



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CÂMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO
PPGMAT

ADRIELE CAROLINI WAIDEMAN

UM APLICATIVO PARA O ESTUDO DE DERIVADAS

DISSERTAÇÃO

LONDRINA - PR

2018

ADRIELE CAROLINI WAIDEMAN

UM APLICATIVO PARA O ESTUDO DE DERIVADAS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Campus Londrina/ Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Claudete Carginin

LONDRINA - PR

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

W138a Waideman, Adriele Carolini
Um aplicativo para o estudo de derivadas / Adriele Carolini Waideman. –
Londrina: [s.n.], 2018.
173 f. : il.; 30 cm.

Orientadora: Prof.^aDr.^a. Claudete Cargnin
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2018.
Bibliografia: f. 86-91

1. Cálculo – Estudo e Ensino. 2. Tecnologia Educacional. 3.
Aprendizagem. 4. Derivados (Matemática). I. Cargnin, Claudete, orient. II.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-
Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.



Ministério da Educação

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação



Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Campus Londrina/Cornélio Procópio

TERMO DE AVALIAÇÃO

UM APLICATIVO PARA O ESTUDO DE DERIVADAS

Por

ADRIELE CAROLINI WAIDEMAN

Esta dissertação foi apresentada a título de Defesa em 29 de novembro de 2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinalados e aprovada.

Profa. Dra. Claudete Cargnin

Orientadora – UTFPR - Londrina

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

Membro Titular – UTFPR – Toledo

Profa. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros

Membro Titular – UEM - Maringá

Prof. Dra. Adriana Helena Borssoi

Membro Suplente – UTFPR – Londrina

Profa. Dra. Lilian Akemi Kato

Membro Suplente – UEM – Maringá

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Dedico este estudo à minha família, à
minha mãe Cleuza e ao meu avô Levino
por todos os ensinamentos e incentivos e,
em especial, à minha sobrinha Lívia.

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi construído com muita dedicação e apoio de pessoas muito especiais na minha vida. Dedico este momento como forma de agradecimento a cada uma delas.

Ao meu Salvador toda honra e toda glória. Deus Pai, obrigada por me conceder a vida e por me ajudar a permanecer no caminho que escolhi trilhar, obrigada por mais esta vitória. À Virgem Maria pelo colo de mãe todas vezes em que pensei não conseguir.

À minha orientadora, Dr^a. Claudete Cargnin, por todo ensinamento, por toda contribuição a esta pesquisa e à minha formação profissional. Você é incrivelmente incrível. Obrigada pela paciência e, principalmente, pela confiança depositada em mim mesmo antes de ser sua orientanda. Que nossa sintonia continue sempre forte.

Aos alunos que aceitaram o convite para baixar, testar e avaliar o aplicativo, muito obrigada.

Aos professores, Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros e Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan, obrigada por terem aceitado o convite para fazer parte da minha banca examinadora e pelas contribuições que muito enriqueceram esta pesquisa.

À minha família, minha mãe amada, Cleuza, por aceitar esse desafio junto comigo e me apoiar incondicionalmente. Ao meu padrasto Genivaldo, por aceitar o desafio ao lado da minha mãe. Ao meu avô Levino que, por muitas vezes, pediu para eu levantar da frente no computador e dar uma voltinha para poder descansar e continuar melhor quando retornasse. E, a minha irmã Andressa (Maninha, você é demais, te amo muito!), que, mesmo com todos os seus problemas, sempre esteve ao meu lado, me dando forças para continuar. Tenho apenas uma palavra a dizer a vocês: VENCEMOS!!! Vencemos mais um desafio, juntos!

Agradeço ao amor de uma pessoinha mais que especial, minha sobrinha Lívia, que tem o sorriso mais lindo que podia existir, aquele que me acalma, que deixa em paz. Agradeço também pela paciência e compreensão pelos momentos de ausência (A titia precisava estudar) e você sempre entendia, mesmo querendo brincar. Eu lutei e lutarei por (e com) vocês sempre.

Ao meu amor Vinicius, por ser meu porto seguro em vários momentos, por entender meu cansaço e minha ausência e não desistir de mim. Eu amo você.

Agradeço ao meu tio Cido (*in memoriam*) que sempre me incentivou a estudar, estudar e estudar. Meu tio essa vitória também é sua.

À tia Luzia e à Thais que sempre estiveram presentes no meu dia a dia, sempre me apoiando, e comemorando cada conquista.

A todos os meus amigos do PPGMAT, em especial, ao Rodrigo Tavares (desde a faculdade) e Dayane Coutinho. Nosso trio será eterno. Nossas viagens para Londrina e para eventos, inesquecíveis. Vocês são demais!

À minha amiga Anna Flávia Magnoni pela parceria no PPGMAT em 2017, mas, principalmente, em 2018, pela preocupação, todas as semanas, se eu tinha conseguido terminar mais uma etapa, me incentivando a sempre continuar. Uma sincera e verdadeira amizade que levarei para sempre.

Aos professores do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT), principalmente àqueles com os quais tive o prazer de cursar disciplinas, prof. Dr. André Luis Trevisan, prof^a. Dr^a. Marcele Tavares, prof^a. Dr^a. Elaine Cristina Ferruzzi, prof. Dr. Sérgio Arruda e prof^a. Dr^a. Claudete Carginin, prof^a. Dr^a Eliane Araman, pelos conhecimentos compartilhados e pela oportunidade em aprender sempre mais.

Às minhas amigas Bruna, Luciane, Taiz, Paula, Carol e Jéssica que sempre ouviram minhas lamentações, meus momentos de desespero, muito obrigada.

Enfim, a todos os envolvidos que, de alguma forma, contribuíram para esta conquista.

“Por isso não tema, pois estou com você; não
tenha medo, pois sou o seu Deus. Eu o
fortalecerei e o ajudarei; Eu o segurarei com
a minha mão direita vitoriosa”.
(Isaías 41:10)

WAIDEMAN, Adriele Carolini. UM APLICATIVO PARA O ESTUDO DE DERIVADAS. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

RESUMO

Esta pesquisa investiga a utilização que alunos que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral fazem de um aplicativo desenvolvido para o estudo de derivadas, a partir da questão: que avaliação fazem esses alunos sobre esse aplicativo? O aplicativo proposto é composto por duas fases, sendo que a primeira objetiva fazer uma revisão do conteúdo, enquanto a segunda prioriza o estudo das representações gráficas de funções e suas derivadas. A elaboração das questões da segunda fase fundamentou-se na Teoria de Registro de Representação Semiótica e utiliza ao menos dois registros de representação semiótica em cada questão. O aplicativo foi testado por 10 alunos voluntários da Licenciatura em Matemática e Engenharia de Produção Agroindustrial, de diferentes anos, de uma universidade estadual, e que atendiam aos pré-requisitos. A partir de um questionário *on line*, eles fizeram a avaliação de usabilidade e eficiência e dos dados do aplicativo. Percebeu-se que o celular pode se tornar um forte aliado tanto para o ensino, como para a aprendizagem. Entre os fatores apontados, está a possibilidade de utilização do aplicativo para estudo, em modo *off line*, em qualquer tempo e lugar, além da dinamicidade. O aplicativo “Derivada Quiz¹” faz parte desta dissertação e sua interface pode ser encontrada no Produto Educacional I²: “Do papel à tela do celular: um aplicativo para os estudos de derivadas”. As questões utilizadas nas duas fases e algumas sugestões aos professores estão disponíveis no Produto Educacional II: “Caderno de questões para o estudo de derivadas” e estão disponíveis para impressão e podem ser usadas em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo. Derivadas. Tecnologias. Aplicativos. TRRS.

¹ O Aplicativo “Derivadas Quiz” será disponibilizado na Play Store.

² O Produto Educacional “Do papel à tela do celular: um aplicativo para os estudos de derivadas” encontra-se disponível no site:
<http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-em-ensino-de-matematica/produto-educacional>

WAIDEMAN, ADRIELE CAROLINI. UM APLICATIVO PARA O ESTUDO DE DERIVADAS. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA DO PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA) - UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. LONDRINA, 2018.

ABSTRACT

This research investigates the use that students who have already taken the discipline of Differential and Integral Calculus make of an application developed for the study of derivatives, from the question: what evaluation do these students do about this application? The proposed application is composed of two phases, the first has the aim to do a content review, while the second one prioritizes the study of graphical representations of the functions and their derivatives. The questions elaboration of the second phase was based on the Theory of Registration of Semiotic Representation and uses at least two registers of semiotic representation in each question. The application was tested by 10 volunteer students from the courses of Degree in Mathematics and Agroindustrial Production Engineering from different classes of a state university which met the prerequisites. From an online questionnaire, they made the evaluation of usability, efficiency and the application data. It has been realized that the cell phone can become a strong ally for both teaching and learning. Among the factors pointed out is the possibility of using the application for study, in offline mode, at any time and place, besides dynamicity. The "Derivative Quiz" application is part of this dissertation and its interface can be found in the educational product: "From paper to cellphone screen: an application for derivative studies". The questions used in the two phases and some suggestions to teachers are available in Educational Product II: "Notebook for questions of the study of derivatives" and are available for print and can be used in the classroom.

Keywords: Teaching Calculus. Derivatives. Technologies. Applications. TRRS.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático	44
Figura 2 - Revisão do conteúdo derivadas para o 1º ano do curso de Engenharia de Produção Agroindustrial	52
Figura 3 - Revisão do conteúdo derivadas para o 1º ano do curso de Engenharia de Produção Agroindustrial	64
Figura 4 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada.....	65
Figura 5 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada.....	67
Figura 6 – Representação Figural da análise das questões 41 e 42.....	68
Figura 7 – Dificuldades dos alunos em alguma ou ambas as fases.....	74
Figura 8 - Alunos que buscariam em outros meios ajuda para solucionar dúvidas ao usar o aplicativo	78

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Plano de Ensino: Programa da disciplina do curso de Licenciatura em Matemática-2016/2017	27
Quadro 2 - Definição da Inclinação da Reta Tangente	28
Quadro 3 - Definição de Velocidade Instantânea	28
Quadro 4 - Definição de Derivada	29
Quadro 5 - Definição de Taxa Instantânea de Variação	29
Quadro 6 - Conteúdo de Programa da disciplina de CDI-I dos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de Produção Agroindustrial 2016/2017	30
Quadro 7 - Concepções de erros de alunos sobre o conteúdo de derivadas	32
Quadro 8 - Confusões de conceitos entre os alunos	33
Quadro 9 - Tipos de Representação, com seus respectivos objetos de estudo, noção de representação e o método de pesquisa adequado, segundo Duval (2009)	43
Quadro 10 - Representação de um objeto matemático	45
Quadro 11 - Tipos de Registro de Representações Semióticas	45
Quadro 12 - Características de um registro de representação semiótica descrita por Duval (2012)	46
Quadro 13 - Ilustração de Tratamento	47
Quadro 14 - Ilustração de Conversão	48
Quadro 15 - Questões da 1ª fase do aplicativo Derivadas Quiz	57
Quadro 16 - Questão do aplicativo e possibilidades de conversões e tratamentos ..	59
Quadro 17 - Análise das questões da 2ª fase quanto a tratamentos e conversões ..	62
Quadro 18 - Questão 27 do aplicativo que mobiliza tratamento para sua resolução, por meio de uma conversão intermediária no registro gráfico	63
Quadro 19 - Questão do Livro do Stewart Cálculo I	68
Quadro 20 - Mapa Conceitual que representa a programação do aplicativo	71
Quadro 21 - Respondentes ao questionário	72
Quadro 22 - Avaliação dos alunos em relação a divisão das questões em fases	73
Quadro 23 - Análise da questão 34 em relação às informações observadas	74
Quadro 24 - Análise da questão 43 em relação às informações observadas	75
Quadro 25 - Dificuldades em responder as questões do aplicativo	76
Quadro 26 - Usar o aplicativo para testar ou analisar o conhecimento sobre um conteúdo	77
Quadro 27 - Indicação do aplicativo para um amigo	78
Quadro 28 - Opinião dos alunos ao usarem um aplicativo para estudar	79
Quadro 29 - Opinião dos alunos em relação ao uso de celulares e não de computadores para estudar	80
Quadro 30 - Características fortes do aplicativo	81

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 MINHA HISTÓRIA: O INÍCIO NA MATEMÁTICA E NO PPGMAT-UTFPR..	14
1.2 COMO SE INICIOU ESTA PESQUISA? POR QUE DERIVADAS? POR QUE UM APLICATIVO PARA CELULARES?	16
2 SOBRE A ABORDAGEM DO TEMA DERIVADAS	21
2.1 O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	21
2.1.1 Um pouco de história... ..	21
2.1.2 Algumas pesquisas sobre o ensino de CDI	22
2.2 O ENSINO DE DERIVADAS	27
2.3 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA A APRENDIZAGEM EM SALA DE AULA	35
2.4 TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (TRRS): ASPECTOS GERAIS	41
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	50
3.1 ELABORAÇÃO DAS QUESTÕES: FASE TESTE	51
3.2 PROGRAMAÇÃO E APLICAÇÃO DO APLICATIVO	52
4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	56
4.1 ANÁLISES DAS QUESTÕES	56
4.1.1 Questões da 1ª fase	56
4.1.2 Questões da 2ª fase	60
4.2 UTILIZAÇÃO DO APLICATIVO	70
4.2.1 Análise do questionário	72
REFERÊNCIAS	86
APÊNDICE A	92
APÊNDICE B	95
APÊNDICE C	97
APÊNDICE D	112

1 INTRODUÇÃO

“Nenhum obstáculo é tão grande se sua vontade de vencer for maior” (Autor desconhecido)

1.1 MINHA HISTÓRIA: O INÍCIO NA MATEMÁTICA E NO PPGMAT-UTFPR

Minha história com o Ensino Superior só poderia ter dois rumos: Licenciatura em Matemática ou Ciências Biológicas, esses cursos foram os escolhidos por mim para realizar a prova de vestibular em 2007. O primeiro em uma faculdade pública e o outro em uma faculdade particular. Embora tenha sido aprovada em ambos, o gosto pela matemática e o fato de ser numa instituição pública me fizeram optar por ela. Foram quatro anos (2008-2011) de extrema emoção, afinal o que é tirar nota baixa na primeira avaliação da tão esperada faculdade, no meu caso, na disciplina de Cálculo I, para quem termina o Ensino Médio trabalhando de dia e estudando à noite, ou seja, uma adolescente/adulta com pouco tempo para se dedicar aos estudos? Na verdade, hoje percebo que não tinha noção de que eu não sabia estudar de fato.

A faculdade começou e as decepções com as notas também, a medalha de melhor aluna de todos os terceiros anos do Ensino Médio não ajudou muito. Eu não entendia nada do que os professores explicavam. Funções logarítmicas? Nunca tinha visto. Gráficos? Apenas de funções lineares e quadráticas. O resultado foi sete décimos de um total de quatro pontos na primeira avaliação de Cálculo Diferencial e Integral I. Mas, eu não iria desistir! Eu tinha que estudar, minha mãe esperava isso das duas filhas que criara com a ajuda do meu avô materno!

Durante a graduação, sempre precisei trabalhar, ora de professora (estágio remunerado em uma escola municipal e em uma escola particular a dezoito quilômetros da minha cidade), ora de babá (minha segunda paixão, dediquei doze anos a essa belíssima e admirada profissão). Passaram-se quatro anos e com muita dificuldade vencemos (eu e minha família): me formei! Eis que começava o drama, estava desempregada em relação à minha formação. Afinal, a conclusão de um curso superior não traz emprego. Fui trabalhar em um depósito de material de construção, como auxiliar de compras e vendas. Uma experiência interessante para mim: receber mercadorias, lançar notas fiscais, atender clientes quando precisava; porém, minha

formação acadêmica não era para essa função, eu queria ser professora! Mesmo assim, trabalhei nove meses nessa empresa.

Durante esse emprego de auxiliar de compras e vendas, vi em uma rede social a divulgação de uma vaga para egressos de matemática, na faculdade onde me formei. Era um edital de um programa chamado Universidade Sem Fronteiras (SETI/2012). Uma oportunidade de ser uma egressa de matemática com bolsa, o valor remuneratório era maior do que o salário do comércio que eu recebia no momento. Arrisquei a seleção! Desde 2012 não saí mais do Ensino. Trabalhei como professora colaboradora do Estado (PSS-SEED/PR) de 2013 a 2015 e, nesse período, fiz duas especializações: a primeira em Educação Inclusiva, Especial e Políticas de Inclusão e a segunda em Ensino de Matemática, ambas para contribuir para a minha formação, mas também para melhorar minha classificação como professora colaboradora do Estado (PSS).

Uma greve dos professores estaduais em 2015 e a escassez de aulas no processo PSS, devido a fechamentos de turmas em todo o Estado, fizeram-me tentar um teste seletivo para professora, também colaboradora, do Ensino Superior na Universidade Tecnológica Federal Paraná (UTFPR). Mais uma vitória, eu consegui ser classificada! Em abril de 2015, um sonho tão, mas tão distante, tornava-se realidade: eu era professora de matemática em uma universidade, com disciplinas que jamais imaginava lecionar, Cálculo Diferencial e Integral II, Estatística e Probabilidade e Equações Diferenciais Ordinárias. Os desafios começaram novamente, de seis a dez horas de estudos para lecionar uma hora e quarenta minutos de aula, pois, depois de quatro anos de formada, já não lembrava muitos detalhes desses conteúdos, entretanto, a partir daí, pude realmente começar a dar sentido a tudo o que eu havia estudado durante a graduação. Digo começar, porque a cada momento que estudo algum tema, aprendo algo que não tinha percebido antes, seja num simples algoritmo ou em um conceito.

Foi na dificuldade de lecionar para o Ensino Superior e no desejo de continuar nesse ensino que decidi que precisava retomar e continuar meus estudos, o objetivo agora era tentar passar em um programa de mestrado. Outra situação que jamais imaginei conseguir. Em 2015, fiz o processo de seleção para uma Universidade Estadual e, para minha surpresa, fui aprovada na primeira fase, porém desclassificada na segunda, mesmo assim, considerei uma vitória. Acreditei que seria capaz e que em 2016 eu passaria. Então, no 1º semestre de 2016, tive a oportunidade de fazer

uma disciplina como aluna externa e conhecer um programa de mestrado de fato. No 2º semestre desse mesmo ano, arrisquei novamente a seleção, agora em duas universidades, a mesma de 2015 e na que havia feito a disciplina como aluna externa. Para minha alegria, fui aprovada em ambas. Nesse momento, tive a certeza de que era minha hora, minha hora de crescer, de ampliar meu mundo acadêmico, de tornar sonhos realidades e que, sim, em 2017, eu poderia dizer sou uma “mestranda”, sou uma aluna do PPGMAT-UTFPR, sou uma pesquisadora de um assunto do Ensino Superior, especificamente de Cálculo Diferencial e Integral I, aquele que me tirou o sono em 2008, no primeiro ano de faculdade.

Devido às dificuldades já apresentadas, tanto na graduação, como ao lecionar no Ensino Superior, percebi que as aulas expositivas, somente com abordagem teórica do tema e resolução de exemplos, como era o hábito nessa área, não estavam sendo suficientes para uma aprendizagem efetiva dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Isso me trouxe uma grande inquietação e uma colega de trabalho, hoje minha orientadora, percebia isso e me incentivou a pesquisar trabalhos voltados para melhorar os conteúdos desenvolvidos na disciplina de Cálculo, tanto no ensino quanto na aprendizagem; senti a necessidade de pensar em algo para melhorar minha metodologia de ensino e didática, de modo que pudesse contribuir para a aprendizagem do meu aluno. E assim minha história com essa dissertação começou.

1.2 COMO SE INICIOU ESTA PESQUISA? POR QUE DERIVADAS? POR QUE UM APLICATIVO PARA CELULARES?

Em meio a tantas inquietações e angústia com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), decidimos que esta pesquisa seria no Ensino Superior e em CDI. Assim, começaram as pesquisas bibliográficas. Durante essa etapa, encontramos uma dissertação de mestrado de Martins Junior (2015), o qual relatava a mesma inquietação, em sua licenciatura (formação inicial) e em sua experiência como docente do Ensino Superior, fracasso como aluno e professor nos diversos conteúdos, reprovação em massa na disciplina. Um acalento: as angústias não eram apenas minhas.

Alguns autores, como Barbosa (1994), Rezende (2004), Cury (2005), Santos e Matos (2012), Cargnin (2013) e Waideman e Cargnin (2018) também tiveram essa inquietação com o ensino e a aprendizagem dos alunos no Ensino Superior e

estudaram algo a respeito desse ensino, em especial, do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), seja uma tarefa aplicada em sala de aula, seja uma ferramenta educacional para essa disciplina, entre outras abordagens. O que há em comum é que a maioria desses autores relatou as dificuldades dessa disciplina, principalmente as notas baixas, reprovações e evasões em massa. Nesse levantamento, são pelo menos 24 anos de estudos a respeito de uma disciplina que faz parte da grade curricular de muitos cursos de graduação, e que mostram que as pesquisas da Educação Matemática vêm se preocupando e investigando para enriquecer as duas vertentes: professor e aluno, nos diversos níveis de educação, desde a educação infantil até a Pós-Graduação (CUNHA; LAUDARES, 2017). Já em 1994, Barbosa (1994) alertava para a falta de elo entre o Ensino Básico e o Ensino Superior, e isso nos faz pensar: será que desde essa época nada foi feito? Ou será que ainda não chegou às publicações? Ou ainda, qual o impacto dos resultados das pesquisas nas práticas pedagógicas dos professores que tomam conhecimento delas?

Não há respostas conclusivas para essas perguntas, aliás, na Educação, acreditamos que as ações melhoram, sim, o contexto em que se dá o problema, porém a passos bastante lentos. Estudos, como os de Lima, Bianchini e Gomes (2017), apresentam o interesse no Ensino Superior por meio de um mapeamento das pesquisas do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior-GT4 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Esses autores constataram que “A temática que evidencia-se com maior frequência nos trabalhos analisados diz respeito a questões relacionadas ao ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, com 30,94% dos artigos” (LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2017, p.320), ou seja, 43 das 139 pesquisas estavam relacionadas ao CDI.

O mapeamento também mostrou duas modalidades de trabalho: primeira, algum conteúdo específico de CDI e, segunda, discussões gerais sobre a temática. A primeira modalidade trouxe diversos conteúdos, como funções, limites, derivadas e integrais, e o que chama a atenção é que dos 23 trabalhos dessa primeira modalidade 13 têm alguma ligação com derivadas. Essa preocupação com o ensino ou aprendizagem ou simplesmente disseminação dos conteúdos de CDI, principalmente de derivadas, de diferentes formas, também é interesse desta pesquisa.

Entendemos que a disciplina tem sua importância nas diversas áreas. Os estudos de Lopes (1999) a enfatizam, de forma geral:

Cálculo Diferencial e Integral permite, nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sociais, Ciências da Terra, etc., a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder a análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico, humanístico dos diversos países do mundo (LOPES, 1999, p.125).

Na mesma linha de Lopes (1999), Cunha e Laudares (2017) justificam a presença do Cálculo Diferencial e Integral em tantos cursos de graduação (sejam engenharias, ou licenciatura ou ciências aplicadas) enfatizando:

O Cálculo Diferencial e Integral estuda o movimento e a variação, características dos fenômenos naturais e artificiais, podendo ser considerado a linguagem do paradigma científico e, como instrumento indispensável para quase todas as áreas científicas desde sua consolidação no final do século XVII com Newton e Leibniz. O ensino de Cálculo tem dois objetivos primordiais: levar o estudante a pensar de forma organizada e com mobilidade e, aprender utilizar as ideias deste ramo de conhecimento para resolução de problemas em situações da interdisciplinaridade e contextualização (CUNHA; LAUDARES, 2017, p.399).

A presente dissertação, na linha de pensamento de Cunha e Laudares (2017), apresenta uma investigação sobre o estudo de derivadas com um recurso didático tecnológico, interativo e de fácil acesso, que, a nosso ver, serve tanto para dentro quanto para fora da sala de aula, seja na perspectiva de ensino pelo professor seja na de apropriação do conhecimento pelo aluno.

A ideia inicial era uma sequência de atividades em *software*. Porém, depois da apresentação do pré-projeto na disciplina de Metodologia de Pesquisa em Ensino de Matemática, decidimos que um **aplicativo para celulares** (sugestão de um professor que assistiu à apresentação do pré-projeto e hoje é membro da banca, professor Rodolfo Eduardo Vertuan), seria uma opção agradável, viável e interessante (de fácil acesso e interativo) para esta pesquisa e, de alguma forma, tinha potencial de contribuir para os estudos, por permitir ao aluno a reflexão sobre o conteúdo abordado em cada questão. Isso possibilitaria mais um contato com derivadas, além das teorias, definições, demonstrações e técnicas já apresentadas em sala de aula. Dessa forma, o aplicativo tornou-se o Produto Educacional I associado a esta dissertação. E em decorrência surgiu o Produto Educacional II, um caderno de questões, visando atender a uma necessidade específica dos professores que é o trabalho em sala de aula.

