são sempre congruentes às obtidas com $\{m/(m-a)\}$, sendo a única diferença a ordem em que ligamos os pontos. Veja exemplos na Figura 2.4.

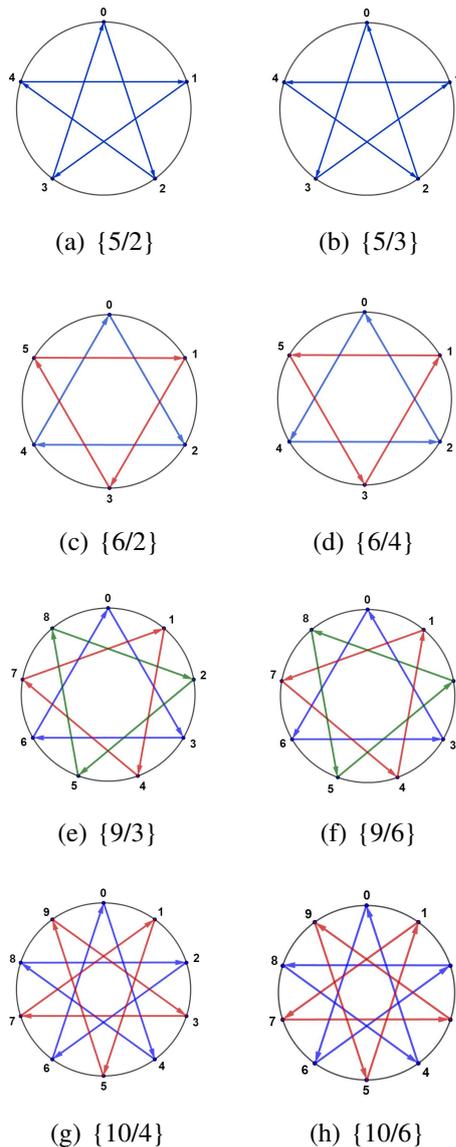
Proposição 2.2. *Figuras associadas à combinação $\{m/a\}$ são sempre congruentes com as associadas à combinação $\{m/(m-a)\}$.*

Demonstração. Seja k a quantidade de passos no sentido horário. Tomando $(m-a)$ como o passo ou a distância em unidades pela qual os pontos são conectados e $(m-k)$ como a quantidade de passos no sentido anti-horário, temos que

$$(m-a) \cdot (m-k) = m^2 - a \cdot m - k \cdot m + a \cdot k \equiv a \cdot k \pmod{m}.$$

□

Figura 2.4 – Figuras congruentes associadas às combinações do tipo $\{m/a\}$ e $\{m/(m-a)\}$



Fonte: Autor.

2.2 CONTAGEM DE POLÍGONOS ESTRELADOS E DE FIGURAS CONGRUENTES

A partir da função de Euler, apresentada por Hefez (2016), podemos deduzir a fórmula para o cálculo do número de polígonos estrelados possíveis módulo m .

Proposição 2.3. *Para m pontos temos $S(m)$ polígonos estrelados possíveis e não congruentes, com*

$$S(m) = \frac{\phi(m) - 2}{2},$$

onde ϕ é a função de Euler.

Demonstração. Como $\phi(m)$ é a quantidade de números naturais menores que m e coprimos com m . Devemos desconsiderar os casos $\{m/1\}$ e $\{m/(m-1)\}$, pois estes casos não são polígonos estrelados. Também desconsideraremos metade dos casos, pois as figuras associadas a $\{m/a\}$ e $\{m/(m-a)\}$ são sempre congruentes. Assim, o número de polígonos estrelados possíveis e não congruentes para m pontos é $S(m) = \frac{\phi(m)-2}{2}$. \square

Nos casos onde $(m, a) \neq 1$, não obtemos uma única figura, mas sim, figuras distintas. Isto acontece pois nestes casos, a expressão $0 + k \cdot a$ não resulta em todas as classes residuais módulo m , ou seja, existem pontos que não são vértices da figura formada. Isso pode ser demonstrado pela seguinte proposição:

Proposição 2.4. *Se $(m, a) = d \neq 1$, então a linha $[a]$ não inclui a classe residual $[1]$.*

Demonstração. Suponha que $(m, a) = d \neq 1$, e que a linha $[a]$ inclui a classe $[1]$, isto é, existe $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ tal que $k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$. Disto, temos $k \cdot a - m \cdot x = 1$, para algum $x \in \mathbb{N}$. Assim $(m, a) = 1$, o que contradiz a hipótese. \square

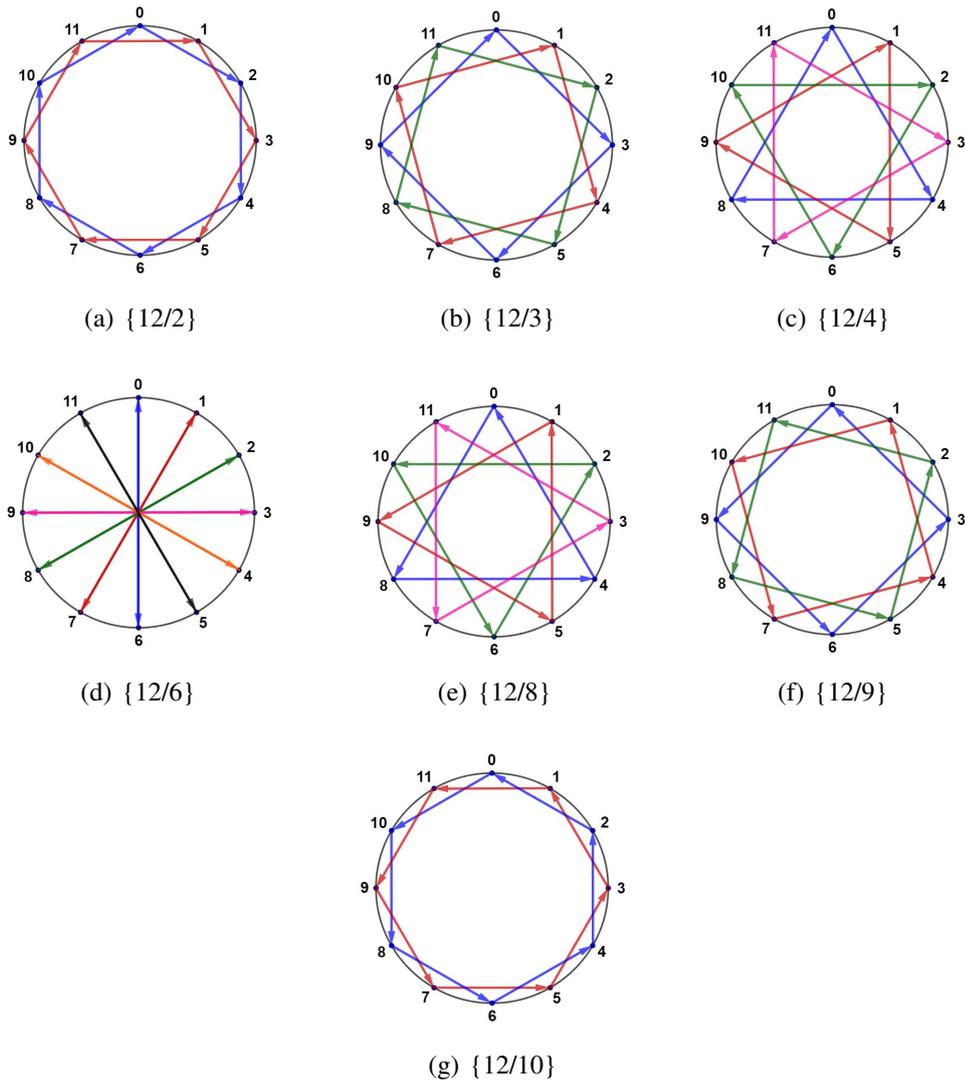
Assim, quando $(m, a) \neq 1$ não temos polígonos estrelados, mas ainda podemos analisar os padrões resultantes em alguns desses casos. De fato, obteremos padrões congruentes que se repetem algumas vezes ao redor da circunferência. Para exemplificar, tome a tabela de multiplicação no Quadro 2.2. Observe as linhas 2, 3, 4, 6, 8, 9 e 10 e as compare com as formas presentes na Figura 2.5. Note que nestas linhas temos valores que se repetem e isto significa que não aparecem todos os resíduos módulo 12. Veja também que em todos estes casos temos $(m, a) \neq 1$. Por fim, como nestes casos não temos uma única figura passando por todos os pontos, não temos polígonos estrelados.

Quadro 2.2 – Tabela de Multiplicação módulo 12

Mod 12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]
[2]	[2]	[4]	[6]	[8]	[10]	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]	[10]	[0]
[3]	[3]	[6]	[9]	[0]	[3]	[6]	[9]	[0]	[3]	[6]	[9]	[0]
[4]	[4]	[8]	[0]	[4]	[8]	[0]	[4]	[8]	[0]	[4]	[8]	[0]
[5]	[5]	[10]	[3]	[8]	[1]	[6]	[11]	[4]	[9]	[2]	[7]	[0]
[6]	[6]	[0]	[6]	[0]	[6]	[0]	[6]	[0]	[6]	[0]	[6]	[0]
[7]	[7]	[2]	[9]	[4]	[11]	[6]	[1]	[8]	[3]	[10]	[5]	[0]
[8]	[8]	[4]	[0]	[8]	[4]	[0]	[8]	[4]	[0]	[8]	[4]	[0]
[9]	[9]	[6]	[3]	[0]	[9]	[6]	[3]	[0]	[9]	[6]	[3]	[0]
[10]	[10]	[8]	[6]	[4]	[2]	[0]	[10]	[8]	[6]	[4]	[2]	[0]
[11]	[11]	[10]	[9]	[8]	[7]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]	[0]
[12]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]

Fonte: Autor.

Figura 2.5 – Figuras obtidas por combinações $\{12/a\}$, com $(12, a) = d \neq 1$



Fonte: Autor.

Proposição 2.5. Se $(m, a) = d \neq 1$, então a linha $[a]$ contém $n = \frac{m}{d}$ classes residuais que se repetem d vezes.

Demonstração. Para cada $k \leq n$, temos $k = (n - i) + 1$, para algum $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Seja $a = b \cdot d$, logo

$$\begin{aligned} a \cdot k &= a \cdot [n - i + 1] \\ &= a \cdot n - a \cdot (i - 1) \\ &= b \cdot d \cdot n - a \cdot (i - 1) \\ &= b \cdot m - a \cdot (i - 1) \\ &\equiv m - a \cdot (i - 1) \pmod{m}. \end{aligned}$$

Mostraremos que $m - a \cdot (i - 1) \not\equiv m - a \cdot (i' - 1) \pmod{m}$ para todos os valores de $i, i' \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, i \neq i'$. Pois assim, provaremos que existem n classes residuais distintas na linha $[a]$.

De fato, suponhamos que existem $i, i' \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq i'$, tais que

$$\begin{aligned} m - a \cdot (i - 1) &\equiv m - a \cdot (i' - 1) \pmod{m} \\ a \cdot i &\equiv a \cdot i' \pmod{m} \\ \Leftrightarrow i &\equiv i' \pmod{\frac{m}{(m, a)}} \\ i &\equiv i' \pmod{n}. \end{aligned}$$

Isto não é possível já que $i, i' \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $i \neq i'$.

Provaremos que estas n classes residuais $[a][k], k \leq n$, se repetem mais $d - 1$ vezes, totalizando d repetições.

Para cada $t \in \{1, 2, 3, \dots, d - 1\}$, seja $k = j + t \cdot n$ com $j = 1, 2, \dots, n$. Assim, k assume todos os valores entre $n + 1$ e m . Observe que

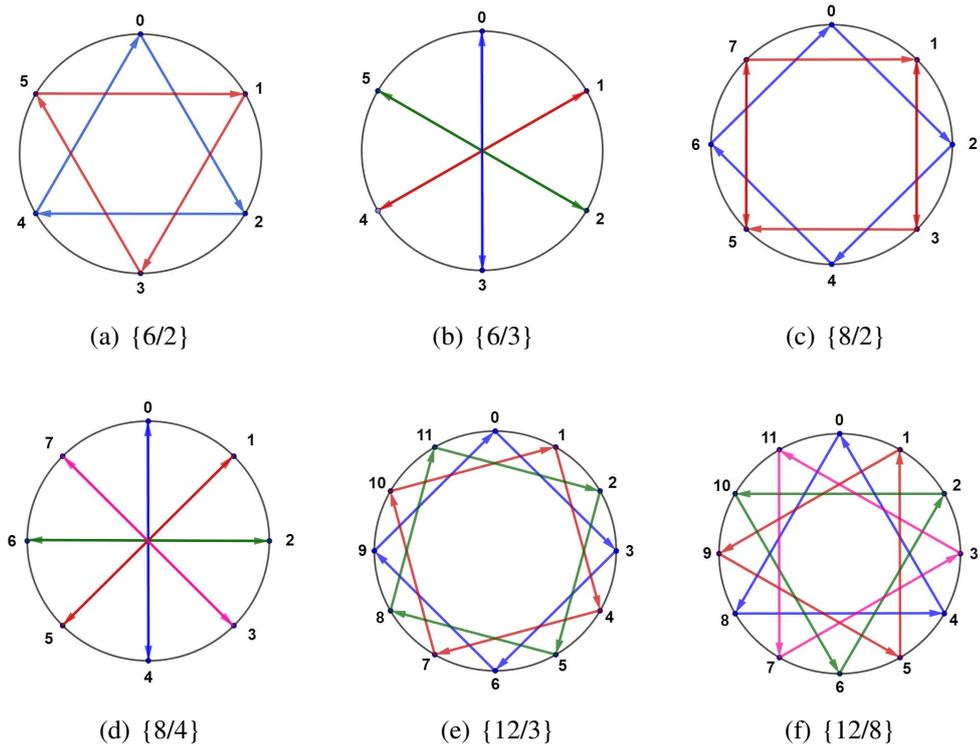
$$\begin{aligned} a \cdot k &= a \cdot (j + t \cdot n) = a \cdot j + a \cdot t \cdot n \\ &= a \cdot j + b \cdot d \cdot t \cdot n = a \cdot j + b \cdot t \cdot m \\ &\equiv a \cdot j \pmod{m}. \end{aligned}$$

O que mostra que a classe residual $[a][k]$ é uma das anteriores, concluindo a demonstração.

□

Desta forma, podemos perceber que quando $(m, a) \neq 1$, temos d figuras congruentes e distintas, cada uma com $n = \frac{m}{d}$ vértices. Ainda, resta observar que este resultado descreve apenas os casos onde partimos do ponto 0 e somamos $k \cdot a$, já que esta soma sempre é congruente ao produto $k \cdot a$ módulo m . As demais figuras distintas à inicial podem ser obtidas através da rotação da figura inicial em $\frac{2\pi}{m}$ rad. Note que se rotacionarmos d vezes, obteremos a figura inicial novamente, portanto temos $d - 1$ possibilidades de rotações e d figuras congruentes distintas. Alguns exemplos na Figura 2.6, onde os ciclos coloridos em azul são obtidos saindo do ponto 0 e somando $k \cdot a$, que chamamos de figura inicial, enquanto as outras cores são as $d - 1$ rotações possíveis.

Figura 2.6 – Figuras congruentes produzidas a partir de rotações das figuras iniciais $\{m/a\}$



Fonte: Autor.

Finalmente, para os casos onde m é par e $a = \frac{m}{2}$, temos que a linha $[a]$ contém apenas as classes residuais $[0]$ e $[a]$, isto é, $i \cdot a \equiv 0 \pmod m$ ou $i \cdot a \equiv a \pmod m$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m - 1\}$. De fato, se i é par então $i \cdot a = 2 \cdot r \cdot a = r \cdot m \equiv 0 \pmod m$ e se i é ímpar, temos $i \cdot a = (2 \cdot s + 1) \cdot a \equiv a \pmod m$.

2.3 O PROBLEMA DO HOTEL

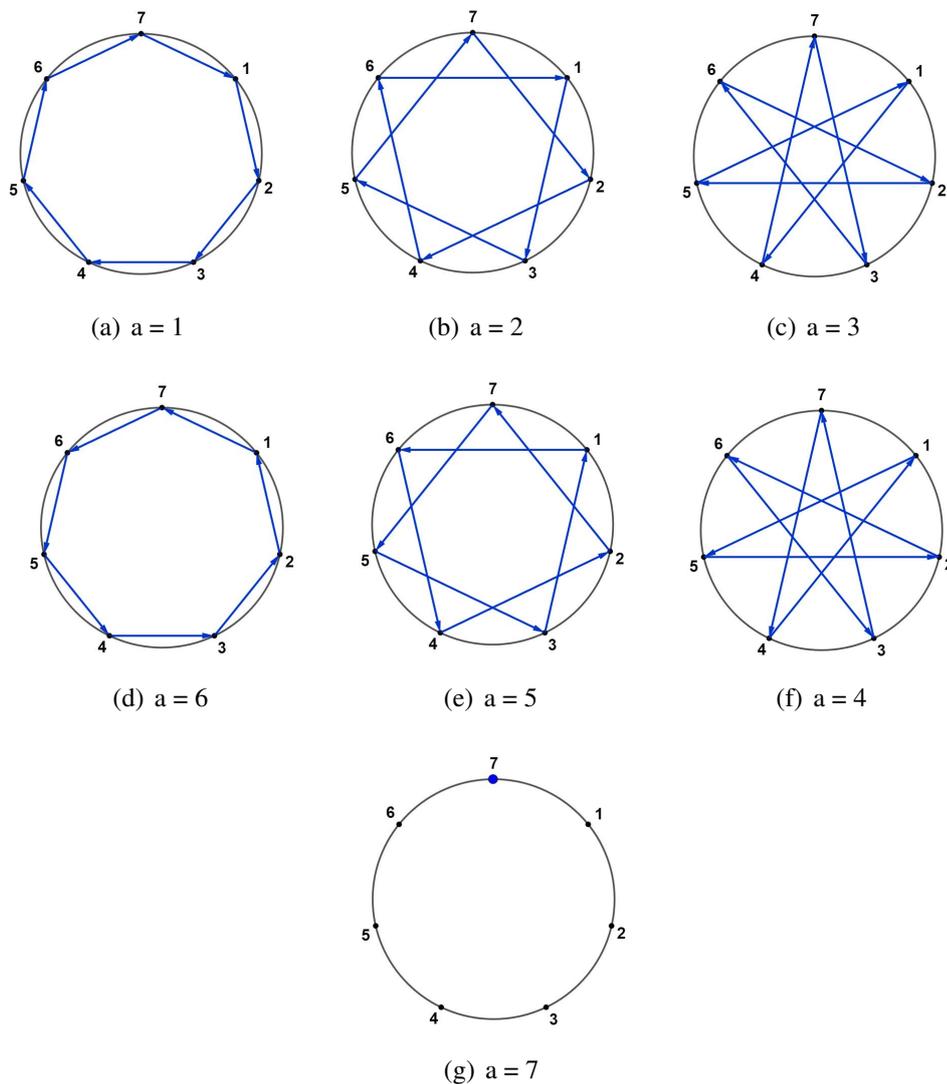
Voltamos finalmente ao problema do Hotel Circular, proposto por Hodgson e Cassidy (1982) e citado no início do capítulo. Neste problema temos um hotel com m quartos dispostos ao redor de um círculo e m hóspedes, onde cada hóspede dará voltas no sentido horário ao redor do círculo interagindo (abrindo ou fechando) com cada porta e terminando o processo apenas quando finalmente interagir com a porta de número m . Todas as portas se iniciam fechadas e o primeiro hóspede abre todas as portas. O segundo hóspede inicia fechando a segunda porta e cada porta duas unidades adiante. O terceiro altera a posição de cada porta de número múltiplo de 3 e o processo segue até o hóspede m , que interage apenas com a porta m e finaliza as interações. A questão central do problema é: “Ao final do processo, quais portas permanecem abertas e quais portas permanecem fechadas?”

Em seu artigo, Hodgson (2004) soluciona o problema demonstrando a seguinte conjectura: “Para qualquer m , todas as portas permanecem fechadas, exceto uma única porta; e essa porta excepcional é a porta m quando m é ímpar, e a porta $\frac{m}{2}$ quando m é par”. A solução do problema está em contar quantas vezes cada porta sofre interações. Se sofrer um número par de interações a porta permanecerá na posição inicial e se sofrer um número ímpar de interações, a porta finalizará o processo com a posição distinta da inicial. A partir disso, verifica-se quantas vezes cada porta sofre interações para se chegar ao resultado mencionado.

Tomando as proposições demonstradas na seção anterior deste capítulo, abordaremos tal conjectura de outra forma. O número de quartos m proposto por Hodgson pode ser interpretado como o número de pontos m utilizado nas demonstrações deste trabalho, enquanto o número de cada hóspede pode ser visto como o passo a com o qual construímos os polígonos estrelados e as outras figuras descritas neste capítulo. Assim abordaremos o problema do Hotel Circular observando as figuras associadas a cada combinação $\{m/a\}$, com $0 < a \leq m$. Observe que nas figuras presentes nessa seção utilizamos valores de 1 a m , ou seja, consideraremos de 1 a m ao invés de 0 a $m - 1$ já que isso faz mais sentido dado o contexto de numeração das portas do hotel.