Esse aplicativo tem formato de jogo e procura abordar questões importantes do conteúdo de derivadas (será mais bem detalhado no Capítulo 4) e de seus constructos teóricos. Uma das justificativas para a criação de um aplicativo pode ser encontrada nas considerações da UNESCO (2017, s/p): “Em menos de uma década, as tecnologias móveis [mídias portáteis] se espalharam para os lugares mais longínquos do planeta. Da população estimada da Terra, por volta de 7 bilhões de pessoas, 6 bilhões já têm acesso a um telefone móvel em funcionamento”.

Em particular, para a Educação Básica, Albuquerque (2017) relata em sua pesquisa³ que 70% dos alunos do Ensino Médio usam celulares nas atividades escolares. Por que não acreditar que, no Ensino Superior, o celular possa também ser considerado como um recurso didático tecnológico? Nesse sentido, Borba, Scucuglia, Gadanidis (2014) destacam:

A utilização de tecnologias móveis [mídias portáteis] como laptops, telefones celulares ou tablets tem se popularizado consideravelmente nos últimos anos em todos os setores da sociedade. Muitos de nossos estudantes, por exemplo utilizam a internet em sala de aula a partir de seus telefones para acessar plataformas como o Google. Eles também utilizam as câmeras fotográficas ou de vídeo para registrar momentos das aulas. Os usos dessas tecnologias já moldam a sala de aula, criando novas dinâmicas, e transformam a inteligência coletiva, as relações de poder (de Matemática) e as normas a serem seguidas nessa mesma sala de aula (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 77).

Os recursos didáticos tecnológicos portáteis podem ser aliados da educação. Borba (2011) menciona a importância desses recursos no ensino de matemática, devido ao nível de abstração exigido. Segundo o autor, “as possibilidades de investigação e experimentação propiciada por essas mídias podem levar estudantes a desenvolverem suas ideias a ponto de criarem conjecturas, validá-las e levantar subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática” (BORBA, 2011, p.3).

Do nosso ponto de vista, um aplicativo para celular voltado ao estudo de derivadas (Matemática, em nível superior) pode, sim, contribuir para as possibilidades discutidas por Borba (2011) e por que não acreditar que pode criar mais possibilidades

³ Pesquisa disponível em:

<http://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-08/mais-de-70-dos-alunos-do-ensino-medio-usam-celular-nas-atividades-escolares> acessado em 09/02/2018

de estudo e, conseqüentemente, contribuir para reverter índices desastrosos de reprovação e evasão?

Para tornar o aplicativo atrativo e eficaz, a pesquisa foi subsidiada pelo uso de novas tecnologias, mais especificamente, o *software* GeoGebra⁴. Nessa linha de pensamento, tivemos como objetivo investigar o uso de um aplicativo de celular como forma de estimular os alunos a estudarem, revisarem, refletirem sobre as aulas relativas a “derivadas de uma função de uma variável real”. Dessa forma, a pesquisa foi baseada na seguinte questão principal: **Que avaliação realizam alunos que já cursaram a disciplina de CDI sobre um aplicativo desenvolvido para o estudo de derivadas?**

Para responder a essa questão, utilizamos questões norteadoras secundárias: **Que aspectos do tema derivadas devem ser considerados no desenvolvimento do aplicativo? Quais características devem constituir o aplicativo?**

Para apresentar esta pesquisa e seus resultados, organizamos o texto em cinco capítulos, sendo esta Introdução o primeiro deles. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, no qual são apresentadas pesquisas acerca do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e, em particular, de Derivadas, bem como sobre a contribuição das tecnologias para a aprendizagem em sala de aula. O capítulo é finalizado com uma breve síntese de elementos da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS), a qual embasou a criação de questões para o aplicativo.

O Capítulo 3 traz os procedimentos metodológicos: descrição das etapas e do tipo de pesquisa, bem como o próprio aplicativo.

O Capítulo 4 trata dos resultados da pesquisa, os quais são analisados em duas subseções: 1) as questões usadas no aplicativo, à luz da TRRS e 2) a avaliação do aplicativo pelos estudantes.

No quinto e último capítulo estão as considerações finais, e possíveis apontamentos para a continuação deste trabalho, seguidas das referências utilizadas.

Lembramos que a esta dissertação estão vinculados dois produtos educacionais, o PEI e PEII, o primeiro, é o próprio aplicativo, apresentamos-o no Apêndice D. E, o PEII é um caderno de questões, apresentamos-o no Apêndice E.

⁴<https://www.geogebra.org/>

2 SOBRE A ABORDAGEM DO TEMA DERIVADAS

Este capítulo apresenta uma síntese da história do Cálculo Diferencial Integral, a sua importância e as dificuldades que a disciplina correspondente se depara, como, por exemplo, as salas de aula com grande número de alunos; conflito pedagógico; falta dos pré-requisitos (chamados também de falta de Matemática Básica); abstrações em alto nível; rigor matemático (demonstrações), a imaturidade em relação ao pensamento avançado no Ensino Superior e falta da interpretação gráfica; além de possíveis “soluções” para as dificuldades e alternativas para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente no que tange ao tema “derivadas”.

Os Recursos Didáticos Tecnológicos, em especial as mídias portáteis, são apresentados como uma possibilidade metodológica para o trabalho com o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Finalizamos o capítulo sintetizando os principais elementos da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) que embasou a elaboração das questões para o aplicativo.

2.1 O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

2.1.1 Um pouco de história...

Como já citado, o Cálculo Diferencial e Integral tem grande importância no meio universitário (Física, Química, Biologia, Economia, Astronomia, Arqueologia, Medicina, Psicologia, Ciências Políticas, Engenharias e outras). No Brasil, foi ministrado pela primeira vez em 1810, na Academia Real Militar do Rio de Janeiro. O ensino aconteceu utilizando a tradução, para a língua portuguesa, do livro francês *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, de Syvestre François Lacroix. Essa tradução, feita em 1812 por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin, tornou-se o primeiro livro-texto de Cálculo, em língua portuguesa, a ser adotado no Brasil para o Ensino Superior. Só em 1893, outra tradução, a do livro *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal*, de Hyppolite Sonnet, baseada na concepção de Newton e Leibniz (chamados de pioneiros do CDI que conhecemos hoje), foi usada para essa disciplina (LIMA, 2013, p.3).

Em 1934, em São Paulo, na Universidade de São Paulo (USP), passou a funcionar o primeiro curso de graduação em Matemática, baseado nos padrões das universidades europeias. A disciplina de CDI tinha o nome de *Análise Matemática*, contida no 1º ano do ensino superior (na maioria dos cursos, o CDI continua no 1º ano - ou 1º ou 2º semestre- de cada curso) e com um alto grau de rigor simbólico e formal. Não eram enfatizados os nomes dos procedimentos e/ou técnicas para resolver problemas ou exercícios que conhecemos hoje: limites, derivadas e integrais (LIMA, 2013, p. 5).

Sua formulação e/ou construção não aconteceu da noite para o dia, levou séculos. Foi uma das criações mais importantes para o desenvolvimento da ciência. A sua sistematização (que encontramos nas ementas dos cursos hoje) aconteceu no século XVII, feita por Newton e Leibniz (ROCHA, 2010).

2.1.2 Algumas pesquisas sobre o ensino de CDI

O porquê dessa disciplina em várias áreas é lembrado pelos estudos de Tall (2002), Nasser (2007) e Iglioni (2009), Cunha e Laudares (2017), os quais, entre outros, defendem que o Cálculo auxilia no desenvolvimento do pensamento organizado, que é o pensamento no qual o estudante mobiliza diversas informações sobre o objeto matemático estudado para aplicar em resolução de problemas, por exemplo. Segundo Tall (2002),

O que é essencial para eles é uma abordagem ao conhecimento matemático que cresce à medida que crescem: uma abordagem cognitiva que leva em conta o desenvolvimento dessa estrutura de conhecimento e aos processos de reflexão. Para se tornarem matemáticos maduros em um nível avançado, eles devem finalmente ganhar visão sobre as maneiras dos matemáticos avançados, mas no processo eles podem ter um caminho difícil que vai exigir uma transição fundamental em seus processos de reflexão (TALL, 2002, p.7).

O pensamento organizado é desenvolvido pelas dificuldades que os estudantes enfrentam, como interpretações de enunciados; análises gráficas; ausência conceitual em relação aos pré-requisitos; redação, os registros elaborados de forma vaga e sem sentido; operação, como manipulação do Objeto de Aprendizagem, não só em Cálculo, mas na matemática de forma geral, apresentados por Cunha e Laudares

(2017). Além dessas, existem as dificuldades de natureza epistemológica do CDI e de metodologia adequada ao ensino.

As dificuldades em CDI não são apenas brasileiras, como reafirma Rocha (2010), entretanto, no Brasil, tem crescido a quantidade de pesquisas (BARBOSA, 1994; REZENDE, 2003; REZENDE, 2004; CURY, 2005; SANTOS, MATOS, 2012; CARGNIN, 2013; MARTIN JUNIOR, 2015; LIMA, BIANCHINI, GOMES, 2017) sobre conteúdos do Ensino Superior, seja em metodologias de ensino ou propostas de tarefas ou relatos das dificuldades.

Zarpelon, Resende e Pinheiro (2014) argumentam que a disciplina de matemática traz um estereótipo de que o grau de abstrações e dificuldades é muito elevado, sendo de difícil compreensão para os alunos.

Dificuldades com demonstrações matemáticas, falta de matemática básica e de interpretação gráfica são fatores encontrados em pesquisas (REZENDE, 2004; CURY, 2005; NASSER, 2007; SANTOS, MATOS, 2012; CARGNIN, 2013; WAIDEMAN, TREVISAN, CARGNIN, 2017; CUNHA, LAUDARES, 2017; WAIDEMAN; CARGNIN, 2018) como responsáveis pelas notas baixas, reprovações e evasões em alta escala na disciplina de CDI.

Os índices de reprovações ficam ainda mais alarmantes ao perceber que se mantém os dados de Rezende (2003), o qual relata que não se aprova mais de 55% de uma turma de CDI (na USP) e que, em algumas universidades, esses dados são ainda mais catastróficos, variando de 45% a 95% em cada turma os índices de reprovação. O autor destaca também que o CDI tem um “pseudo-rigor”, em que alguns teoremas são demonstrados com o rigor matemático e outros resultados, como, por exemplo, o teorema do valor médio, são aceitos como verdadeiros a partir de suas evidências, sejam elas empíricas ou intuitivas.

Waideman, Trevisan e Cargnin (2017) também relatam esse rigor matemático, enunciado por Rezende (2003), justificando que, no século XVIII, o CDI passou por um aperfeiçoamento revisando a base do cálculo, propondo uma base fundamentada no rigor matemático. Destacam que ele é importante quando se aborda o conteúdo limite pela definição, por exemplo. Porém, como citado por Rezende, a parte intuitiva, nesse caso, na introdução ao conteúdo limite de uma função de variável real, pode contribuir para uma melhor compreensão do aluno, deixando as demonstrações para outro momento. Mesmo com a importância dada ao rigor matemático apresentado

nesses dois exemplos, é possível que sua excessiva cobrança seja um fator “causador” de notas baixas, reprovações e evasões em grande escala no CDI.

A discussão entre “*rigor matemático*” x “*a forma intuitiva*”, como introdução ou abordagem de qualquer conteúdo, permite questionar: Será que nós, professores de CDI, refletimos e/ou planejamos nossas aulas de CDI pensando na necessidade de cada área de conhecimento, ou a aula preparada por nós é ministrada em todas as turmas igualmente, apenas matematicamente, com a mesma teoria, os mesmos exemplos e exercícios, independentemente do curso? Ou, ainda, de que forma analisamos a importância do rigor matemático cobrado, ou seja, qual demonstração é importante para cada área do conhecimento? Afinal, qual é o motivo da apresentação de parte do Cálculo com rigor de demonstrações e outras partes apenas com a apresentação de técnicas? A constituição de um discurso com a figura da autoridade não seria suficiente? A apresentação do Cálculo não se dá de maneira axiomática em alguns livros-textos, porque algumas demonstrações são feitas, isso é necessário para o discurso? Levamos em conta que os alunos têm formas de aprendizagem diferentes, quando abordamos diversas representações dos conteúdos?

Na literatura, também são apontados como motivos dos problemas “as salas de aula com grande número de alunos, fato que dificulta as ações dos professores, e que na maioria das vezes os alunos vão/estão desmotivados a assistirem as aulas” (FROTA, 2006, p.2). Segundo Villibor *et al* (2015), muitos alunos são imaturos ao entrar no Ensino Superior para lidar com tantas abstrações nas disciplinas do primeiro semestre (ou ano). Essa imaturidade pode ser explicada desde os estudos de Tall (2002), em que o autor relata a transição referente à passagem do pensamento matemático fundamental para o pensamento matemático avançado⁵ como um processo que nem sempre é fácil para o estudante universitário no início da faculdade.

Segundo Tall (1995, 2002) os estudantes precisam passar por uma reconstrução cognitiva com intuito de estabelecerem conexões com o mundo externo passando do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

⁵ O pensamento matemático avançado refere-se a construção do pensamento matemático que o estudante (conhecem e utilizam conceitos, definições, teoremas e propriedades para desenvolverem suas atividades) adquirir, por meio de maturidade para incorporar características de conteúdos presentes no Ensino Superior (SILVA, SAVIOLI, 2012).

Para Silva e Savioli (2012, p. 4), “o estudante busca compreender a definição de certo conceito matemático a partir de verificações de exemplos e contra exemplos deduzindo propriedades, fazendo conexões com o mundo externo, se reconstruindo cognitivamente até que ele possa realizar a demonstração de uma proposição.”

Relembramos que a disciplina de CDI é, na maioria das universidades, no primeiro semestre (ano) da faculdade. Logo, a falta de maturidade com as abstrações pode reforçar a falta do pensamento organizado.

A mudança a partir do pensamento matemático fundamental para o avançado envolve uma transição significativa: que parte de **descrever** a **definir**, de forma **convicente** para **provar** de uma forma lógica baseada nessas definições. Essa transição exige a reconstrução cognitiva que é vista durante a luta inicial dos estudantes universitários com abstrações formais de como eles enfrentam o primeiro ano da universidade. Essa é a transição da **coerência** da matemática fundamental para a **consequência** da matemática avançada, baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir através de deduções a partir de definições formais. (TALL, 2002, p.20, grifos do autor).

Para Cury e Cassol (2004, p.33), a falta do pensamento avançado remete a outro problema para a disciplina, “a transição para o Ensino Superior está trazendo dificuldades para alunos e professores, pois muitos estudantes apresentam lacunas em termos de conhecimentos pré-requisitos.” Já, para Nasser (2007), o problema das lacunas da matemática básica aparece nas dificuldades relacionadas ao raciocínio lógico, no traçado de gráficos e suas análises, e pondera:

Observamos que o traçado de gráficos constituía um obstáculo para o progresso desses alunos na aprendizagem de cálculo. [...] Também observamos que os alunos não procuravam raciocinar sobre gráficos básicos do mesmo tipo. Por exemplo, se a função é do 1º grau, seu gráfico deve ser uma reta e se a variável aparece elevada ao quadrado, o gráfico deve ser uma parábola (NASSER, 2007, p. 7).

Outro fator que pode colaborar com os problemas dessa disciplina pode ser chamado de conflito pedagógico entre o que se pede e o que se faz. No caso do professor, faz várias demonstrações em sala de aula, já o aluno faz intermináveis e concorridas listas de exercícios e nas avaliações são cobradas mais as técnicas do que os significados dos conteúdos e seus contextos de aplicação (REZENDE, 2003, p.13), não favorecendo o desenvolvimento de pensamento organizado.

Assim, Rezende (2003) aponta possíveis soluções para as dificuldades do CDI. Uma delas, chamada de “solução-normal”, são as listas de exercícios com gabaritos, com um formato de “treinamento”, propiciando segurança na execução, também considerada como réplica da avaliação para os alunos, desde que o professor use a gigantesca lista de exercício (com gabarito) para formulação da avaliação regimental. Chama-se a atenção para a importância que essas listas trazem, desde que bem preparadas, fazendo ligações entre os conteúdos, pois, embora importantes, se trabalhadas isoladamente, abordam apenas alguns dos aspectos da aprendizagem dos conteúdos de CDI.

Outra possível “solução-normal” é o uso de computadores com trabalhos complementares ou aulas em laboratórios nas próprias instituições. A essa solução é dado o nome de “modernização do Cálculo”, que nem sempre é vista com bons olhos, se por trás dessa modernização não houver um bom planejamento para a construção dos conceitos abordados por essa e outras disciplinas.

Uma terceira “solução-normal” apontada por Rezende (2003), bastante comum nas universidades, são os chamados “Cálculo Zero”, “Pré-Cálculo”, “Matemática-Básica”, e que tem por objetivo resolver o problema dos pré-requisitos. Os conteúdos, geralmente abordados nessa “solução”, são os que já deveriam ser “dominados” pelos estudantes do Ensino Médio, “polinômios, fatoração, relações e identidades trigonométricas, funções reais usuais (modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonometrias), produtos notáveis, simplificações e cálculos algébricos em geral etc” (REZENDE, 2003, p.17).

Algumas universidades que não possuem essa terceira “solução-normal” ou caso não sejam obrigatórias, têm os conteúdos, que foram listados acima, presentes na própria ementa e Programa da Disciplina do CDI-I, conforme pode ser observado no Quadro 1. Dessa forma, inferimos que a preocupação com os “pré-requisitos” para a disciplina existe em muitas universidades e entendemos que essa preocupação é uma ação para tentar minimizar essas lacunas ou a falta de elo entre a Educação Básica e o Ensino Superior já citado por Barbosa (1994). Porém, do ponto de vista da prática, tais conteúdos são trabalhados, muitas vezes, em duas semanas, para que toda a ementa do CDI, ou pelo menos a maior parte dela, seja cumprida. Esse tempo parece curto para criar, construir, de fato, esse elo faltante e, nesse caso, muitas vezes, as lacunas continuam como defasagem da aprendizagem.

Quadro 1 - Plano de Ensino: Programa da disciplina do curso de Licenciatura em Matemática-2016/2017

<p>3.1 PRÉ-CÁLCULO</p> <p>3.1.1 Números reais: propriedades, interpretação geométrica, intervalos, módulo, inequações.</p> <p>3.1.2 Expoentes e radicais.</p> <p>3.1.3 Fatoração de polinômios.</p> <p>3.1.4 Frações e racionalização.</p> <p>3.1.5 Relações e aplicações.</p> <p>3.1.6 Taxas de variação, crescimento e decrescimento de valores.</p> <p>3.2 FUNÇÕES REAIS</p> <p>3.2.1 Funções de uma variável real e valores reais.</p> <p>3.2.2 Funções: exponenciais, logarítmicas, polinomiais, racionais e trigonométricas.</p> <p>3.2.3 Operações com funções: soma, produto, quociente e composição. Funções inversas.</p>

Fonte: Universidade do Noroeste do Paraná

Nessa perspectiva mais geral para CDI, voltamos nosso olhar para um tema específico: as derivadas, que se constituem, em uma instância, o objeto de estudo desta dissertação e é assunto da próxima subseção.

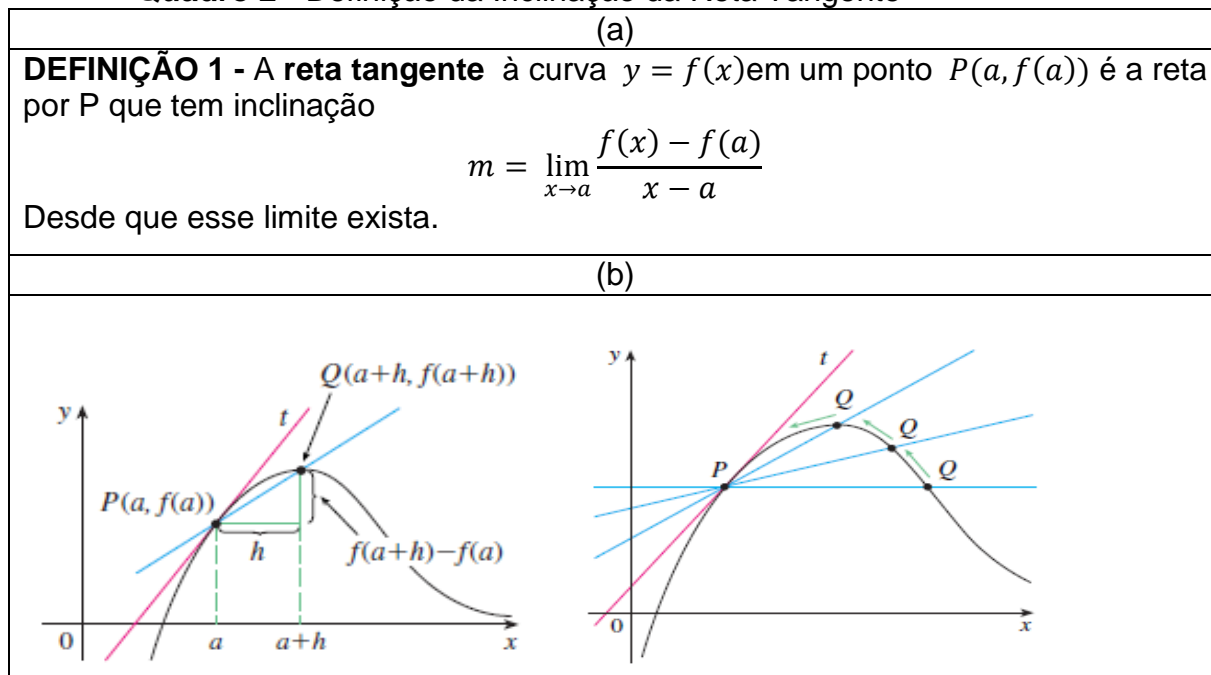
2.2 O ENSINO DE DERIVADAS

O conceito de derivadas de funções de uma variável real, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pode ser explorado em diversos âmbitos, ou seja, derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvem taxa instantânea de variação, máximos e mínimos, entre outros.

A definição para *inclinação* da reta tangente pode ser observada no Quadro 2, de acordo com o livro-texto de Stewart⁶ (2010), Volume I. Percebe-se, ao analisar o Quadro 2, que os itens a e b, individualmente, trazem informações parciais sobre a inclinação da reta tangente, mas, juntos, podem favorecer que o aluno atribua sentido a esse conceito. Assim, o limite, quando x está tendendo (distância entre as abscissas) a a , pode se tornar mais visível, compreendido, quando a análise é feita não apenas pela definição, mas também pela representação gráfica. Entendemos que o item (b) ilustra o item (a) e, o item (a) formaliza algebricamente o item (b).

⁶ A escolha do livro Cálculo, Volume 1, de James Stewart, aconteceu por ser um que consta como referência básica nos planos de ensino das três universidades em que a autora lecionou.

Quadro 2 - Definição da Inclinação da Ret Tangente



Fonte: Stewart (2010, p.129-130)

Stewart (2010, p.132) traz outras definições para esse mesmo limite. Por exemplo, definição (Quadro 3) de velocidade instantânea, estudada com mais profundidade na disciplina de Física, mas que pode servir como introdução ao conceito de taxa de variação:

Quadro 3 - Definição de Velocidade Instantânea

DEFINIÇÃO 2 - Velocidade (ou **velocidade instantânea**) no instante $t = a$ como o limite de velocidades médias:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Fonte: Adaptado de Stewart (2010, p. 132)

O que podemos enunciar, a partir do Quadro 3, é que a velocidade instantânea em $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente no ponto $P(a, f(a))$, considerando que o limite exista. Stewart nos apresenta outra definição, agora para o conceito chamado derivada. Observemos o Quadro 4.

E, por último, a formalização da definição de Taxa Instantânea de Variação, ressaltada no Quadro 5.

Quadro 4 - Definição de Derivada

DEFINIÇÃO 3 - A derivada de um função f em um número a , denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se o limite existir.

Fonte: Stewart (2010, p. 133)

Quadro 5 - Definição de Taxa Instantânea de Variação

DEFINIÇÃO 4 - O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de y em relação a x** em $x - x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fonte: Adaptado de Stewart (2010, p. 134)

Assim, podemos dizer que as definições de coeficiente de inclinação da reta tangente a uma curva num ponto, velocidade instantânea, derivada de uma função num ponto e taxa instantânea de variação de uma função, estão associadas a diferentes conceitos⁷ matemáticos, porém fazem referência ao mesmo objeto matemático (derivada), por isso, dependendo do contexto, a derivada de uma função f em relação à variável x assume várias notações, como, por exemplo, $y'(x)$, $D_x f(x)$, $\frac{dy}{dx}$. São vários nomes e uma única interpretação geométrica (Quadro 2, item b). Essa diversidade de nomes contribui para ressaltar a importância do tema escolhido para esta pesquisa, uma análise de várias facetas de um mesmo objeto matemático.

Em algumas instituições de Ensino Superior, como UTFPR e UNESPAR, é comum que os professores apresentem o Plano de Ensino para a disciplina, sendo alguns itens obrigatórios: ementa, programa da disciplina, avaliações, referências básicas, entre outros. No Quadro 6 apresentamos parte do Programa da Disciplina de Cálculo 1 (focamos na parte referente a derivadas) do curso de Licenciatura em

⁷ Para não perder o foco desta dissertação, assumiremos que o “conceito de derivadas” é o nosso “objeto matemático”, mas, como veremos na seção seguinte, Duval atribui ao conceito um papel que não é o de objeto matemático, mesmo que algumas vezes ele mesmo possa ser o próprio objeto matemático. Isso está associado à possibilidade de um “conceito” ser conceito-objeto ou conceito-instrumento.