Exemplo 2.1 (m ímpar). *Para um hotel com 7 quartos, temos $m = 7$ e a Figura 2.7 representa a sequência de interações de cada hóspede a . Observando a figura, percebemos que as portas com as quais os hóspedes 1, 2 e 3 interagem são as mesmas com as quais os hóspedes 6, 5 e 4 interagem, respectivamente. Isto significa que todas essas portas terminam no mesmo estado que iniciaram, ou seja, fechadas. A única porta que sofre uma interação a mais e permanece aberta é a porta 7, única porta com a qual o hóspede 7 interage.*

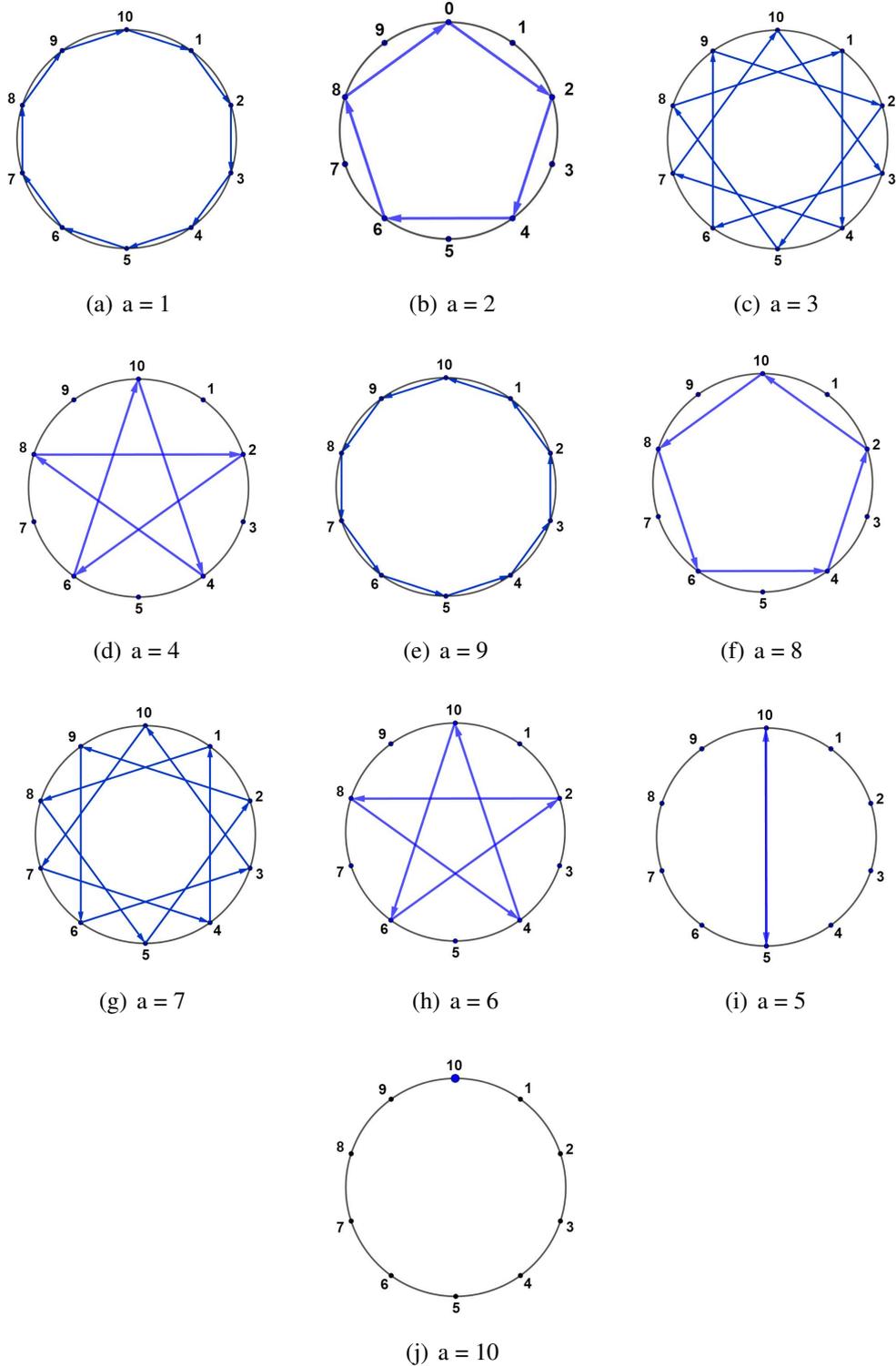
Figura 2.7 – Portas com as quais cada hóspede a interage, com $m = 7$ e $0 < a \leq 7$



Fonte: Autor.

Exemplo 2.2 (m par). Para um hotel com 10 quartos, temos $m = 10$ e a Figura 2.8 representa a sequência de interações de cada hóspede a . Observando a figura percebemos que as portas com as quais os hóspedes 1, 2, 3 e 4 interagem são as mesmas com as quais os hóspedes 9, 8, 7 e 6 interagem, respectivamente, e portanto, estarão fechadas ao final do processo. O hóspede 5 interage uma vez com as portas 5 e 10, e o hóspede 10 interage apenas com sua porta, assim a porta 10 fica fechada e a 5 aberta ao final do processo.

Figura 2.8 – Portas com as quais cada hóspede a interage, com $m = 10$ e $0 < a \leq 10$



Fonte: Autor.

Generalizando, a solução do problema consiste em analisar quantas interações ocorrem em cada porta, então observaremos os casos onde m é par e onde m é ímpar. Note inicialmente que, para todos os casos do tipo $\{m/a\}$ e $\{m/(m-a)\}$ temos figuras congruentes, o que significa que todas as portas abertas pelo hóspede a são fechadas pelo hóspede $m-a$, vide a

Proposição 2.2.

Então, tomando m ímpar, teremos $m - 1$ hóspedes interagindo com as portas antes do hóspede m . Como neste caso $m - 1$ é par, podemos dividir este conjunto em dois subconjuntos com a mesma quantidade de elementos, o primeiro com os $\frac{m-1}{2}$ primeiros elementos, ou seja, $\{1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}\}$ e o segundo com os $\frac{m-1}{2}$ elementos restantes, ou seja, $\{\frac{m-1}{2} + 1, \frac{m-1}{2} + 2, \dots, m - 1\}$. Daí, tomando um hóspede a , tal que $1 \leq a \leq \frac{m-1}{2}$, temos as seguintes inequações equivalentes:

$$\begin{aligned} 1 &\leq a \leq \frac{m-1}{2} \\ \frac{1-m}{2} &\leq -a \leq -1 \\ \frac{1-m}{2} + m &\leq m-a \leq m-1 \\ \frac{m-1}{2} + 1 &= \frac{m+1}{2} \leq m-a \leq m-1. \end{aligned}$$

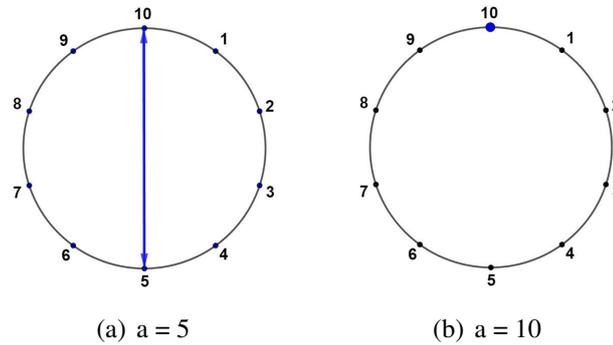
Esta última inequação nos mostra que sempre que escolhermos um hóspede a na primeira parte dos quartos, teremos um hóspede $m - a$ equivalente a este na segunda parte dos quartos. Isto significa que todas as portas com as quais o hóspede a interage, têm sua posição alterada novamente pelo hóspede $m - a$, ou seja, há sempre uma quantidade par de interações em todas as portas, para todos os hóspedes de 1 até $m - 1$. Finalmente, o hóspede m interage apenas com a porta m , portanto esta é a única que sofre uma quantidade ímpar de interações e por isto é a única que permanece aberta ao final do processo.

Para os casos onde m é par, tomando um hóspede a tal que $1 \leq a < \frac{m}{2}$, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} 1 &\leq a \leq \frac{m}{2} - 1 \\ -\frac{m}{2} + 1 &\leq -a \leq -1 \\ -\frac{m}{2} + 1 + m &\leq m-a \leq m-1 \\ \frac{m}{2} + 1 &\leq m-a \leq m-1. \end{aligned}$$

Esta última inequação nos mostra que sempre que escolhermos um hóspede a pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2} - 1\}$, teremos um hóspede $m - a$ equivalente no conjunto $\{\frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \dots, m - 1\}$. Portanto todas as portas com as quais o hóspede a interage, têm suas posições alteradas novamente pelo hóspede $m - a$, ou seja, uma quantidade par de interações. Resta analisar os hóspedes $\frac{m}{2}$ e m . É interessante observar a Figura 2.9 para visualizar a movimentação dos hóspedes $\frac{m}{2}$ e m , no Exemplo 2.2.

Figura 2.9 – Movimentação dos hóspedes 5 e 10, com $m = 10$



Fonte: Autor.

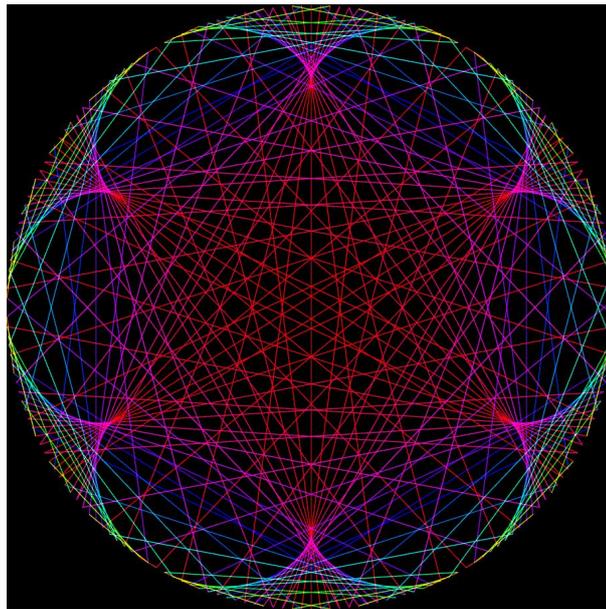
Note ainda que para $\frac{m}{2} = m - \frac{m}{2}$, esta figura não possui nenhuma outra congruente módulo m . Assim o hóspede $\frac{m}{2}$ interage apenas com as portas $\frac{m}{2}$ e m , ao passo que o hóspede m interage apenas com a porta m , ficando esta com uma quantidade par de interações enquanto a porta $\frac{m}{2}$ sofre uma quantidade ímpar de interações. Por isso a porta $\frac{m}{2}$ termina o processo aberta, enquanto as demais terminam fechadas.

Por fim, vale ressaltar que um hóspede a qualquer somente tocará todas as portas se $(m, a) = 1$. Isto acontece para o primeiro e penúltimo hóspedes, que passam por todas as portas, além de todos os possíveis polígonos estrelados para cada $\{m/a\}$.

3 CHRYZODES

Os próximos objetos de estudo deste trabalho são os Chryzodes, também conhecidos como ciclos de multiplicação. A palavra Chryzode tem origem grega e significa “Escrita de ouro em um círculo”, segundo Bello (2011). Os Chryzodes também são frequentemente apresentados como uma visualização da operação de multiplicação. Contrastando com os polígonos estrelados, poucos estudos se dedicaram a analisar tais construções, sendo um tema relativamente recente de estudos. Encontramos alguns artigos publicados por autores franceses contemporâneos, como Jean-Paul Sontagg, que se dedicou ao estudo de tais formas através de rascunhos e softwares de desenho e juntamente com Pierre Duchet (1996), descreveu a construção dos Chryzodes de forma a incluir os polígonos estrelados, ou seja, os considerando como Chryzodes de soma. Na Figura 3.1 temos um exemplo de Chryzode, gerado através da ferramenta desenvolvida por Mathias Lengler (2024), disponível no site <<https://times-tables.lengler.dev>>.

Figura 3.1 – Exemplo de Chryzode



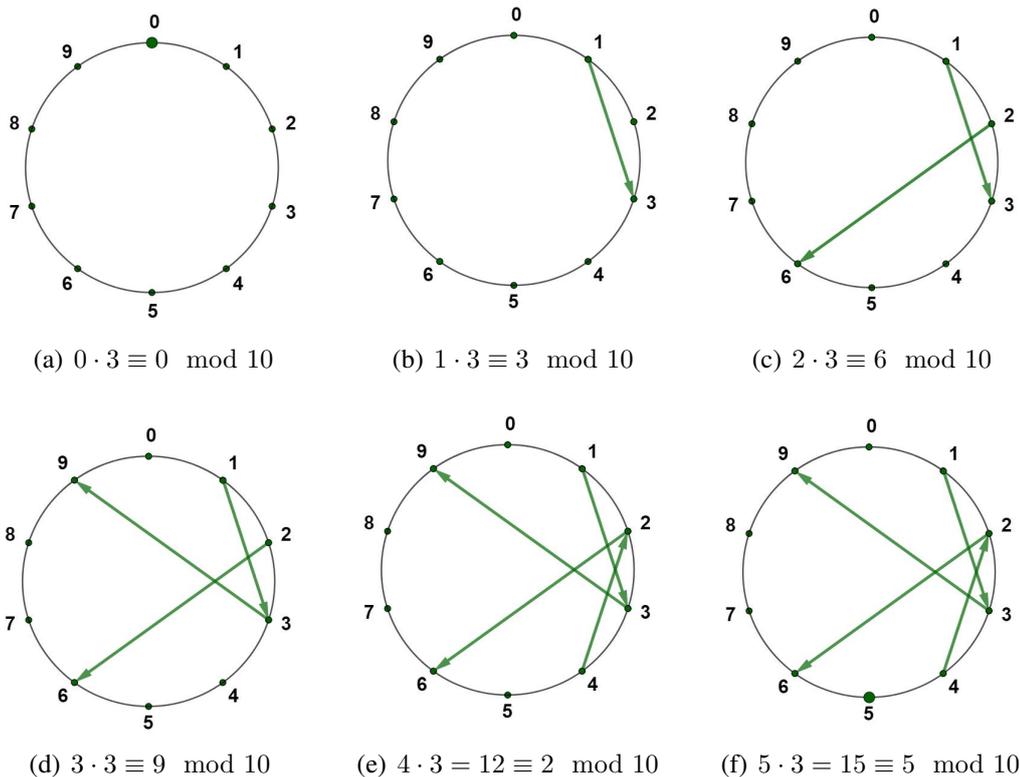
Fonte: Autor.

Os Chryzodes são construídos a partir de m pontos distribuídos igualmente espaçados ao longo de uma circunferência. Cada ponto p é numerado ordenadamente de 0 a $(m - 1)$, de modo que os pontos formam um conjunto completo de resíduos módulo m . Em seguida, constroem-se segmentos de reta unindo cada ponto p ao ponto congruente a $p \cdot a$ módulo m , com $a \in \mathbb{Z}$ fixo. Assim, os Chryzodes podem ser percebidos como uma representação visual do resultado da operação de multiplicação por a , num módulo m . As imagens presentes neste capítulo foram construídas através do *software* GeoGebra e o leitor pode explorar diferentes construções através do link <<https://www.geogebra.org/classic/aqvfvvtz>>, disponibilizado pelo autor.

Exemplo 3.1 (Construção do Chryzode de multiplicação por 3, módulo 10). *Para se construir o Chryzode de multiplicação por 3, módulo 10, distribuímos 10 pontos ao longo de uma circunferência e numeramos tais pontos de 0 a 9. Em seguida, construímos segmentos ligando cada ponto p ao ponto $p \cdot 3$ módulo 10. Temos então a seguinte seqüência de congruências e as Figuras 3.2 e 3.3 descrevem os passos da construção.*

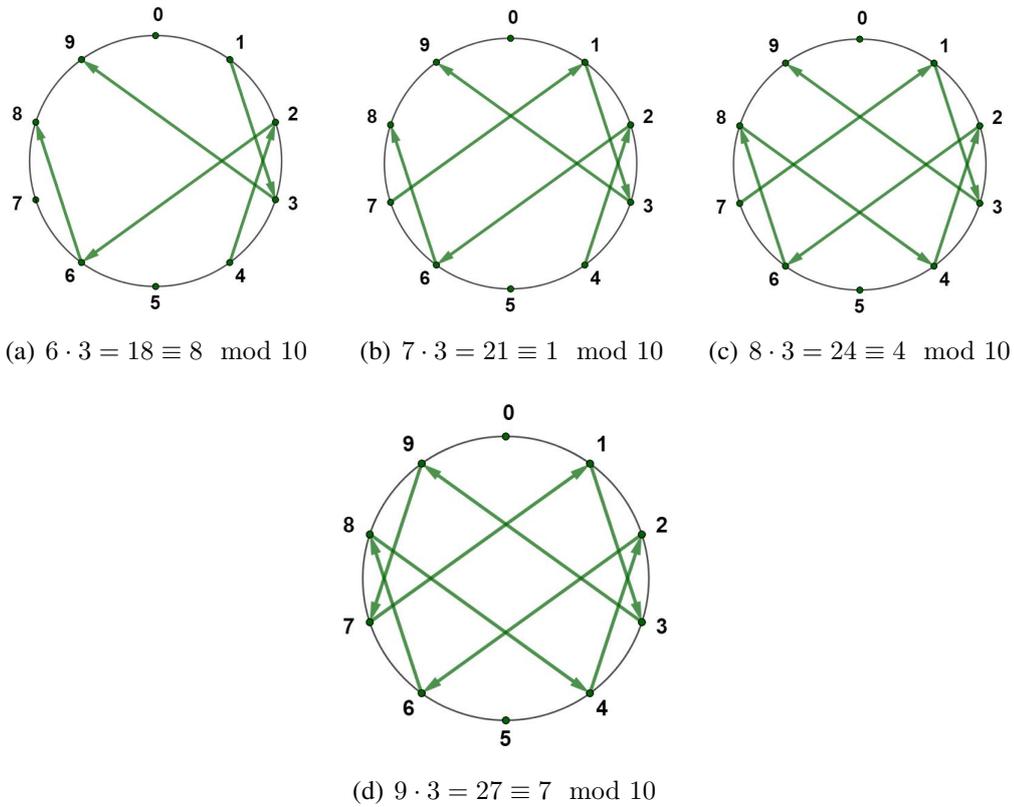
$$\begin{aligned} 0 \cdot 3 &\equiv 0 \pmod{10} \\ 1 \cdot 3 &\equiv 3 \pmod{10} \\ 2 \cdot 3 &\equiv 6 \pmod{10} \\ 3 \cdot 3 &\equiv 9 \pmod{10} \\ 4 \cdot 3 &= 12 \equiv 2 \pmod{10} \\ 5 \cdot 3 &= 15 \equiv 5 \pmod{10} \\ 6 \cdot 3 &= 18 \equiv 8 \pmod{10} \\ 7 \cdot 3 &= 21 \equiv 1 \pmod{10} \\ 8 \cdot 3 &= 24 \equiv 4 \pmod{10} \\ 9 \cdot 3 &= 27 \equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}$$

Figura 3.2 – Construção do Chryzode de multiplicação por 3, módulo 10 - I



Fonte: Autor.

Figura 3.3 – Construção do Chryzode de multiplicação por 3, módulo 10 - II

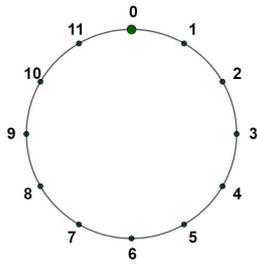


Fonte: Autor.

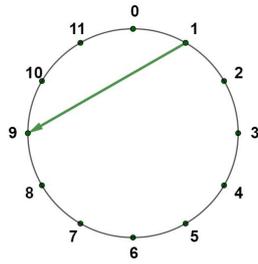
Exemplo 3.2 (Construção do *Chryzode* de multiplicação por 9, módulo 12). *Para se construir tal Chryzode, distribuímos 12 pontos ao longo de uma circunferência e numeramos tais pontos de 0 a 11. Observe a Figura 3.4, onde estão apresentados os passos de construção e compare-a com a sequência de congruências abaixo.*

$0 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{12}$	$6 \cdot 9 = 54 \equiv 6 \pmod{12}$
$1 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{12}$	$7 \cdot 9 = 63 \equiv 3 \pmod{12}$
$2 \cdot 9 = 18 \equiv 6 \pmod{12}$	$8 \cdot 9 = 72 \equiv 0 \pmod{12}$
$3 \cdot 9 = 27 \equiv 3 \pmod{12}$	$9 \cdot 9 = 81 \equiv 9 \pmod{12}$
$4 \cdot 9 = 36 \equiv 0 \pmod{12}$	$10 \cdot 9 = 90 \equiv 6 \pmod{12}$
$5 \cdot 9 = 45 \equiv 9 \pmod{12}$	$11 \cdot 9 = 99 \equiv 3 \pmod{12}$

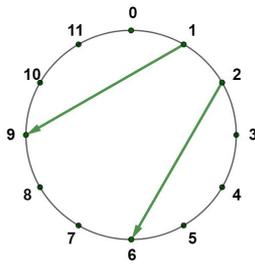
Figura 3.4 – Construção do Chryzode de multiplicação por 9, módulo 12



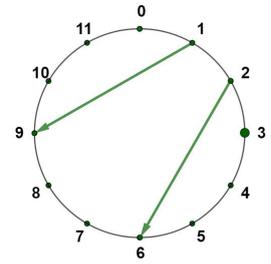
(a) $0 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{12}$



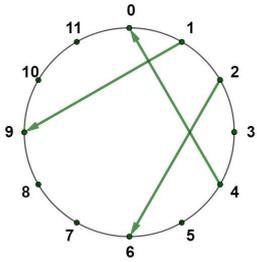
(b) $1 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{12}$



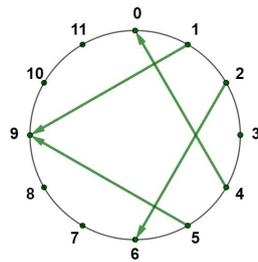
(c) $2 \cdot 9 \equiv 6 \pmod{12}$



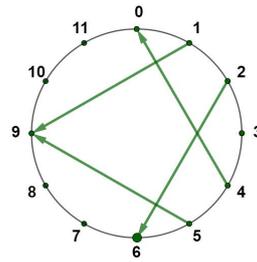
(d) $3 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{12}$



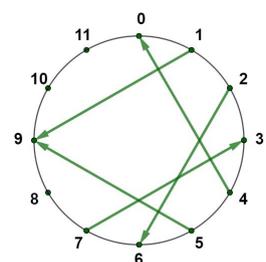
(e) $4 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{12}$



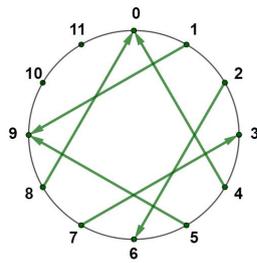
(f) $5 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{12}$



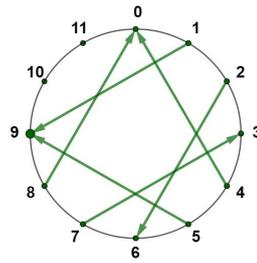
(g) $6 \cdot 9 \equiv 6 \pmod{12}$



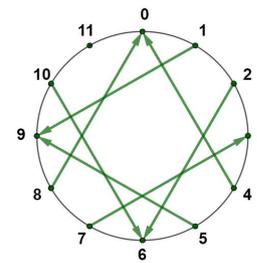
(h) $7 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{12}$



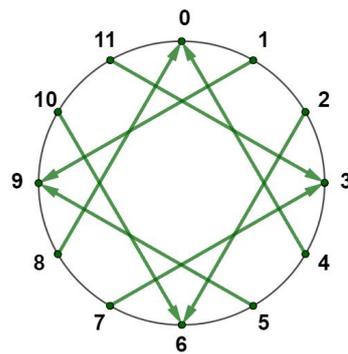
(i) $8 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{12}$



(j) $9 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{12}$



(k) $10 \cdot 9 \equiv 6 \pmod{12}$

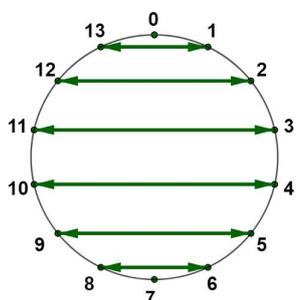


(l) $11 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{12}$

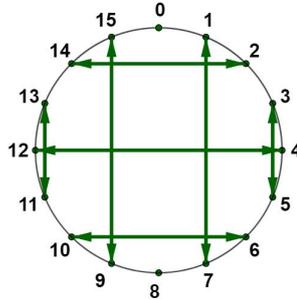
Fonte: Autor.

A seguir ilustramos mais alguns exemplos de Chryzodes, na Figura 3.5.