Matemática e Engenharia de Produção Agroindustrial⁸ (2016/2017) de uma universidade do noroeste do Paraná.

Quadro 6 - Conteúdo de Programa da disciplina de CDI-I dos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de Produção Agroindustrial 2016/2017

Licenciatura em Matemática	Engenharia de Produção Agroindustrial
<p>Derivadas: Definição da derivada de uma função e interpretação geométrica. Regras de derivação. Derivadas de ordem superior. Regra da cadeia e suas aplicações. Derivação de funções dadas implicitamente. Derivada de função inversa. Regra de L'Hôspital.</p> <p>APLICAÇÕES DA DERIVADA Crescimento e decrescimento de funções. Valores extremos. Concavidade e inflexão. Problemas de otimização. Assíntotas. Traçados de Curvas. Conceito de diferencial.</p>	<p>Derivadas: Taxa de variação. Definição de derivada de uma função e interpretação geométrica; Regras de derivação; Derivadas de ordem superior; Regra da cadeia e suas aplicações; Derivação de funções dadas implicitamente; Derivada de funções inversas; Conceito de diferencial e taxas relacionadas;</p> <p>Aplicações da Derivada; Valores máximos e mínimos e suas aplicações a problemas de otimização; Teorema do valor médio. Construção de gráficos de funções: máximos, mínimos, concavidade, ponto de inflexão e assíntotas;</p>

Fonte: Universidade do Noroeste do Paraná

Barufi (1999) comenta que a transposição didática dos conteúdos de Cálculo gerou uma ordem dos conteúdos programáticos que é apresentada nos livros e ementas da referida disciplina: Limite-Continuidade-Derivada-Integral. É justamente essa ordem que aparece no programa cuja parte de derivada é apresentada no Quadro 6, ou seja, embora utilizem nomes diferentes, têm a mesma ordem, mesmo que sejam cursos diferentes. Esse fato ocorre (ou pelo menos deveria ocorrer dentro do ensino, especificamente na sala de aula) priorizando a necessidade de cada curso.

⁸ O curso de Engenharia de Produção Agroindustrial (EPA) estimula seus acadêmicos a desenvolver trabalhos práticos (em laboratórios e em empresas) e os capacita para atuar nos sistemas de produção agroindustriais; nos bens e/ou serviços produzidos a partir desses sistemas; nos agentes dos sistemas de produção e nos processos de produção.

Analisando as definições já apresentadas (Quadros 2 ao 5), juntamente com a estruturas do Quadro 6, dos subtópicos referentes ao tema escolhido, inferimos que possivelmente são explicados dessa maneira, em tópicos separados. Uma reflexão torna-se pertinente nesse momento: será que nós, professores de CDI, instigamos nossos alunos em sala de aula a refletirem sobre essas quatro definições apresentadas, levando-os à conclusão de que são apenas quatro ideias diferentes para o mesmo limite?

Derivadas é um tema apresentado, muitas vezes, de forma fragmentada, fato que pode interferir na aprendizagem dos alunos, podendo criar barreiras para que eles façam ligações entre tópicos abordados, como, por exemplo, entre os termos *Taxa Instantânea de Variação*, *Coeficiente Angular da Reta Tangente* e *derivadas*. Waideman e Cargnin (2018) perceberam esse problema em uma análise de mapas conceituais elaborados por estudantes após aulas sobre derivadas. Segundo as autoras, as ligações entre os diversos tópicos de derivadas não foram feitas, o que pode mostrar um déficit no ensino:

Outro fator que chama a atenção é a diferença na frequência entre os termos 'coeficiente angular', 'reta tangente', 'reta secante' e 'derivadas', uma vez que a derivada representa o coeficiente angular de uma reta tangente, o qual é obtido por meio do limite do coeficiente angular da reta secante (WAIDEMAN; CARGNIN, 2018, s/p).

O conceito de derivadas, seja como *Taxa Instantânea de Variação* ou *Coeficiente Angular da Reta tangente*, e a disciplina de CDI como um todo, tem sua importância em áreas como Física (velocidade instantânea), Química, Biologia, Economia (custo e receita marginais), Astronomia, Arqueologia, Medicina, Psicologia, Ciências Políticas, Ecologia (taxa de crescimento populacional), Engenharias e outras. Por vezes, o que se observa é uma contradição entre o que é ensinado em sala de aula e o que é encontrado como exercício sobre o assunto. Especificamente em relação à *reta tangente*, Alory *et al.* (2015) alertam:

A dificuldade em ensinar o coeficiente de inclinação da tangente e derivada também vem do fato de que a teatralização feita para introduzi-los, com o objetivo de fazer com que os alunos adotem perspectiva local sobre os objetos manipulados é então muito pouco retransmitida por exercícios colocando em jogo a perspectiva local das funções. Encontrar exercícios em programa de ensino e que

imperativamente precisam adotar essa perspectiva não é fácil. (ALORY *et al.*, 2015, p.3, tradução nossa).

Já para Gonçalves e Reis (2013), uma das possíveis causas para as dificuldades dos alunos na aprendizagem desse tema pode estar relacionada a dificuldades na aprendizagem do conceito limite, que acarretam, como consequência, dificuldades em derivadas, decorrentes do fato de que a derivada é um limite, embora saibamos que há autores que propõem o ensino de derivadas antes de limites.

D'Avoglio (2002, p.14) ressalta que, muitas vezes, os estudantes, capazes de obter corretamente a função derivada de uma função polinomial e de achar o coeficiente angular da tangente num ponto dado, mostram-se incapazes de avaliar essa mesma taxa de variação a partir do gráfico correspondente, isso pode ser devido à pouca exploração, em sala de aula e em livros textos de Cálculo, de exercícios desse tipo. Baseada em uma entrevista com 110 estudantes, Orton (1980 *apud* D'Avoglio, 2002) classifica os erros dos alunos em três tipos, conforme mostrado no Quadro 7.

Quadro 7 - Concepções de erros de alunos sobre o conteúdo de derivadas

- a) erros estruturais (relacionados com os conceitos essenciais implicados);
- b) erros arbitrários (o aluno se comporta arbitrariamente sem levar em conta os dados do problema) e
- c) erros executivos (erros na manipulação, apesar dos [de os] conceitos implicados terem sido entendidos).

Fonte: Orton (1980, *apud* D'Avoglio, 2002, p.13)

Em 2016 e 2017, quando esta professora-pesquisadora aplicou a avaliação regimental do 3º bimestre em um curso de Engenharia de Produção Agroindustrial e Licenciatura em Matemática na disciplina de CDI, o erro mais frequente estava na finalização dos exercícios, em escrever uma resposta correta (isto é, erros executivos, apresentados no Quadro 7), ou seja, na falta dos chamados pré-requisitos, já mencionados, e não em aplicar os teoremas de derivação. Esses erros corroboraram as dificuldades encontradas em derivadas enunciadas por Orton (1980 *apud* D'Avoglio, 2012): a) na manipulação de fórmulas para se obter a derivada de uma função; b) na conceituação dos processos de limite que sustentam o conceito de derivada; c) em utilizar apropriadamente as representações gráficas.

As dificuldades apresentadas podem estar associadas à confusão ou à compreensão do conceito de derivada. D'Avoglio (2002) relatou, por um teste de sondagem, a identificação (Quadro 8) de alguns conceitos que os alunos confundem em enunciados de questões:

Quadro 8 - Confusões de conceitos entre os alunos

- a) **derivada** com **reta tangente**,
- b) **derivada num ponto** com a **função derivada**,
- c) **derivada** com **regra para se achar derivada**,
- d) **reta tangente** com **coeficiente angular da reta tangente** e também, que muitos apresentam **dificuldade de expressão**

Fonte: D'AVOGLIO (2002, p. 27).

A pesquisa de Waideman e Cargnin (2018) também relatou essas possíveis confusões ou falta de compreensão de conceito por parte dos alunos ao estudarem derivadas por mapas conceituais. Inferimos que “derivada”, “coeficiente angular da reta tangente” e “taxa instantânea de variação” são conceitos diferentes que remetem ao conceito de derivada. A finalidade de cada um é que pode ser abordada de forma diferenciada, quando colocada em contexto, já, para os alunos, as autoras relatam que parecem ser totalmente distintos, como se os alunos não “visualizassem” como o mesmo limite $(f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h})$

Como citado anteriormente, pode ser que os conteúdos sejam abordados fragmentadamente. Essa forma de ensino pode contribuir para a falta de compreensão do conceito de derivada. Como possível alternativa para minimizar essas confusões, D'Avoglio (2002) aponta a introdução do conceito citado nos quadros de 2 a 5, partindo de taxa média de velocidade para, só então, apresentar a taxa instantânea de velocidade $(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x})$. O autor aplicou uma sequência didática a 42 alunos que não tinham estudado derivadas ainda. Com o objetivo de introduzir o conceito de derivada num ponto, a partir do conceito de velocidade num determinado instante, foram aplicadas sete atividades envolvendo conceitos de movimento e velocidade, uma forma de atribuir sentido à aprendizagem. Percebeu-se o interesse dos alunos nas atividades com exemplos da física por serem mais familiares no cotidiano desses alunos. O autor relata também resultados mais expressivos em relação à participação

dos alunos do que em anos anteriores, quando a introdução desse conceito começou com definições, teoremas, demonstrações, ou seja, de uma forma mais rigorosa e menos intuitiva.

Segundo Consciência e Oliveira (2011), o ensino de derivadas precisa acontecer por meio de várias representações. Orhum (2012) relata a dificuldade dos alunos em uma representação específica, a gráfica, por exemplo. As dificuldades dos alunos estão em estabelecer conexões entre o gráfico da função derivada e o da função original. Eles conseguem interpretar o gráfico da função derivada apenas como o gráfico de uma função real de variável real, não conseguindo pensar e argumentar matematicamente, a partir deste, para analisar as propriedades da função original, pois seriam duas funções distintas.

Nesse sentido, Gil (2014) argumenta que os alunos evidenciam “conhecer o procedimento associado ao estudo de variação de uma função, através do sinal da sua derivada, evidenciando, também, uma utilização deste conceito centrada nas regras e procedimentos” (GIL, 2014, p.114). Não fazem a mesma ligação ao analisar gráficos, ou seja, a escrita algébrica não é evidenciada no gráfico. Essa falta de conexão entre as representações é abordada por Alory *et al.* (2015) em relação à representação proposta para as funções, que é, na maioria das vezes, a representação algébrica (fórmulas), situação que dificulta colocar em perspectiva, sejam elas locais ou globais, as funções (ALORY *et al.*, 2015, p.8, tradução nossa).

Ainda pensando nas possibilidades de representações, é pouco frequente pedir aos alunos que façam interpretações geométricas das derivadas de uma determinada função. Talvez, por consequência, eles não consigam determinar a reta tangente à curva de uma função num dado ponto a partir de uma representação gráfica da mesma, não estabelecendo uma relação da derivada num ponto, para a função derivada representada graficamente, encarando-a apenas como uma expressão algébrica que se obtém a partir da função original (VASQUES, 2015). Um dos livros-textos, referência básica da disciplina de CDI em muitos cursos, Stewart (2010), apresenta exercícios para a obtenção de coeficientes angulares de retas tangentes a gráficos sem o uso da álgebra. Porém, isso não é comum.

Em síntese, destacamos a análise gráfica e o rigor matemático como as principais dificuldades abordadas pelo aplicativo em análise nesta dissertação. No caso da primeira, várias questões abordaram gráficos como forma de enunciar ou auxiliar o exercício. Na segunda, as dicas são teoremas, definições e corolários que

retomam o conteúdo já abordado. O aplicativo e as questões serão explicados, posteriormente, nos Capítulos 3 e 4.

Ao pensarmos em uma maneira de colaborar e minimizar essas dificuldades epistemológicas apresentadas tanto no CDI como, especialmente, em derivadas, usaremos umas das “soluções-normais” apontadas por Rezende (2003), o uso das novas tecnologias, não especificamente os computadores, mas uma opção de tecnologia remota, um aplicativo de celular para o estudo desse conceito. A tecnologia digital é assunto da próxima subseção.

2.3 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA A APRENDIZAGEM EM SALA DE AULA

Dentre as tendências apontadas pela Educação Matemática como alternativa para o ensino e a aprendizagem, escolhemos Recursos Didáticos Tecnológicos, especificamente, o uso de um aplicativo para celular.

A comunicação digital surgiu, o homem evoluiu e criou as tecnologias inteligentes. A disseminação e divulgação dessas tecnologias poderiam contribuir para os diversos ramos, como comércio, indústria, entretenimento, entre outras.

O processo de produção industrial da informação trouxe uma nova realidade para o uso das tecnologias da inteligência. Surgiram profissões que têm como foco de ação a comunicação de informações e oferecimento de entretenimento. Novos meios de comunicação (mídias, derivado do inglês, ‘mas media’ ou, em português, meios de comunicação de massa) ampliam o acesso a notícias e informações para todas as pessoas. Jornais, revistas, rádio, cinema, vídeo etc. são suportes midiáticos populares, com enorme penetração social. Baseados no uso da linguagem, da escrita e da síntese entre som, imagem e movimento, o processo de produção e o uso desses meios compreendem tecnologias específicas de informação e comunicação, as TICs (KENSKI, 2007, p.27- 28).

Segundo Kenski (2007), a divulgação das primeiras tecnologias tinha como objetivo dar suporte à comunicação. Acreditamos que, na educação, como nas indústrias, comércios, entretenimento, as tecnologias são de grande importância, sejam digitais ou não e que, de alguma forma, traz a comunicação para a sala de aula. O ramo das tecnologias teve um avanço veloz na sua produção e disseminação, e

outra nomenclatura foi criada: Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (NTIC), principalmente as digitais.

As NTIC surgem como geração digital, abrangendo as multimídias: imagens, textos e sons, Internet nos computadores de forma a intensificar o uso dos softwares, realidade virtual, armazenamento em nuvens, os blogs, os simuladores, os vídeos educacionais e continua com o *smartphone* que veio para facilitar o uso da calculadora, do gravador de áudio e vídeo e da Internet. A educação híbrida⁹ também é uma realidade das NTIC (FERREIRA; CAMPONEZ; SCORTEGAGNA, 2015).

Estudos relacionados à utilização de Recursos Digitais e NTIC vêm sendo cada vez mais realizados. Os trabalhos de Ferreira, Camponez e Scortegagna, (2015), Mendes Neto (2017) e Scremim e Bulegon (2017) alertam que o uso de *software* computacionais possibilita uma inovação no ensino, por ser considerado um auxílio na construção de conceitos e aplicações relacionados ao ensino de matemática. A parte gráfica desses *software* colabora com a Álgebra e a Geometria, por exemplo.

Muitas tecnologias que vêm ganhando espaço na educação, especialmente na disciplina de CDI, podem estar ligadas ao fato de devolver um feedback rápido e diferenciado, de acordo com o nível de cada aluno. Assim, as “Tecnologias Inteligentes”, as TICs e as NTIC, estão presentes no dia a dia do professor, do aluno, nas escolas, universidades, etc, ou seja, fazem parte do cotidiano de todos. Mendes Neto (2017) defende o uso das tecnologias de forma planejada e crítica, ou seja:

Na medida em que os alunos e os professores estão cada vez mais conectados às novas tecnologias digitais, o grande desafio a ser discutido no âmbito da comunidade escolar é o desenvolvimento de suas habilidades para o uso crítico da rede, tema que está contido na ideia de alfabetização midiática e informacional (MENDES NETO, 2017, s/p).

Tomazi, Costa e Camargo (2018) relatam que no ENEM¹⁰, de 2010 a 2016, dos dez trabalhos analisados que tinham algum tipo de recurso digital para o ensino de CDI, três abordaram “derivadas” e um “aplicações de derivadas”. Dentre os outros seis recursos tecnológicos encontrados nos trabalhos, quatro eram *software*, além de uma

⁹ Educação Híbrida ou Blended Learning (blended, do inglês “misturar”) é a combinação de momentos em que o aluno estuda sozinho, virtualmente, com outros em que a aprendizagem ocorre de forma presencial, valorizando a interação entre alunos e professores. Apesar de serem momentos diferentes, o objetivo do aprendizado híbrido é que esses dois momentos sejam complementares e promovam uma educação mais eficiente, interessante e personalizada (PORVIR, 2013, *Apud* SILVA, 2016, p. 25).

¹⁰ Encontro Nacional de Educação Matemática, que acontece trienalmente em algum lugar do Brasil.

ferramenta colaborativa e um *site*. Esses *softwares* eram usados para a parte gráfica, principalmente para a análise gráfica de funções.

Como uma maneira de dar suporte a essa “conexão” entre professores e alunos, a UNESCO (2017, s/p.) declarou que as mídias portáteis podem ajudar a preparar novos professores, proporcionando um melhor desempenho profissional. Dessa forma, busca ampliar as parcerias e promover atividades e discussões sobre tópicos de ponta, como os Recursos Educacionais Abertos, aplicativos de sala de aula para smartphones e celulares simples, conteúdos para tablets e netbooks, métodos pedagógicos para a aprendizagem móvel, desenvolvimento de aplicativos para a aprendizagem móvel, mídias sociais e muito mais.

Segundo Drigas e Papas (2015), foram concebidas e apresentadas várias aplicações e ferramentas de aprendizagem *on line* para a matemática, as quais poderiam ser usadas por alunos a qualquer hora e em qualquer lugar, através de dispositivos móveis usando conexão sem fio, por exemplo.

Nessa perspectiva, esta dissertação apostou nos recursos tecnológicos, ou seja, nas NTIC, por entender que a tecnologia digital está em casa, na escola, na universidade, dentro da sala aula, afinal os alunos são considerados, desde 2001, nativos digitais (PRENSKY (2001)) e, “Homo Zappiens”, pessoas que nasceram em plena cultura cibernética global, sustentada pela multimídia (VEEN; VRAKKING, 2009).

As ‘Tecnologias Inteligentes’ evoluíram, as escolas e universidades também, e essa evolução deveria trazer mudanças na postura dos professores, das instituições de ensino, do próprio aluno, enfim, da comunidade escolar/acadêmica como um todo, por isso “o professor necessita de atualização constante, pois as novidades nesta área surgem num ritmo muito veloz”(FERREIRA; CAMPONEZ; SCORTEGAGNA, 2015, p.5). Essas mudanças precisam ser conscientes. Para isso, o professor precisa ser crítico, as NTIC escolhidas devem ter como objetivo principal a contribuição para o ensino e aprendizagem e não usadas apenas como um passatempo na sala de aula (BORBA, 2011). Em 2017, por meio de uma nota, a UNESCO atualizou as NTIC para a evolução da educação, informando que:

Os aparelhos móveis (telefones celulares, smartphones, tablets etc.) estão transformando o modo pelo qual nós nos comunicamos, vivemos e aprendemos. A aprendizagem [por meio de mídias] móvel

11 oferece formas modernas que ajudam no processo de aprendizagem por meio de aparelhos móveis, como notebooks, tablets, MP3 players, smartphones e telefones celulares. Devemos garantir que essa revolução digital torne-se uma revolução na educação, promovendo uma aprendizagem inclusiva e de melhor qualidade em todos os lugares (UNESCO, 2017, s/p).

As escolas e universidades podem ter nas NTIC a expansão de possibilidades de desenvolvimento da cidadania. Para Borba e Penteado (2012), na escola, a alfabetização informática precisa ser considerada como algo tão importante quanto a alfabetização na língua materna e em matemática. Nesse sentido, o uso de computadores, celulares, lousas digitais, *software*¹² no ensino de matemática tem colaborado no processo de ensino e de aprendizagem, mostrando ser relevante nesse aspecto.

Sangoi, Isaias e Martins (2011) relatam que o uso de *software* científicos em aulas tem se mostrado uma experiência rica, com a participação ativa dos alunos. Isso ocorre porque eles dominam com facilidade os computadores (e celulares) e, portanto, podem usá-los para construir gráficos na resolução de situações-problemas, permitindo maior disposição de tempo para sua análise e interpretação.

Mesmo com as TIC's nas aulas de CDI, Costa e Souza Júnior (2007) destacaram o uso de *software* gráficos como ferramentas eficientes para o ensino de funções, gráficos, limites, derivadas, integrais, áreas e volumes, pois permitem a visualização geométrico-espacial e não somente algébrico-analítico, ou seja, a exploração gráfica possibilita ao aluno construir conceitos ou ainda ressignificar conceitos já estudados. As representações gráficas em CDI são também preocupações apontadas por Consciência e Oliveira (2011) e Orhum (2012), entre outros.

Rezende (2003, p.22) relembra que o movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, iniciado na década de 80, e que ficou conhecido por "Calculus Reform" (ou Reforma do Cálculo) tem como características básicas o uso das tecnologias, isto é, *software* computacionais e calculadoras gráficas, tanto para o aprendizado de conceitos e teoremas como para a resolução de problemas; o ensino via a "Regra dos Três", isto é, todos os tópicos e todos os problemas devem ser abordados de forma numérica, geométrica e analítica; grande preocupação, ou pretensão, em mostrar a

¹² Chamados também de tutores inteligentes por Machado, Almeida e Silva (2009, p. 42).

aplicabilidade do Cálculo por meio de exemplos reais e com dados referenciados; tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos. Desde a década de 1980, na reforma do cálculo, muitas mudanças aconteceram, porém a passos lentos, já com as tecnologias digitais aconteceram a passos velozes. Por que esse avanço tecnológico não está completamente presente nas salas de aulas?

Não acreditamos no desprezo do uso de tecnologias como lápis, papel e régua, usadas em sala de aula, mas aliadas às tecnologias digitais podem contribuir de forma mais eficaz para o ensino e a aprendizagem, gerando percepções e habilidades nessa via de mão dupla. Segundo Couy (2008), as ferramentas tecnológicas para o ensino serão eficazes e, se utilizadas de forma adequada podem potencializar a representação gráfica no ensino de Cálculo, “estimulando a observação, a busca de regularidades e padrões e possibilitando, através da comparação com as outras formas de se representar uma função, o entendimento das ligações entre elas”(COUY, 2008, p. 47).

Além disso, as NTIC “podem ser um instrumento poderoso para o processo de enriquecimento das ligações entre unidades cognitivas, pois processam algoritmos com rapidez e eficiência” (TALL, 2000). Mesmo depois de 18 anos, acreditamos que as novas tecnologias continuam sendo um instrumento poderoso para o mesmo problema levantado por Tall.

As Novas Tecnologias da Informação e Comunicação e sem Fio (NTIMS) são realidade na sala de aula. Os celulares com aplicativos podem se tornar recursos pedagógicos (BENTO; CAVALCANTE, 2013), porém poucos são usados como recurso tecnológico. Muitas vezes as escolas ficam apenas fiscalizando o não uso dentro da sala de aula.

Até aqui, vimos que o computador foi o precursor das TICs e que a telefonia móvel não surgiu para fins educacionais. Todavia, Moura (2012) garante que o acesso a conteúdos multimídia deixou de estar limitado a um computador pessoal (PC) e estendeu-se também às mídias portáteis (telemóvel, PDA, Pocket PC, Tablet PC, Netbook), proporcionando um novo paradigma educacional. Acredita-se que a telefonia móvel pode, sim, contribuir para a aprendizagem dentro e fora da sala de aula (SILVA, 2012).

A pesquisa de Scremin e Bulegon (2017) partiu do pressuposto de que o ensino do CDI usa os recursos tecnológicos para colaborar, auxiliar nas salas de aula ou como aulas complementares de forma a tornar esse momento de aprendizagem

uma assimilação natural dos conceitos. Tomazi, Costa e Camargo (2018) relatam que, ao propor atividades contextualizadas com o uso de dispositivos móveis, puderam perceber uma solução para a inatividade e o desinteresse apresentados pela maior parte dos discentes atualmente.

Segundo Mendes Neto (2017), o intuito de utilizar o celular como recurso pedagógico em algumas aulas é despertar a consciência dos alunos quanto ao favorecimento da aprendizagem. Mesmo assim, o aparelho deve ser utilizado no momento certo e de acordo com algumas regras estabelecidas com a turma. Para que um recurso tecnológico se torne uma ferramenta pedagógica eficiente, é necessário inseri-la no planejamento de aula e usá-la como estratégia de ensino.

De acordo com Loureiro (2012), o tipo de abordagem realizada com o conceito de derivada de uma função num ponto, aliada a recursos de geometria dinâmica e *applet*, permite aos alunos construir imagens mentais relacionadas com o conceito, conseguindo também realizar uma interpretação geométrica do valor da derivada.

A pesquisa de Batista, Behar e Passerino (2011) com celulares em CDI relatou os bônus e ônus em sala de aula. Considerou o uso como uma estratégia de ampliação de possibilidades de acesso a materiais do curso. A experiência relatada é que esse uso deve ser associado a outras estratégias, sempre com um papel bem definido para a educação, pois esses recursos tecnológicos, dentro da sala de aula, trouxeram limitações, como, por exemplo, se não for *smartphone* não baixa determinados aplicativos, alguns aplicativos são específicos para certos sistemas operacionais, sendo necessária uma fase de adaptação dos alunos, pois, como já citado, a tecnologia digital para a educação precisa evoluir.

Kaloo e Mohan (2012) apresentam um estudo realizado com o aplicativo Mobile Math, desenvolvido para testar a hipótese de que *m-learning*¹³ poderia contribuir para os estudantes melhorarem o desempenho em Matemática. Destinado ao estudo de Álgebra Elementar, o Mobile Math é composto de lições, exemplos, tutoriais, *quizzes* e fatos curiosos. O uso do aplicativo foi avaliado por um período de três meses com estudantes do ensino secundário, de diferentes escolas, utilizando um mesmo modelo de celular. Os resultados revelaram que os alunos do ensino 1 e

¹³**Mobile learning**, ou **m-learning**, é uma modalidade da educação a distância (EAD) que se apropria de dispositivos móveis para a realização de atividades educacionais. Na prática, trata-se do uso de aparelhos, como smartphones, celulares e tablets para estudar conteúdos otimizados para tais plataformas. Disponível em: <http://webaula.com.br/index.php/pt/acontece/noticias/3285-mobile-learning-metodologias-ead>

2 tiveram um aumento de desempenho com o uso do celular para aprendizagem matemática. A pesquisa relatou que foram muitas as indicações de que quanto mais os alunos usavam o aplicativo móvel, mais eles melhoravam seu desempenho. A avaliação do aplicativo foi realizada por meio de um questionário, e 68% dos os alunos concordaram, ou concordaram fortemente, que gostavam dos jogos de aprendizagem, por meio de um aplicativo de celular, mais do que das outras atividades de aprendizagem. Assim, pode-se concluir que este método de aprendizagem pode ser potencialmente útil para estudantes do ensino secundário.

No caso desta pesquisa, a escolha de um aplicativo é essencial para resolver a situação proposta, pois, de acordo com Machado, Almeida, Silva (2009), o *feedback* rápido que um aplicativo permite determinar o nível de cada aluno e a decisão de arriscar a resposta, ou, ainda, a busca pelo conteúdo que não estava claro até aquele momento, pode contribuir para uma ressignificação do mesmo.

Assim, introduzir as tecnologias nas suas práticas letivas é uma forma de os professores trabalharem conceitos de derivada e função derivada desenvolvendo mais de um tipo de representação, simultaneamente, para favorecer que os alunos compreendam o seu significado, pois a utilização das diferentes representações pode proporcionar aos alunos uma construção das “ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão” (NCTM, 2008, p. 76).

O uso de recursos tecnológicos pode permitir um aporte a mais para a aprendizagem de um conteúdo já abordado em sala de aula. Acreditando que “o aluno não tem mais interesse e/ou vontade de estudar quando somente são utilizados métodos tradicionais diante de tanta tecnologia presente na vida deles” (PACHECO; PINTO; PETROSKI, 2017, p. 6375), houve a necessidade de se pensar em como aliar esse recurso tecnológico à diversidade de representação, possibilitando ser uma alternativa interessante, já que vários estudos comprovam a contribuição desse uso. Assim, para esta dissertação, as questões para o aplicativo foram elaboradas priorizando as representações de um objeto matemático. Escolhemos, então, a Teoria de Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Duval, que será apresentada na próxima subseção, para orientar o desenvolvimento do aplicativo.

2.4 TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (TRRS): ASPECTOS GERAIS

Segundo Duval (1993, 1995, 2012), a teoria apresenta registros de representações semióticas que, por sua vez, são um sistema de signos, que tem por objetivo a comunicação e atividades cognitivas do pensamento, o tratamento da informação e a objetivação. Segundo Duval (2012),

Na realização de diferentes funções cognitivas: a função de objetivação (expressão particular) que é independente daquela de comunicação (expressão para outrem), e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais (algumas atividades de tratamento são diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, por exemplo, o cálculo) (DUVAL, 2012, p.269).

As representações semióticas apresentam sua forma, chamada de representante, e seu conteúdo, chamado de representado. Assim, “[...] as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento” (DUVAL, 1993, p.39). Logo, considera-se que as representações semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (DUVAL, 1993, p.39).

Entender o significado da palavra ‘representação’, geralmente usada como verbo: representar, pode contribuir para a compreensão dessa teoria. Para a língua portuguesa, por meio do dicionário¹⁴, representar é a) mostrar claramente; b) reproduzir a imagem de; retratar; c) ter como sentido, significado; significar. Para a matemática, “uma escrita, uma notação, um símbolo, representam um objeto matemático: um conjunto, uma função, um vetor” (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 467). Dessa forma, os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz deles, podendo ter perda de compreensão ao longo do tempo. “A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática” (DUVAL, 1993, p.37).

Cargnin (2013) relatou em sua pesquisa que essa noção de representar está sendo tratada há um século já, em diferentes perspectivas, como, por exemplo, *representação mental* (1924-1926); *representação interna ou computacional* (1955-1960); *representação semiótica* (1985). Para Duval (2009), as particularidades para esses três tipos de representação, Mental, Interna ou Computacional e Semiótica,

¹⁴<https://www.dicio.com.br/representar/> Acessado: 02 de setembro de 2018

bem como seus objetos de estudo, a noção de representação utilizada e o método de pesquisa adequado, são apresentadas no Quadro 9:

Quadro 9 - Tipos de Representação, com seus respectivos objetos de estudo, noção de representação e o método de pesquisa adequado, segundo Duval (2009)

Tipo de Representação	Objeto de estudo	Noção de representação utilizada	Método de pesquisa
Mental	“as crenças e as explicações das crianças pequenas concernentes aos fenômenos naturais e psíquicos” (DUVAL, 2009, p.30)	“evocação dos objetos ausentes” (DUVAL, 2009, p.30)	Entrevista
Interna ou Computacional	“o tratamento, por um sistema, das informações recebidas de forma a produzir uma resposta” (DUVAL, 2009, p.30)	“forma pela qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento” (DUVAL, 2009, p.31)	Codificação da informação
Semiótica	Aquisição do conhecimento e os problemas originados por sua aprendizagem, relativos a um sistema particular de signos	Forma pela qual um conhecimento é representado	Pressupõe sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro (p.32).

Fonte: Cargnin (2013)

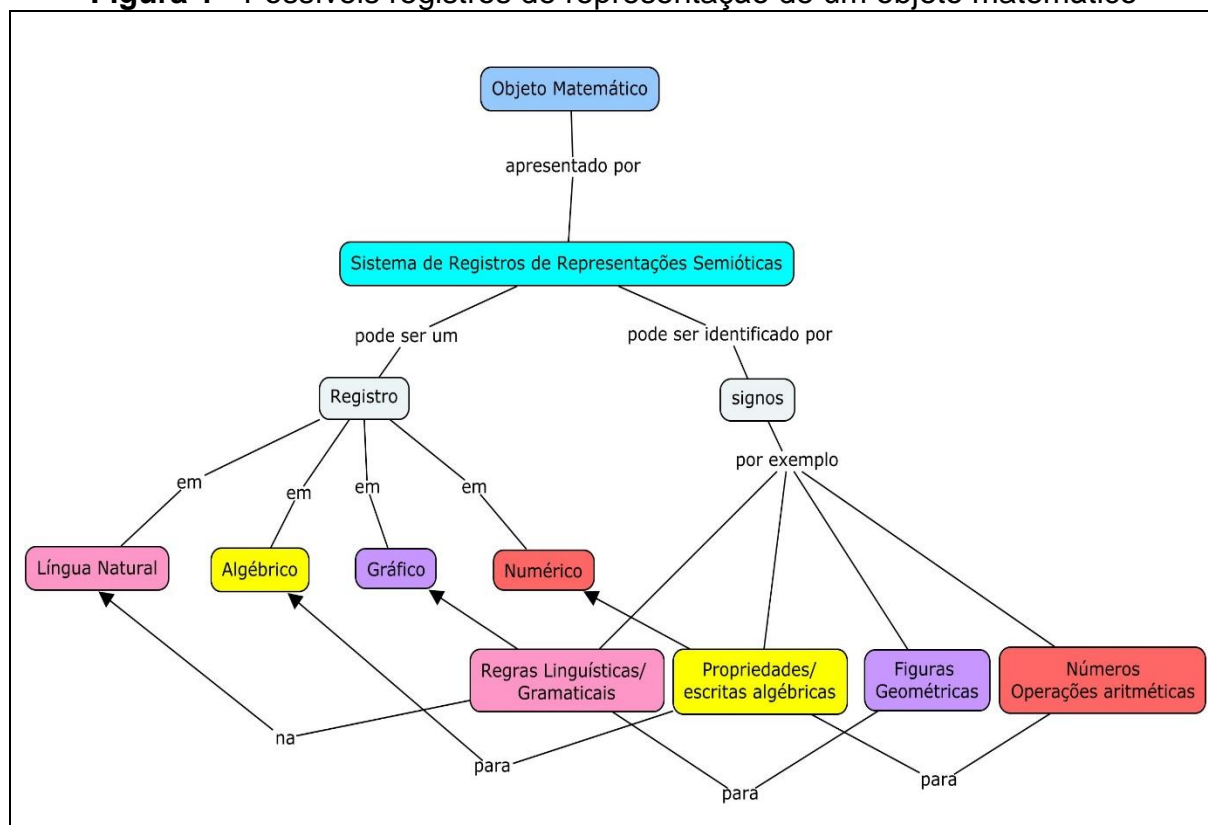
Para Henriques e Almouloud (2016), Representação Semiótica é definida como:

[...] uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema *semiótico* e de outro lado, pela *referência* do objeto representado (HENRIQUES, ALMOULOU, 2016, p. 467).

Duval (2009) chama de *semiósisis* a apreensão ou produção de uma representação semiótica e *noésisis* os atos cognitivos (apreensão conceitual), ou seja, para ele, não há *noésisis* sem *semiósisis*. Para o autor, “é a *semiósisis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésisis*” (p. 17 – grifo do autor) e “não há *noésisis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito” (p.18 – grifo do autor).

Com já mencionado, existem vários registros de representações no sistema semiótico. Matematicamente, é comum a apresentação de quatro (Figura 1), o que permite a exposição de diferentes sistemas semióticos, com diferentes signos.

Figura 1 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático




Fonte: Adaptado de Henriques e Almouloud (2016, p. 468)

Assim, a representação semiótica de um objeto matemático se faz necessária, devido a não ser o objeto matemático um objeto real ou físico, chamados de abstratos e representados como nos exemplos do Quadro 10.

Duval (2012) ressaltou a possibilidade de ‘tratar’ esses objetos matemáticos dentro de um mesmo sistema de representação semiótico, “as representações **semióticas** apresentam distinção entre um objeto e sua representação é, portanto,

um ponto estratégico para a compreensão da matemática” (DUVAL, 2012, p.268). À atividade cognitiva, associada a essa transformação interna a um tipo de registro, chamou de tratamento.

Quadro 10 - Representação de um objeto matemático

Representação 1	Representação 2
Função	$y = f(x)$
Número um	1
A=Matriz identidade de ordem 2	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Triângulo	

Fonte: A autora

Ao considerarmos as possíveis representações semióticas de um objeto matemático (Figura 1), como, por exemplo, a derivada, pode-se elencá-las de acordo com o Quadro 11:

Quadro 11 - Tipos de Registro de Representações Semióticas

a) Representação em língua natural;

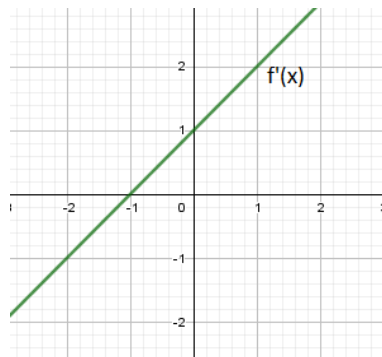
Exemplo a) Em um ponto de *Máximo* ou *Mínimo*, a inclinação da reta tangente é nula sempre?

b) Representação em forma algébrica;

Exemplo b): Derive: $f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$

c) Representação de figura geométrica ou gráfica;

Exemplo c)



d) Representação numérica

$A = (1.63, 1.56)$

Fonte: A autora.

Segundo Duval (2012), esses registros de representações semióticas são uma forma de exteriorizar o que as nossas representações mentais “formam” do objeto matemático analisado. Dessa forma, um diferencial da teoria de Duval é considerar que as representações não só comunicam as representações mentais, como também possibilitam novas compreensões, reflexões e a construção/revisão/reestruturação das representações mentais. Ou seja, serve como comunicação com outros, auxilia no processo cognitivo.

Para Duval (2012),

[...] é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, **o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações** (DUVAL, 2012, p.70, grifo do autor).

Assim, o Quadro 12 representa um sistema semiótico e suas possibilidades de registro de representação.

Quadro 12 - Características de um registro de representação semiótica descrita por Duval (2012)

<p>I) A formação de uma representação identificável</p> <p><i>Definição:</i> A formação de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido.</p> <p>Representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc. (Exemplificado no Quadro 12)</p> <p>A formação da representação deve respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entaves de construção para as figuras...).</p>
<p>II) Tratamento</p> <p><i>Definição:</i> O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro.</p> <p>A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações</p>

que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural.

III) Conversão

Definição: A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial.

A conversão é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística.

IV) Observação

A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento.

Fonte: A autora

Buscamos ilustrar o que diz a TRRS por meio de questões elaboradas para o aplicativo desta dissertação: **Tratamento** (Quadro 13) e **Conversão** (Quadro 14).

Quadro 13 - Ilustração de Tratamento

Item b) do Quadro 11

Derive:

$$f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$$

} Representação

$$f(x) = 6x^3 - 4x^1 + 2x^{-3} + 5x^0$$

$$f'(x) = 3.6x^{3-1} - 1.4x^{1-1} + (-3).2x^{-3-1} + 0.5x^{0-1}$$

$$f'(x) = 18x^2 - 4x^0 - 6x^{-4} + 0$$

$$f'(x) = 18x^2 - 4 - 6x^{-4}$$

} **TRATAMENTO**

Podemos observar que, desde a análise da função até o término da resolução ao encontrarmos a derivada primeira da $f(x)$, usamos **tratamento**, porque estamos em um único registro, o registro semiótico algébrico. Cada linha da resolução representa uma transformação interna nesse registro.

Fonte: A autora

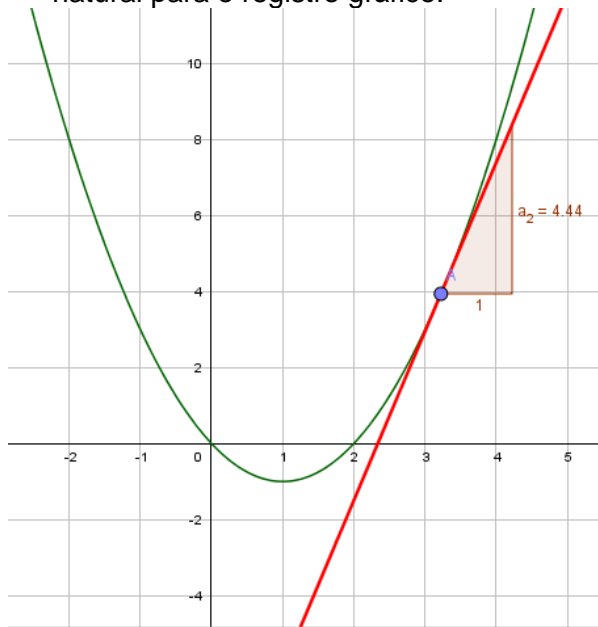
Analisando os Quadros 13 e 14, inferimos a língua natural como necessária para dar sentido, interpretar os enunciados dos exercícios, porém os outros tipos de registros têm sua importância para a compreensão do objeto matemático apresentado, pois cada um deles fornece elementos parciais sobre o objeto em análise.

Quadro 14 - Ilustração de Conversão

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função

$$f(x) = x^2 - 2x$$

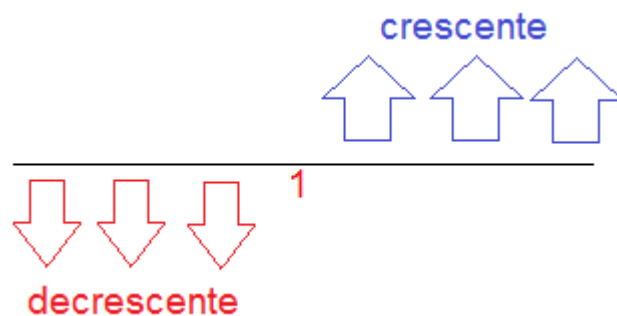
- (I) Conversão do exercício do registro em língua natural para o registro gráfico.



(I) Registro numérico

$(-\infty, 1)$ Decrescente
 $(1; +\infty)$ Crescente

(II) Registro figural



A resposta ao exercício acontece em um registro semiótico diferente do enunciado do exercício e diferente do item (I), portanto chamamos de Conversão.

O item (II) é outra opção de conversão para esse exercício, da língua natural para a figural.

Fonte: A autora

As várias formas de sistemas semióticos aumentam significativamente as capacidades cognitivas de um indivíduo com a diversificação das representações, especialmente quando há uma conversão de dois registros de representações. Nas questões usadas no aplicativo, buscamos apresentar conversões, especialmente partindo das representações gráficas.

Os registros de representação semiótica ainda “permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto, na medida em que elas podem atender sistemas semióticos totalmente diferentes” (DUVAL, 2012).

Lachini (2001) afirma as dificuldades dos alunos sobre a compreensão do objeto matemático é em organizar as ideias para resolver situações, ou seja, uma habilidade importante para todos os estudantes. “É preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo, saiba avaliar e analisar dados, explique o significado de suas respostas” (LACHINI, 2001, p. 147).

Cargnin (2013, p.45) argumenta que a “TRRS procura desvelar uma maneira de se adquirir conhecimento matemático, a partir da estrutura do funcionamento cognitivo do estudante”. Duval (2012) diz que é preciso passar por pelo menos duas representações e saber fazer o tratamento correto. Assim, nesta dissertação, à luz dessa teoria, elaboramos questões para o aplicativo justamente por acreditar que, para o aluno dizer que conhece um objeto matemático, é preciso entender que as diferentes representações se relacionam ao mesmo objeto matemático, bem como conseguir, a partir de um deles, enxergar o outro.

No aplicativo referente a esta dissertação, as múltiplas representações, especialmente a gráfica, aparecem nos gráficos das funções, gráficos das funções derivada primeira ($f'(x)$) e função derivada segunda ($f''(x)$). As conversões também estão presentes nas alternativas das respostas às questões dessa fase, o que pode tornar mais familiar o assunto abordado.

Costa e Souza Júnior (2007), já citados, destacam o uso de *software* gráficos como ferramentas eficientes para o ensino de funções, gráficos, limites, derivadas, integrais, áreas e volumes como alternativa para minimizar os problemas da disciplina de CDI. Gravina e Santarosa (1998, p.11) também destacam a importância das múltiplas representações na construção dos conceitos. Elas explicam que os objetos matemáticos podem ser representados em diferentes formas e, então, no processo de construção dos conceitos, é significativa uma exploração que faça o trânsito entre os diferentes Registros de Representação Semiótica ou Sistemas Semióticos.

No próximo capítulo, serão apresentados os procedimentos metodológicos e mais detalhes sobre a elaboração das questões que compõem o aplicativo.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, detalha-se a pesquisa de natureza qualitativa e de cunho exploratório, seus aspectos gerais, bem com o público alvo - sujeitos, o desdobramento da coleta de informações e, conseqüentemente, lapidação e a formulação do produto educacional.

Retomamos aqui o questionamento principal da pesquisa: **Que avaliação realizam alunos que já cursaram a disciplina de CDI-I de um aplicativo desenvolvido para o trabalho com derivadas?**

Para responder a essa questão, utilizamos questões norteadoras secundárias: **Que aspectos do tema derivadas devem ser considerados no desenvolvimento do aplicativo? Quais características devem constituir o aplicativo?**

No intuito de buscar resposta para essas perguntas, baseada em Bogdan e Biklen (1994), ressaltamos que uma pesquisa de caráter qualitativo apresenta cinco características básicas, sendo: 1) a fonte direta de dados é o ambiente natural; 2) é descritiva; 3) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos; 4) tendem a analisar os seus dados de forma indutiva e, 5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Já no cunho exploratório, a finalidade é desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, com formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. Além de proporcionar uma visão global, chamada de “aproximativo, em um determinado fato, é realizado quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis” (GIL, 2008, p. 27).

Na busca de uma NTIC que pudesse colaborar com esta pesquisa e, de alguma forma colaborar com um elo entre os conteúdos em CDI, em especial, derivadas, optamos por usar o *smartphone*¹⁵, especificamente, um aplicativo. A escolha justificase por ser considerado de fácil acesso, interativo e não precisar de Internet para o aplicativo ser usado, uma vez baixado.

Mas, o que colocar no aplicativo para propiciar um momento de estudo? Um quiz de perguntas e respostas, Derivada Quiz!

¹⁵ Torna mais prático o uso pedagógico dos celulares.

3.1 ELABORAÇÃO DAS QUESTÕES: FASE TESTE

Esse foi o momento de decidir como seriam as questões e o que se pretendia com elas. Optou-se por elaborar questões que fossem importantes para o tema derivadas, principalmente suas representações para cada subtópico abordado no Quadro 6.

A partir do levantamento bibliográfico realizado (vide capítulo 2), iniciou-se a elaboração das questões, baseada na TRRS. Focou-se nas dificuldades já apresentadas, relacionadas à interpretação gráfica de funções, suas derivadas primeira e segunda. A primeira elaboração, ainda no papel, continha 15 questões, algumas com mais de um item a ser respondido. Pensando na interface de um jogo e com o intuito de promover mais um espaço para a aprendizagem dentro do aplicativo, decidiu-se por colocar uma “dica” em cada questão, também chamada de “ajuda”. Essas dicas tiveram o objetivo de auxiliar, em caso de dúvidas, a responder as questões. Contava-se com questões de “sim” ou “não” e de múltipla escolha, que abrangiam desde a parte de técnicas de derivadas, representação geométrica até a parte de máximos e mínimos, as quais foram inicialmente testadas em uma turma de 30 alunos de CDI da qual era a professora regente no 2º semestre de 2017.

Como uma forma preliminar de validar as questões e suas “dicas”, elas foram aplicadas em papel, como forma de trabalho em duplas e como revisão para a avaliação regimental do 3º bimestre. Eram 15 questões, duas de “sim” ou “não”, doze de múltipla escolha (com 4 ou 5 alternativas) e uma sobre como os estudantes avaliavam as questões para um possível aplicativo. Cada dupla deveria escolher a alternativa (da questão 1 a 14) adequada e justificar sua escolha a partir da apresentação do resultado teórico usado na resolução: poderiam ser teoremas, definições, explicações, entre outras formas de justificar a escolha da alternativa. Para isso, foi permitido buscar auxílio no caderno, livros-textos de CDI-I e apostilas disponibilizadas na disciplina.

Como o objetivo dessa etapa era avaliar/validar as “dicas” escritas previamente pela autora, considerou-se que ocorreria a validação se os alunos escrevessem algo parecido, de mesmo sentido, com a prévia feita. Ressaltamos que, se a questão possuía mais de um item, era preciso justificar todos. A Figura 2 ilustra a resposta de uma dupla na primeira etapa da pesquisa.

<p>2. É possível calcular a derivada num ponto? Por exemplo, seja uma função $f(x)$, é possível calcular a $f(a)$ e $f'(a)$?</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não</p>
<p>Justificativa: se a função $y = f(x)$ admite derivada em um ponto, dizemos que a função f é derivável nesse ponto.</p>
<p>Transcrição: 2. É possível calcular a derivada num ponto? Por exemplo, seja uma função $f(x)$, é possível calcular a $f(a)$ e $f'(a)$?</p> <p><input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não</p>
<p>Justificativa da dupla para a “dica” dessa questão. a) Se a função $y = f(x)$ admite derivada em um ponto, dizemos que a função f é derivável nesse ponto.</p>

Figura 2 - Revisão do conteúdo derivadas para o 1º ano do curso de Engenharia de Produção Agroindustrial
Fonte: A autora

Outra dupla, a 2, justificou a questão da Figura 2 como: “Seja $y = f(x)$ e seja x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois valores de seu domínio. Denomina-se derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 o limite finito (se existir) da razão incremental da função, quando Δx tender a zero. Sabemos ainda que o valor de $f'(x)$ pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente”.

Diante das respostas dos estudantes, foram feitas adaptações tanto nas “dicas” quanto em alguns enunciados e alternativas das questões.

3.2 PROGRAMAÇÃO E APLICAÇÃO DO APLICATIVO

Com as questões elaboradas e testadas, foi solicitada uma aluna do Bacharelado em Ciências da Computação da UTFPR-CM, para programar o aplicativo¹⁶. A discente realizava um projeto de Iniciação Científica com a orientadora da dissertação.

¹⁶ O aplicativo funciona apenas para celulares Android, por ser uma opção gratuita ao baixá-lo.