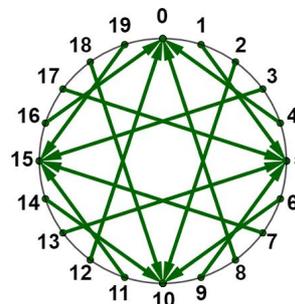
Figura 3.5 – Alguns exemplos de Chryzodes



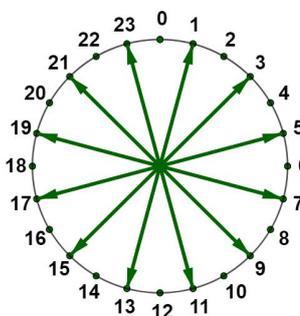
(a) Multiplicação por 13, módulo 14



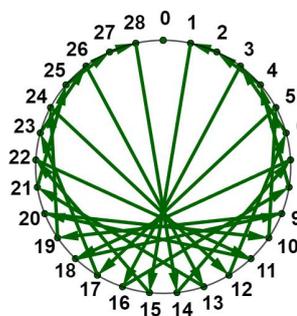
(b) Multiplicação por 7, módulo 16



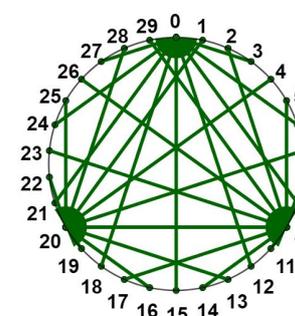
(c) Multiplicação por 5, módulo 20



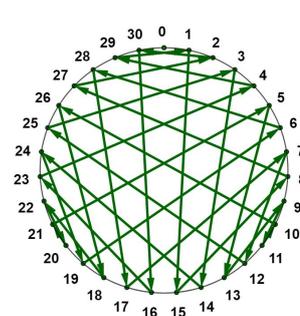
(d) Multiplicação por 13, módulo 24



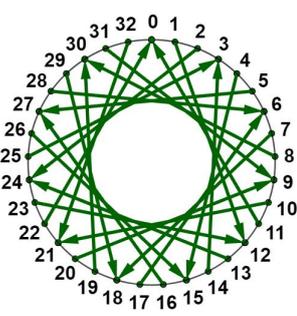
(e) Multiplicação por 15, módulo 29



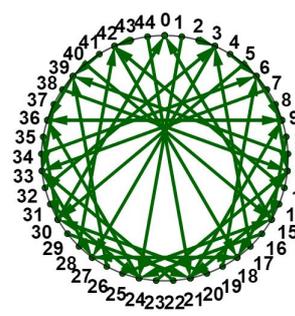
(f) Multiplicação por 20, módulo 30



(g) Multiplicação por 15, módulo 31.



(h) Multiplicação por 12, módulo 33



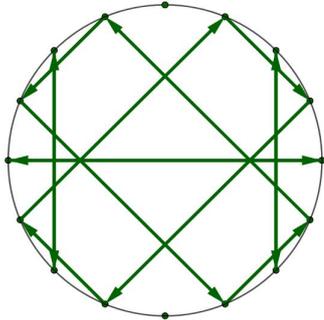
(i) Multiplicação por 24, módulo 45

Fonte: Autor.

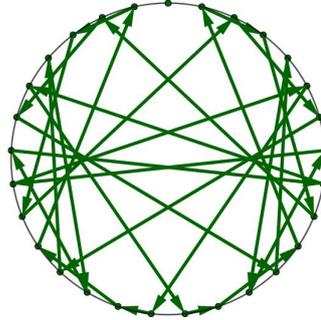
Comparando as formas obtidas fixando-se arbitrariamente a e variando o valor de m nas Figuras 3.6 e 3.7, podemos inferir que conforme a quantidade de pontos aumenta, obtemos variações de uma mesma forma, que vão se tornando cada vez mais nítidas. Para valores menores de m observamos apenas um conjunto disperso de segmentos, já para valores maiores a forma fica mais nítida e isto segue conforme m aumenta. Desta maneira, tomaremos valores maiores de m , sendo a maioria dos exemplos presentes neste capítulo com $m = 100$. Também, não utilizaremos os rótulos dos pontos para tais casos com valores maiores de m , já que eles acabam

se sobrepondo e dificultando a visualização das formas obtidas.

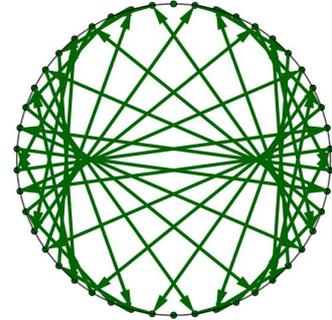
Figura 3.6 – Chryzodes de multiplicação por 3 em diversos módulos



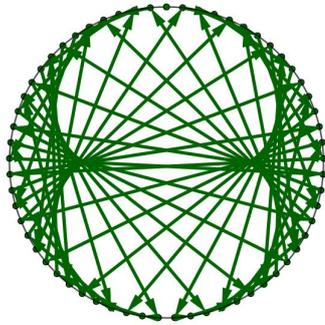
(a) Multiplicação por 3, módulo 16



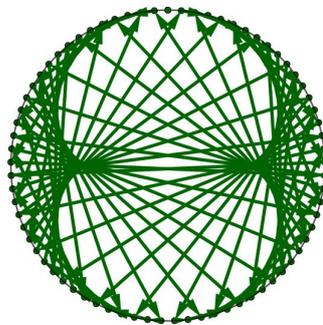
(b) Multiplicação por 3, módulo 29



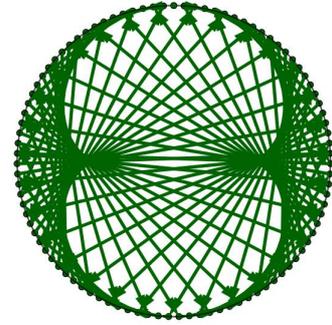
(c) Multiplicação por 3, módulo 46



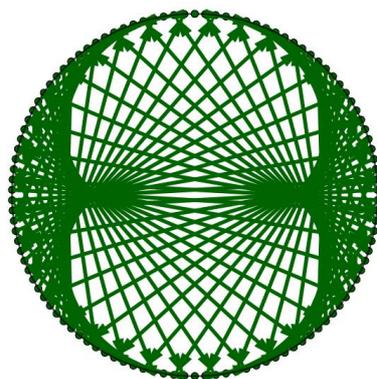
(d) Multiplicação por 3, módulo 61



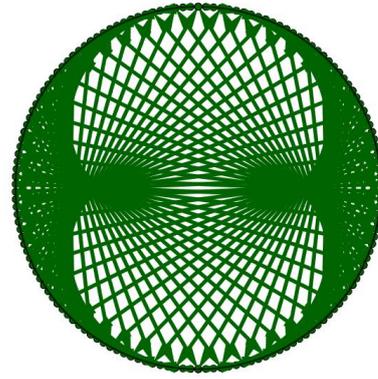
(e) Multiplicação por 3, módulo 73



(f) Multiplicação por 3, módulo 95



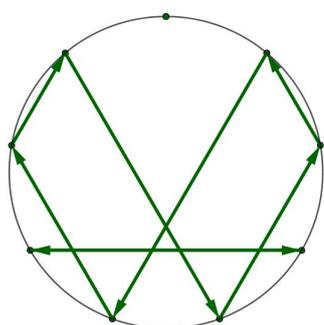
(g) Multiplicação por 3, módulo 110



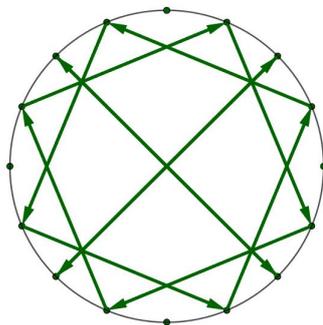
(h) Multiplicação por 3, módulo 150

Fonte: Autor.

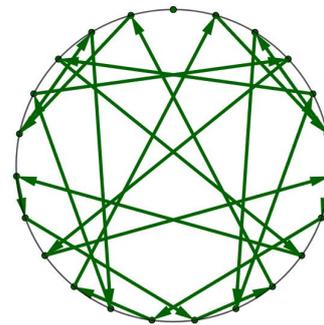
Figura 3.7 – Chryzodes de multiplicação por 5 em diversos módulos



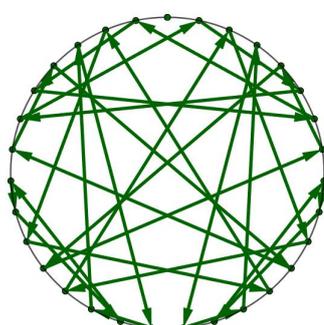
(a) Multiplicação por 5, módulo 9



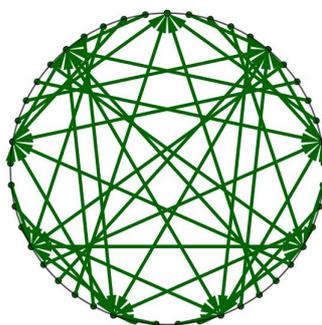
(b) Multiplicação por 5, módulo 16



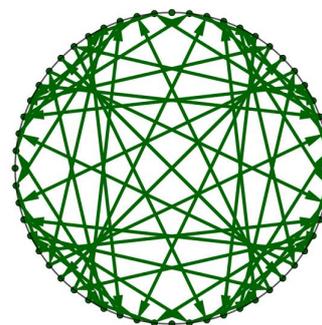
(c) Multiplicação por 5, módulo 23



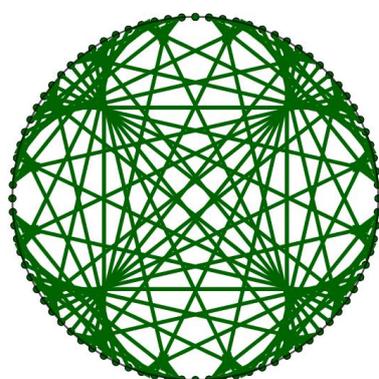
(d) Multiplicação por 5, módulo 31



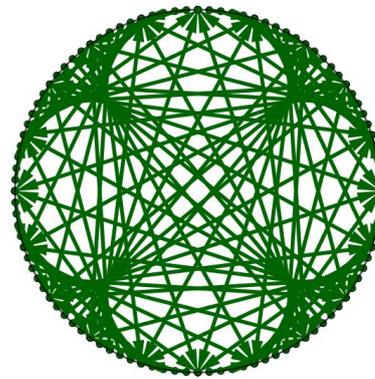
(e) Multiplicação por 5, módulo 45



(f) Multiplicação por 5, módulo 56



(g) Multiplicação por 5, módulo 84



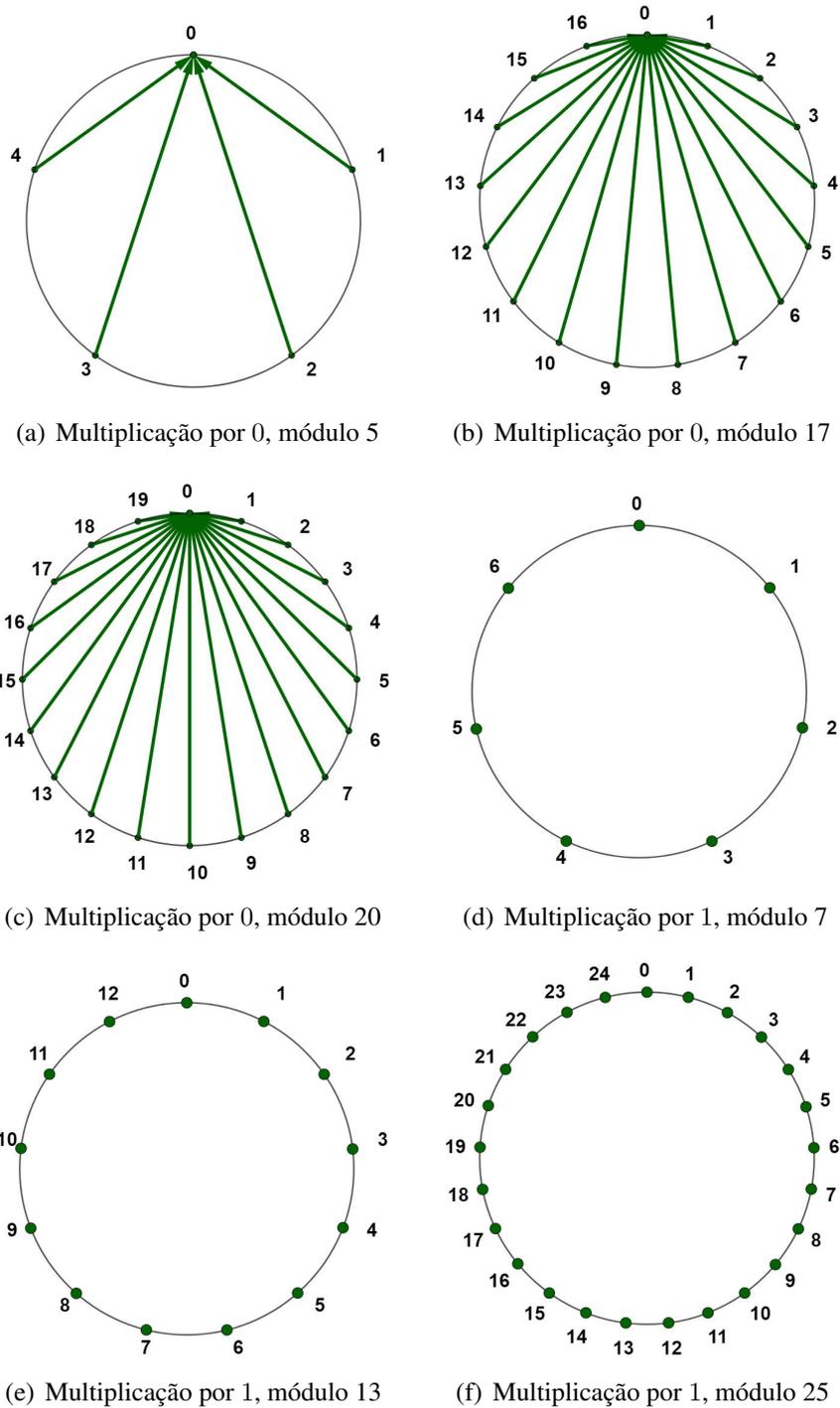
(h) Multiplicação por 5, módulo 100

Fonte: Autor.

Vamos observar o que acontece para diferentes valores de a .

Note inicialmente que se $a = 0$ ou $a = m$, todos os pontos da construção serão ligados ao ponto 0 já que $p \cdot 0 \equiv 0 \pmod{m}$ e $m \equiv 0 \pmod{m}$. Para $a = 1$, obtemos uma figura que apenas mostra os m pontos, sem segmentos ligando quaisquer pontos, pois $p \cdot 1 \equiv p \pmod{m}$. A Figura 3.8 mostra alguns exemplos desses casos.

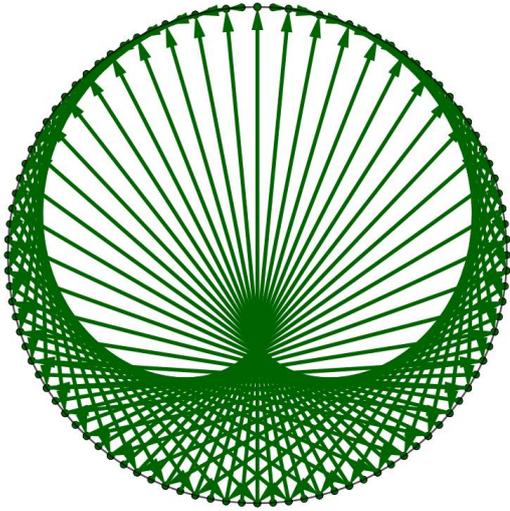
Figura 3.8 – Chyzodes com multiplicador 0 e 1



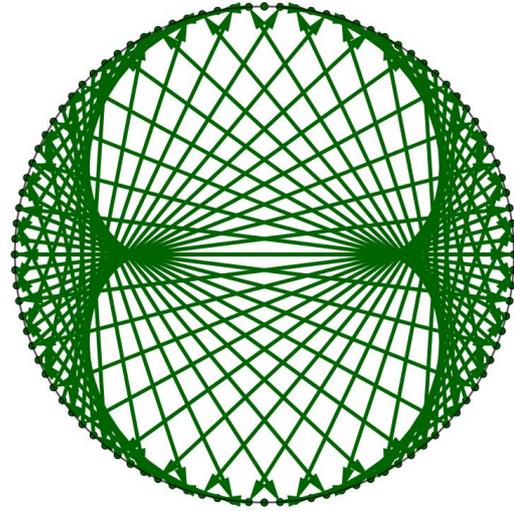
Fonte: Autor.

Os padrões obtidos tornam-se mais interessantes para $a \geq 2$. Konageski (2019) descreve as figuras obtidas nestes casos contando a quantidade de pétalas formadas. Quando $a = 2$ temos uma única pétala, sendo a forma obtida chamada de cardioide. Quando $a = 3$ temos duas, formando um nefroide. Quando $a = 4$ temos três, quando $a = 5$ temos quatro e assim por diante, ou seja, quando $a \geq 2$ temos $(a - 1)$ pétalas na figura obtida. Para visualização de alguns exemplos veja a Figura 3.9.

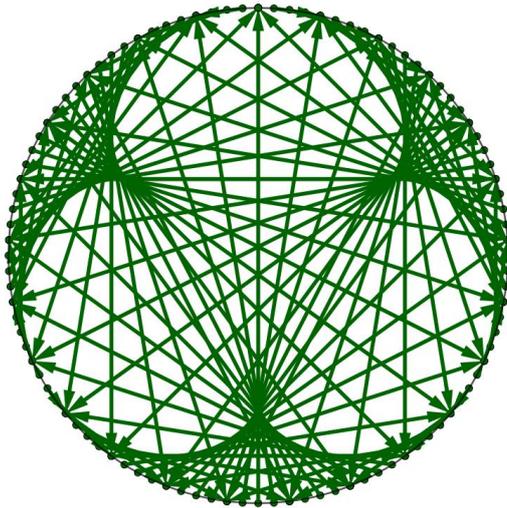
Figura 3.9 – Chryzodes obtidos fixando-se m e variando a de 2 até 7



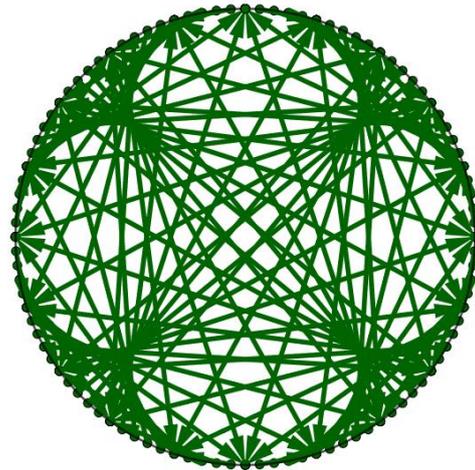
(a) Multiplicação por 2, módulo 100.



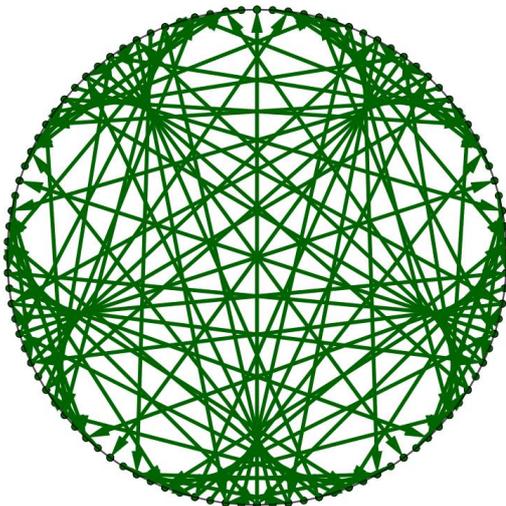
(b) Multiplicação por 3, módulo 100



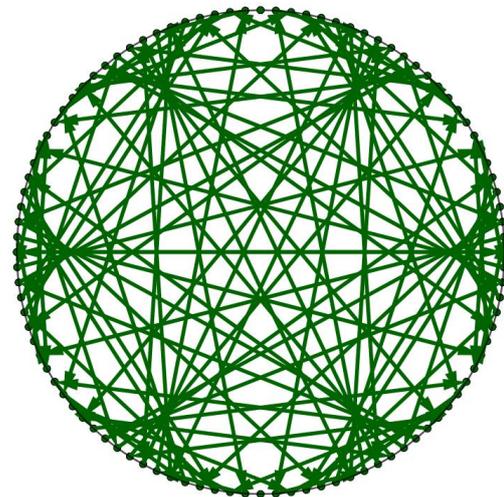
(c) Multiplicação por 4, módulo 100



(d) Multiplicação por 5, módulo 100



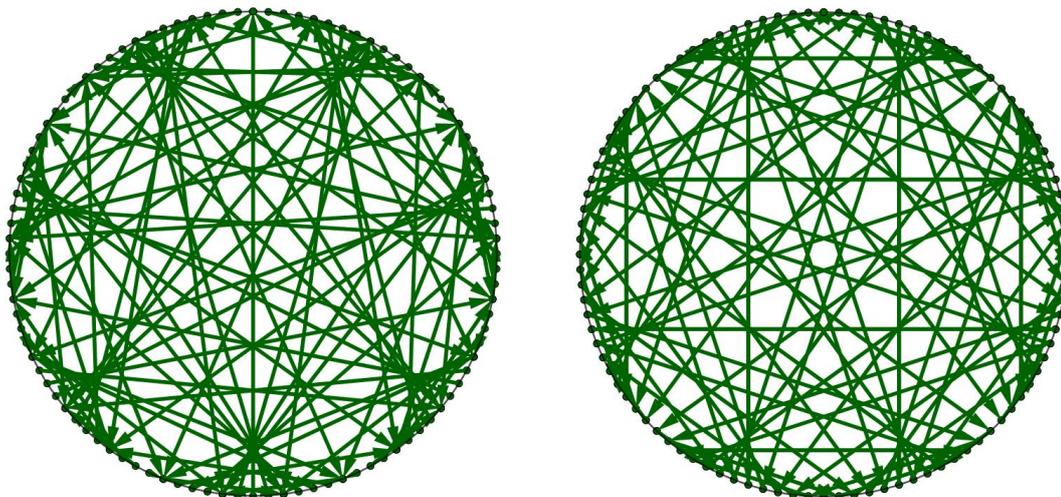
(e) Multiplicação por 6, módulo 100



(f) Multiplicação por 7, módulo 100

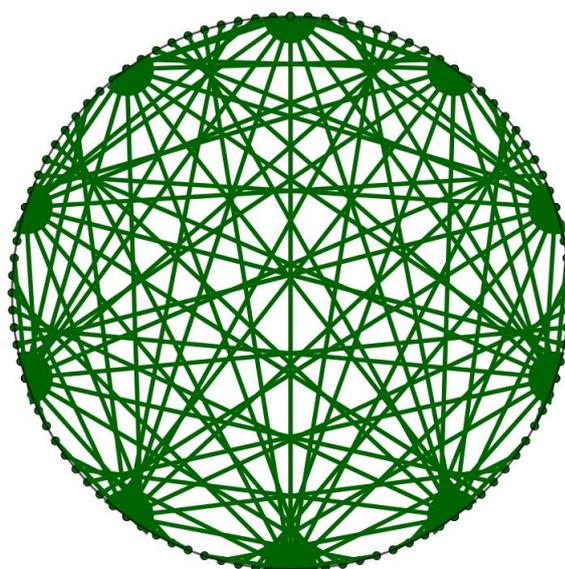
Fonte: Autor.

Figura 3.10 – Chryzodes obtidos fixando-se m e variando a de 8 até 10



(a) Multiplicação por 8, módulo 100

(b) Multiplicação por 9, módulo 100

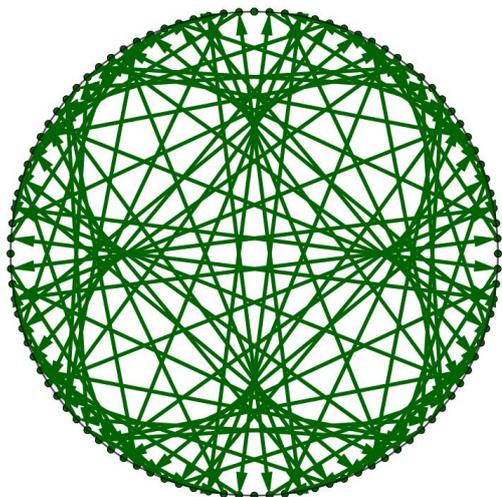


(c) Multiplicação por 10, módulo 100

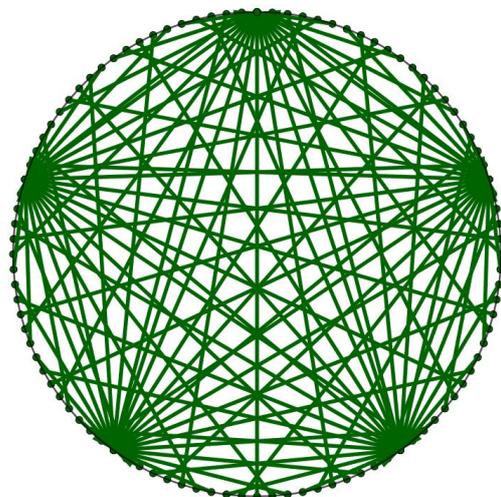
Fonte: Autor.

Conforme aumentamos o valor de a , fica progressivamente mais difícil de se visualizar a quantidade de pétalas na figura, mas ao mesmo tempo vão surgindo vários padrões dignos de nota. Destacamos alguns destes na Figura 3.11.

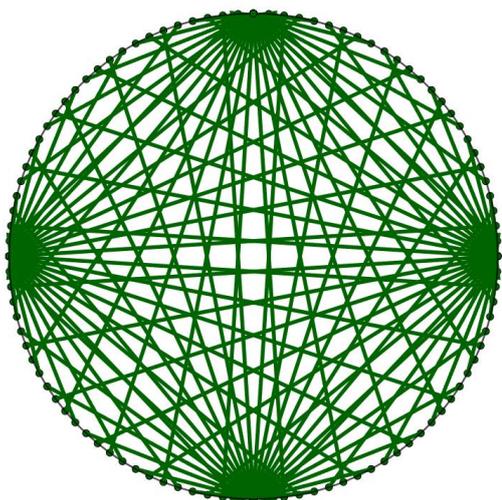
Figura 3.11 – Alguns Chryzodes interessantes



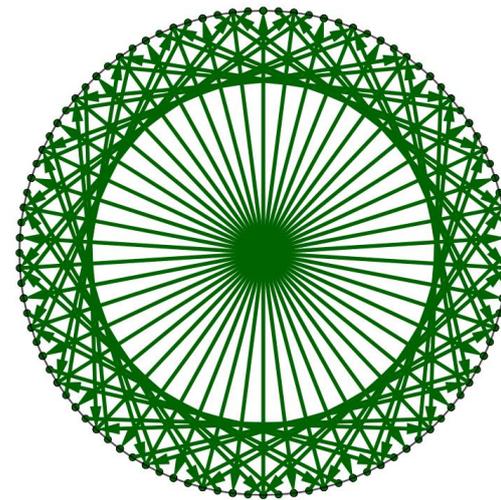
(a) Multiplicação por 17, módulo 100



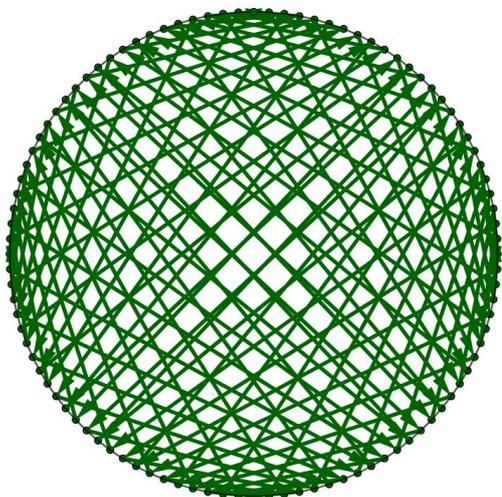
(b) Multiplicação por 20, módulo 100



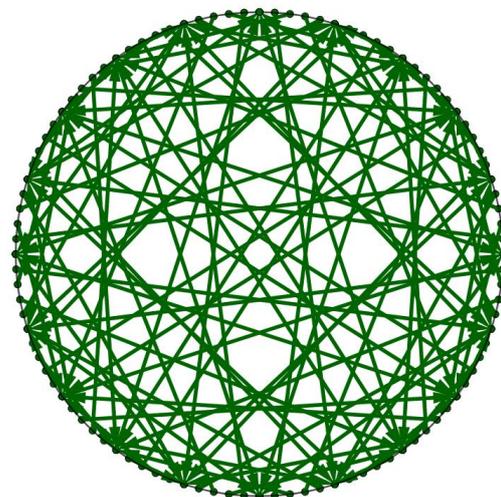
(c) Multiplicação por 25, módulo 100



(d) Multiplicação por 26, módulo 100



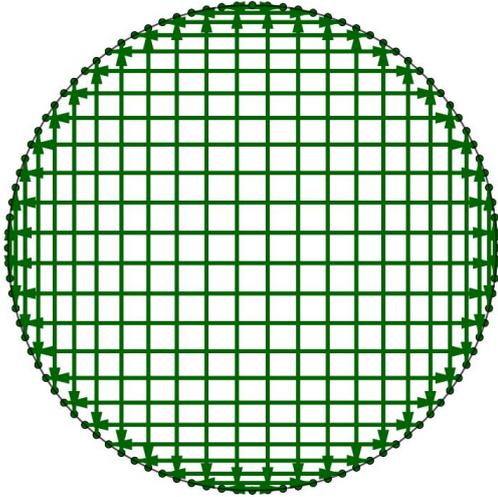
(e) Multiplicação por 33, módulo 100



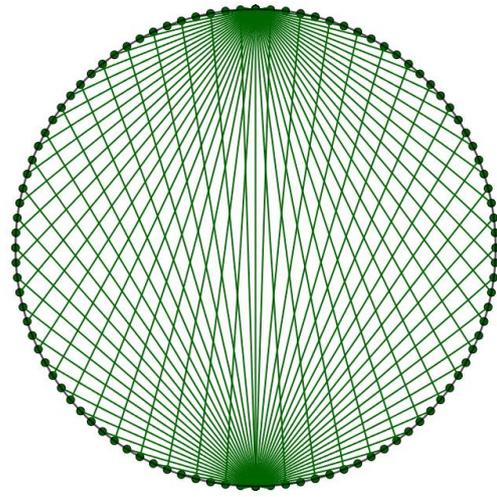
(f) Multiplicação por 45, módulo 100

Fonte: Autor.

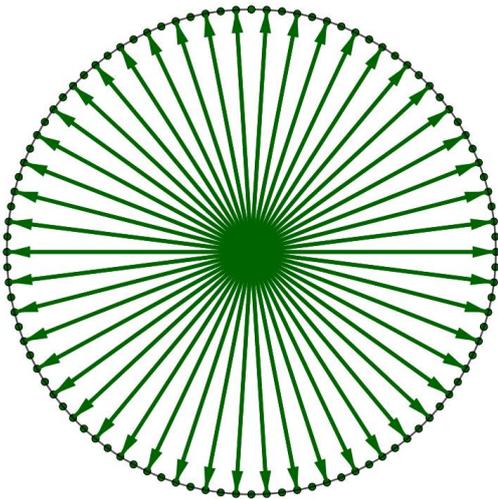
Figura 3.12 – Mais alguns Chryzodes interessantes



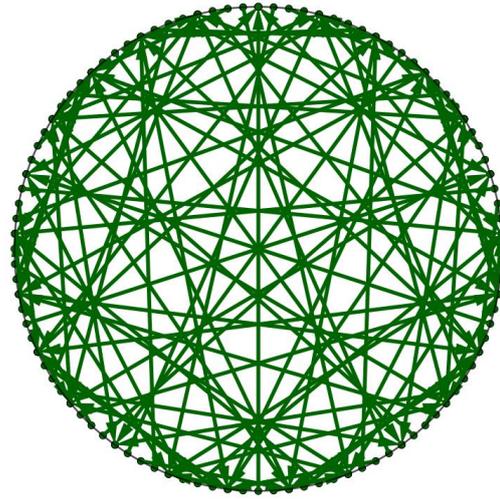
(a) Multiplicação por 49, módulo 100



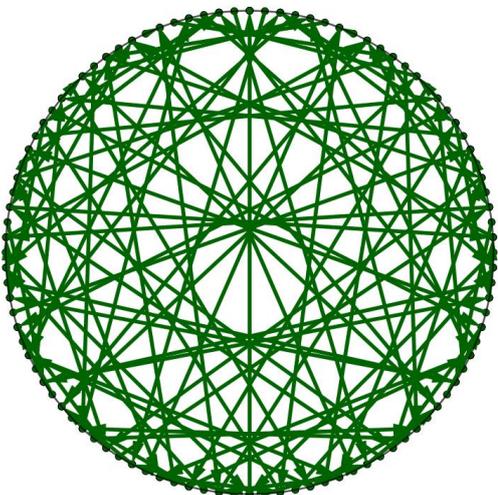
(b) Multiplicação por 50, módulo 100



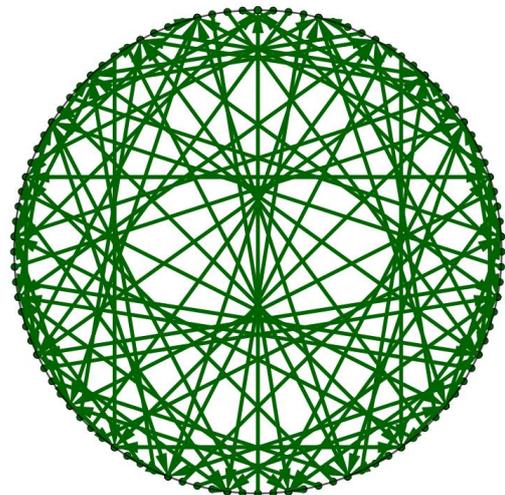
(c) Multiplicação por 51, módulo 100



(d) Multiplicação por 56, módulo 100



(e) Multiplicação por 58, módulo 100

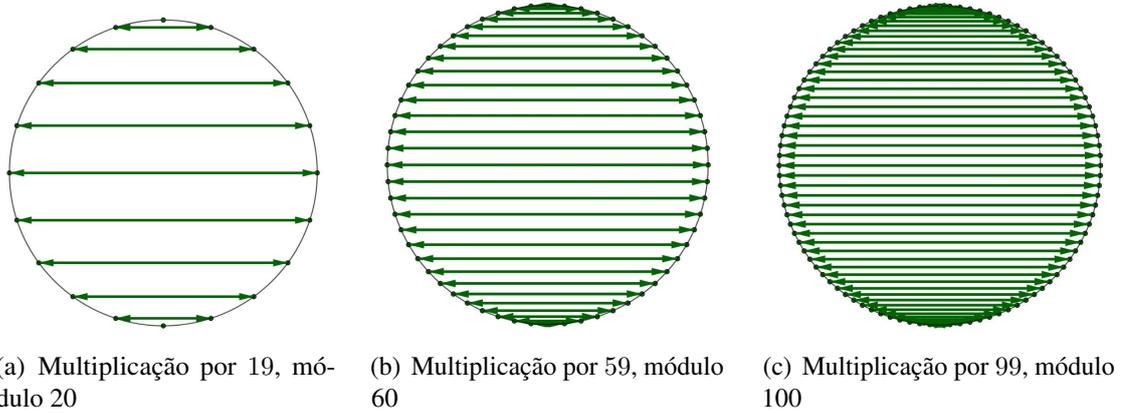


(f) Multiplicação por 84, módulo 100

Fonte: Autor.

Finalmente, ao se alcançar $a = m - 1$, obtemos figuras com linhas retas horizontais, ou seja, cada ponto p é ligado ao ponto $m - p$ módulo m . Isto se dá pois, se $a = m - 1$, segue que $ap = (m - 1)p = mp - p \equiv m - p \pmod{m}$. Veja exemplos na Figura 3.13.

Figura 3.13 – Chryzodes onde $a = (m - 1)$



Fonte: Autor.

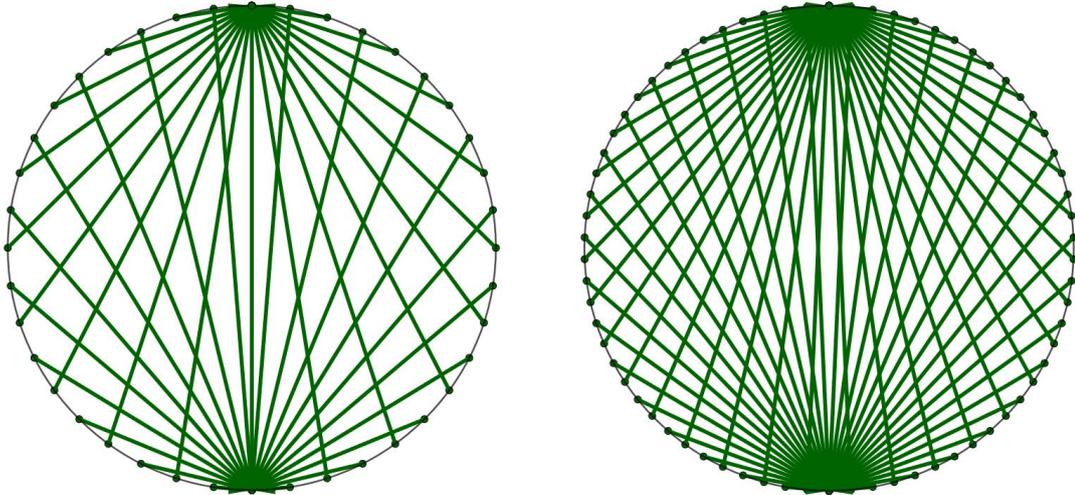
A seguir examinaremos outras formas associadas a diferentes combinações de m e a a partir de alguns padrões interessantes.

Seja $b \in \mathbb{Z}$ tal que b divide m . Pelo algoritmo de Euclides temos que existem q e r inteiros, com $0 \leq r < b$ tais que $p = b \cdot q + r$. Consideremos o primeiro caso, quando $a = \frac{m}{b}$.

Proposição 3.1. Se $a = \frac{m}{b}$, então cada ponto p é ligado ao ponto $r \cdot \frac{m}{b}$ módulo m , para algum $0 \leq r < b$.

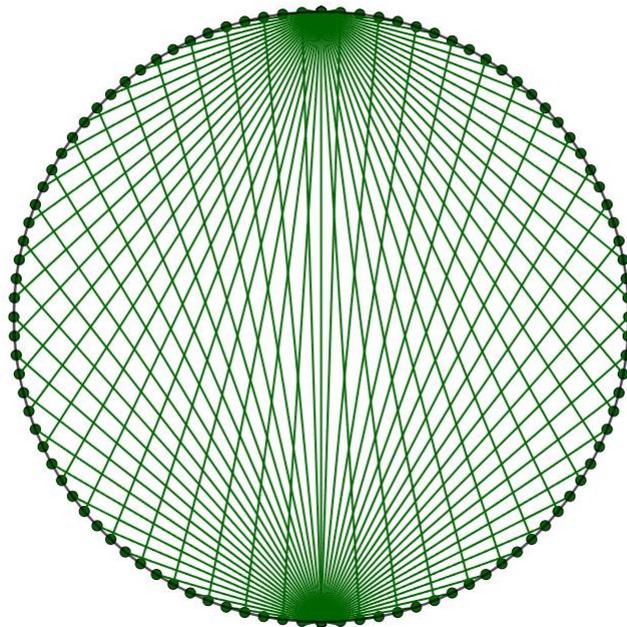
Demonstração. Se $a = \frac{m}{b}$, temos que $a \cdot p = \frac{m}{b} \cdot (b \cdot q + r) = m \cdot q + r \cdot \frac{m}{b} \equiv r \cdot \frac{m}{b} \pmod{m}$. \square

Explorando um pouco mais a situação descrita na Proposição 3.1 note o que ocorre quando $a = \frac{m}{2}$. Neste caso cada ponto p é ligado ao ponto 0 ou ao ponto $\frac{m}{2}$. Podemos concluir isto analisando a paridade de p : tomando p ímpar, $p = 2 \cdot k + 1$ e $p \cdot a = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{m}{2} = k \cdot m + \frac{m}{2} \equiv \frac{m}{2} \pmod{m}$. Para p par temos $p = 2 \cdot l$ e então $p \cdot a = 2 \cdot l \cdot \frac{m}{2} = m \cdot l \equiv 0 \pmod{m}$. A Figura 3.14 ilustra esse fato. Podemos notar que todos estes casos apresentam dois pontos de convergência, localizados exatamente nos pontos $p = 0$ e $p = \frac{m}{2}$.

Figura 3.14 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{2}$ 

(a) Multiplicação por 20, módulo 40

(b) Multiplicação por 35, módulo 70

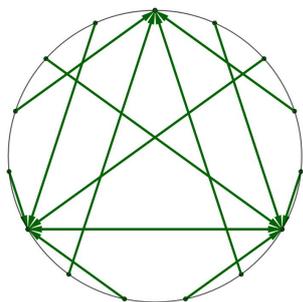


(c) Multiplicação por 50, módulo 100

Fonte: Autor.

Seguindo para o caso onde $a = \frac{m}{3}$, observamos três pontos de convergência, como pode ser visto na Figura 3.15. De fato, como neste caso $b = 3$ e pela Proposição 3.1 todos os pontos são levados para $r \cdot \frac{m}{b} \pmod{m}$. Nestes casos cada ponto será ligado ao ponto $p = \frac{0 \cdot m}{3}$, $p = \frac{m}{3}$ ou $p = \frac{2 \cdot m}{3}$, já que os valores possíveis de r tais que $0 \leq r < b$ são 0, 1 e 2. Este padrão se repete para $b = 4$, como pode se verificar na Figura 3.16, onde as formas apresentam quatro pontos de convergência. Para $b = 5$, com cinco pontos de convergência e assim por diante. Em outras palavras, sempre que $a = \frac{m}{b}$, teremos figuras com b pontos de convergência, que são os pontos $p = \frac{r \cdot m}{b} \pmod{m}$, com $0 \leq r < b$.

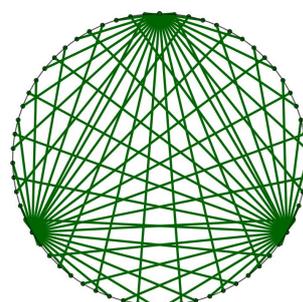
Figura 3.15 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{3}$



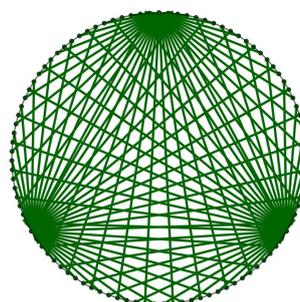
(a) Multiplicação por 5, módulo 15



(b) Multiplicação por 10, módulo 30



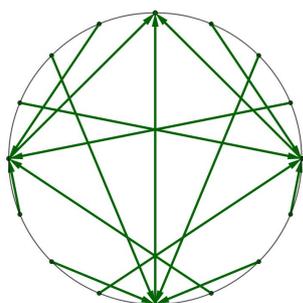
(c) Multiplicação por 21, módulo 63



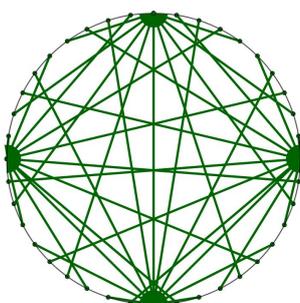
(d) Multiplicação por 33, módulo 99

Fonte: Autor.

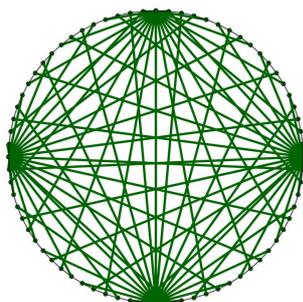
Figura 3.16 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{4}$



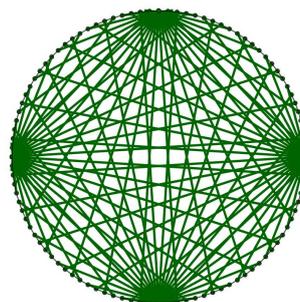
(a) Multiplicação por 4, módulo 16



(b) Multiplicação por 10, módulo 40



(c) Multiplicação por 18, módulo 72



(d) Multiplicação por 25, módulo 100

Fonte: Autor.

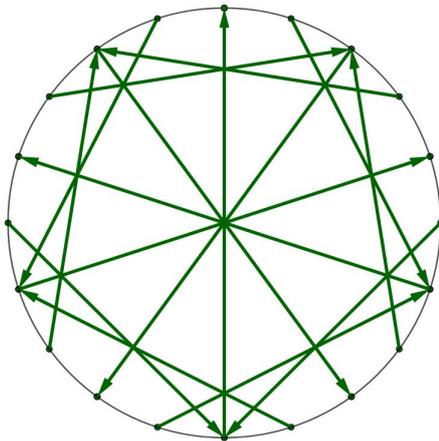
Agora vejamos o que ocorre quando tomamos valores de a tais que $a = \frac{m}{b} + 1$ ou $a = \frac{m}{b} - 1$. Novamente, considere que para cada ponto p existem q e r inteiros, com $0 \leq r < b$ tais que $p = b \cdot q + r$. Seguem então as Proposições 3.2 e 3.3 e observações sobre casos específicos.

Proposição 3.2. *Se $a = \frac{m}{b} + 1$, então cada ponto p é ligado ao ponto $r \cdot \frac{m}{b} + p$ módulo m , para algum $0 \leq r < b$.*

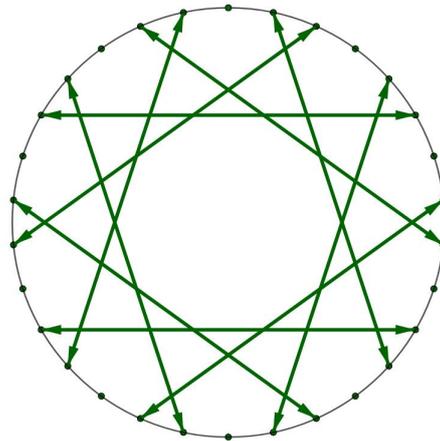
Demonstração. Se $a = \frac{m}{b} + 1$, temos que $a \cdot p = (\frac{m}{b} + 1) \cdot (b \cdot q + r) = m \cdot q + r \cdot \frac{m}{b} + b \cdot q + r \equiv r \cdot \frac{m}{b} + p \pmod{m}$. \square

A Figura 3.17 apresenta alguns exemplos.