As questões foram apresentadas à programadora e, a partir de então, decidiu-se que o aplicativo teria duas fases, a primeira denominada de **Questões de Aquecimento**, composta de 11 questões, com enunciados em língua natural e resposta de “SIM” OU “NÃO”. Essa fase não possuía dica, por se tratar de questões elementares, e tinha o objetivo de garantir um conhecimento mínimo do tema. Dessa forma, optamos por não seguir uma ordem na apresentação dessas questões, cada vez que o aplicativo fosse iniciado, a ordem se alterava. Essa fase apresenta um *feedback* rápido, pois, ao clicar na resposta correta, ela fica verde e pisca, enquanto a não correta fica apenas vermelha. Ao final da 11ª questão, são computados os acertos do aluno, se for maior ou igual a 7¹⁷, libera-se a segunda fase, caso contrário, as 11 questões são retomadas aleatoriamente.

A segunda fase, chamada de **Questões de Aprofundamento**, é composta por 32 questões objetivas e, de forma padronizada, com quatro alternativas, sendo apenas uma única correta. Na fase teste, citamos que algumas questões tinham mais de um item, porém, como na tela do celular isso é inviável, cada item passou a ser uma nova questão.

Nessa fase, utilizamos o GeoGebra para elaboração de gráficos, principalmente o recurso “controle deslizante” para possibilitar movimentos aos gráficos. Nesses casos, ainda foram gravados vídeos para enunciar e auxiliar na compreensão das questões. Ressaltamos que esses vídeos podem ser pausados e recomeçados quantas vezes for necessário, além da “dica”, que fica disponível nessa fase e que só é habilitada quando o aluno arrisca pela primeira vez a responder à questão, e não acerta.

Para o desenvolvimento da pesquisa, por facilidade de contato, escolheram-se alunos do curso de Licenciatura em Matemática (do 1º ao 4º ano), de Engenharia de Produção Agroindustrial (do 1º e 2º ano), para os quais a professora-pesquisadora lecionara no ano de 2016 e 2017 a disciplina de CDI-I, além de serem os únicos cursos da instituição que possuíam na grade curricular a disciplina de CDI-I completa¹⁸. O contato foi feito via *e-mail*, grupos e alguns contatos individuais pelo WhatsApp e um

¹⁷ A escolha de 7 acertos para avançar para a segunda fase foi decidida por se tratar de mais de 50% do total das questões.

¹⁸ Os demais cursos, como Administração, Ciências Econômicas e Ciências Contábeis, têm na grade a disciplina de matemática aplicada. Não apresentam o conteúdo de trigonometria na ementa. Esse fato que diferencia de CDI-I, mas não impediria de testar o aplicativo.

grupo de CDI-I no Facebook, disponibilizado pela professora regente de CDI-I do curso de Licenciatura em Matemática do ano de 2017/2018.

O *link* para baixar o aplicativo (Apêndice D) e um questionário para a avaliação do aplicativo (Apêndice B) foram enviados entre os meses de fevereiro e março de 2018 para 50 alunos dos cursos mencionados, que estavam matriculados a partir do 2º ano, devido à necessidade de conhecimento prévio do tema para a utilização do aplicativo. Esta pesquisa optou pela aplicação do aplicativo com alunos que já haviam cursado a disciplina, ou seja, todas as questões foram respondidas por alunos que já sabiam (ou deveriam saber) o tema derivadas. A utilização do aplicativo, porém, ou, até mesmo das questões que o compõem, pode acontecer como introdução ou intermediário ao tema, por exemplo, a análise gráfica das funções, análises de posições das retas tangentes à curva em ponto podem ser usadas para introduzir o tema.

Ressaltamos que dos 50 alunos que receberam o *e-mail* com o *link* do aplicativo e do questionário, apenas dez alunos enviaram respostas ao formulário; 15 alunos apenas responderam o *e-mail* avisando que os celulares eram da IOS e por isso não conseguiam baixar o aplicativo; 25 alunos não retornaram nenhum tipo de contato.

O *link* para receber as respostas ao questionário de avaliação da usabilidade do aplicativo ficou disponível por 40 dias, devido a uma greve dos docentes universitários. Nesse período, os alunos estavam terminando o ano letivo de 2017. O *e-mail* enviado para os alunos foi no momento de finalização de 2017 e recesso. O período encerrou-se na primeira quinzena de março (início do ano letivo de 2018).

O material utilizado na pesquisa, celulares (aplicativo e questionário) e computadores/*notebook* (questionário,) eram pessoais, de cada aluno.

Os dados foram analisados sob duas perspectivas:

1ª) Enquanto conhecimento matemático e possibilidades de tratamento e conversão.

2ª) A contribuição de um aplicativo que permite o estudo em diferentes tempos e lugares.

Ambas as perspectivas são discutidas no Capítulo 4.

O aplicativo testado, “*Derivadas Quiz*”, foi considerado o Produto Educacional I referente a esta dissertação e pode ser baixado na *Play Store*. O PEI encontra-se também no *site* do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) e no Apêndice D. As questões da 1ª fase usadas no aplicativo, serão

apresentadas, a seguir, no Quadro 15 (Capítulo 4, p.56) e as questões da 2ª fase, estão Apêndice C.

Apresentaremos também, o Produto Educacional II, Caderno de questões para o estudo de derivadas, apresentamos-o no Apêndice E.

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo tem por objetivo analisar duas perspectivas: conhecimento matemático do conteúdo derivadas à luz da TRRS e a contribuição de um aplicativo para o estudo autônomo. As análises da primeira perspectiva foram feitas tendo como foco a elaboração das questões e o que se pretendia que o aluno percebesse, entendesse, compreendesse. Na segunda perspectiva, as análises tiveram por base as respostas dos estudantes a um questionário (Apêndice B).

4.1 ANÁLISES DAS QUESTÕES

Como já citado, as questões foram elaborados para o estudo de derivadas à luz da TRRS. Relatamos que nossos sujeitos já cursaram a disciplina de CDI-I e que a retomada desse tema também pode contribuir para suas aprendizagens.

Retomando as dificuldades da disciplina, em especial quando os alunos trabalham com as conversões do registro algébrico para gráfico e vice-versa, os estudos de Gonçalves e Reis (2013) mostram que, nas situações que envolvem gráficos, foram percebidas dificuldades em identificar os dados contidos nos gráficos e estabelecer relações com o registro algébrico, além de deficiências conceituais relacionadas ao comportamento do gráfico de uma função e de suas derivadas. Os estudos de Ramos (2009) destacam também que, quando os alunos efetuam tratamentos, ou “não sabem identificar as relações deles com o comportamento gráfico de uma função, ou não conseguem aplicar o conceito de derivada para efetuar os tratamentos” (RAMOS, 2009, p. 81).

Assim, as análises foram divididas em 2 etapas: as questões do aplicativo e o aplicativo como ferramenta de estudo. Em relação às questões, apresentam-se as análises da 1ª fase, Questões de Aquecimento e, 2ª fase, Questões de Aprofundamento. Em relação ao aplicativo, ferramenta de estudo, apresenta-se uma reflexão das respostas ao questionário respondido pelos alunos.

4.1.1 Questões da 1ª fase

As 11 questões (Quadro 15) têm o intuito de situar o estudante em relação a conceitos básicos que envolvem derivadas, devendo, para cada uma delas, ser respondido simplesmente “Sim” ou “Não”.

Quadro 15 - Questões da 1ª fase do aplicativo Derivadas Quiz

- 1. A derivada pode ser considerada como uma função?**
- 2. Se f é uma função polinomial, é possível calcular a derivada de f num ponto $P(a, f(a))$?**
- 3. Considerando $P(a, f(a))$ pertencente ao domínio da f , a derivada de uma a função f num ponto $P(a, f(a))$ pode ser considerada a **TAXA DE VARIAÇÃO** da função em P ?**
- 4. Considere um ponto de máximo ou mínimo do gráfico f no qual exista reta tangente. Nesse caso, podemos dizer que a inclinação dessa reta tangente ao gráfico nesse ponto é sempre nula ?**
- 5. Um ponto de inflexão do gráfico de uma função $f(x)$ pode ser também ponto de *Máximo* ou *Mínimo* desse gráfico?**
- 6. A abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de uma função $f(x)$ pode ser abscissa de um ponto de *Máximo* ou *Mínimo* da função derivada $f'(x)$?**
- 7. Uma função crescente, num intervalo I , tem derivada primeira negativa nesse intervalo?**
- 8. Quando a derivada $f'(x)$ muda de sinal positivo (+) para negativo (-) ao passar por uma abscissa $x = a$, então o ponto $P(a, f(a))$ é um ponto de mínimo do gráfico da função $f(x)$?**
- 9. Para valores pequenos de Δx , tem-se que $dy \approx \Delta y$. Dessa forma, podemos dizer que, para calcular pequenas variações de y , pode-se utilizar *Diferencial* dessa função?**
- 10. Toda função $f(x)$ definida num domínio D sempre assumirá ao menos um valor *máximo (ou mínimo) em algum $x \in D$* ?**
- 11. Se o gráfico da $f(x)$ possui um ponto de inflexão $P(a, f(a))$, então a abscissa $x = a$ será raiz da função derivada $f'(x)$?**

Fonte: A autora

As quatro primeiras questões, da 1ª fase, referem-se a diferentes conceitos associados ao conceito de derivada (e foram apresentadas nos quadros 2, 3, 4 e 5), Admite-se que, para compreender a taxa de variação instantânea, ela pode ser “visualizada” pelo ponto de inclinação da reta tangente, que, por sua vez, é necessário para compreender e atribuir um sentido ao teste da derivada 1ª ($f'(x)$), por exemplo.

A questão 4 (Quadro 16), por exemplo, ilustra a primeira perspectiva: enunciada apenas no registro em língua natural, pode ser respondida em outros registros semióticos ou, ainda, por meio de tratamentos. Nesta questão, se optarmos por alguma conversão, dizemos que há uma conversão intermediária, pois a resposta final volta a ser em língua natural, a mesma do enunciado.

As questões 5 a 8, 10 e 11 retomam conceitos amplamente utilizados nas aulas de CDI, sobre os quais repousam inúmeras soluções de problemas reais.

Os problemas envolvendo taxas de variações são frequentes em vários estudos, como, por exemplo, na Biologia quando se estuda a taxa de crescimento de uma população de bactérias em relação ao tempo; na Economia ao estudar a evolução do custo marginal em relação ao tempo; em Medicina, quando se estuda a taxa de crescimento de um tumor em relação ao tempo; em Mecânica ao se estudar fluidos em movimento em relação ao tempo; em Eletricidade, ao se descrever a variação da carga elétrica e da corrente em um circuito elétrico em relação ao tempo. Na Física, a derivada do espaço está presente na própria definição de velocidade (Quadro 4) e aceleração, em que a velocidade é definida como a taxa instantânea da variação da posição no espaço em relação ao tempo. Em várias áreas, diversos problemas de máximos e mínimos são resolvidos utilizando-se a derivada (AGUIAR, SIPLE, MORO, 2012).

Caso o estudante não compreenda o significado de ponto de máximo, mínimo, ponto de inflexão, provavelmente não conseguirá utilizar conceitos para descrever um determinado comportamento, como, por exemplo, perceber que o valor de uma reação química se altera em um dado momento (ponto de inflexão), ou se pretende encontrar áreas máximas a serem cercadas com uma certa quantidade de tela.

Nessa perspectiva de resolver problemas, a questão 9 trata das diferenciais, o que causa uma confusão para os estudantes, pois tem-se a : $dy = f'(x)dx$, o que remete a semelhanças das definições de derivadas apresentadas anteriormente. A consequência direta desse fato é que a derivada não é o quociente entre duas diferenciais, mas comporta-se como se fosse esse quociente. Isto significa que a partir

da relação: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, é possível escrever: $dy = f'(x)dx$, que se denomina equação diferencial, outra interpretação para a resolução de problemas.

Quadro 16 - Questão do aplicativo e possibilidades de conversões e tratamentos

4. Considere um ponto de máximo ou mínimo do gráfico de f para o qual exista reta tangente. Nesse caso, podemos dizer que a inclinação dessa reta tangente ao gráfico nesse ponto é sempre nula?

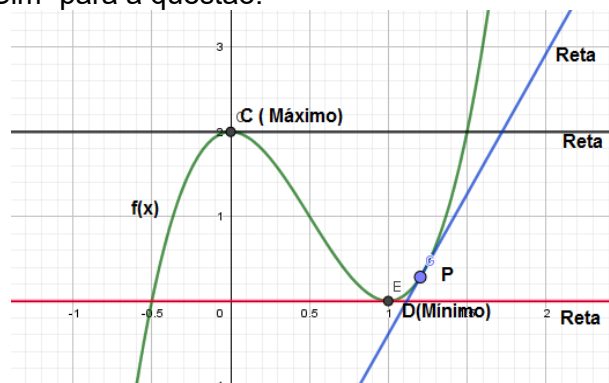
() Sim

() Não

Possíveis interpretações:

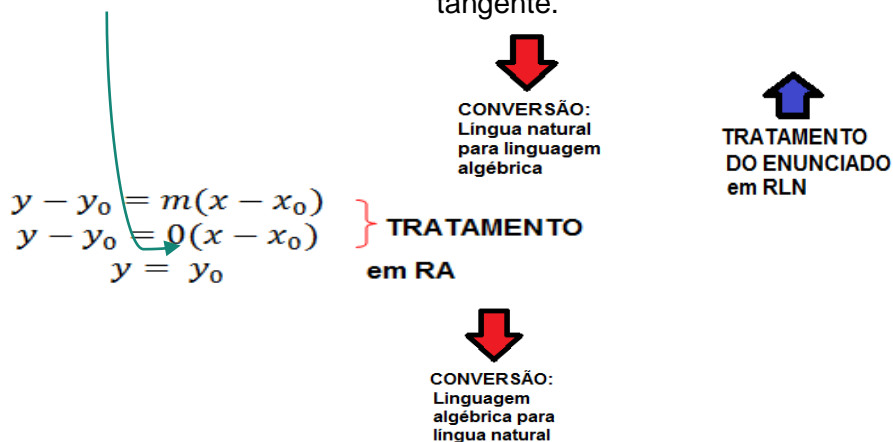
(I) **Conversão intermediária - Conversão entre a língua natural (enunciado) para a gráfica.**

Por meio dessa conversão, é possível perceber que tanto no ponto C quanto no D a inclinação da reta tangente, nesses pontos, é nula, ou seja, são paralelas ao eixo x em C e D. No ponto P, existe uma inclinação da reta tangente, diferente de zero, logo não é paralela ao eixo x . Dizemos que o registro gráfico contribui para a interpretação do enunciado, levando a resposta “Sim” para a questão.



(II) Tratamentos e conversões

Partindo da hipótese de que a reta tangente é nula em um ponto, então o coeficiente angular da reta será zero. Logo, tomando $P(x_0; y_0)$ e $m = 0$, podemos encontrar a reta tangente.



Sabendo que, $y = y_0$ representa um função constante e, seu gráfico é uma reta sem inclinação e paralela ao eixo x , logo em pontos de máximos e mínimos de uma função, a reta tangente nesses pontos terá características similares com as apresentadas acima.

Portanto, a resposta será sim.

Legenda: Registro Algébrico (RA) e Registro em Língua Natural (RLN)

Fonte: A autora

Nesta dissertação, essa fase foi importante. Segundo as respostas dos alunos para a questão 3, do questionário (Apêndice B), a separação em fases contribuiu para a construção de pensamento organizado. A questão foi enunciada da seguinte forma: “O fato do tema ser separado em duas fases (questões de aquecimento e questões de aprofundamento) contribuiu para o seu estudo? Comente a respeito” foi relatado que:

Aluno B – *“Contribui, pois primeiro deu uma recapitulada no assunto e depois já estava preparada pras questões de aprofundamento”.*

Aluno C – *“Sim, achei que ficou ótimo dessa maneira. Pude ter uma noção básica das perguntas na primeira fase e depois pude ter um desempenho melhor na segunda fase”.*

Aluno G – *“Sim, porque nas questões de aquecimento foi possível lembrar algumas definições relacionadas às derivadas o que contribuiu para responder as questões da segunda fase.”*

Aluno I – *“Sim, contribuiu porque no meu modo de pensar a primeira fase fez com que eu pudesse retomar em minha mente alguns conceitos esquecidos... e essa retomada foi de cunha importância para que eu obtivesse êxito na segunda fase”.*

É possível perceber, pelas respostas, que esse “aquecimento” de conteúdo foi importante para a segunda fase acontecer. É preciso salientar que essa fase situou os estudantes sobre o que poderiam encontrar na segunda fase: aconteceu uma retomada dos pré-requisitos para continuar os estudos.

Dessa forma, fica uma sugestão aos docentes de CDI: ao concluir o tema “derivadas”, use o aplicativo para ter uma ideia do aproveitamento dos alunos e retomar conteúdos, se necessário.

4.1.2 Questões da 2ª fase

As questões dessa fase tiveram por objetivo trabalhar conteúdos referentes ao tema derivadas, enfocando representação gráfica, tratamentos e conversões.

O Quadro 17, é uma análise de cada questão da segunda fase (também consta o número e a página que cada questão se encontra nessa dissertação no Apêndice C) segundo o Registro de Representação Inicial da questão (**RR_i**), o Registro de Representação Intermediária (**RI**), o Registro de Representação Final da questão (**RR_F**), o Registro de Representação da Dica (**RR_A**) fornecida para as questões dessa

fase, foi vislumbrado Tratamento ou Conversão de registros. Foram utilizados quatro registros de representação semiótica, os citados por Duval (2012), sendo eles: Registro Algébrico (**RA**), Registro em Língua Natural (**RLN**), Registro Numérico (**RN**) e Registro Gráfico (**RG**). E, ainda, a representação RLN/RG tem como leitura que o registro inicial, dica ou final é representado por dois tipos de registros.

Ressaltamos que, no aplicativo, algumas questões referem-se a um mesmo gráfico, no total são 43 questões, sendo 11 na primeira e 32 na segunda. Para a segunda fase, tanto as questões como as dicas estão disponíveis no Apêndice C.

Quadro 17¹⁹ - Análise das questões da 2ª fase quanto a tratamentos e conversões

Questão Página	RR _i	RR _F	RR _A	Trata- mento	Conversão
12 - p. 97	RA	RA	RA		
13 - p.97	RLN	RN	RLN/RA		RLN→RN RI: RG
14 - p.98	RLN	RN	RLN/RA		RLN→RN RI: RG
15 - p.99	RG/RLN	RA	RLN/RA		RI: RG
16 - p.99	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
17 - p.99	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
18 - p.99	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
19 - p.100	RG/RLN	RA	RLN/RA		RLN→RA RI: RG
20 - p.100	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
21 - p.100	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
22 - p.100	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
23 - p.101	RG/RLN	RA	RLN/RA		RLN→RA RI: RG
24 - p.101	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
25 - p.101	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
26 - p.101	RLN	RLN	RLN	RI: RG	
27 - p.102	RG/RLN	RLN	RLN	RI: RG	
28 - p.102	RG/RLN	RLN	RLN	RI: RG	
29 - p.103	RG/RLN	RLN	RLN	RI: RG	
30 - p.103	RG/RLN	RLN	RLN	RI: RG	
31 - p.104	RLN	RLN	RLN	X	

32 - p.104	RLN	RLN	RLN	X	
33 - p.104	RLN/RG	RN/RLN	RLN		RG→RN/RLN
Questão Página	RR _i	RR _F	RR _A	Trata- mento	Conversão
34 - p.105	RLN/RG	RN/ RLN	RLN		RG→RN/RLN
35 - p.106	LN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
36 - p.106	LN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
37 - p.107	LN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
38 - p.107	RLN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
39 - p.108	RLN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
40 - p.109	RLN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
41 - p.110	RLN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
42 - p.110	RLN/RG	RN	RLN		RLN/RG→RN
43 - p.111	RLN/RG	RLN	RLN	RI: RG	

Fonte: A autora

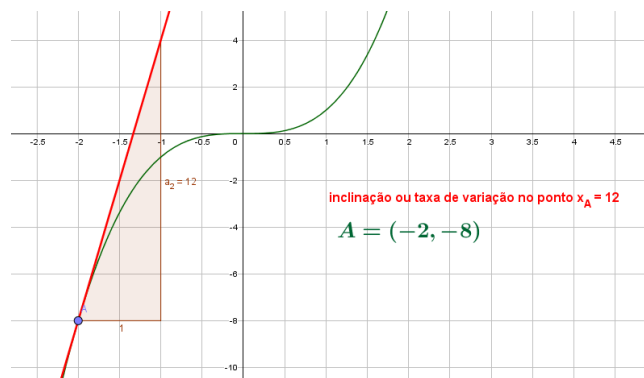
¹⁹ Dica: Ao imprimir essa página a opção “paisagem”

Ressaltamos que, ao realizar o tratamento em uma representação, o estudante precisa “dominar” as regras de funcionamento daquele Registro de Representação Semiótico. Por exemplo, a questão 12 (item b do Quadro 11) tem enunciado e solução, por meio de tratamento, no registro algébrico. A questão 27 (Quadro 18) tem enunciado e solução, por meio de tratamento, no registro de língua natural, porém, para resolução da questão, é apresentado um registro gráfico.

Quadro 18 - Questão 27 do aplicativo que mobiliza tratamento para sua resolução, por meio de uma conversão intermediária no registro gráfico

27. Observe a reta tangente sobre a curva.

(clique no botão para visualizar o gráfico)



No ponto $(-2, -8)$ a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

Em relação à posição da reta tangente ao gráfico no ponto $(-2, f(-2))$ podemos afirmar que é:

a()Crescente b ()horizontal c () Decrescente d()Vertical

Fonte: A autora.

Por outro lado, as conversões de uma representação são a transformação desta em uma representação de outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. Não são simples, pois diferem de um registro para outro. Nas conversões, o estudante precisa “dominar” mais de um registro.

Na Figura 3, ainda na versão teste, embasada pela TRRS, é apresentada uma conversão do registro gráfico para o registro numérico, além de a explicação dada pelas duplas, representada pelos teoremas, ser por meio do registro da língua natural. Essa questão, aplicada como trabalho em sala de aula, foi utilizada como revisão de conteúdo para avaliação regimental, a fim de elencar as dúvidas e expor, novamente, algumas definições, teoremas e representações do referido conteúdo. Ressalva-se

que essa questão foi reformulada depois da qualificação desta pesquisa e passou a ser assim enunciada no aplicativo: “No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais. Quais são as coordenadas do ponto de máximo local?”

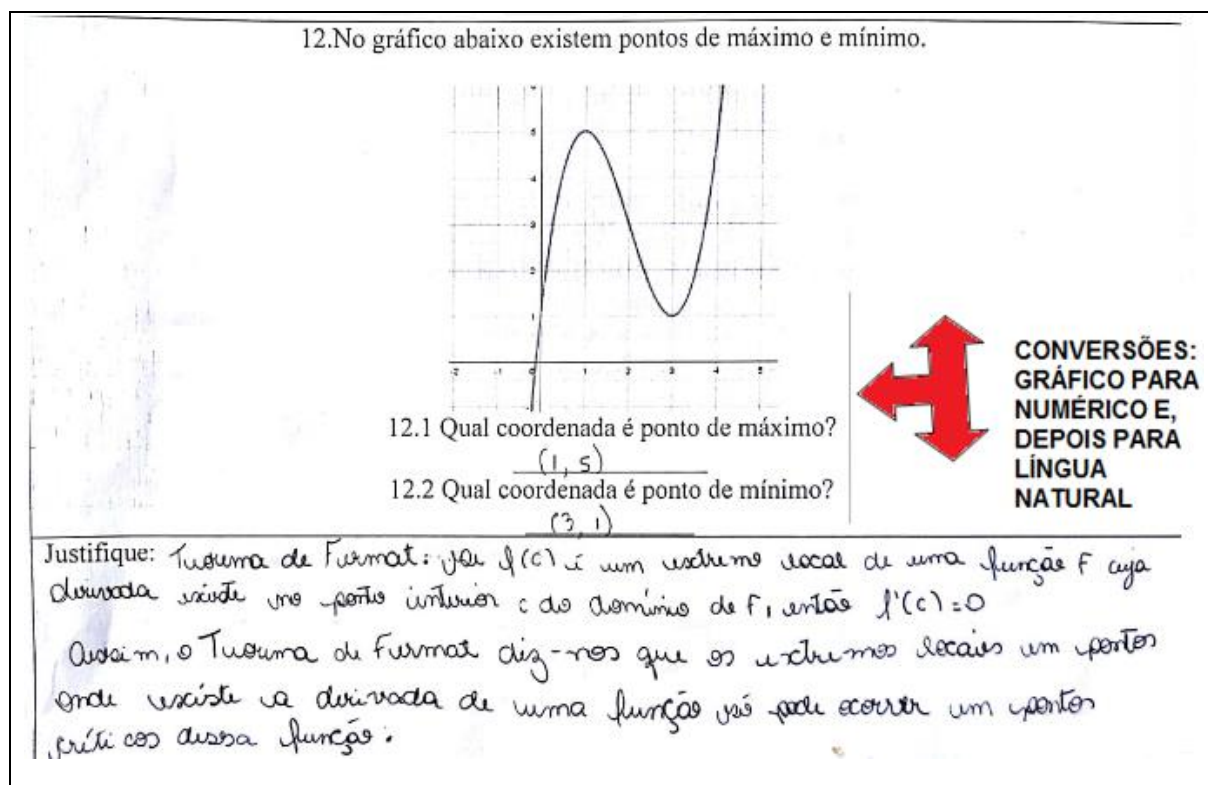
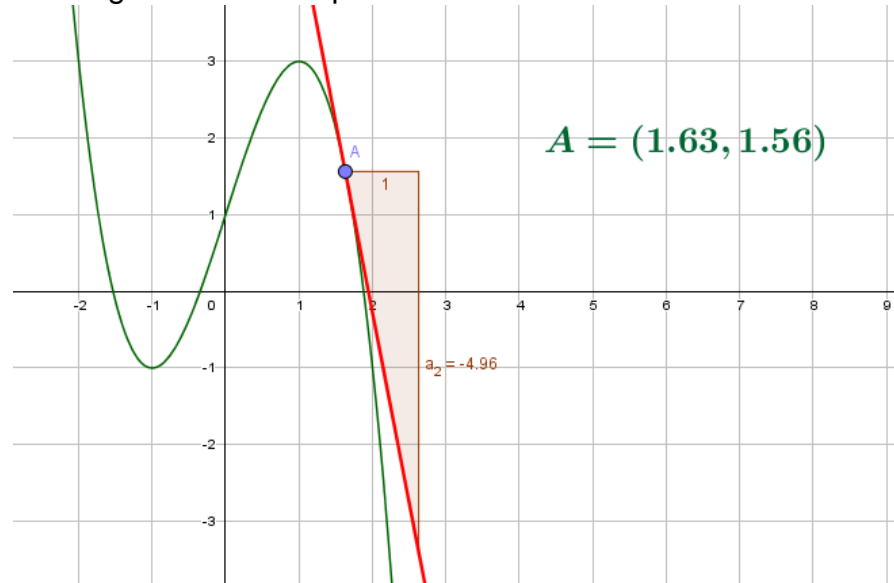


Figura 3 - Revisão do conteúdo derivadas para o 1º ano do curso de Engenharia de Produção Agroindustrial
Fonte: A autora

Por exemplo, a questão 37 (Figura 4) da 2ª fase possui um curto vídeo do ponto A movimentando-se lentamente pela curva. A análise do vídeo e a ação de poder pausar, retomar, assistir novamente são mais um recurso para a interpretação da questão. Ressaltamos, ainda, a disponibilidade da “dica” presente em cada questão da segunda fase. O(s) ponto(s) de máximo(s) e/ou mínimo(s) e a observação da posição da reta tangente em cada ponto ou em algum intervalo da curva também puderam ser observados nessa questão, como o “Teste Crescente e Decrescente de uma função”. Alguns pontos citados não são cobrados na questão, porém, podem despertar no aluno a ligação de vários conceitos envolvidos. Essa ligação foi citada como dificuldades (de associar os dados presentes no gráfico com as suas respectivas funções e derivadas) dos alunos em conteúdos que envolvem gráficos.

Dica²⁰

37. No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.



Quais as coordenadas do ponto de máximo local?

- a () $(-2; 3)$
 b () $(0; 1)$
 c () $(1; 3)$
 d () $(2; 0)$



Resposta: C

Dica

1) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos (a, b) , exceto possivelmente em c .

- I) Se o sinal de f' mudar de POSITIVO para NEGATIVO em c , então f tem um **MÁXIMO LOCAL** em c .
- II) Se o sinal de f' mudar de NEGATIVO para POSITIVO em c , então f tem um **MÍNIMO LOCAL** em c .

2) Se a reta tangente em alguma $f(c)$ tiver inclinação zero, esse c é um candidato a ser **MÁXIMO LOCAL OU MÍNIMO LOCAL**.

Figura 4 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada

Fonte: A autora

Ainda em relação à Figura 4, podemos observar o registro gráfico que faz parte do enunciado, que precisa de uma resposta em registro numérico e que ainda possui

²⁰ Essa “dica” é um botão que aparece no aplicativo, apenas na segunda fase, quando o estudante erra a primeira tentativa de resposta. Abaixo de cada questão está a “dica” indicada para a mesma.

uma dica em língua natural, ou seja, para que essa dica funcione, é preciso que o estudante coordene esses registros de representações.

As questões 41 e 42 apresentadas na Figura 5 não são comuns nos livros-textos usados como referência na disciplina de CDI. Como já citado, os alunos apresentam (NASSER, 2007; ALORY *et al.*, 2015; VASQUES, 2015) dificuldades em questões em que precisam traçar e analisar gráficos, dada uma função no registro semiótico algébrico. No caso dessa questão, há uma inversão do que é comum na disciplina.

Em especial no conteúdo de derivadas, para encontrar o intervalo de concavidade de uma função, calcula-se a derivada segunda, encontra-se o ponto de inflexão e, só em seguida, estuda-se para encontrar o intervalo de concavidade, tudo no registro algébrico. Nessa questão, é apresentado apenas o gráfico da segunda derivada, sem qualquer registro algébrico. Duval (2012) ressaltou a importância de apresentar um objeto matemático em mais de um registro e, nesse caso, ressaltamos a importância de apresentarmos enunciados diferentes do que os alunos estão acostumados. Para Duval (2009), existe um alerta para o sentido da conversão, fazer uma conversão, por exemplo, do registro algébrico para o registro gráfico não significa que a conversão no sentido contrário se dará de forma natural, ou seja, fazer uma conversão do registro gráfico para o algébrico do mesmo objeto matemático.

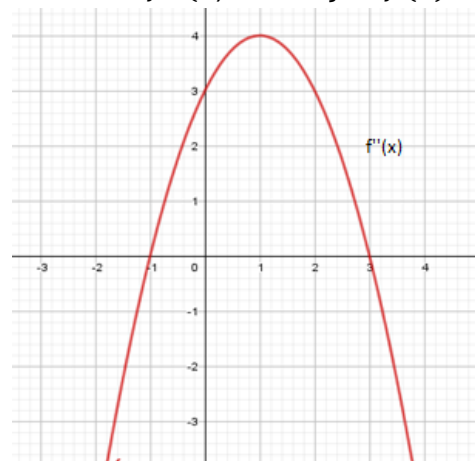
Olhar para o gráfico da Figura 5 não traz apenas o conteúdo concavidade. Permite retomar a diferença entre uma função ser positiva e crescente, negativa e decrescente e, ainda, algo que chamou a atenção dos alunos na fase-teste, a possibilidade de ter uma função positiva e decrescente ou negativa e crescente. Traz também a informação de que o ponto de inflexão ($f''(x) = 0$) é um ponto de máximo ou mínimo da função derivada primeira.

Questões como as apresentadas na Figura 5 podem contribuir para minimizar as dificuldades mencionadas anteriormente, além de ir ao encontro dos aspectos da TRRS. Ao analisar essas questões, é preciso ter como conhecimento qual é o fator que leva à determinação da concavidade de uma função. Uma das técnicas utilizadas é a derivada de 2ª ordem da função, sendo ela a responsável por determinar os intervalos, no eixo das abscissas, onde a concavidade da função, no seu gráfico, é para cima (ou para baixo). Ou seja, quando a derivada de 2ª ordem de uma função, dentro de um intervalo, for positiva, então a concavidade do gráfico dessa função será para cima, ou quando a derivada de 2ª ordem de uma função, dentro de um intervalo,

for negativa, logo a concavidade do gráfico dessa função será para baixo. O limitador entre as mudanças de concavidade é chamado de “ponto de inflexão”. O mesmo é determinado pela resolução da equação $f''(x) = 0$. Quando essa equação não tiver solução real, temos que não existem mudanças de concavidade no gráfico de uma função. Ao passo que, se ela tiver soluções reais, ou seja, n números reais como solução da equação $f''(x) = 0$, temos n mudanças de concavidades no gráfico da f . Portanto, no gráfico das questões 41 e 42, temos dois pontos de inflexão, ou seja, a função possui duas mudanças de concavidades, nos pontos $(-1,0)$ e $(3,0)$.

Dica

O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



41. O gráfico informa que o intervalo sobre o qual o gráfico de $f(x)$ possui concavidade voltada para cima é
 a () $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b () $(-\infty, 1)$ c () $(1, 4)$ d () $(-1, 3)$

42. O gráfico informa que o intervalo sobre o qual o gráfico de $f(x)$ possui concavidade voltada para baixo é
 a () $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b () $(-\infty, 1)$ c () $(1, 4)$ d () $(-1, 3)$

Dica

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c :

- i) Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;
- ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$;

Figura 5 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada

Fonte: A autora

Ainda nessas questões, temos que, no intervalo de $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ a concavidade da $f(x)$ é para baixo e, no intervalo de $(-1, 3)$, a concavidade é para

cima. Ou seja, $f''(x)$ negativa, concavidade para baixo; $f''(x)$ positiva, concavidade para cima, conforme mostra a Figura 6.

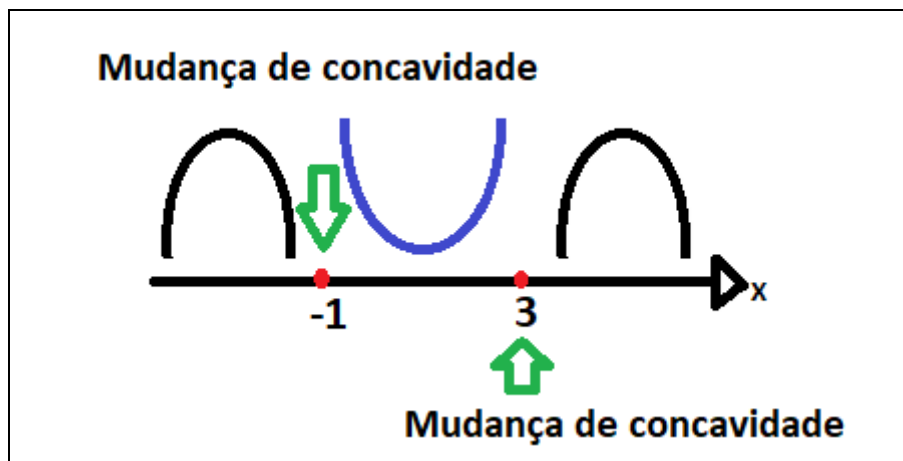


Figura 6 – Representação Figural da análise das questões 41 e 42

O Quadro 19 mostra um exercício do livro-texto Cálculo I Stewart (2010, p.149). O autor se preocupa com a representação gráfica, porém conversões aparecem somente da linguagem algébrica para a gráfica, o inverso não é explorado na seção, como nas questões do Quadro 5. Outros registros gráficos são abordados, como a questão apresentada no Quadro 19, mas trazem respostas em gráficos também, ou seja, um tratamento. A maioria dos exercícios continua em registro algébrico e, para resolver, usam o tratamento nesse registro ou, raramente uma conversão gráfica para a numérica ou a algébrica. A mais comum, quando aparece, é da gráfica para língua natural ou algébrica para gráfica.

Quadro 19 - Questão do Livro do Stewart Cálculo I

31. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
 (b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f' .

Fonte: Stewart (2010, p.149)

O objetivo de analisar algumas questões é mostrar que é possível “passear” pelos registros semióticos e, assim, poder construir conceitos sobre qualquer tema. Analisar várias facetas de um objeto matemático é fundamental, tanto para o ensino

como para a aprendizagem. Na língua natural, mais utilizada em exercícios, devemos nos atentar para a clareza, objetividade e coerência nos enunciados.

Por meio de um questionário, via recursos tecnológicos digitais, o Google Forms, analisamos as questões respondidas pelos alunos. Dentre os 10 alunos que responderam, chamamos atenção para a questão 3.2, “Caso tenha tido dificuldade com o aplicativo: Com o quê, especificamente, foi essa dificuldade?”. Quatro alunos relataram que a dificuldade em responder as questões foi com relação ao seu enunciado, dois responderam que não tinham domínio do conteúdo. As questões foram revisadas e adaptadas, ficando mais claras e objetivas.

Dessa forma, inferimos, baseados nos estudo de Kalloo e Mohan (2012) e na análise desta pesquisa, algumas diretrizes sugeridas para usar o aplicativo Derivadas Quiz:

1. Ele deve ser usado após os alunos aprenderem os principais conceitos na sala de aula;
2. Deve ser usada para complementar o professor, se usado em sala de aula, e como uma ferramenta de estudo independente, fora da sala de aula;
3. As questões, principalmente da 2ª fase, apresentadas posteriormente, oferecem várias estratégias, permitindo ao aluno opções para chegar à resposta considerada correta;
4. O Derivada Quiz permanece independente do professor, para que os alunos possam optar por usá-lo no seu próprio ritmo em qualquer lugar ou tempo;
5. O apoio do professor deve ser oferecido para encorajar o aluno a usar o aplicativo (aliás, o aplicativo deve ser incluído em sala de aula sempre que possível, desde que seja um modo de aprender considerado adequado para o (e pelo) grupo de estudantes).
6. O modo *off line* pode proporcionar mais oportunidades para atividades colaborativas, ou até mesmo estudo em grupos, com apenas um celular disponível.
8. O rigor matemático faz parte das questões propostas no aplicativo. Porém, como já citado no Capítulo 2, o rigor matemático se apresenta como um dos problemas de notas baixas, reprovação e evasão disciplina de CDI. Esse problema pode ser amenizado, ou diminuído com o dinamismo e facilidade usando o aplicativo, tendo um contato maior com o rigor, mas, de forma diferente.

Na próxima seção, abordaremos o uso do aplicativo pelos estudantes, por meio de respostas a um questionário *on line*.

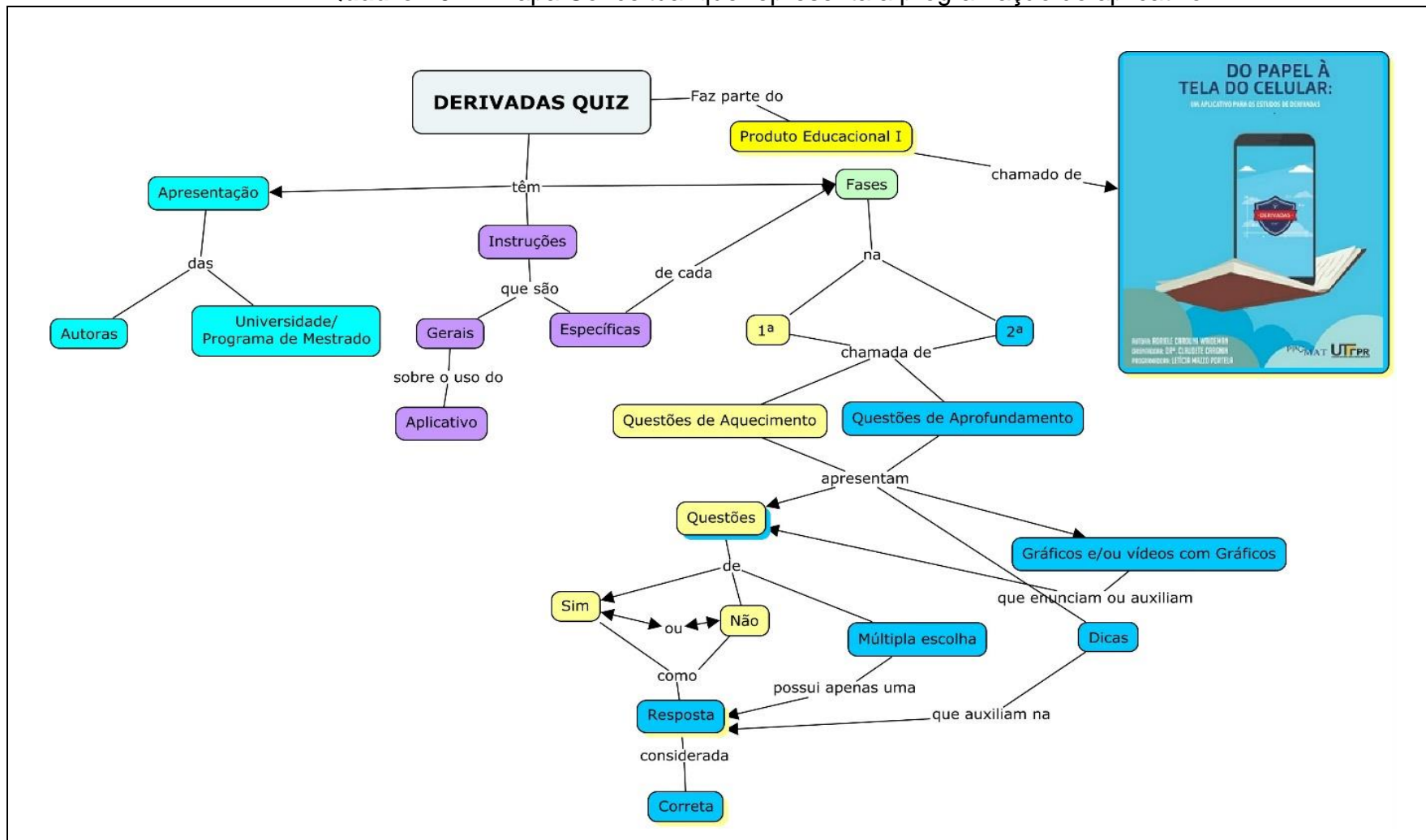
4.2 UTILIZAÇÃO DO APLICATIVO

Acreditamos que “aulas modernizadas pelo uso de recursos tecnológicos têm vida longa e podem ser adaptadas para vários tipos de alunos, para diferentes faixas etárias e diversos níveis de aprendizado” (ACKER, 2016, s/p.). Assim, de maneira formal ou informal, o aplicativo tornou-se viável, no sentido de ser mais um espaço para a aprendizagem, educação ou simplesmente, treinamento de conteúdos (UNESCO, 2017). Partilhamos da mesma ideia apresentada pela a UNESCO (2017), por meio dessa experiência que:

A aprendizagem móvel [mídias portáteis] apresenta atributos exclusivos, se comparada à aprendizagem tecnológica convencional: ela é pessoal, portátil, colaborativa, interativa, contextual e situada; ela enfatiza a "aprendizagem instantânea", já que a instrução pode ocorrer em qualquer lugar e a qualquer momento (UNESCO, 2017, s/p.).

Como mencionado, o objetivo dessa pesquisa era analisar a avaliação de alunos que já cursaram CDI fizeram sobre um aplicativo desenvolvido para o estudo de derivadas, por meio da pesquisa exploratória, de contribuição do uso de NTIMS, nesse caso, um aplicativo para celulares, para o ensino e para a aprendizagem do conteúdo de derivadas. O Quadro 20 é um esquema das interfaces apresentadas pelo aplicativo.

Quadro 20²¹ - Mapa Conceitual que representa a programação do aplicativo



Fonte: A Autora

²¹ Dica: Ao imprimir essa página a opção "paisagem"

4.2.1 Análise do questionário

O questionário do Google Forms 22 teve por objetivo validar o uso do aplicativo. Dez alunos, sendo 9 de matemática e 1 de EPA, responderam dez questões, como mostra o Quadro 21.

Quadro 21 - Respondentes ao questionário

Curso		Total de respondentes em cada ano
Licenciatura em matemática	1º ANO	1
	2º ANO	3
	3º ANO	4
	NÃO IDENTIFICADO	1
Engenharia De Produção Agroindustrial	3º ANO	1
TOTAL		10

Fonte: A autora.

A segunda questão indagava sobre as possíveis dificuldades em usar o aplicativo e, em caso positivo, se usou a “dica” fornecida na segunda fase. A metade disse ter tido dificuldades, e 4 deles usou a dica. Destes, dois alunos julgaram com nota 5, numa escala de 0 a 5, (sendo 0=muito ruim e 5 = excelente) a dica fornecida. Um aluno classificou com nota 3 e outro com nota 4.

Na questão 3, indagamos se a divisão das questões em duas fases, Questões de Aquecimento e Questões de Aprofundamento, contribuiu para os estudos. Optamos por criar categorias para as respostas. O Quadro 22 ilustra as categorias e alguns depoimentos que permitem avaliar como positivamente a divisão.

²² O Google Forms é um serviço gratuito para criar formulários on line. Nele, o usuário pode produzir pesquisas de múltipla escolha, fazer questões discursivas, solicitar avaliações em escala numérica, entre outras opções. A ferramenta é ideal para quem precisa solicitar feedback sobre algo, organizar inscrições para eventos, convites ou pedir avaliações. Disponível em: <https://www.google.com/intl/pt-BR/forms/about/>

As Questões de Aquecimento tinham por objetivo retomar conceitos, nomes, definições, enfim, buscar novamente o tema derivadas de forma global. Chamamos a atenção para duas palavras utilizadas nas respostas “desempenho melhor” e “êxito”. Os alunos usaram essas palavras com o intuito de atingirem a melhor pontuação na segunda fase do aplicativo, e algo nos intrigou: será que durante as aulas, eles também pensam em retomar os nomes dos conteúdos, entender o que diz algumas definições de forma geral, antes de estudar minuciosamente cada conteúdo? Ou esse fato só aconteceu porque era um aplicativo, por sentirem-se desafiados?

Quadro 22 - Avaliação dos alunos em relação a divisão das questões em fases

Categorias	Nº de Respostas	Depoimentos
Sim	2	-----
Não	1	“Para mim não, mas penso que para um aluno que esteja começando a aprender sobre derivadas seria fundamental”.
Permitiu revisão de conteúdos	5	“Sim, pois é uma prévia do que vai ser as questões principais ajudando a lembrar de algumas coisas que já foi Esquecido”.
Favoreceu êxito na 2ª fase	2	“Sim, contribuiu porque no meu modo de pensar a primeira fase fez com que eu pudesse retomar em minha mente alguns conceitos esquecidos... e essa retomada foi de cunha importância para que eu obtivesse êxito na segunda fase”.

Fonte: A autora.

Ressaltamos aqui, uma função do recurso digital. Ele despertou uma maneira de estudar. O primeiro foi um apanhado de tudo que é preciso estudar, retomando nomenclaturas e funções, depois vem os estudos de cada conteúdo explicado. Inferimos que, se o aluno, ao estudar, tem uma visão geral sobre o tema, isso pode contribuir para possíveis ligações entre os mais variados conteúdos dentro de um tema. Além disso, podemos destacar que o rigor no uso da linguagem e a necessidade imposta pelo aplicativo de entender essa linguagem para pensar sobre as questões, aliado à motivação de estudar pelo aplicativo, é uma contribuição do *software*. Nas dicas apresentavam-se as definições formais relativas aos temas em estudo, o que pode ter proporcionado maior reflexão dos alunos acerca dos termos matemáticos utilizados.

A Figura 7 ilustra a dificuldade que os alunos apresentaram em alguma ou em ambas as fases. Na questão 3.1, deduz-se que os quatro alunos que tiveram dúvidas apenas na segunda fase podem ter tido essas dúvidas devido às dificuldades de congruências das questões. Além disso, três alunos tiveram dificuldades em ambas as fases, alegando, por vezes, falta de conteúdo.

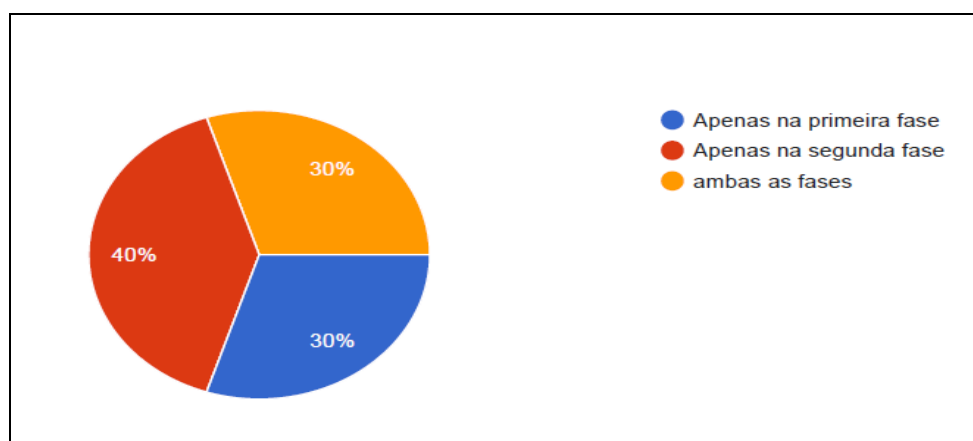
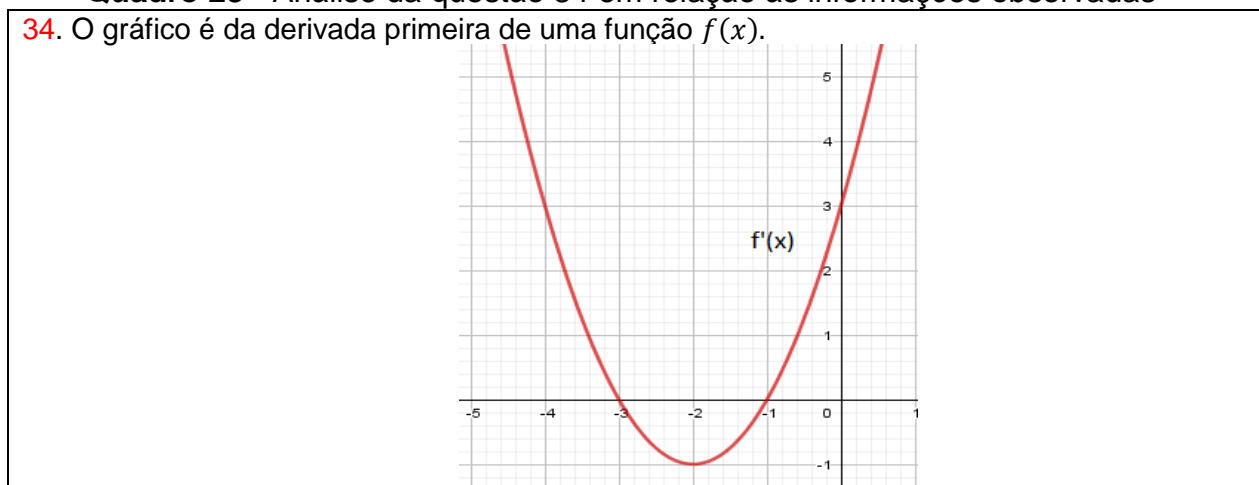


Figura 7 – Dificuldades dos alunos em alguma ou ambas as fases

Ao analisar a questão 34 do aplicativo, é possível pensar além do que se pede na própria questão. O Quadro 23 ilustra algumas informações que devem ser percebidas e podem ser exploradas pelo professor para trabalhar com essa possível falta de congruência. A questão em si pede apenas o intervalo de crescimento e decrescimento da função por meio da derivada primeira.