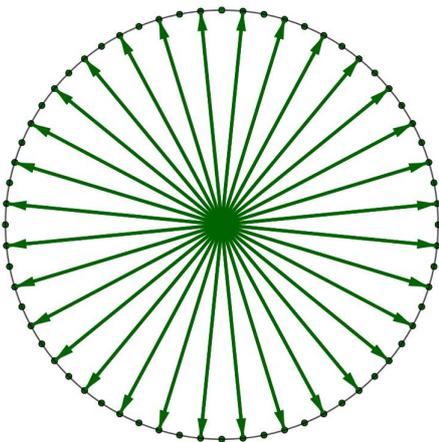
Figura 3.17 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{b} + 1$



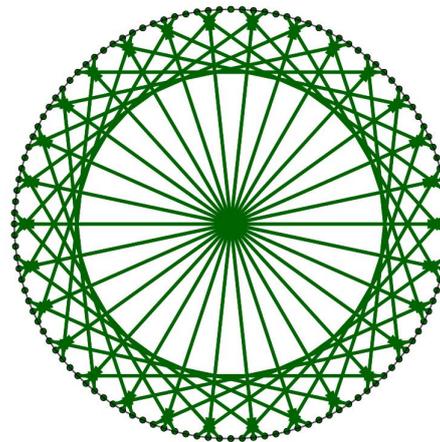
(a) Multiplicação por 6, módulo 20, $b = 4$



(b) Multiplicação por 11, módulo 30, $b = 3$



(c) Multiplicação por 33, módulo 64, $b = 2$



(d) Multiplicação por 31, módulo 120, $b = 4$

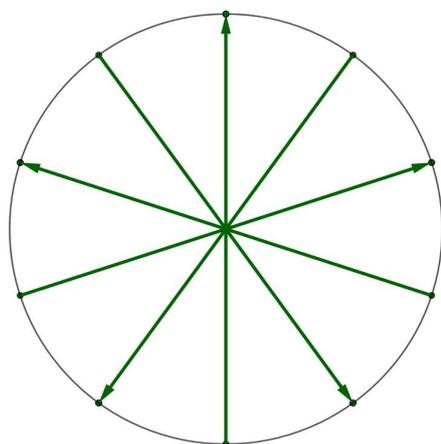
Fonte: Autor.

Tomando um caso específico, observe o que ocorre quando $a = \frac{m}{2} + 1$. Como os possíveis valores de r neste caso são 0 e 1, basta verificar a paridade de cada ponto. Se p é ímpar, então $p = 2 \cdot k + 1$ e

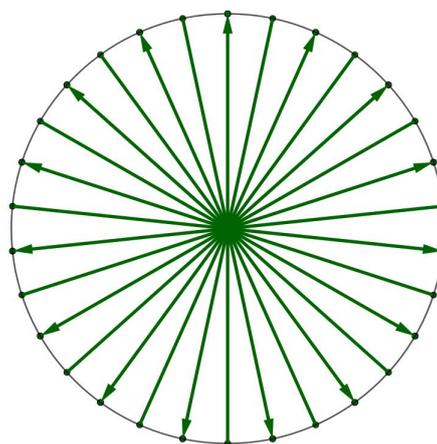
$$p \cdot a = (2 \cdot k + 1) \cdot \left(\frac{m}{2} + 1\right) = k \cdot m + \frac{m}{2} + 2 \cdot k + 1 \equiv \frac{m}{2} + p \pmod{m}.$$

Assim, os pontos p ímpares sempre são ligados aos respectivos pontos $\frac{m}{2} + p$, que está exatamente meia volta à frente na circunferência. Agora, tome p par. Disto temos $p = 2 \cdot l$ e então $p \cdot a = 2 \cdot l \cdot \left(\frac{m}{2} + 1\right) = l \cdot m + 2 \cdot l \equiv p \pmod{m}$. Isto quer dizer que os pontos p pares devem ser ligados a eles mesmos e então não desenhamos nenhum segmento quando isto ocorre. Esta configuração gera figuras curiosas, com segmentos que formam diâmetros, ou seja, se cruzam na região central do círculo, conforme mostra a Figura 3.18.

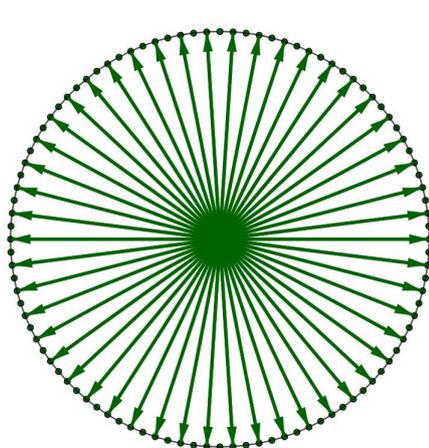
Figura 3.18 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} + 1$



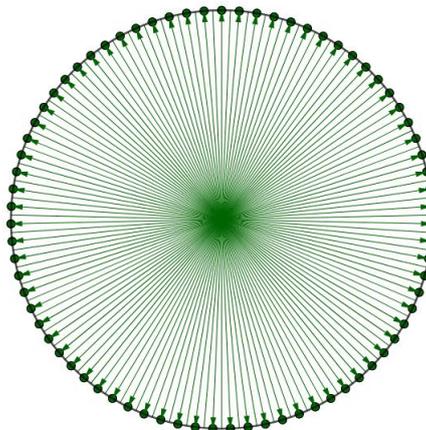
(a) Multiplicação por 6, módulo 10



(b) Multiplicação por 16, módulo 30



(c) Multiplicação por 51, módulo 100



(d) Multiplicação por 76, módulo 150

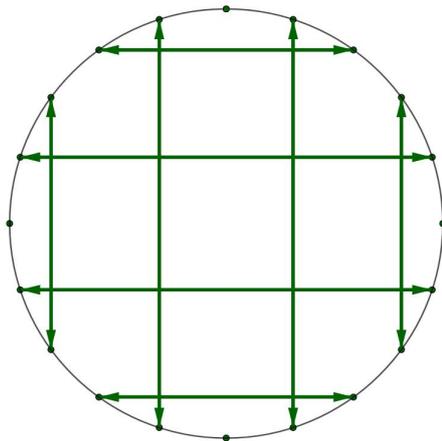
Fonte: Autor.

Proposição 3.3. Se $a = \frac{m}{b} - 1$, então cada ponto p é ligado ao ponto $r \cdot \frac{m}{b} - p$ módulo m , para algum $0 \leq r < b$.

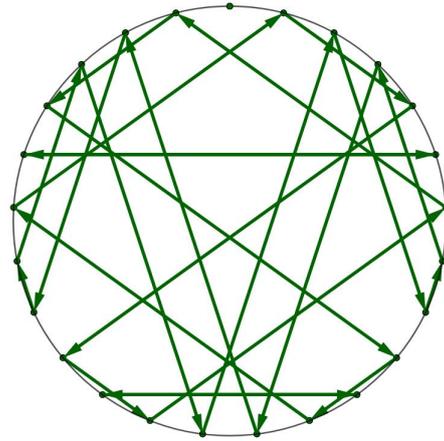
Demonstração. Se $a = \frac{m}{b} - 1$, temos que $a \cdot p = (\frac{m}{b} - 1) \cdot (b \cdot q + r) = m \cdot q + r \cdot \frac{m}{b} - b \cdot q - r \equiv r \cdot \frac{m}{b} - p \pmod{m}$. □

Na Figura 3.19 temos alguns exemplos.

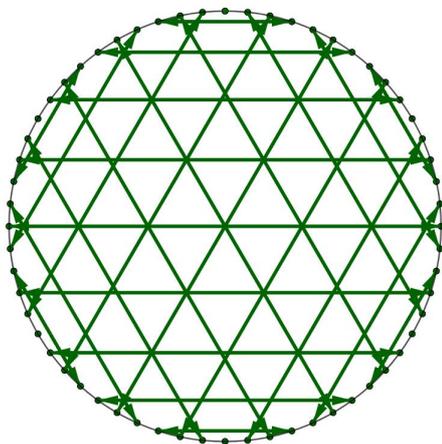
Figura 3.19 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{b} - 1$



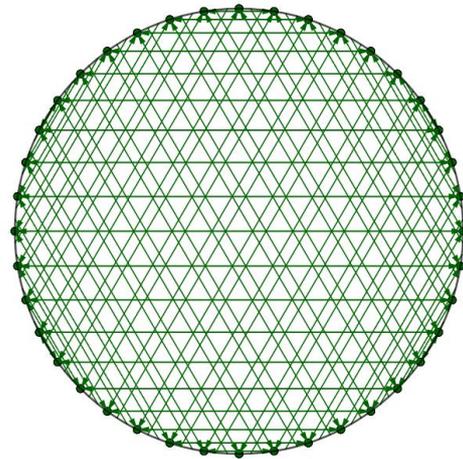
(a) Multiplicação por 9, módulo 20, $b = 2$



(b) Multiplicação por 4, módulo 25, $b = 5$



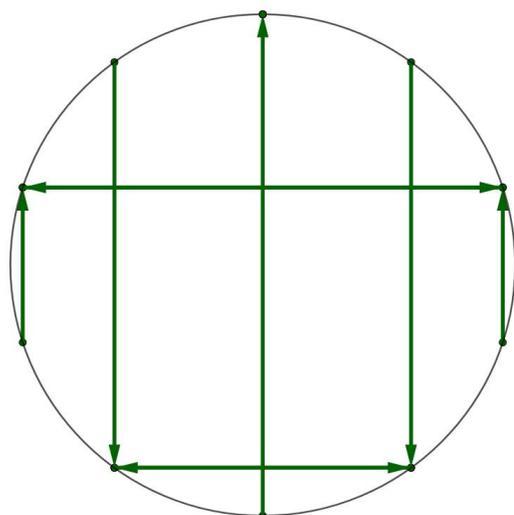
(c) Multiplicação por 19, módulo 60, $b = 3$



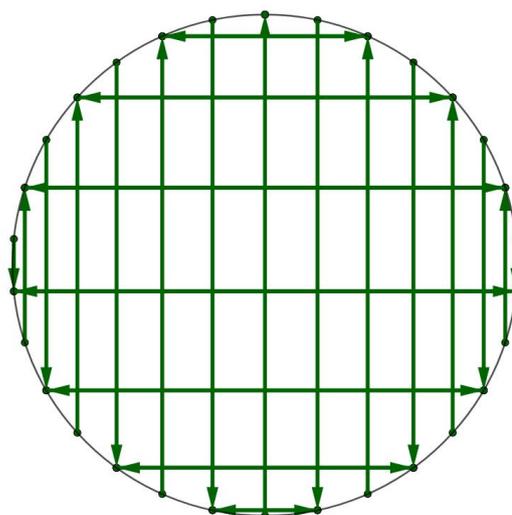
(d) Multiplicação por 39, módulo 120, $b = 3$

Fonte: Autor.

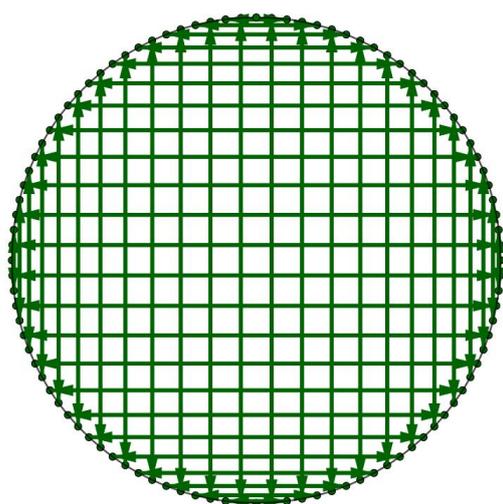
Considere agora o caso específico onde $a = \frac{m}{2} - 1$. Se tomarmos um ponto p par, temos $p = 2 \cdot k$ e $p \cdot a = 2 \cdot k \cdot (\frac{m}{2} - 1) = k \cdot m - 2 \cdot k \equiv -p \pmod{m}$. Se p é ímpar segue $p = 2 \cdot k + 1$ e $p \cdot a = (2 \cdot k + 1) \cdot (\frac{m}{2} - 1) = k \cdot m - 2 \cdot k + \frac{m}{2} - 1 \equiv \frac{m}{2} - p \pmod{m}$. Observando a Figura 3.20 podemos compreender melhor o padrão, onde os pontos pares formam linhas horizontais e os pontos ímpares formam linhas verticais.

Figura 3.20 – Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} - 1$ 

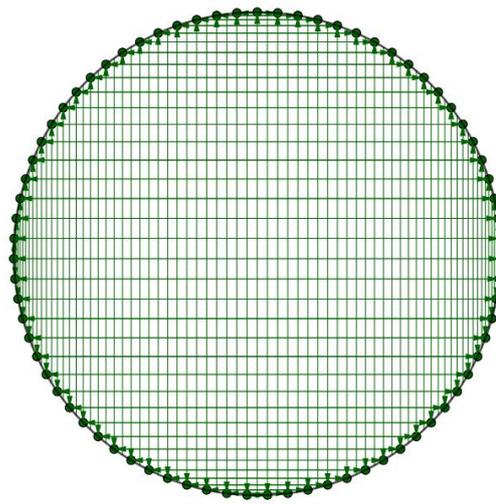
(a) Multiplicação por 4, módulo 10



(b) Multiplicação por 14, módulo 30



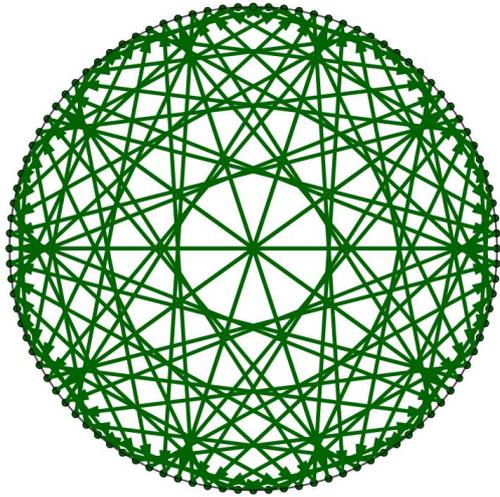
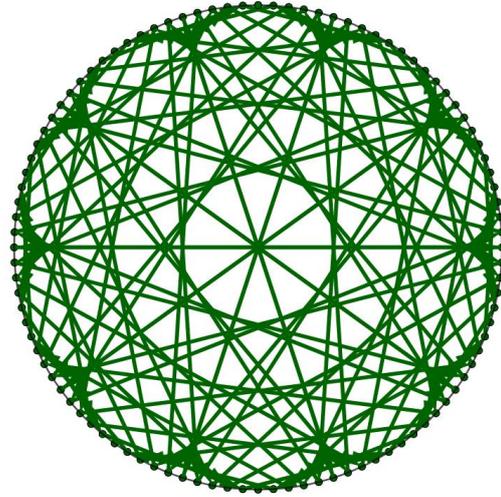
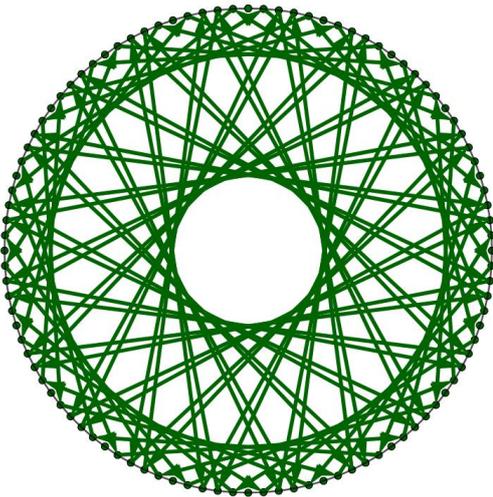
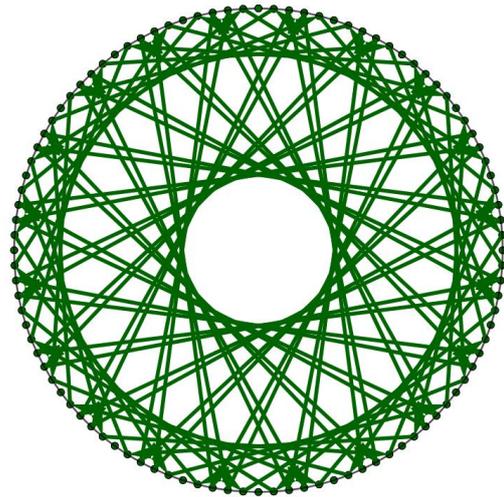
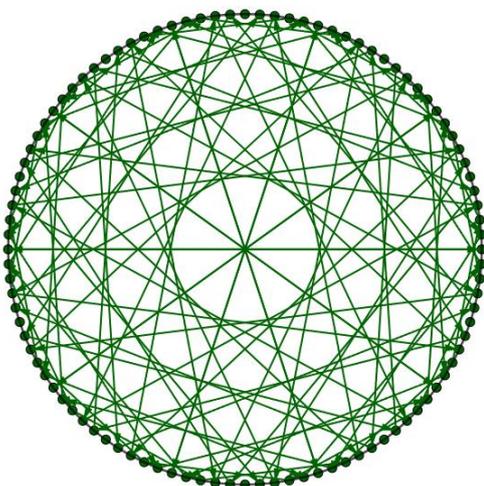
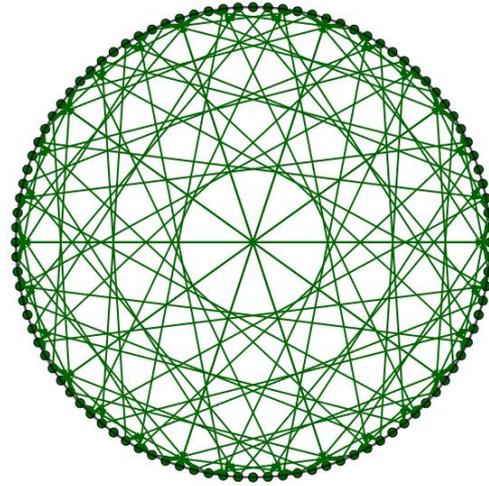
(c) Multiplicação por 49, módulo 100



(d) Multiplicação por 74, módulo 150

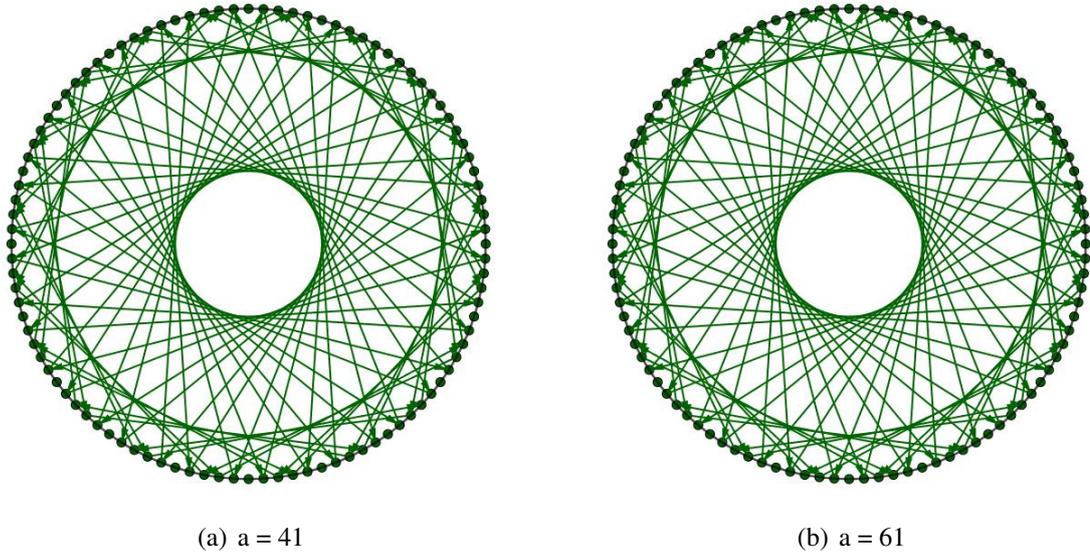
Fonte: Autor.

Por fim, faremos a análise de casos específicos que formam padrões congruentes. Tais padrões podem ser obtidos ao se tomar $m = 100$ e comparar os padrões para $a = 10 \cdot k + 1$ com os padrões para $a = 100 - 10 \cdot k + 1$, para cada $k \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Ou seja, comparar os padrões para $a = 11$ com $a = 91$, $a = 21$ com $a = 81$ e assim por diante, o que pode ser feito visualmente através das Figuras 3.21 e 3.22.

Figura 3.21 – Cryzodes com 100 pontos - Comparação de casos $a = 10 \cdot k + 1$ e $a = 100 - 10 \cdot k + 1$ (a) $a = 11$ (b) $a = 91$ (c) $a = 21$ (d) $a = 81$ (e) $a = 31$ (f) $a = 71$

Fonte: Autor.

Figura 3.22 – Cryzodes com 100 pontos - Comparação de casos $a = 10 \cdot k + 1$ e $a = 100 - 10 \cdot k + 1$



Fonte: Autor.

Proposição 3.4. *Sejam $k, j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ tais que $k + j = 10$. Então para cada valor $t \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$, existe um único $u \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ tal que $(k \cdot 10 + 1) \cdot t \equiv u \pmod{100}$ se, e somente se, $(j \cdot 10 + 1) \cdot u \equiv t \pmod{100}$.*

Demonstração. Seja $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Como $(k \cdot 10 + 1, 100) = 1$, segue pela Proposição 2.1 que a linha $[k \cdot 10 + 1]$ contém todas as classes residuais módulo 100, isto é,

$$(k \cdot 10 + 1) \cdot t \equiv u \pmod{100}$$

onde t e u atingem todos os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$.

Agora, seja $j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ tal que $k + j = 10$. Então, para qualquer j temos

$$(j \cdot 10 + 1) \cdot u \equiv (j \cdot 10 + 1)(k \cdot 10 + 1) \cdot t \pmod{100}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} (j \cdot 10 + 1)(k \cdot 10 + 1) \cdot t &= (j \cdot k \cdot 100 + (j + k) \cdot 10 + 1) \\ &= (j \cdot k \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 1) \cdot t \equiv t \pmod{100}. \end{aligned}$$

Logo $(j \cdot 10 + 1) \cdot u \equiv t \pmod{100}$.

A recíproca é inteiramente análoga, ou seja, ao se tomar $(j \cdot 10 + 1) \cdot u \equiv t \pmod{100}$ chegamos a $(k \cdot 10 + 1) \cdot t \equiv u \pmod{100}$. \square

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo trazemos 6 propostas de atividades, como forma de aplicação dos conceitos vistos nos Capítulos 2 e 3. Cada atividade contém uma breve descrição, lista de materiais e encaminhamentos ao docente. Para algumas das atividades fornecemos também folhas para impressão, presentes nos apêndices do trabalho.

4.1 ATIVIDADE 1 - O PROBLEMA DO HOTEL

4.1.1 INFORMAÇÕES GERAIS.

Esta atividade se trata de uma adaptação do problema tratado no Capítulo 2, proposto por Hodgson e Cassidy (1982). Ela visa representar de forma lúdica o problema do hotel e em seguida discutir com a turma a solução do problema. Nesta atividade cada aluno representa um hóspede do hotel, as carteiras da sala de aula representam as portas numeradas e os alunos realizam o processo descrito no problema, “abrindo” e “fechando” as portas de acordo com os números.

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 6º ano.
- Quantidade de aulas: 3 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Polígonos estrelados, paridade, divisibilidade, múltiplos e divisores.

4.1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é discutir de forma lúdica o problema do Hotel Circular.