Quadro 23 - Análise da questão 34 em relação às informações observadas



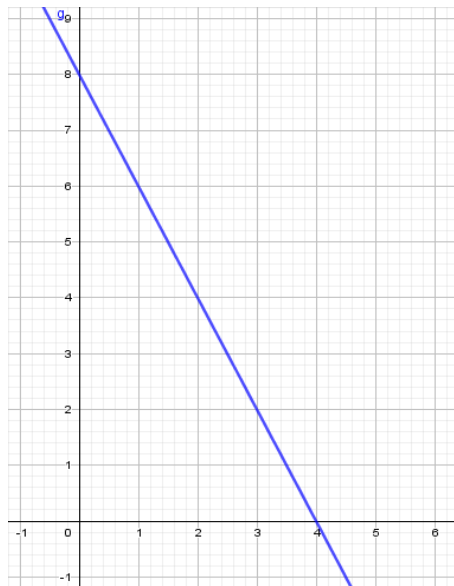
Com base nele, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$?	
Análises de características que devem ser observadas pelos estudantes	Implicação
$f'(x) > 0$, intervalos $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$	$f(x)$ crescente nesses intervalos.
$f'(x) < 0$, intervalo $(-3, -1)$	$f(x)$ decrescente nesse intervalo.
zeros da $f'(x)$ -3 e -1	Pontos de Máximos ou Mínimos Locais da $f(x)$
Mudança de sinal da $f'(x)$ de positivo para negativo em $(-3,0)$	Ponto de Máximo Local
Mudança de sinal da $f'(x)$ de negativo para positivo em $(-1,0)$	Ponto de Mínimo Local

Fonte: A autora

Uma análise do gráfico da derivada segunda de uma função $f(x)$ qualquer, torna-se um exercício de reflexão do conceito derivadas. No Quadro 24 abordaremos a questão 43 do aplicativo e indicaremos algumas informações que o professor pode explorar ao trabalhar com questões desse tipo.

Quadro 24 - Análise da questão 43 em relação às informações observadas

43. O gráfico refere-se à derivada segunda $f''(x)$ da $f(x)$.
(clique no botão para visualizar o gráfico)



Observando esse gráfico podemos dizer que o ponto $(4,0)$ representa:
a () um ponto crítico na $f(x)$
b () um ponto Máximo ou Mínimo na $f(x)$

c () um ponto de inflexão na $f(x)$ d () Nenhuma das Alternativas	
Análises de características que devem ser observadas pelos estudantes	Implicação
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Ponto de máximo ou mínimo da $f'(x)$.
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Ponto de inflexão da $f(x)$.
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Determina o limite que $f'(x)$ é crescente e/ou decrescente.
$f''(x) > 0$ em $(-\infty, 4)$	Concavidade da $f(x)$ para cima, neste intervalo
$f''(x) < 0$ em $(4, +\infty)$	Concavidade da $f(x)$ para baixo, neste intervalo.

Fonte: A autora

Observamos, ainda, que as análises de características e o que elas implicariam são apresentadas em teoremas e definições durante as aulas em sala de aula. Voltando à análise da Figura 7, temos que 7 alunos podem ter apresentado esses problemas. Ainda dentro da questão 3, para entender com o que, especificamente, foi a dificuldade, faz-se a pergunta 3.2. A análise das repostas foi feita por meio de categorias e depoimentos (Quadro 25), e quatro alunos tiveram problemas com interpretação de enunciados. Dessa forma, revisamos todos os enunciados, corrigindo-os e preservamos o rigor matemático como teoremas e definições.

Quadro 25 - Dificuldades em responder as questões do aplicativo

Categoria	Total de alunos
Problemas técnicos	1
Problemas com enunciados	4
Conteúdo	1
Não tiveram dificuldades	2
Total	10

Fonte: A autora

Outra questão, a 4, questiona: “Durante o uso do aplicativo, você buscou dica fora dele? (como por exemplo: livros, apostilas, Internet, caderno)”. Apenas dois alunos responderam que sim, em algumas questões. Esperávamos que essas respostas

fossem SIM para todos, porém vemos como um fator a ser explorado ainda, o aprender a estudar, a procurar o que não se sabe e não permanecer com as dúvidas. Mas como incentivar esse hábito em sala de aula, para que se torne frequente fora dela?

Na questão 5, indagamos se os alunos usariam o aplicativo para testar ou analisar o seu próprio conhecimento, mesmo depois que já tivessem eliminado a disciplina de CDI. Metade dos alunos disse usar o aplicativo para estudar ou rever o conteúdo. O Quadro 26 ilustra essas informações, além de apresentar alguns depoimentos.

Quadro 26 - Usar o aplicativo para testar ou analisar o conhecimento sobre um conteúdo

Categorias	Nº de Respostas	Depoimentos
Sim	3	
Às vezes	1	
Não	1	“porém usaria para ensinar derivadas”
Categorias	Nº de Respostas	Depoimentos
Sim, para rever conteúdo	4	“pois utilizando o aplicativo é possível rever o conteúdo e percebi que fiquei com algumas dúvidas que foram esclarecidas com as dicas do aplicativo”.
Sim, para continuar estudando	1	“com toda certeza usaria, pois como eu disse anteriormente a divisão dele ficou bem boa uma parte faz você lembra do que já fez .. e depois a segunda parte concretiza tudo isso”.

Fonte: A autora

Sete alunos procurariam outros meios de estudar para solucionar as dúvidas existentes ao usar o aplicativo, conforme mostra o gráfico da questão 6 da Figura 8.

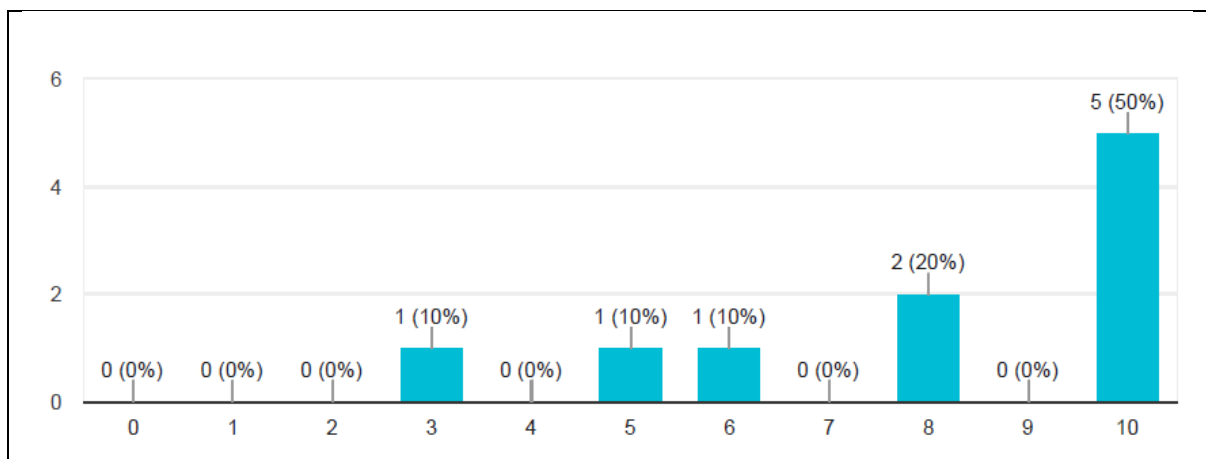


Figura 8 - Alunos que buscariam em outros meios ajuda para solucionar dúvidas ao usar o aplicativo

Fonte: A autora

A questão 8 perguntou se eles indicariam o jogo para um colega. Os dez alunos responderam que sim. No Quadro 27, temos as categorias a respeito dessa indicação e alguns depoimentos que mais uma vez permitem fazer uma avaliação positiva do uso dessa mídia portátil para o estudo.

Quadro 27 - Indicação do aplicativo para um amigo

Categorias	Nº de Respostas	Depoimentos
Sem justificativa	1	
Ajuda a estudar	2	<p>“Sim, é ótima auxílio para rever definições de derivadas, além de ser acessível para a maioria dos estudantes”.</p> <p>“Sim. Principalmente para os que têm dificuldades com o conteúdo”.</p>
Categorias	Nº de Respostas	Depoimentos
Dinamismo e acessibilidade na forma de estudar	3	<p>“Sim , por que é um jogo bom ... onde você pode aprimorar seus conhecimentos de uma forma interativa ... o que acaba sendo mais dinâmico, algo que nos futuros professores sempre teremos que buscar, esse dinamismo em sala de aula na hora de uma explanação de conteúdo. logo para meus amigos futuros professores também o uso desse aplicativo é muito válido”.</p>
Aprender brincando	1	

Otimização do tempo	1	“Sim, pois o aplicativo pode auxiliar algum aluno que esteja aprendendo os conceitos. Além disso, por ser um aplicativo de dispositivos móveis, há a facilidade em utilizar como forma de estudo para, por exemplo, alunos que têm um excedente de tempo no caminho para a faculdade”.
Rever o conteúdo	1	

Fonte: A autora

Além de indicar para os colegas, os alunos, na sua maioria, acharam interessante usar um aplicativo para estudar. Sugeriram também uma nova dinâmica para atividades com celulares na sala de aula, como podemos observar em um dos depoimentos do Quadro 28.

Quadro 28 - Opinião dos alunos ao usarem um aplicativo para estudar

Categorias	Nº de Respostas	Depoimentos
Ajuda muito	2	
Evolução no modo de aprendizagem	1	
Interessante / Excelente	4	“É algo muito interessante porque atualmente as pessoas, em grande maioria, tem acesso às diferentes tecnologias e poder estudar cálculo dessa maneira é diferente e até mesmo divertido”.
Fixação de aprendizagem	1	
Interação em sala de aula	1	“Minha opinião é que é um aplicativo é bom ... leve e totalmente acessível dentro de uma sala de aula... e o professor pode tirar <i>print</i> das telas do celular também e em cima disso ir interagindo com a turma... pois sabemos que talvez o celular embora estamos em um nível de tecnologia muito avançado, ainda não é desfrutado por todas as pessoas”.
Não soube	1	

Fonte: A autora

O segundo depoimento vai ao encontro de outros estudos que utilizaram as mídias portáteis como ferramenta de ensino ou estudo. Pacheco, Pinto e Petroski, (2017, p. 6375) relatam em seus estudos que “O aluno não tem mais interesse e/ou

vontade de estudar quando somente são utilizados métodos tradicionais diante de tanta tecnologia presente na vida deles”. Kallou e Mohan (2012) também relatam que o uso de jogos, por meio de celulares, motivaram os alunos a estudarem.

Quando abordamos as TICs, vimos que os estudos relacionados aos recursos digitais tecnológicos em sala de aula começaram por meio dos computadores, que, por sinal, é um recurso tecnológico de muita utilidade. Porém, o manuseio dele não é tão simples, devido ao seu peso e tamanho, avaliamos não ser tão viável um computador ou *notebook* em um ônibus, por exemplo. Dessa forma, perguntamos aos alunos qual a opinião deles em relação ao uso do aplicativo para celulares e não de *software* para computadores. Todos afirmaram preferir o celular e não o computador, pela praticidade e facilidade de uso. O Quadro 29 apresenta os depoimentos que reforçam a escolha dos celulares para o estudo.

Quadro 29 - Opinião dos alunos em relação ao uso de celulares e não de computadores para estudar

Depoimento
<p>“Foi bem melhor sendo para celular Porque eu particularmente não gosto de ficar muito no computador, faço tudo pelo celular, e quando fico em um lugar que não da pra fazer nada, gosto de passar o tempo "jogando" no celular”.</p>
<p>“Ótima ideia, poderiam ser desenvolvidos mais aplicativos como este, por exemplo, para estudo de trigonometria, álgebra e geometria. Pois podemos utilizar com facilidade em qualquer lugar”.</p>
<p>“Muito legal, porque o celular é a ferramenta mais utilizada entre todos e também utilizada a todo momento e mesmo para estudos”.</p>
<p>“Boa, pois o celular pra quem é possível está sempre a mão e disponível a toda hora, uma vez que o aplicativo nem precisa de sinal de internet para funcionar, então é muito mais acessível”.</p>

Fonte: A autora

E, por último, solicitamos que os alunos apontassem características positivas para melhorar o aplicativo “Derivadas Quiz”. Os depoimentos apresentados no Quadro 30 dão indícios de que os gráficos contribuíram para os estudos ou pelo menos chamaram a atenção por estarem disponíveis, caso precisassem. Mais uma vez, a divisão em fases, no caso das questões de aquecimento, apareceu nas respostas como

uma maneira interessante de abordar todo o conteúdo e também as dicas foram lembradas como questão positiva.

Quadro 30 - Características fortes do aplicativo

Pontos fortes	Nº de Respostas	Depoimentos
Dicas	1	
Gráficos	3	<p>“Gostei dos gráficos, da maneira que foi produzido, por mim não mudaria nada”.</p> <p>“O aplicativo é interessante, de fácil acesso, as instruções de uso são ótimas e as dicas e os gráficos enriquecem o Aprendizado”.</p>
Questões de aquecimento	1	
Não respondida	1	

Fonte: A autora

Quanto aos pontos a serem melhorados, a sugestão de três alunos foi de inserir mais fases. Um dos alunos justificou que: “O app poderia ter mais questões e mais níveis, além disso incluir derivadas trigonométricas e integrais”. Não julgamos essas respostas como ponto a melhorar e, sim, como uma continuação deste trabalho.

Depois da análise das questões das fases 1 e 2 e das respostas ao questionário, podemos dizer que o aplicativo para o estudo de derivadas teve uma boa aceitação entre os dez alunos que o avaliaram. Entre as contribuições apontadas pelos estudantes está a possibilidade de uso no modo off-line. Destacamos, ainda, que as dicas contempladas no aplicativo eram os principais teoremas e resultados sobre derivadas, ou seja, com o aplicativo o discente tinha acesso à teoria sem ter que carregar um livro.

No próximo capítulo faremos algumas considerações sobre esta pesquisa.

5. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES...

“Se você não consegue explicar algo de modo simples
é porque não entendeu bem a coisa”

(Albert Einstein)

Nossa angústia como docente do Ensino Superior provocou esta pesquisa e nos fez sair da zona de conforto e procurar, estudar, buscar alternativas. Acreditamos que as tendências da Educação matemática podem colaborar com o ensino, em especial o Ensino Superior, na disciplina de CDI. Inferimos que, mesmo a passos lentos, os recursos tecnológicos digitais têm perfil para diminuir as lacunas referentes aos pré-requisitos e os temas sequentes, diminuindo a “falta de elo” entre os níveis de ensino.

Defendemos, ainda, a importância da disciplina, seja como forma de desenvolvimento do pensamento organizado ou como formação nas diversas áreas de conhecimento. As dificuldades recorrentes em CDI são as maiores incentivadoras desta e de várias outras pesquisas, principalmente nos motivos que dizem respeito a notas baixas, reprovação e evasão, ou seja, conteúdos do Ensino Superior, ou alternativas de metodologias de ensino, ou propostas de tarefas, ou apenas relatos das dificuldades apresentadas por professores e alunos, os quais cresceram consideravelmente nas últimas duas décadas.

A literatura pesquisada indica que o rigor matemático, as aulas tradicionais, a desmotivação dos alunos, salas lotadas, imaturidade e falta de compromisso discente são causas das dificuldades de aprendizagem, além de apresentarem, em relação à parte cognitiva, a falta de matemática básica, de raciocínio lógico, problemas no traçado de gráficos e suas análises e o conflito pedagógico entre professor e aluno (o que se explica, pede-se e cobra-se). Assim, possíveis “soluções-normais” são apontadas de forma a minimizar esses problemas, já que na educação não é tão simples resolver de fato.

Ao entrarmos no tema proposto, derivadas, as dificuldades citadas continuam fazendo parte desse contexto de problemas. Fazer ligações entre seus conteúdos não

parece ser fácil, aliás, a forma como se aprende (a introdução do conteúdo ou explicação em tópicos) pode aliar-se a essas dificuldades, desfavorecendo a construção cognitiva esperada. Nesse caso, a dificuldade é atribuída ao conceito limite, pois a derivada é um limite. Além da dificuldade com os pré-requisitos da matemática, há também a dificuldade de associar conceitos, de calcular a derivada por técnicas, mas não de visualizar essa taxa de variação graficamente.

A confusão ou falta de compreensão dos conceitos enunciados pode ser um grande causador do fracasso. Além de o professor, muitas vezes, não saber onde se aplica ou para que serve tal conteúdo. Uma possível forma de abordagem é o resgate da taxa média de velocidade, da física, como localização viso-espacial.

Um grande aliado da educação são os recursos tecnológicos digitais, principalmente *on line* e remotos. Os *smartphones* podem potencializar essa aliança. E, assim, a pesquisa em torno dessa tendência vem aumentando a cada ano. Alertamos que o *smartphone*, usado de forma planejada e crítica, não descarta o uso dos computadores, apenas pode contribuir, de forma mais rápida, para um *feedback* imediato, principalmente em relação à parte gráfica.

Para essa aliança funcionar de fato, a capacitação constante dos professores é necessária, pois as tecnologias digitais surgem num ritmo muito veloz. Não há como proibir o uso delas em sala, então, que saibamos (nós professores) usar a nosso favor, principalmente na análise do registro gráfico. Tudo isso não descarta o uso das tecnologias comuns em sala de aula (lápiz, papel e régua). Apenas motiva o aluno, podendo reduzir sua falta de interesse e inatividade e despertar o interesse pelo estudo.

Nesta dissertação, consideramos que desenvolver uma sequência de atividades para uso em celulares era algo prático e diferente, e que nossos alunos, uma geração de nativos digitais, não teriam nos computadores a atenção para nossos objetivos, simplesmente pelo fato de a manipulação de um PC não ser tão prática dentro de um ônibus. O celular, no entanto, poderia chamar a atenção, por ser prático, por estar com o aluno, com o professor, a todo momento. Aliás, o celular faz parte do dia a dia de todos. Que tal começar, num ritmo mais acelerado, a fazer parte do processo de ensino e de aprendizagem?

Assim, consideramos o uso de celulares na disciplina de Cálculo I, ou fora dela, uma estratégia para ampliar as possibilidades de acesso a materiais e, também, para

permitir um suporte tecnológico mais prático, que colabore para as análises e reflexões, sempre com a devida importância, com um papel bem definido no contexto educacional. Não se pode esquecer que as tecnologias digitais, para apoio à aprendizagem, requerem um período de adaptação, tanto de alunos como de professores, mas não podem ser ignoradas por falta de tempo. Ressaltamos que é importante o uso desse instrumento, porém um uso inteligente para auxiliar e não para complicar a formação do aluno.

Acreditamos numa metodologia de ensino que construa o conhecimento e não apenas transmite ou replica os livros-textos. O estudo com o aplicativo pode contribuir, permitir esse processo, mesmo depois de o aluno já ter tido contato com o conteúdo, como uma forma de revisar e poder indagar o professor sobre possíveis dúvidas, na revisão para a avaliação regimental, por exemplo.

A praticidade do aplicativo é que funcionava *off line*, ficando à disposição na fila do banco, na ida ou volta para casa, no ônibus, estando em lugares que os livros e mesmo os computadores não estão, contribuindo para os estudos. Acreditamos na reflexão das questões por parte do aluno, ou seja, uma forma de retomada desse conteúdo importante em várias áreas do conhecimento já citadas. O aplicativo tem a função de auxiliar na compreensão daquele conteúdo que anteriormente parecia algo longe da sua capacidade, proporcionando a experimentação, para buscar novas descobertas, observar propriedades, investigar, transformar, modificar, testar aquilo que antes somente era repassado ao aluno de maneira automática (MARIN, 2010).

Agora, as questões não são mais apresentadas em papel e, sim, na tela do celular. Ressaltamos a interação permitida pelo celular, fato que o papel não permitia.

Em relação a nossa questão de pesquisa, observamos uma avaliação boa quanto à contribuição de um aplicativo para o estudo: 1) 8 alunos buscaram a dica para resolver uma questão – ou seja, a teoria esteve, a todo momento, à disposição do estudante, e ele usou! ; 2) usar o aplicativo *off line* possibilitou o estudo durante momentos não usuais, como, por exemplo, no ônibus de retorno para casa (muitos estudantes participantes da pesquisa moram em outra cidade e vêm de ônibus para a faculdade – alguns chegam a viajar 1h30 para retornar à sua cidade de origem); 3) a abordagem de gráficos de funções e suas derivadas ($f'(x)$, $f''(x)$) pode contribuir para interpretações e compreensões do conceito estudado; 4) o aplicativo *off line* tornou-se

um aliado dos estudos; 5) a utilização de vários registros de representação semiótica (especialmente a gráfica) favoreceu ao aluno conhecer mais sobre o que estuda e 6) o fato de o estudante da nossa pesquisa indicar o aplicativo a terceiros, faz-nos acreditar na possibilidade de eles utilizarem essa ferramenta de estudo no seu tempo “ocioso”, como aquele na fila de banco.

Para reforçar a avaliação sobre o uso de um aplicativo, relatamos um indício positivo que aconteceu fora da pesquisa. Durante o II Ágora Matemática, em 30 de agosto de 2018, durante um grupo de discussão, intitulado “TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA” do qual a professora-pesquisadora participou como coordenadora, ao final, um aluno, participante da pesquisa, pediu a palavra e relatou que, ao saber que a professora-pesquisadora falaria, achou que fosse sobre o aplicativo e imediatamente mostrou a um amigo do lado. Esse fato mostra que, mesmo depois de 5 meses, o aluno ainda tinha o aplicativo no seu celular e o recomendou para um terceiro.

Uma terceira fase, com questões de aplicações para derivadas, seria uma ideia para continuar este trabalho. Além de, como sugeriu um dos alunos em uma resposta ao questionário, *“e o professor pode tirar print das telas do celular também e em cima disso ir interagindo com a turma...”*, ou seja, um produto educacional secundário, um livreto com as questões em forma de texto.

REFERÊNCIAS

ACKER, F. **Professor deve permitir novas tecnologias para continuar processo de aprendizagem**. SETREM. 2016. Disponível em: <https://portal.setrem.com.br/noticia/4991/1/professor-deve-permitir-novas-tecnologias-para-continuar-processo-de-aprendizagem>. Acesso em: 10 de Julho de 2018.

AGUIAR, R. de; SIPLE, I. Z.; MORO, G. Conceito de derivada e diferencial: concepções e relações. III Simpósio Nacional de Ensino de Ciências e Tecnologia. **Anais...** Ponta Grossa-PR. 2012.

ALORY, S.; ET AL. Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique. **IREM**. Brochure. nº 97. Maio 2015. Paris. ISBN : 978-2-86612-362-8.

BARBOSA, G. O. **Raciocínio lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral**: o caso da Universidade Federal do Ceará. 1994. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 1994.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 195 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo. 1999.

BATISTA, S. C. F.; BEHAR, P. A.; PASSERINO, L. M. Celular como ferramenta de apoio pedagógico ao cálculo. **CINTED-UFRGS-Novas Tecnologias na Educação**. V. 9 Nº 1, 2011.

BENTO, M. C.M.; CAVALCANTE, R. dos S. em Educação: o uso do celular na sala de aula. **ECCOM**, v. 4, n. 7, jan./jun. 2013.

BOGDAN, R. C.;BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora. 1994.

BORBA, M. C. Educação Matemática a Distância Online: Balanço e Perspectivas. XIII CIAEM-I ACME. **Anais...** Recife. 2011.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5º ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

BORBA, M. de C; SCUCUGLIA, R. S.; GADANIDIS, G.. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: Sala de aula e internet em movimento. 1º edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

CARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real**: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a

teoria dos Registros de Representações Semióticas. 2013. 416 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

CONSCIÊNCIA, M.; OLIVEIRA, H. Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo. In **Actas do XXII SIEM** (pp.1-15) Lisboa: APM. 2011.

COSTA, P. O.; SOUZA JÚNIOR, A. J. Tecnologia de Informação e Comunicação no ensino de Cálculo. **FAMAT em Revista**, n. 9, p. 431-440, 2007. Disponível em: <http://www.famat.ufu.br>.

COUY, L. **Pensamento visual no estudo da variação de funções**. 2008. 160f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), Belo Horizonte, 2008.