Os objetivos específicos são:

- Estimular o cálculo mental de múltiplos e divisores.
- Estimular o raciocínio lógico e a resolução de problemas.
- Discutir a paridade de um número natural.
- Aplicar os conceitos de números primos e compostos.
- Discutir a divisibilidade entre dois números naturais.
- Apresentar o conceito de polígonos estrelados.

4.1.3 MATERIAL DIDÁTICO.

- Cartões numerados de 1 a m , onde m é o número de alunos participando da atividade.
- Computador e projetor ou tela conectados.
- Impressões disponíveis no Apêndice 5.

Esta atividade se trata de uma adaptação do problema proposto por Hodgson e Cassidy (1982), tratado na Seção 2.3. Ela visa representar de forma lúdica o problema do hotel e em seguida discutir com a turma a solução do problema. Nesta atividade cada aluno representa um hóspede do hotel, as carteiras da sala de aula representam as portas numeradas e os alunos realizam o processo descrito no problema, “abrindo” e “fechando” as portas de acordo com os números.

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 6º ano.
- Quantidade de aulas: 3 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Polígonos estrelados, paridade, divisibilidade, múltiplos e divisores.

4.1.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentar o problema do hotel circular, proposto no Apêndice 5, explicar aos estudantes o processo descrito e destacar a pergunta central do problema: “Ao final do processo, quais portas permanecem abertas e quais portas permanecem fechadas?”.

Organizar as carteiras da sala de aula em forma de círculo, onde cada aluno fica atrás de uma carteira. Em seguida, distribuir os cartões numerados em sequência, associando cada aluno e sua respectiva carteira a um hóspede e sua respectiva porta.

Iniciar o processo com o estudante de número 1, que deverá passar por todas as carteiras, girando cada uma em 90 graus, o que representa que as portas estão sendo abertas. Em seguida o estudante de número 2 passa pelas carteiras de número múltiplo de 2, girando-as novamente e representando as portas sendo fechadas.

Após estas duas interações iniciais, retomar a questão central e permitir que alguns alunos dêem respostas preliminares. Retomar o processo a partir do estudante de número 3.

A atividade pode ser pausada para discussão da questão central quantas vezes o docente considerar necessárias, sempre incentivando o raciocínio dos estudantes para que consigam encontrar a resposta antes do processo se finalizar.

Ao final do processo, basta verificar com a turma quais “portas” terminaram “abertas” e “fechadas” para se responder à questão inicial. O docente então deverá discutir com a turma a teoria por trás da resposta do problema. Para isto, sugere-se utilizar a construção no GeoGebra, disponível em <<https://www.geogebra.org/classic/mc29jhe3>> e mostrar os polígonos estrelados referentes às movimentações de cada aluno, de acordo com seus números, ressaltando as figuras congruentes obtidas por $\{m/a\}$ e $\{m/(m - a)\}$, para que os estudantes visualizem melhor a solução do problema.

Finalmente, destacar a segunda possibilidade de resposta, ou seja, caso a turma tenha um número par de estudantes, observar o que ocorreria se fosse um número ímpar, conforme descrito na Seção 2.3. Para isto, basta o docente se unir à turma, passando a representar um dos hóspedes do hotel e alterando a paridade do número anterior. Com a paridade alterada, reinicia-se o ciclo com todas as portas fechadas, novamente com o docente fazendo as intervenções necessárias para que os estudantes possam chegar à segunda possível resposta antes de o processo chegar ao final. Espera-se que, após o primeiro ciclo e a apresentação dos polígonos estrelados como visualização da resolução, os estudantes consigam chegar à segunda resposta com maior facilidade.

Como sugestão de aprofundamento, o docente poderá colocar os seguintes questionamentos: “Quais hóspedes passam por todas as portas e quais hóspedes passam apenas por algumas? Por que isso acontece?”. Para abordar tais questionamentos, retome os polígonos estrelados apresentados aos estudantes anteriormente e permita que os estudantes discutam entre si, propondo explicações. O docente então deverá direcionar a turma à analisar a divisibilidade entre m e a para cada caso. Espera-se que os alunos percebam que a solução se relaciona ao fato de a e m serem ou não coprimos. Para encerrar a atividade, formalizar a solução com a turma, de acordo com os resultados apresentados na Seção 2.3.

4.2 ATIVIDADE 2 - CONSTRUINDO ESTRELAS

4.2.1 INFORMAÇÕES GERAIS.

Esta atividade de laboratório de matemática propõe a construção de estrelas (polígonos estrelados) usando papelão e linha, e posteriormente uma análise das relações de divisibilidade que geram as formas construídas. Esta atividade pode ser aplicada para apresentar ou aprofundar os conceitos de múltiplos, divisores, números primos e coprimos. Tomamos como referência as construções e algumas sugestões publicadas por Malke Rosenfeld (2017).

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 6º ano.
- Quantidade de aulas: 4 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Divisibilidade, números primos e compostos, polígonos estrelados, construção geométrica.

4.2.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é abordar diversos conceitos de divisibilidade em \mathbb{N} através da construção física de polígonos estrelados.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de polígonos estrelados.
- Discutir a paridade de um número natural.
- Aplicar os conceitos de números primos e compostos.
- Discutir a divisibilidade entre dois números naturais.
- Incentivar observações sobre os padrões geométricos estabelecidos nas construções.

4.2.3 MATERIAL DIDÁTICO

- Papelão e papel cartão colorido.
- Novelos de linha com cores variadas.
- Compasso e régua.
- Tesoura e cola.

4.2.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Cada estudante deverá criar ao menos duas construções de polígonos estrelados $\{12/a\}$, ou seja, com 12 pontos sendo conectados somando-se a à posição de cada ponto. Os estudantes deverão escolher dois valores de a , com $a \neq 1$ e $a \neq 11$, sendo um caso onde $(12, a) = 1$ e outro caso onde $(12, a) \neq 1$.

O docente pode aproveitar o momento de proposição da atividade para abordar o conceito de números coprimos ou primos entre si e então direcionar os estudantes a escolherem os valores de a com os quais desejam construir suas estrelas. Os estudantes também poderão criar composições com mais de um valor de a , por exemplo, construindo um polígono estrelado e o dodecágono circunscrito à ele na mesma construção.

Etapa de esboço:

Inicialmente, o docente deverá apresentar a atividade, mostrar exemplos de polígonos estrelados e mostrar o processo de construção descrito no Capítulo 2. Os estudantes então deverão desenhar em folhas de papel alguns polígonos estrelados com $m = 12$ para melhor compreenderem o processo de construção posterior. Ao final desta etapa cada estudante deve definir quais valores de a utilizará na etapa seguinte.

Etapa de construção:

A construção se inicia desenhando-se círculos com raio igual a 10 centímetros no papel cartão colorido e círculos com raio igual a 11 centímetros no papelão. Após isto, os estudantes recortam ambos os círculos e deverão colar o papel cartão no papelão, de forma que os círculos estejam concêntricos. Feito isto, deverão utilizar um lápis para marcar os 12 pontos igualmente espaçados ao redor do círculo.

O docente deverá auxiliar os alunos para distribuir os pontos de forma adequada, conduzindo o processo se for necessário. Em seguida os estudantes deverão fazer pequenos cortes ao redor da circunferência, nos pontos marcados, de forma que os cortes cheguem ao menos um centímetro para dentro do círculo interno.

Por fim, deverão escolher cores de linhas e ligar os pontos de acordo com os valores de a escolhidos anteriormente. Deve-se passar a linha várias vezes por cada ponto, dando “voltas” ao redor do círculo, para que a linha se fixe melhor. Incentive os estudantes a utilizarem diferentes cores ou tonalidades de uma mesma cor para os vários “ciclos” congruentes que aparecem quando $(m, a) \neq 1$.

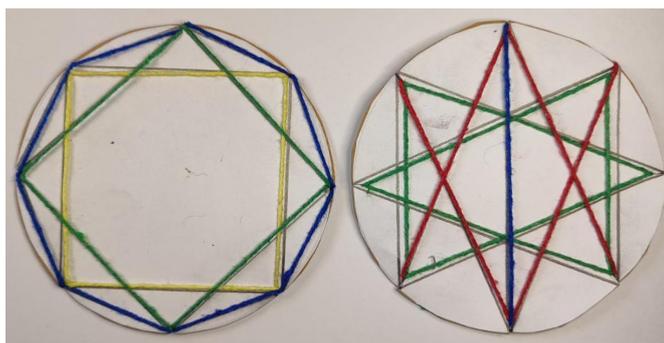
Nas Figuras 4.1 e 4.2 temos alguns exemplos de construções, com diferentes quantidades de pontos distribuídos ao redor da circunferência.

Figura 4.1 – Exemplos de construções com diferentes valores de m

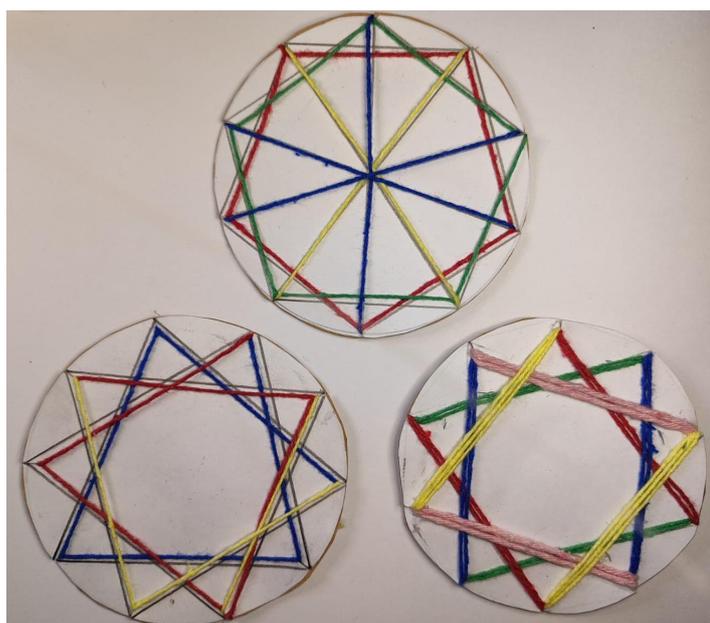


Fonte: Rosenfeld (2017).

Figura 4.2 – Exemplos de construções com $m = 8$ e $m = 10$



(a) $m = 8$



(b) $m = 10$

Fonte: Autor.

Etapa de análise:

Após as construções, o docente deverá apresentar os seguintes questionamentos aos estudantes:

I - No caso em que $(12, a) = 1$, o que você pôde observar a respeito da figura? Quantas estrelas se formaram e quantas pontas tem cada uma? Como você explicaria isto, pensando no fato de que 12 e a são coprimos?

II - No caso em que $(12, a) \neq 1$, o que você pôde observar a respeito da figura? Quantas estrelas se formaram e quantas pontas tem cada uma? Como você explicaria isto, pensando no MDC (maior divisor comum) entre 12 e a ?

Após os alunos registrarem suas conclusões, o docente deverá rerepresentar os polígonos estrelados módulo 12, desenhando no quadro ou utilizando a construção no GeoGebra disponível através do link <https://www.geogebra.org/classic/mc29jhe3> e discutir com a turma as conclusões sobre a divisibilidade entre 12 e a , mostrando todas as formas possíveis. Também é interessante mostrar outros casos $\{m/a\}$ onde m e a são coprimos ou não, para que a turma compreenda melhor as figuras construídas.

4.3 ATIVIDADE 3 - DESENHANDO CHRYZODES

4.3.1 INFORMAÇÕES GERAIS.

Nesta atividade propomos uma abordagem direta dos Chryzodes e seu estudo através da construção geométrica de alguns Chryzodes e da observação dos padrões de multiplicação análogos. A atividade pode ser toda realizada utilizando-se folhas em branco e material de desenho geométrico, mas fornecemos folhas com pontos numerados para impressão no Apêndice 5. Os estudantes deverão ser introduzidos ao conceito de Chryzode, visualizar uma construção e produzir suas próprias composições, utilizando técnicas de desenho geométrico.

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 8º e 9º anos.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Construção geométrica, sequências, multiplicação, Chryzodes.

4.3.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é apresentar os Chryzodes e sua construção geométrica, enfatizando a sua relação com a multiplicação.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de Chryzode.
- Analisar a relação entre os Chryzodes e a multiplicação de números naturais.
- Estabelecer o raciocínio análogo à congruência aritmética através da divisão euclidiana.
- Incentivar observações sobre os padrões geométricos estabelecidos nas construções.
- Dividir uma circunferência em m partes.

4.3.3 MATERIAL DIDÁTICO

- Papel sulfite ou cartonado.
- Compasso e régua.
- Transferidor.
- Impressões disponíveis no Apêndice 5.

- Materiais para desenho, como lápis coloridos e canetinhas.
- Computador e tela ou projetor conectados.

4.3.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

O docente deverá apresentar aos estudantes o conceito de Chryzodes e utilizar os links a seguir para mostrar referências visuais e exemplos:

- <<https://www.youtube.com/watch?v=QFqScUVfj-0>>
- <<https://www.youtube.com/watch?v=Bpv4Nw5O990>>
- <<https://times-tables.lengler.dev>>
- <<https://www.geogebra.org/classic/aqvfvzt>>

Mostrar à turma algumas variações de Chryzodes e ativando a animação automática disponível por alguns segundos, permitindo a todos os estudantes uma visualização geral inicial. É importante mostrar alguns casos de multiplicação por 2, 3 e 4 com diversos valores de m , ou seja, com diversas quantidades de pontos, para que os estudantes percebam as “pétalas.” Também é importante mostrar casos onde $a = \frac{m}{2}$, $a = \frac{m}{2} - 1$ e $a = \frac{m}{2} + 1$. Finalmente, o docente deve utilizar a construção no GeoGebra, disponibilizada através do link <<https://www.geogebra.org/classic/aqvfvzt>> para aguçar a curiosidade dos estudantes, incentivando-os a escolher valores de m e a e mostrando as formas obtidas.

Para esta atividade, sugerimos a utilização de $m = 30$ ou $m = 60$, para que a construção não se torne complexa ou cansativa demais. Fornecemos no Apêndice 5 modelos para impressão, em que os pontos já se encontram igualmente espaçados ao redor de uma circunferência. Alternativamente, o docente pode trabalhar a distribuição dos pontos ao redor da circunferência, ficando ao seu critério a construção toda ou a utilização dos modelos fornecidos. Para distribuir os pontos ao redor da circunferência, inicialmente desenha-se uma circunferência com raio $r = 10$ cm e se marca um ponto inicial. Em seguida, define-se o valor de m e deve-se dividir o ângulo pleno 360° por m , para se encontrar o ângulo central relativo a cada par de pontos consecutivos a serem distribuídos. Então, utiliza-se o transferidor para determinar a posição de cada ponto, a partir do ponto inicial definido anteriormente. Finalmente, numera-se os pontos de 0 a $(m - 1)$.

Tendo m pontos distribuídos ao redor da circunferência, basta se definir o valor de a e então resolver os produtos entre o número associado à posição de cada ponto e a . Cada estudante deverá escolher um valor de a dentre $\{2, 3, 4, 5\}$, um valor de a dentre $\{\frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1\}$ e outro valor de a à sua livre escolha. Oriente os estudantes a iniciarem os desenhos pelo primeiro conjunto e exemplifique os primeiros passos da construção utilizando esboços no quadro. Assim que o produto entre o valor associado a algum ponto e a resultar num número maior que m ,

chame a atenção da turma toda e demonstre a solução simples da congruência, utilizando o resto da divisão por m . Demonstre alguns casos e oriente a turma a retomar a atividade, agora com a ferramenta necessária para concluir as construções.

Após os Chryzodes estarem desenhados, os estudantes deverão finalizar suas composições utilizando canetas ou lápis de diferentes cores, escolhendo e criando padrões para cada Chryzode. Incentive os alunos a incorporarem elementos externos, encaixando-os com as formas obtidas durante a construção.

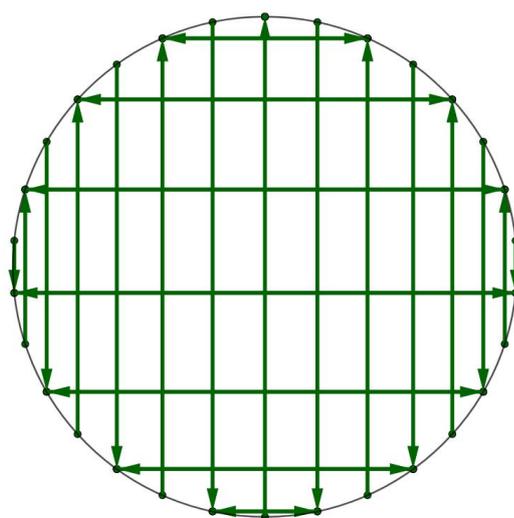
Ao final das construções, o docente deverá propor os seguintes questionamentos aos alunos:

1. O que você pôde observar sobre o padrão formado nos Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} - 1$?
2. O que você pôde observar sobre o padrão formado nos Chryzodes onde $a = \frac{m}{2}$?
3. O que você pôde observar sobre o padrão formado nos Chryzodes onde $a = \frac{m}{2} + 1$?
4. Para o valor de a escolhido livremente, você consegue identificar algum tipo de padrão formado? Descreva-o.

Soluções das questões:

1. Espera-se que o estudante descreva o padrão de linhas verticais e horizontais paralelas obtidos nesse caso, formando um "quadriculado", como pode-se ver na Figura 4.3.

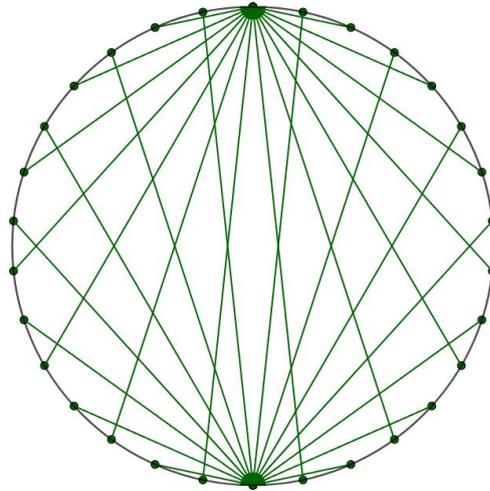
Figura 4.3 – $m = 30$ e $a = 14$



Fonte: Autor.

2. Espera-se que o estudante perceba e descreva o padrão de duas “pontas” formado pelos dois pontos de convergência dos segmentos, como mostra a Figura 4.4.

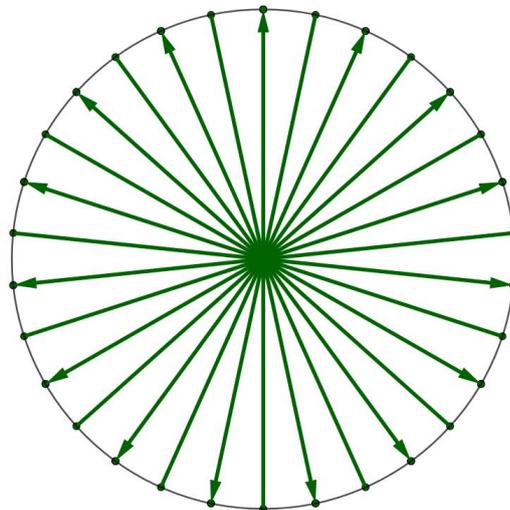
Figura 4.4 – $m = 30$ e $a = 15$



Fonte: Autor.

3. Espera-se que o estudante descreva o ponto central obtido ou que identifique que os segmentos são diâmetros do círculo, vide Figura 4.5.

Figura 4.5 – $m = 30$ e $a = 16$



Fonte: Autor.

4. A resposta para esta questão depende do valor a escolhido por cada estudante.

4.4 ATIVIDADE 4 - ENCONTRANDO POLÍGONOS

4.4.1 INFORMAÇÕES GERAIS

A atividade trata da construção de um polígono estrelado, seguida de uma análise dos polígonos formados pelas intersecções dos segmentos inicialmente desenhado pelos estudantes. Esta atividade deverá ser realizada após o docente apresentar à turma os conceitos básicos relacionados a polígonos, bem como suas classificações e características. Usando tais conhecimentos os estudantes deverão identificar os diferentes polígonos presentes em cada figura e deverão responder a uma série de questionamentos sobre tais polígonos.

- Nível: Ensino fundamental.
- Série/ano: 6º ano.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Polígonos, polígonos estrelados, construções geométricas.

4.4.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é abordar de forma lúdica o desenho de polígonos estrelados e de polígonos simples.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de polígono estrelado.
- Perceber padrões presentes em figuras planas.
- Reconhecer e classificar diferentes polígonos.

4.4.3 MATERIAL DIDÁTICO.

- Papel sulfite em branco ou impressões disponíveis no Apêndice 5.
- Régua.
- Materiais para desenho, como lápis coloridos e canetinhas.

4.4.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Como a atividade é voltada para o ensino fundamental, recomendamos que se forneça aos alunos um octógono regular já desenhado e com os vértices destacados, disponível no Apêndice 5. O docente também pode realizar a construção de tal polígono com a turma caso considere pertinente. Em seguida, os estudantes deverão selecionar um vértice inicial e ligá-lo usando régua, ao vértice localizado três unidades adiante no polígono. Seguindo este procedimento obtém-se o polígono estrelado $\{8/3\}$. Os estudantes então deverão responder às questões apresentadas pelo docente. Listamos algumas sugestões de questionamentos, que o professor poderá escrever na lousa ou previamente imprimir e entregar aos alunos. O docente pode alterar as questões ou adicionar outros questionamentos conforme as necessidades da turma.

1. Quais figuras geométricas você consegue encontrar?
2. Quais delas são polígonos regulares?
3. Quais tipos de triângulos você consegue encontrar?
4. Quais tipos de quadriláteros você consegue encontrar?
5. Quais figuras são congruentes?

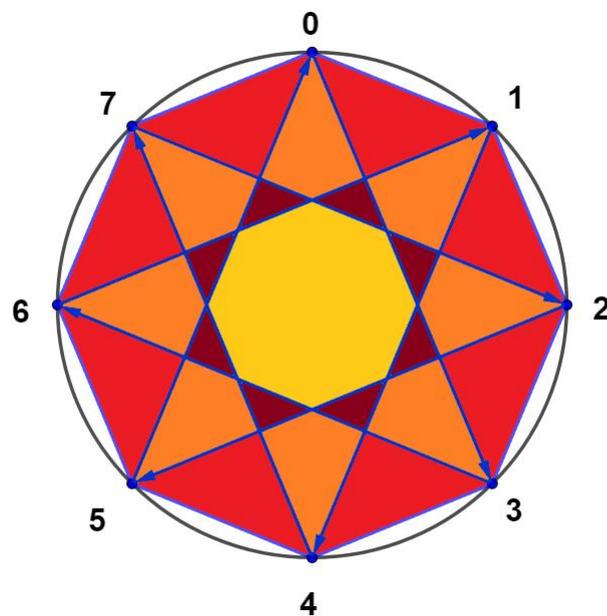
Em seguida, cada aluno deverá contornar e colorir os polígonos escolhendo um padrão de cores conforme os tipos de polígonos e as relações de congruência encontradas na figura.

Como sugestão de extensão da atividade, propomos a construção de outro polígono estrelado, dessa vez com dez pontos. Note que, para se construir um polígono estrelado com $m = 10$, deve utilizar $a = 3$ ou $a = 7$. Novamente, fornecemos no Apêndice 5 um decágono regular com os vértices destacados que o docente poderá utilizar para conduzir a construção com a turma. Após a construção, os estudantes repetem a análise anterior, observando os novos polígonos formados. Para elucidar as respostas esperadas, veja as Figuras 4.6 e 4.7. Note que há diversas possibilidades de polígonos convexos e côncavos a serem encontrados nessas figuras e as tarefas de encontrar, nomear e identificar as formas encontradas podem ser estendidas indefinidamente, a critério do professor.

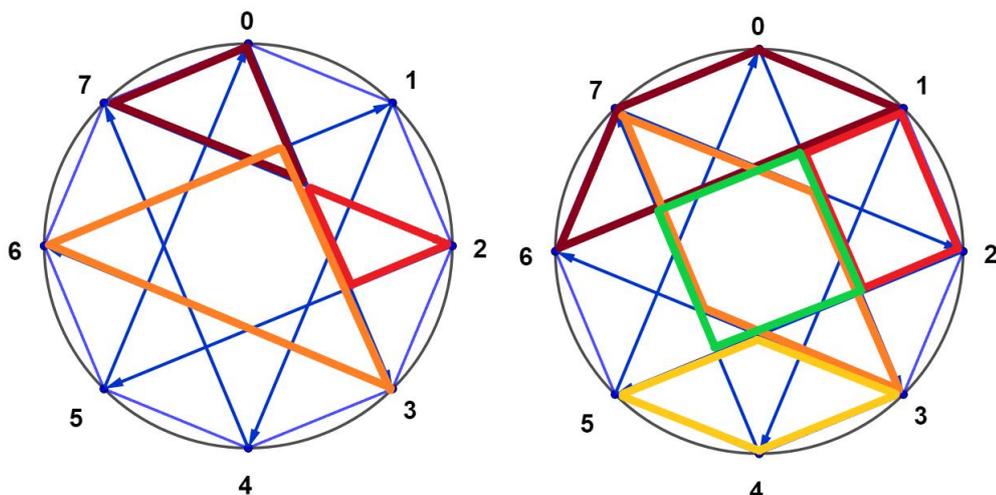
1. Os estudantes podem contar formas considerando ou não as intersecções com outras formas, ou seja, contar apenas figuras que não se intersectam ou contar figuras que intersectam outras. A quantidade de figuras encontradas depende desse critério e se o estudante considerar as figuras que se intersectam, encontrará uma quantidade muito maior de formas. Contamos aqui apenas as que não se intersectam. Espera-se que os alunos encontrem 16 triângulos, 8 quadriláteros e 2 octógonos. Para o decágono espera-se que encontrem 20 triângulos, 10 quadriláteros e 2 decágonos.

2. Há quadrados, octógonos e decágonos regulares.
3. Os triângulos encontrados são isósceles e retângulos.
4. Sem considerar as intersecções os quadriláteros encontrados são quadriláteros irregulares, nomeados trapezoides simétricos. Não se espera que os estudantes saibam nomear tais quadriláteros previamente. Considerando-se todas as possibilidades encontramos também trapézios, paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados.
5. Espera-se que os estudantes identifiquem quais quadriláteros são congruentes e que os triângulos são todos semelhantes.

Figura 4.6 – Polígono estrelado $\{8/3\}$



(a) Formas que não se intersectam

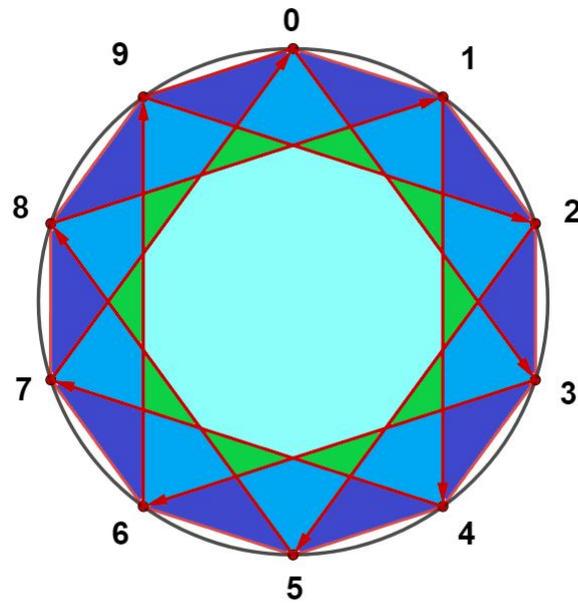


(b) Alguns triângulos encontrados

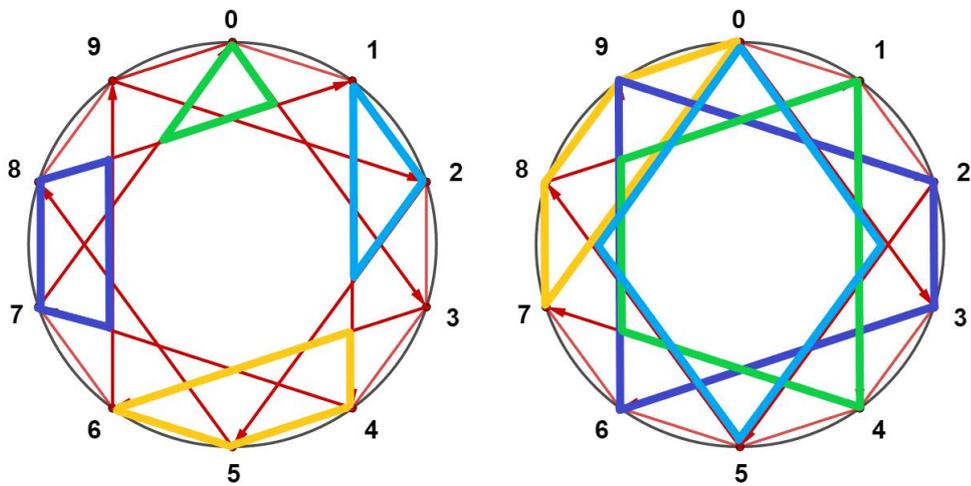
(c) Alguns quadriláteros encontrados

Fonte: Autor.

Figura 4.7 – Polígono estrelado $\{10/3\}$



(a) Formas que não se intersectam



(b) Alguns triângulos e quadriláteros encontrados

(c) Alguns quadriláteros encontrados

Fonte: Autor.

4.5 ATIVIDADE 5 - POLÍGONOS CONGRUENTES

4.5.1 INFORMAÇÕES GERAIS

Nesta atividade, os alunos construirão polígonos a partir de uma parte do padrão formado, aplicando o conceito de rotação ao redor do centro da circunferência. Para esta construção, necessita-se escolher valores de a e m tais que $(m, a) \neq 1$, ou seja, casos descritos em pela Proposição 2.5. Desta forma, os alunos desenharam a primeira figura ligando os pontos, de a em a unidades e partindo do ponto 0. As demais formas deverão ser desenhadas utilizando rotação da figura inicial.

- Nível: Ensino fundamental.
- Série/ano: 8º ano.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Polígonos estrelados, construções geométricas, transformações geométricas, divisão de uma circunferência em m pontos.

4.5.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é trabalhar simultaneamente as habilidades de desenho geométrico e da transformação de rotação.

Os objetivos específicos são:

- Estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas.
- Apresentar o conceito de polígono estrelado.
- Perceber padrões presentes em figuras planas.
- Dividir um círculo em m partes.
- Desenhar figuras a partir da rotação de segmentos ao redor de um ponto central.

4.5.3 MATERIAL DIDÁTICO

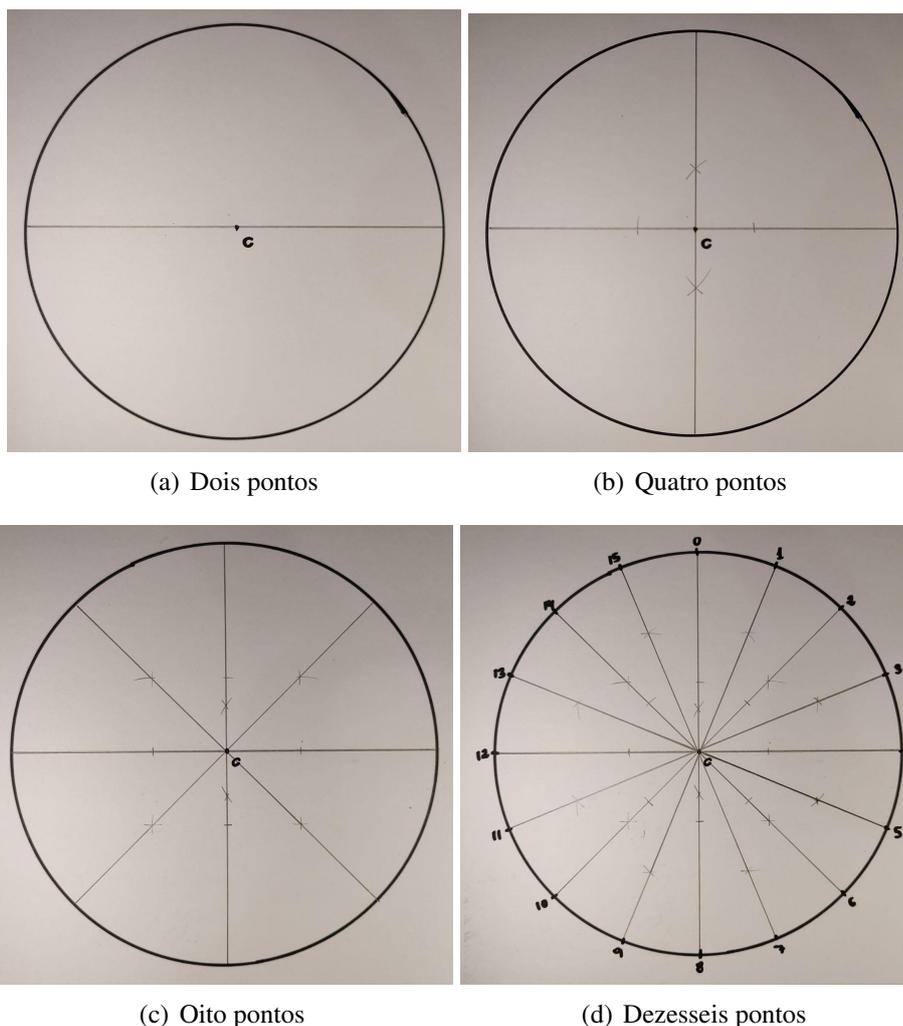
- Folha sulfite em branco.
- Compasso e régua.
- Materiais para desenho, como lápis coloridos e canetinhas.

4.5.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

A atividade deverá ser aplicada após a turma estar familiarizada com os conceitos de múltiplos, divisores, números primos, números compostos e números coprimos, pois será uma forma de aprofundar o entendimento destes.

Para iniciar, o professor deverá retomar brevemente os conceitos citados e então distribuir folhas em branco para cada aluno. Solicitar aos estudantes que escolham valores de a tais que $(a, 16) \neq 1$, ajudando-os se for necessário. Então, todos deverão construir uma circunferência com raio igual a 8cm , no mínimo e destacar o centro. Na circunferência desenhada, os alunos deverão distribuir 16 pontos, igualmente espaçados. Para distribuir os 16 pontos deve-se desenhar um diâmetro e seus dois extremos, que serão os pontos iniciais. Em seguida, utilizar compasso e régua para determinar a bissetriz dos ângulos rasos formados pelo diâmetro. Repete-se o procedimento de determinar a bissetriz sucessivamente até se obter 16 pontos. A Figura 4.8 demonstra essa primeira etapa do processo.

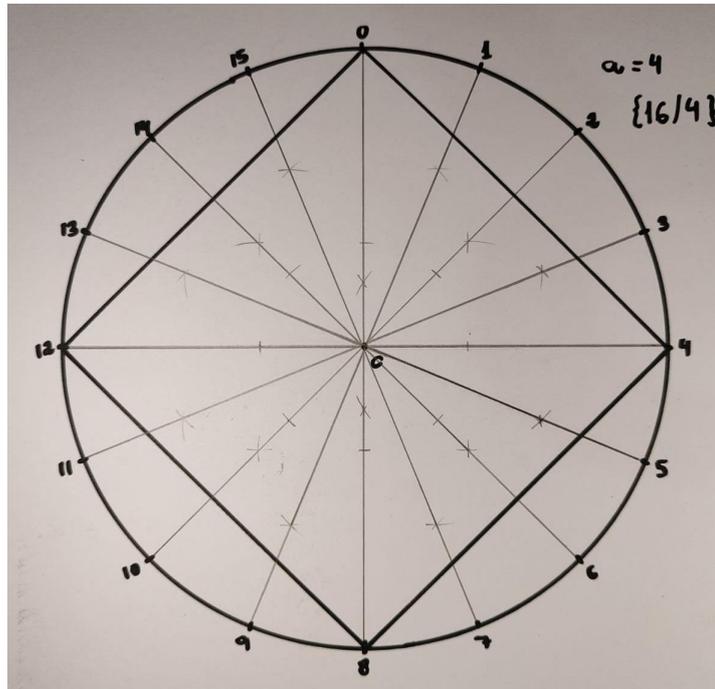
Figura 4.8 – Desenho de um círculo com 16 pontos



Fonte: Autor.

Então, os estudantes deverão numerar os pontos de 0 a 15 e construir cordas ligando o ponto 0 ao ponto localizado a unidades adiante, de acordo com o valor de a escolhido anteriormente. Assim, cada estudante terá obtido a primeira figura presente no polígono $\{16/a\}$, conforme mostra a Figura 4.9.

Figura 4.9 – Desenho da primeira forma obtida

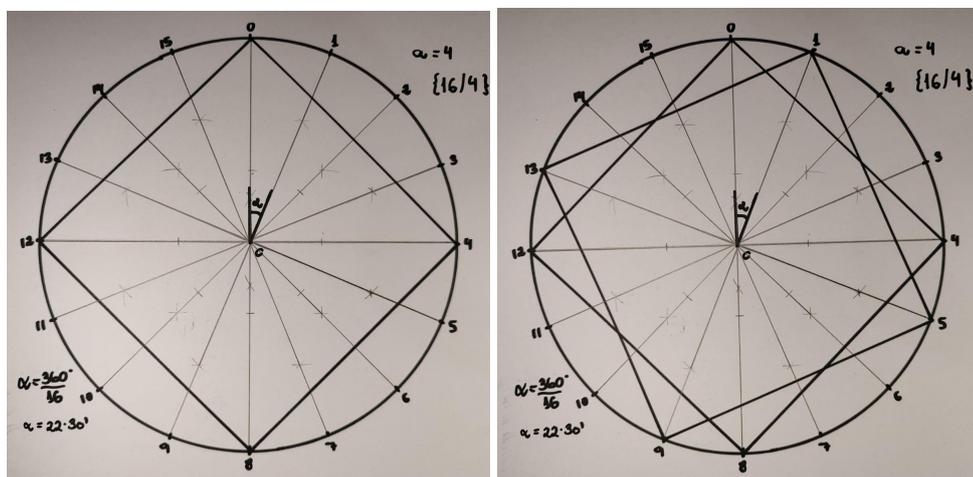


(a) Quadrilátero

Fonte: Autor.

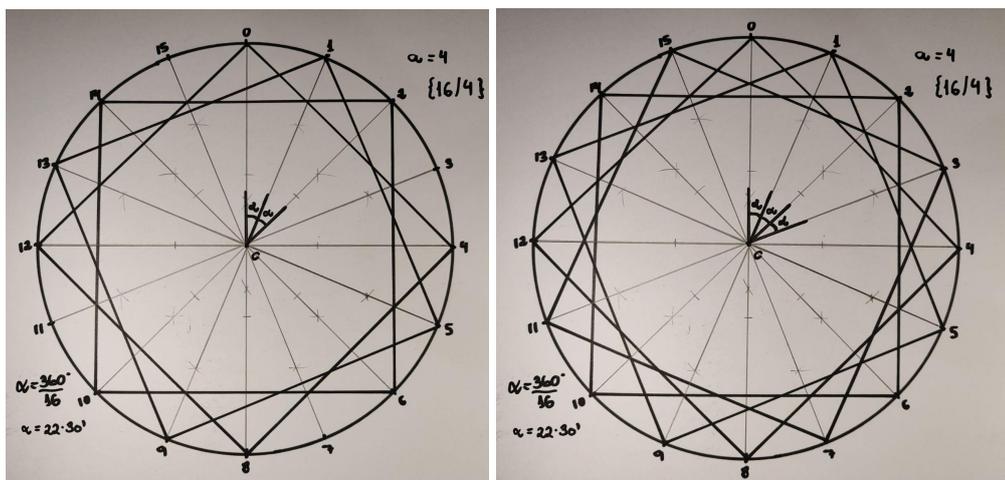
O professor deverá então demonstrar o cálculo do ângulo α de rotação entre dois pontos sucessivos e os alunos utilizam o resultado para construir a rotação de cada segmento em α graus ao redor do centro. As Figuras 4.10 e 4.11 apresentam as últimas etapas da construção.

Figura 4.10 – Cálculo de α e desenho das formas



(a) Ângulo α

(b) Desenho da segunda forma

Figura 4.11 – Cálculo de α e desenho das demais formas

(a) Desenho da terceira forma

(b) Desenho da figura completa

Fonte: Autor.

O processo de construção geométrica das figuras deverá tomar a maior parte do tempo desta atividade, mas ao final da construção o docente ainda pode estimular a análise das formas obtidas através de questionamentos. A seguir listamos algumas sugestões:

1. Quantos vértices têm a forma construída inicialmente?
2. Quantas vezes esta forma se repetiu ao final da construção?
3. Tente relacionar as duas respostas anteriores à relação de divisibilidade entre a e 16.
4. Quais polígonos você consegue identificar na figura completa?
5. Quais destes polígonos são semelhantes e quais são congruentes?

Considerações sobre as possíveis respostas:

1. A quantidade de vértices depende do valor escolhido de a , sendo igual a $\frac{16}{(16, a)}$.
2. Novamente, a quantidade depende de a , desta vez sendo igual a $(16, a)$.
3. Espera-se que os estudantes relacionem os dois resultados numéricos anteriores com a divisibilidade entre 16 e a .
4. Espera-se que encontrem triângulos, quadriláteros e um hexadécágono regular.
5. Espera-se que os estudantes percebam e descrevam os conjuntos de triângulos e quadriláteros congruentes entre si.

4.6 ATIVIDADE 6 - JOGO DA MULTIPLICAÇÃO.

4.6.1 INFORMAÇÕES GERAIS

Propomos agora uma atividade prática em formato de jogo, onde os estudantes trabalharão conceitos relacionados aos Chryzodes, sem abordar diretamente o tema, a partir da divisão Euclidiana. No jogo da multiplicação os estudantes deverão utilizar resultados aleatórios para calcular produtos e quocientes, anotar os valores dos restos e pontuar conforme tais valores. Esta atividade é uma adaptação do jogo elaborado por NRICH (2024), disponível em <<https://nrich.maths.org/problems/twelve-pointed-star-game>>.

- Nível: Ensino fundamental.
- Séries/anos: 7º ou 8º ano.
- Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.
- Conteúdos: Chryzodes, divisibilidade, divisão euclidiana.

4.6.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da atividade é gamificar o aprendizado de multiplicações e restos da divisão de um número natural por outro.

Os objetivos específicos são:

- Estimular o cálculo mental de multiplicações.
- Calcular o resto da divisão de um número natural por outro.
- Perceber padrões presentes em figuras planas.
- Desenhar figuras associadas a Chryzodes.
- Estabelecer a relação entre os possíveis restos da divisão e a divisibilidade entre o numerador e divisor.

4.6.3 MATERIAL DIDÁTICO

- Impressões disponíveis no Apêndice 5.
- 3 dados comuns (6 lados) por grupo.

4.6.4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Para esta atividade sugerimos o cálculo de resíduos módulo 6, mas a atividade pode ser adaptada para outros módulos. Os estudantes utilizarão três dados de seis lados, calculando a soma entre os resultados dos três dados em cada lançamento, bem como o resto da divisão desta soma por 6.

Para iniciar a atividade os alunos deverão estar organizados em pequenos grupos, de até seis estudantes. O docente distribuirá os dados e uma cópia impressa do Apêndice 5. Esta folha contém as figuras necessárias para o desenvolvimento da atividade, bem como as questões sugeridas para a atividade. Cada grupo competirá separadamente, ou seja, cada grupo terá um vencedor ao final do jogo.

Abaixo estão recortes da folha de atividade, para melhor compreensão das regras. Todos os estudantes do grupo devem rolar os três dados de uma vez, individualmente, a cada rodada e somar os resultados dos dados. Esta soma será o valor de a do estudante na rodada. Caso a rolagem resulte num valor já obtido por aquele estudante em rodadas anteriores, deve-se repetir a rolagem.

No Quadro 4.1, os estudantes anotarão os valores rolados para a , em cada rodada.

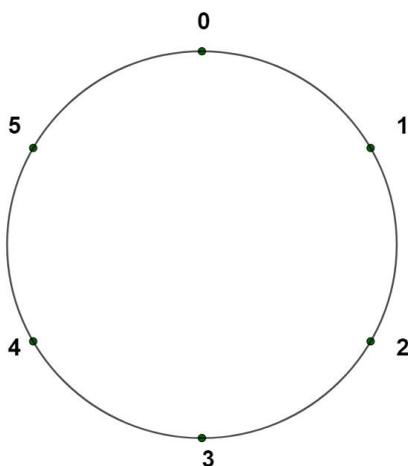
Quadro 4.1 – Tabela de resultados " a "

Rodada	Soma " a "

Fonte: Autor.

Na Figura 4.12 os estudantes desenharam flechas ligando cada ponto p ao ponto numerado com o resíduo congruente a $p \cdot a$ módulo 6, ou seja, cada ponto é ligado ao resíduo referente ao produto entre p e a , módulo 6.

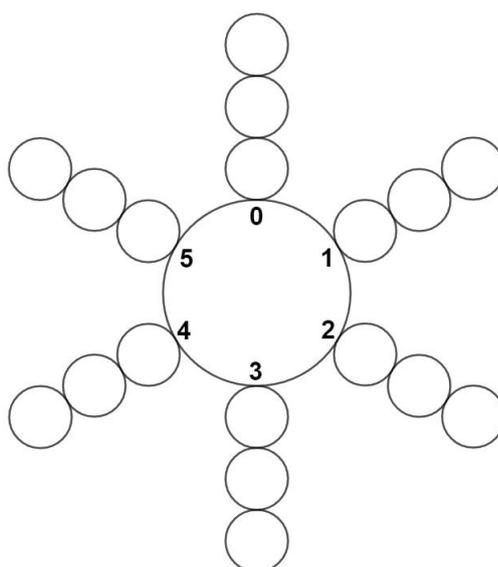
Figura 4.12 – Base para os Chryzodes



Fonte: O autor.

Como se trata de uma atividade para o sexto ano do ensino fundamental, os alunos utilizarão divisão euclidiana para determinar o resto em cada caso. Este momento de cálculo poderá ser cronometrado para manter o engajamento e o andamento da atividade, sugerimos o tempo de 3 minutos a cada rodada para isto. Após determinar os restos e esboçar o Chryzode, deve-se marcar os produtos obtidos na Figura 4.13, junto ao resíduo referente àquele resultado. Vence quem conseguir preencher três valores diferentes referentes a cada resíduo módulo 6, ou seja, aquele que preencher todos os espaços na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Resíduos módulo 6



Fonte: O autor.

Segue um exemplo de preenchimento para duas rodadas. Digamos que os resultados

dos dados na primeira rolagem foram 2, 1 e 2. Neste caso, o valor de a será $2 + 1 + 2 = 5$. O estudante anotará este valor na tabela de resultados "a", como ilustrado no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 – Exemplo de preenchimento

Rodada	Soma "a"
1	5

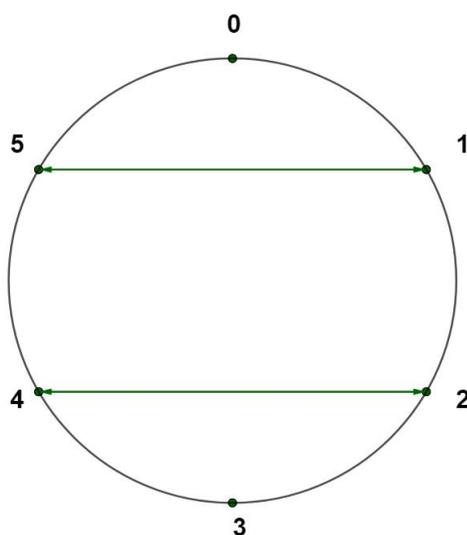
Fonte: Autor.

Em seguida, o estudante calcula os produtos entre cada um dos resíduos módulo 6 e o valor $a = 5$, utilizando divisão euclidiana para determinar o resto da divisão destes produtos por 6. Abaixo estão os resultados, representados através de congruências.

$$\begin{array}{ll}
 0 \cdot 5 \equiv 0 \pmod{6} & 3 \cdot 5 = 15 \equiv 3 \pmod{6} \\
 1 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{6} & 4 \cdot 5 = 20 \equiv 2 \pmod{6} \\
 2 \cdot 5 = 10 \equiv 4 \pmod{6} & 5 \cdot 5 = 25 \equiv 1 \pmod{6}
 \end{array}$$

Assim, o aluno utilizará régua para desenhar flechas ligando cada ponto ao respectivo resto calculado anteriormente, conforme mostra a Figura 4.14.

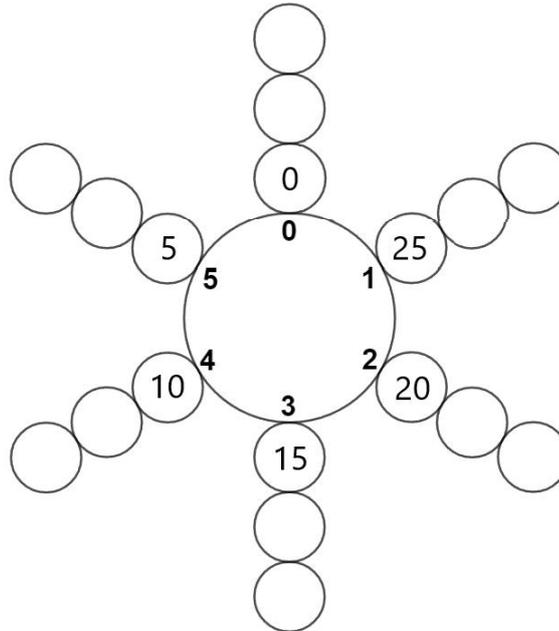
Figura 4.14 – Chryzode de multiplicação por 5, módulo 6



Fonte: O autor.

Para finalizar a rodada o estudante anota os produtos calculados nos círculos referentes à cada respectivo resíduo módulo 6, “pontuando” naquela rodada, conforme o exemplo na Figura 4.15.

Figura 4.15 – Preenchimento dos valores relativos à cada resíduo módulo 6



Fonte: O autor.

Note que no exemplo acima, o resultado $a = 5$ levou a todas as possibilidades de resíduos módulo 6, então o estudante pontuou uma vez em cada resíduo.

Para a segunda rodada, suponha que os resultados nos dados foram 6, 1 e 3. Assim, o valor de a será $6 + 1 + 2 = 9$. Segue então o preenchimento do Quadro 4.3 de resultados.

Quadro 4.3 – Exemplo de preenchimento da segunda rodada

Rodada	Soma "a"
1	5
2	9

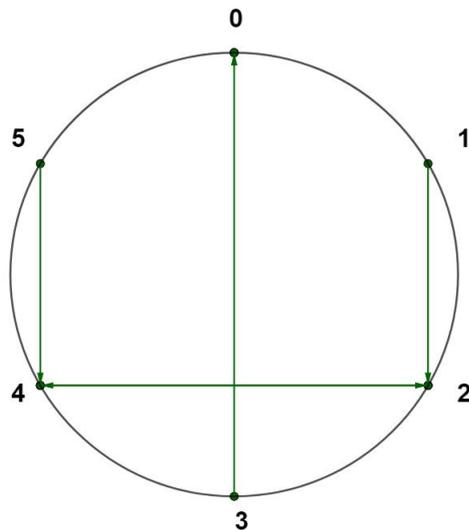
Fonte: Autor.

Temos então as seguintes congruências:

$$\begin{aligned}
 0 \cdot 9 &\equiv 0 \pmod{6} \\
 1 \cdot 9 &= 9 \equiv 3 \pmod{6} \\
 2 \cdot 9 &= 18 \equiv 0 \pmod{6} \\
 3 \cdot 9 &= 27 \equiv 3 \pmod{6} \\
 4 \cdot 9 &= 36 \equiv 0 \pmod{6} \\
 5 \cdot 9 &= 45 \equiv 3 \pmod{6}
 \end{aligned}$$

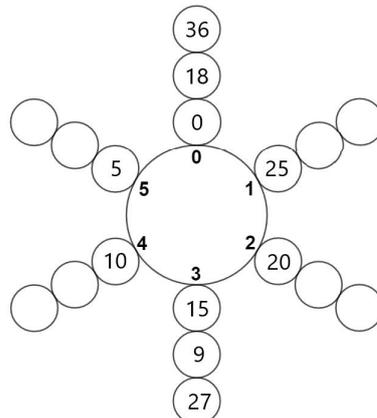
Segue disso o desenho do Chryzode na Figura 4.16 e da marcação de pontos na Figura 4.17.

Figura 4.16 – Chryzode de multiplicação por 9, módulo 6



Fonte: O autor.

Figura 4.17 – Preenchimento dos valores relativos à cada resíduo módulo 6



Fonte: O autor.

Desta vez, os resultados levaram apenas aos resíduos 0 e 3, então o participante pontuou apenas nestes resíduos, ficando o restante em branco nesta rodada. Conforme as rodadas prosseguirem, os estudantes pontuarão mais vezes em cada resíduo. Ganha o jogo o primeiro que conseguir pontuar três vezes em cada, ou seja, preencher todos os espaços da Figura 4.17.

Ao final do jogo, o docente deve propor os seguintes questionamentos para que os alunos respondam:

1. Quais valores de a resultaram em todos os possíveis restos após os cálculos e quais valores não resultaram em todos?
2. Quais valores de a são mais interessantes para que se tenha uma chance maior de ganhar o jogo?
3. Alguns valores de a aparecem com mais frequência que outros, tente determinar tais valores e explicar o porquê.
4. Observe as figuras esboçadas por você durante o jogo. Você consegue identificar um ou mais padrões interessantes? Tente descrever tais padrões.

Considerações sobre as possíveis respostas:

1. Os valores que resultam em todos os possíveis restos são sempre congruentes a 1 ou 5, no módulo 6. Ou seja, 4, 6, 11, 13 e 17.
2. Os valores citados na resposta anterior são os mais interessantes pois se obtém todos os possíveis resíduos módulo 6.
3. A resposta está relacionada com distribuição normal entre os resultados de cada um dos três dados. Espera-se que os alunos percebam que a probabilidade é maior para valores mais próximos de 10 e 11.
4. Resposta pessoal. Espera-se uma descrição visual dos Chryzodes obtidos.

5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho é aprofundar o conhecimento sobre a aritmética modular para professores de matemática, explorando os padrões presentes nos polígonos estrelados e nos Chryzodes. As congruências aritméticas não são objetos diretos de estudo no ensino básico. Porém, as fascinantes formas obtidas ao se construir polígonos estrelados e Chryzodes atuam como uma representação visual das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, sendo assim excelentes ferramentas para uma compreensão mais profunda dessas operações. O trabalho visa oferecer uma oportunidade de expansão do repertório teórico do docente, bem como propostas de atividades que servem como um primeiro contato com este assunto, por parte dos estudantes. A aplicação de tais atividades pode ser uma experiência muito enriquecedora, tanto para os discentes quanto para o docente.

Para a visualização das formas estudadas, utilizamos ferramentas tecnológicas, com destaque para as construções no GeoGebra, publicadas e indicadas ao longo dos capítulos.

Na elaboração das atividades, buscamos propor práticas lúdicas atreladas a técnicas de desenho geométrico, visando facilitar a visualização dos padrões. As atividades são adaptáveis para diversas realidades de sala de aula e podem ser aplicadas em diferentes contextos.

Esperamos que esta pesquisa atue também como um levantamento de resultados e demonstrações relevantes para o estudo dos polígonos estrelados e dos Chryzodes. Consideramos que o estudo dos Chryzodes ainda carece de publicações científicas e constitui uma área de interesse dentro da aritmética modular, possível objeto de futuros estudos por parte deste autor.

Finalmente, esperamos que este trabalho atue como ponto de partida para que o leitor possa explorar a aritmética modular de um novo ponto de vista, e que assim consiga aguçar a curiosidade de seus alunos e enriquecer sua prática docente.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. de. Mestrado, **Aritmética modular e suas aplicações: uma experiência de atuação no ensino básico**. São Luís, Maranhão: [s.n.], 2019. 77 f. 12
- BELLO, M. G. **La aritmética modular y algunas de sus aplicaciones**. 113 f. Dissertação (Mestrado) — Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2011. 31
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2023. 13
- BRIGAGLIA, A.; PALLADINO, N.; VACCARO, M. A. Historical notes on star geometry in mathematics, art and nature. **Imagine Math**, n. 6, p. 197–201, 2018. 16
- CASSIDY, C.; HODGSON, B. R. Because a door has to be open or closed... **Mathematics Teacher**, n. 75, p. 155–158, 1982. 17, 26, 52, 53
- COLE, B. S. **Polígonos estrelados regulares**. 39 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, Pernambuco, 2013. 15
- COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. [S.l.]: Wiley, 1989. 17
- DUCHET, P.; SONNTAG, J.-P. **initiation aux chryzodes : les nombres dans un cercle**. Paris, França: MATH.en.JEANS, 1996. Disponível em: <<http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/96081084.pdf>>. Acesso em: 15 out. 2024. 31
- HEFEZ, A. **Aritmética**. 2a ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. 12, 14, 22
- HODGSON, B. **The mathematical education of school teachers: a baker's dozen of fertile problems**. 2004. 315-341 p. 15, 17, 26
- KONAGESKI, D. M. F. **Experiências concretas na aritmética modular**. 128 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2019. 15, 38
- LEGLER, M. **TimesTableWebGL**. Lengler.dev, 2024. Disponível em: <<https://times-tables.lengler.dev>>. Acesso em: 06 out. 2024. 31
- MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma introdução à matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006. 14
- NAKAHARA, H. **A study of stars**. Tokyo, Japão: Junten Junior High School, 2010. Disponível em: <<https://www.junten.ed.jp/contents/wp-content/uploads/2014/04/A-Study-of-StarsJunten-Science-Library-4.pdf>>. Acesso em: 14 out. 2024. 19
- NRICH. **The twelve pointed star game**. University of Cambridge, 2024. Disponível em: <<https://nrich.maths.org/problems/twelve-pointed-star-game>>. Acesso em: 08 nov. 2024. 71
- ROSENFELD, M. **Star-o-rama and how to make them**. Math in unexpected spaces, 2017. Disponível em: <<https://mathinunexpectedspaces.wordpress.com/2017/12/10/star-o-rama-and-how-to-make-them/>>. Acesso em: 23 set. 2024. 55, 57

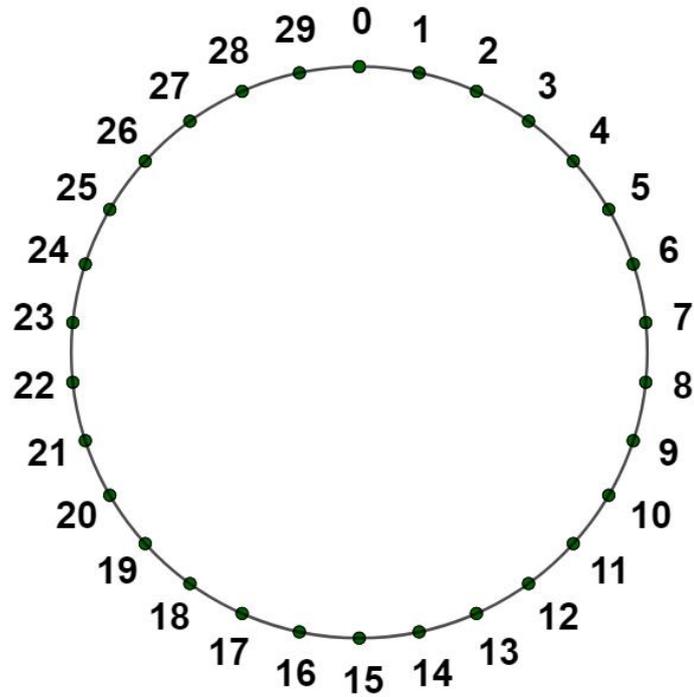
SANTOS, J. P. de O. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011. 14

SCHEFFEL, K. **Some notes on modular arithmetic**. Cupertino, California: DeAnza College, 2004. Disponível em: <<http://nebula2.deanza.edu/~karl/Classes/Files/Modulararithmeticnotes.pdf>>. Acesso em: 14 dez. 2023. 15

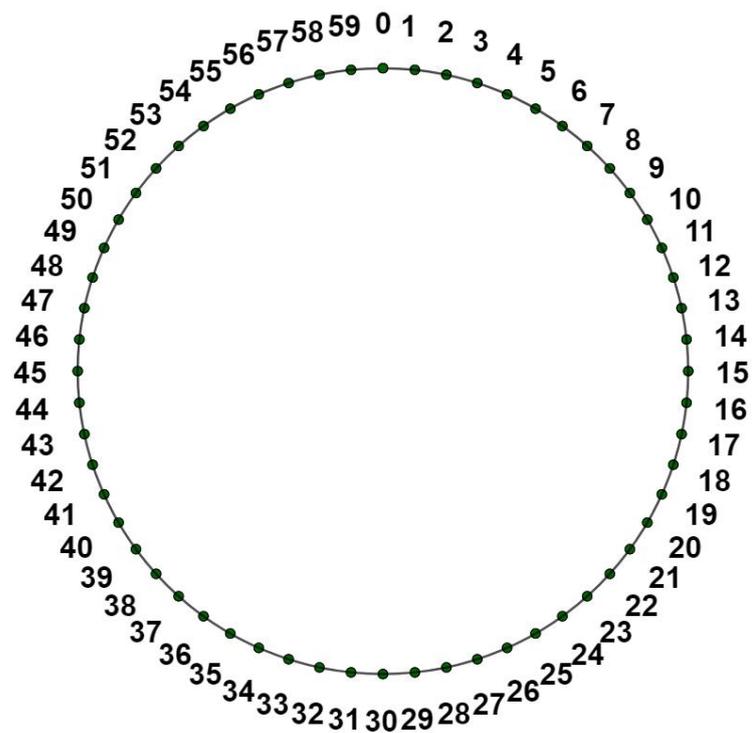
APÊNDICE A - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 1

Imagine um hotel onde há m hóspedes e m quartos dispostos ao redor de um pátio circular, numerados de 1 a m . Os hóspedes participam de um jogo onde todas as portas se iniciam fechadas e os hóspedes passam pelas portas interagindo com elas (abrindo ou fechando). Os hóspedes terminam sua rodada apenas quando iteragem pela primeira vez com a porta m . O primeiro hóspede passa por cada porta, partindo da porta de número 1 e abre todas as portas, uma a uma. O segundo hóspede então passa pelas portas, na mesma ordem, fechando as portas de número par. O terceiro hóspede repete o processo realizado pelos hóspedes anteriores, interagindo com cada de número múltiplo de 3, abrindo as portas fechadas e fechando as abertas. Isto segue até o hóspede de número m . Ao final do jogo, quais portas estarão abertas e quais portas estarão fechadas?

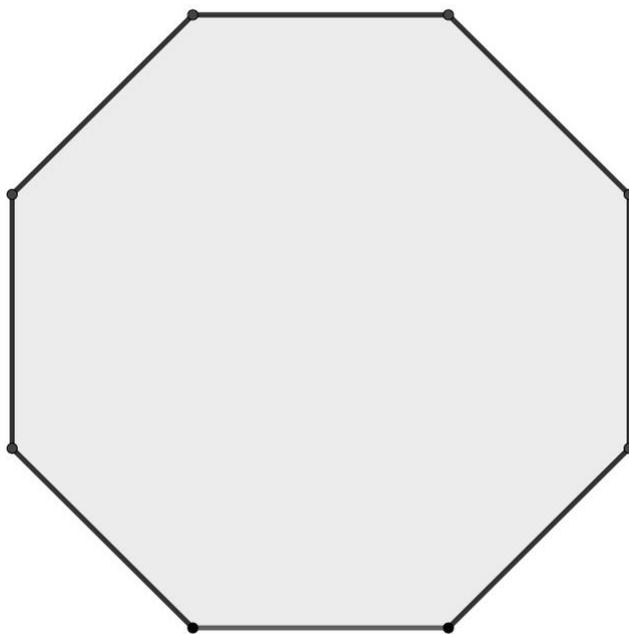
APÊNDICE B - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 3



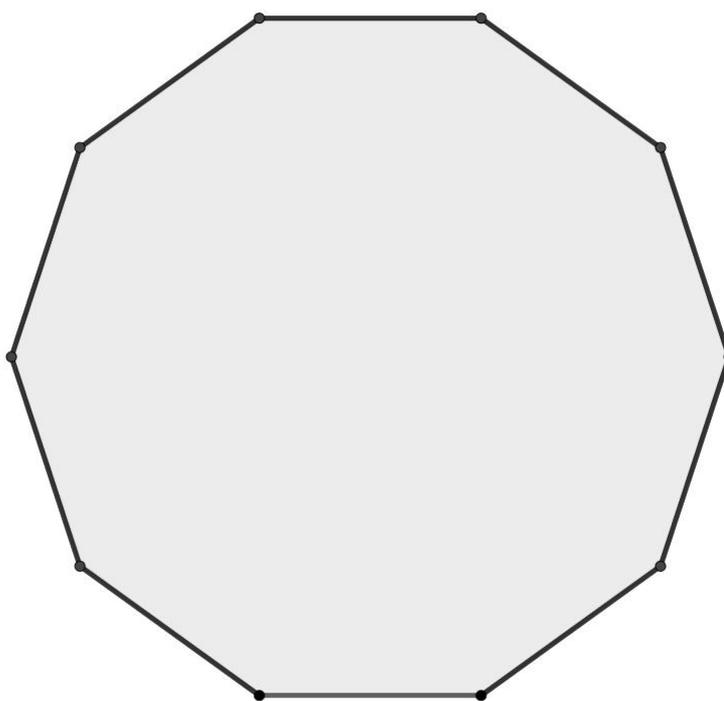
(a) $m = 30$



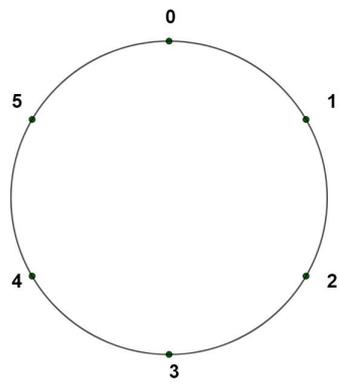
(b) $m = 60$

APÊNDICE C - IMPRESSÕES PARA A ATIVIDADE 4

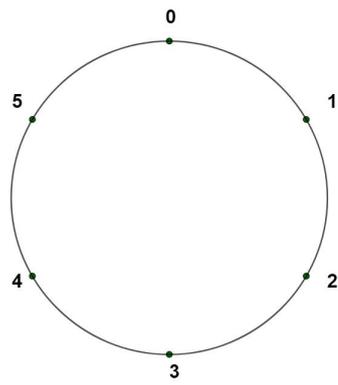
(a) Octógono regular



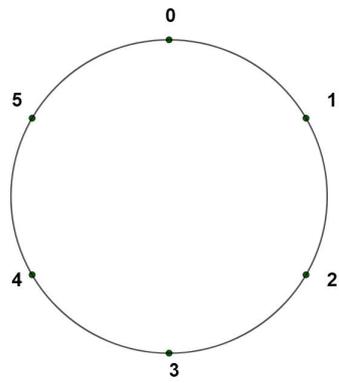
(b) Decágono regular



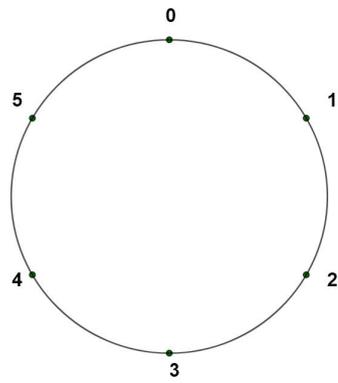
(a)



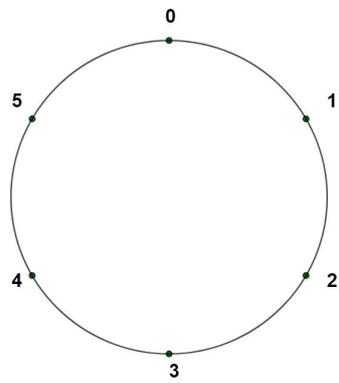
(b)



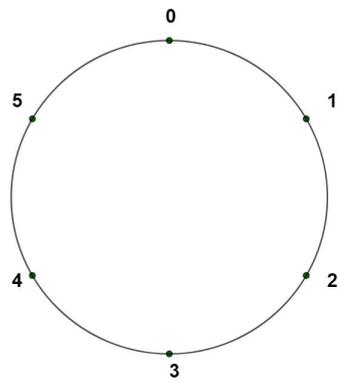
(c)



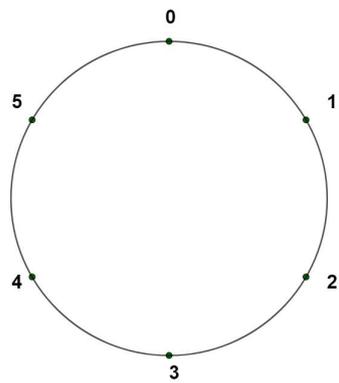
(d)



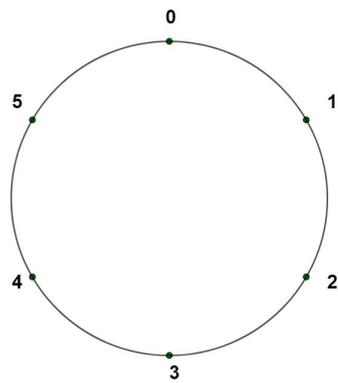
(e)



(f)



(g)



(h)