CUNHA, L. G. A.; LAUDARES, J.B. o comportamento de funções com o estudo de derivadas por sequências didáticas em objeto de aprendizagem. **VIDYA**, v. 37, n. 2, p. 397-416, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. ISSN 2176-4603.

CURY, H. N. Aprendizagem em Cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. **Anais...** Santo Amaro, 2005.

CURY, H.N.; CASSOL, M. Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças. **Acta Scientiae**. Canoas-RS. V.6, n.1, p.27-36, jan/jun 2004.

D'AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto**: uma forma significativa de introduzir o conceito. 2002. 91f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

DRIGAS, A. S.; PAPPAS, M.A. A Review of Mobile Learning Applications for Mathematics. **International Journal: Interactive Mobile Technologies**. Athenas. V. 9, Issue 3, p.18-23. 2015 Disponível em: <<http://online-journals.org/index.php/i-jim/article/view/4420>>. Acessado em: 07.Ago.2018.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012. p. 266-297.

_____. **Sémiosis et pensée humaine**: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang, 1995.

_____. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (fascículo I). Tradução de Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012. p. 266-297.

FERREIRA, E. F. P.; CAMPONEZ, L. G. B.; SCORTEGAGNA, L. **Integração das tecnologias com o ensino da matemática: transformações e perspectivas no processo de ensino e aprendizagem**. Rio de Janeiro. 2015.

FROTA, M. C. R. Investigações na sala de aula de cálculo. In: **29ª Reunião Anual da ANPEd**, 2006, Caxambu. EDUCAÇÃO, CULTURA E CONHECIMENTO A CONTEMPORANEIDADE: Desafios e Compromissos. Caxambu: ANPEd, 2006. v. 1. p. 1-14.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 6. ed., 2008.

GIL, R. **A aprendizagem da noção de derivada no 11.º ano** (Relatório da Prática de ensino supervisionada). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa. 2014.

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S. da. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 417-432, ago. 2013.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. IV Congresso RIBIE. **Anais...** 1998.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino de Cálculo e um estudo sobre números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p.11-26

KALLOO, V.; MOHAN, P. MobileMath: an innovative solution to the problem of poor Mathematics performance in the Caribbean. **Caribbean Teaching Scholar**. v. 2, n. 1, p. 5-18, April 2012.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação**. 2ª edição. Campinas – SP: Papyrus, 2007.

LACHINI, J. **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo**. In: LACHINI, J; LAUDARES J. B. (Orgs.) Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 146-190, 2001.

LIMA, G. L. O ensino do cálculo no brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática-ENEM. Curitiba. Brasil. 2013. **Anais...** Curitiba-PR. SBEM. 2013.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. CÁLCULO E ANÁLISE: MAPEAMENTO DAS PESQUISAS DO GT04 - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR. **VIDYA**, v. 37, n. 2, p. 317-334, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. ISSN 2176-4603.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. **Sociedade Brasileira de Matemática**. Rio de Janeiro, n.26/27, p.123-146, jun./dez. 1999. (Matemática Universitária).

LOUREIRO, V. **Função Derivada**: uma abordagem didática no Ensino Secundário. (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro. 2012.

MACHADO, J.; ALMEIDA, L.; SILVA, B. Ensino-aprendizagem da matemática com recurso a software educativo: atitudes e rendimento académico dos alunos. **INNOVACIÓN EDUCATIVA**, nº 19, pp. 451-50. 2009.

MARTINS JUNIOR, J. C. **Ensino de derivadas em cálculo I**: aprendizagem a partir da visualização com o uso do geogebra. Ouro Preto. 2015. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto-MG, 2015.

MENDES NETO, A. O uso do celular como recurso pedagógico. **infogeekie**. Disponível em: <http://info.geekie.com.br/uso-celular/> . Acesso em 23 de agosto de 2018.

MOURA, Adelina. Geração Móvel: um ambiente de aprendizagem suportado por para a “Geração Polegar”. 2012. Disponível em: <<http://adelinamouravita.com.sapo.pt/gpolegar.pdf>>. Acessado em 20 de agosto de 2018.

NASSER, Lilian. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG : SBEM, 2007.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM. 2008.

Orhun, N. Graphical understanding in mathematics education: derivate functions and students' difficulties. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, nº55, 679-684. 2012.

PACHECO, M. A. T.; PINTO, L. R.; PETROSKI, F. R. O USO DO CELULAR COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA: UMA EXPERIÊNCIA VÁLIDA. In: XIII EDUCERE, IV SIRSSE, VI SIPD – Cátedra UNESCO- Educere. **Anais...** ISSN 2176-1396. 2017

PRENSKY, M. **Digital Game-Based Learning**. New York: McGraw-Hill, 2001.

RAMOS, V. V. **Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em Matemática sobre derivada e suas aplicações.** 2009. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

REZENDE, W.M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológicas. **Tese** (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade de São Paulo – Faculdade de Educação, 2003.

_____. O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de Matemática? **Anais...** Mesa Redonda, Pernambuco, 2004.

ROCHA, M. D. D. **Desenvolvendo Atividades Computacionais na Disciplina Cálculo Diferencial e Integral I:** Estudo de uma Proposta de Ensino Pautada na Articulação Entre a Visualização e a Experimentação. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, p. 172. 2010. Dissertação de Mestrado. Defesa em 20/08/2010.

SANGOI, E.; ISAIAS, S. M. A.; MARTINS, M. M. Aprendizagem significativa da derivada com o uso do software Maple através da metodologia da resolução de problemas. **VIDYA**, v. 31, n. 1, p. 12, 2011.

SANTOS, S. P.; MATOS, M. G. O. O ensino de Cálculo I no curso de Licenciatura em Matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos**, v.3, n.3, p. 458-473, ago./dez. 2012. SARUBBI, P. A.; SOARES, F.

SCREMIN, G.; BULEGON, A. M. Revisão de literatura sobre o uso de recursos tecnológicos no ensino de cálculo diferencial e integral. In: IV Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica. **Anais...** ISSN 2238-9237. Santo Ângelo-RS. 2017. Disponível em:

SILVA, M. R. C. **EH em Cursos Presenciais de Graduação das Universidades Federais: Uma Análise da Regulamentação.** Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: Universidade Federal De Mato Grosso, Cuiabá Biblioteca Depositária: Biblioteca Setorial do Instituto de Educação e Biblioteca Central / IE / UFMT, 2016.

SILVA, M.G. DA. **O uso do aparelho celular em sala de aula.** 2012. Monografia (Pós-Graduação) – Universidade do Amapá, Macapá, 2012. Disponível em: <<http://www2.unifap.br/midias/files/2016/04/O-USO-DO-APARELHO-CELULAR-EMSALA-DE-AULA-MARLEY-GUEDES-DA-SILVA.pdf>>. Acesso em: 15 nov. 2017.

SILVA, E. M.; SAVIOLI, A. M. P. das D. A indução finita sob a ótica do pensamento matemático avançado. 3º SIPEMAT. **Anais...** Universidade Federal do Ceará. 2012.

STEWART, J. **Cálculo.** V. 1. 6ª edição. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2010.

TALL, D.O. **Cognitive development in advanced mathematics using technology,** Mathematics Education Research Journal, 12, No.3 (2000), 210-230.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow : Kluwer Academic Publishers, 2002.

TOMAZI, B.S.K.; COSTA, L. F. DA; CAMARGO, S. **Ensino de física e o uso de smartphone: uma abordagem sobre o consumo de energia elétrica em uma perspectiva da sala de aula invertida e ctsa**. Congresso Internacional de Educação e Tecnologias/Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância. 2018.

UNESCO. **Aprendizagem Móvel**. Representação da UNESCO no Brasil. 2017. Disponível em <<http://www.unesco.org/new/pt/brasil/communication-and-information/access-to-knowledge/ict-in-education/mobile-learning/>> Acesso em: 07. Ago.2018.

VASQUES, I. S. R. **Função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações**. 2015. 240f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade de Lisboa. 2015.

VEEN, W.; VRAKING, B. **Homo Zappiens: Educando na era digital**. Tradução de Vinícius Figueira. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILLIBOR, F. F.; ET AL. A indisciplina e o docente no ensino superior. **Rev. Cereus**, v. 7, n. 3, p.70-84 , set-dez./2015, UnirG, Gurupi, TO, Brasil.

WAIDEMAN, A. C.; TREVISAN, A. L.; CARGNIN, C. Limite de funções reais de uma variável: uma análise do conceito e seu ensino em livros textos. In: XIV ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Cascavel-PR. 2017.

WAIDEMAN, A. C.; CARGNIN, C. **Reflexões sobre o uso de mapas conceituais no ensino de derivadas nas aulas de cálculo diferencial e integral**. 2018. No prelo.

ZARPILON. E.; RESENDE, L. M. M. de; PINHEIRO, N. A. M. Uso de mapas conceituais na disciplina de cálculo diferencial e integral 1: uma estratégia em busca da aprendizagem significativa. IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. **Anais...** Ponta Grossa. 2014.

APÊNDICE A

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE) PARA O QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

Título da pesquisa: Experiência com a utilização do aplicativo “Derivadas Quiz”

Pesquisador (es/as), com Endereços e Telefones:

Orientadora Responsável: Claudete Cargnin – Rua Sebastião Albino Ferreira, 572 – Campo Mourão – PR ; 44 99879 8084

Pesquisadora Responsável: Adriele Carolini Waideman – Rua Juvenal Portela, nº 318 – Peabiru – Paraná ; (44) 999214278

Local de realização da pesquisa: On Line

Endereço: -

Telefone do local: -

a) O que significa assentimento?

O assentimento significa que você concorda em fazer parte de um grupo de alunos para participar de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos e você receberá todas as informações por mais simples que possam parecer.

Pode ser que este documento, denominado TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO, contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

b) Informação ao participante da pesquisa:

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa que tem por objetivo avaliar um aplicativo para celular. Essa avaliação é para sabermos se um aplicativo pode ser utilizado como instrumento ou apoio aos estudos. Para isso escolhemos um tema: DERIVADAS. O mesmo faz parte da ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Assim, o questionário aqui apresentado tem por finalidade avaliar o aplicativo “Derivadas Quiz” com relação ao conteúdo matemático e à interface virtual.

Pesquisa é um conjunto de ações que visam à descoberta de novos conhecimentos em determinada área e que pode partir da busca para solucionar algum problema, de uma pergunta dada, de um mistério, ou ser motivada simplesmente pela curiosidade da pessoa e o prazer de aprender.

Na presente pesquisa, busca-se investigar a contribuição de um aplicativo para derivadas que possa ser utilizado em qualquer lugar, como em trânsito, num ônibus por exemplo.

Espera-se que o aplicativo seja um instrumento útil para estudos. Outro benefício almejado é o de proporcionar condições para que os alunos sejam agentes ativos na aquisição do seu conhecimento, participando ativa e autonomamente nas duas fases.

Os responsáveis por essa pesquisa garantem total sigilo sobre a identificação dos participantes. As avaliações realizadas serão utilizadas como base para a melhoria do produto apresentado, bem como em comunicação científica. Não serão pedidas informações pessoais, como nome e números de documentos. Embora as respostas ao questionário avaliativo sejam enviadas por *e-mail*, este será apenas uma forma de controle para identificação de quantos alunos receberam e quantos alunos responderam ao referido questionário.

A sua participação deve ocorrer voluntariamente, e se você optar por não participar não terá nenhuma represália, sem nenhuma justificativa e sem sofrer qualquer prejuízo. É assegurada a liberação de informações sobre o projeto, suas consequências e informações adicionais.

Caso você aceite participar, a pesquisa envolverá o uso do aplicativo e responder o questionário *on line*.

c) Direito a sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

Durante a realização da pesquisa, você terá o direito de deixar o estudo a qualquer momento (sem sofrer nenhuma penalização) e de receber esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa.

d) Desconfortos, Riscos e Benefícios.

Alguns fatores podem causar um desconforto no aluno, como, por exemplo, se seu aparelho celular não tiver capacidade para realizar a instalação do aplicativo ou, ainda, as questões que podem não ser de fácil compreensão e interpretação.

Porém, podem trazer benefícios como a possibilidade de estudar o conteúdo mesmo em trânsito, por exemplo, dentro de um ônibus. Esse fato é possível por se tratar de um instrumento acessível como o celular.

e) Critérios de inclusão e exclusão.

Como critério para participação foram feitas divulgações e você é livre para aceitar.

Como requisito para ser incluído na pesquisa, é necessário ter cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

f) Ressarcimento ou indenização.

Não haverá qualquer despesa decorrente da pesquisa. Caso você se sinta prejudicado, devido à participação da pesquisa, você será devidamente ressarcido, como determina a lei vigente.

g) Consentimento

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos e benefícios deste estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo. Estou consciente de que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Ainda assim, se você tiver dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou no caso de riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o(a) investigador (a) do estudo: Adriele Carolini Waideman com o telefone celular número (44) 999214278. Se você tiver dúvidas sobre direitos como um participante de pesquisa, você pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

ESCLARECIMENTOS SOBRE O COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

O Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) é constituído por uma equipe de profissionais com formação multidisciplinar que está trabalhando para assegurar o respeito aos seus direitos como participante de pesquisa. Ele tem por objetivo avaliar se a pesquisa foi planejada e se será executada de forma ética. Se você considerar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você foi informado ou que você está sendo prejudicado de alguma forma, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR). Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Bairro Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, Telefone: (41) 3310-4494, e-mail: coep@utfpr.edu.br.

Título da pesquisa: Experiência com a utilização do aplicativo “Derivadas Quiz”

Pesquisadora: Adriele Carolini Waideman

Desenvolvimento: Letícia Mazzo Portela.

Orientadora responsável: Claudete Cargnin.

Local de realização da pesquisa: Online.

Endereço, telefone do local: -

APÊNDICE B

QUESTÕES RESPONDIDAS PELOS ALUNOS EM RELAÇÃO AO USO DO APLICATIVO

1) Qual seu curso de graduação? Qual ano você está cursando?

2) Você teve dificuldades para utilizar o aplicativo?
() Sim () Não

2.1) Se sua resposta foi sim para a questão 2), você consultou alguma "DICA" do aplicativo?
() Sim () Não

2.2) Caso tenha respondido "Sim" para a questão 2.1) como você classifica as dicas fornecidas em relação ao conteúdo em estudo?

Escala : 0	1	2	3	4	5
Sendo: 0-Muito ruim					5- Excelente

2.3) Caso tenha consultado, em determinado momento, a ajuda para uma questão específica, você acredita que a ela conseguiu auxiliá-lo(a)?

Escala : 0	1	2	3	4	5
Sendo: 0-Muito ruim					5- Excelente

2.4) Caso tenha respondido "0 (não ajudou)" para a questão 2.3) qual(is) dica(s) você achou insuficiente(s) e/ou confusa(s)? Justifique e opine como poderia ser melhorada.

Fases

3) O fato de o tema ser separado em duas fases (questões de aquecimento e questões principais) contribuiu para o seu estudo? Comente a respeito.

3.1) Você teve dificuldade em alguma das fases? Assinale a seguir todos aqueles itens que condizem com sua experiência.

() Apenas na primeira fase () Apenas na segunda fase () Em ambas as fases

3.2) Caso tenha tido dificuldade, com o que, especificamente, foi essa dificuldade? Entender o enunciado, formato das respostas, etc

Uso do aplicativo

4) Durante o uso do aplicativo você buscou ajuda fora dele? (como, por exemplo, livros, apostilas, internet, caderno)

() Sim

() Não

5) Você usaria esse aplicativo como forma de “testar/analisar” seu conhecimento, mesmo depois de ter cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I? Comente.

6) As dificuldades encontradas para responder as questões do aplicativo, o incentivaria a pesquisar o assunto? Em qual medida?

Escala : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Sendo:

0: Não pesquisaria nada

10: Com certeza pesquisaria informações a respeito das minhas dúvidas

7) De forma geral, como você classificaria sua experiência com o aplicativo?

Escala : 0 1 2 3 4 5

Sendo: 0-Muito ruim

5- Excelente

8) Você indicaria esse jogo para algum colega? Por quê?

9) Qual a sua opinião sobre utilizar aplicativos para o estudo de cálculo?

10) Qual sua opinião em relação a essa pesquisa ter usado aplicativo para celulares e não *software* para computadores?

11) Aponte características positivas e a melhorar do aplicativo “Derivadas Quiz”.

APÊNDICE C

Questões para referência das análises feitas no Capítulo 4.

2ª fase: Questões de Aprofundamento

Dica

12. Derive: $f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$

- a. $f'(x) = 6x^2 - 4x - 6x^{-4} + 1$
 b. $f'(x) = 18x - 4 + 2x^{-4}$
 c. $f'(x) = 18x^2 - 4 - 6x^{-4}$
 d. $f'(x) = 18x^2 + 4 - 6x^{-4} + 0$

Resposta: C

Dica:

TEOREMA 1 Se $f(x) = c$, c uma constante real, então $f'(x) = 0$, para todo x .

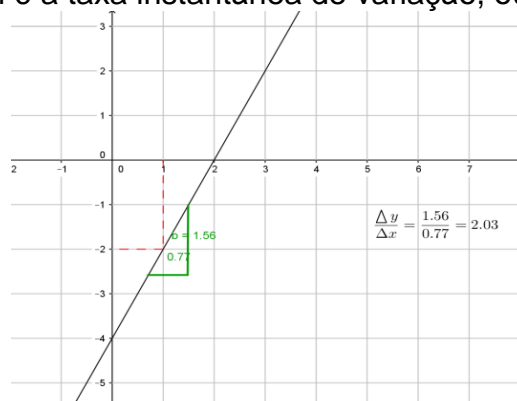
TEOREMA 2 Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, para todo n inteiro positivo.

TEOREMA 3 Se $f(x) = k \cdot g(x)$, k constante, então $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

TEOREMA 4 Se $h(x) = f(x) + g(x)$, então se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$, teremos:
 $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Dica

13. Seja $f(x) = 2x - 4$ a reta representada no gráfico. Observe os pontos em destaque sobre a reta. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a taxa média de variação na função entre esses dois pontos. Qual é a taxa instantânea de variação, ou seja, em um ponto P?



- a) 0 b) 2 c) -2 d) não é possível calcular

Resposta: B

Dica:

1. Se $y = f(x)$, e se x variar de $x_1 + \Delta x$, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y , denotada por Δy , é $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, quando a variação de x for Δx . A **Taxa Média de Variação** de y por unidade de x , quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então

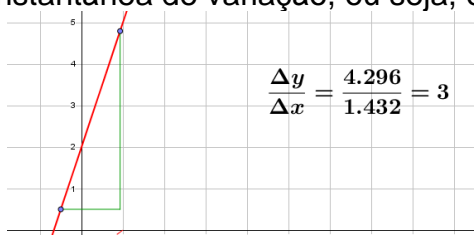
$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. A **Taxa de Variação Instantânea** de uma função f no ponto a é o limite, quando $h \rightarrow 0$, do quociente entre a variação da função no intervalo $[a, a + h]$ e o comprimento do intervalo, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(a)$$

Dica

14. Seja $f(x) = 3x + 2$ a reta representada no gráfico. Observe os pontos em destaque sobre a reta. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a taxa média de variação na função entre esses dois pontos. Qual é a taxa instantânea de variação, ou seja, em um ponto P?



- a) 0 b) 3 c) -3 d) não é possível calcular

Resposta: B

Dica:

1. Se $y = f(x)$, e se x variar de $x_1 + \Delta x$, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y , denotada por Δy , é $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, quando a variação de x for Δx . A **Taxa Média de Variação** de y por unidade de x , quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então

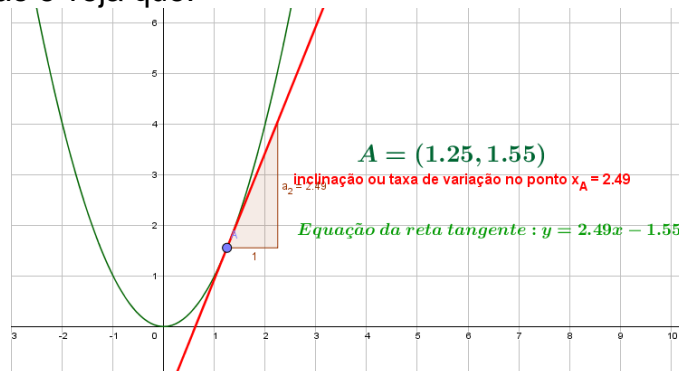
$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. A **Taxa de Variação Instantânea** de uma função f no ponto a é o limite, quando $h \rightarrow 0$, do quociente entre a variação da função no intervalo $[a, a + h]$ e o comprimento do intervalo, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(a)$$

Dica**O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 15 A 18.**

Observe (clique no botão para visualizar o gráfico) a inclinação da reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(-1,1)$, a inclinação, ou taxa de variação, é -2 .

15. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:

a () $f(x) = x^2$ b () $f(x) = -x^2$ c () $f(x) = 2x$ d () $f(x) = -2x$

16. A posição da reta tangente em $x = -1$ é

a () Crescente b () Horizontal c () Decrescente d () Vertical

17. O sinal do coeficiente angular da reta tangente no intervalo $x < 0$ é

a () Negativo b) Zero c () Positivo d () Nenhuma das alternativas

18. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é

a () Crescente e positiva
 b () Decrescente e negativa
 c () Crescente e negativa
 d () Decrescente e positiva

Resposta: A. C. A. D.

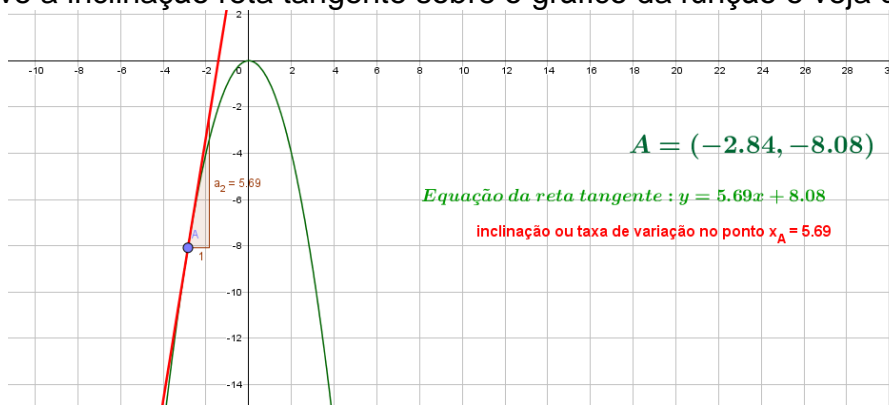
Dica:

1. Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Onde, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima; se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.
2. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.
3. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.
4. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.
5. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.
6. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 19 A 22.

Observe a inclinação da reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(-2, -4)$, a inclinação, ou taxa de variação, é -4 .

19. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:

a () $f(x) = x^2$ b () $f(x) = -x^2$ c () $f(x) = 2x$ d () $f(x) = -2x$

20. A posição da reta tangente em $x = -2$ é

a () Crescente b () Horizontal c () Decrescente d () Vertical

21. O sinal do coeficiente angular da reta tangente no intervalo $x < 0$ é

a () Negativo b) Zero c () Positivo d () Nenhuma das alternativas

22. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é

a () Crescente e positiva
 b () Decrescente e negativa
 c () Crescente e negativa
 d () Decrescente e positiva

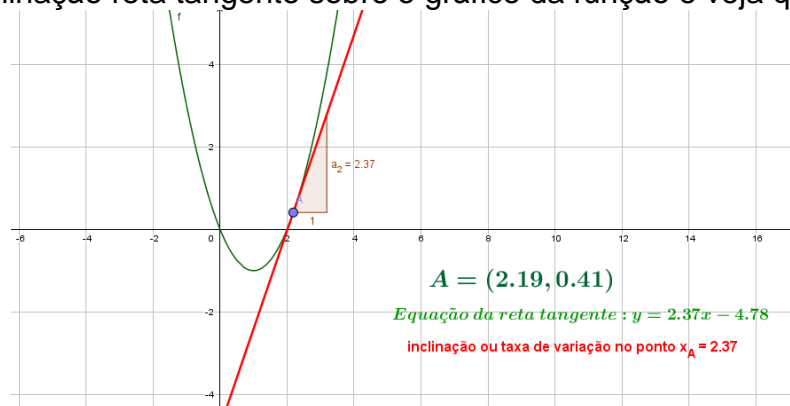
Resposta: B. A. C. C.

Dica:

1. Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Onde, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima; se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.
2. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.
3. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.
4. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.
5. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.
6. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica**O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 23 A 26.**

Observe a inclinação da reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(1, -1)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 0.

23. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:

a () $f(x) = x^2 + 2x$ b () $f(x) = x^2 - 2x$ c () $f(x) = 2x + 2$ d () $f(x) = -2x - 2$

24. A posição da reta tangente em $x = 1$ é

a () Crescente b () Horizontal c () Decrescente d () Vertical

25. O coeficiente angular da reta tangente em $x=1$ é

a () Negativo b) Zero c () Positivo d () Nenhuma das Alternativas

26. Na função $f(x)$ o ponto $(1, -1)$, é:

a () Ponto de Máximo b () Ponto de Mínimo
c () Apenas um ponto da função d () Nenhuma das alternativas

Resposta: B. B. B. B

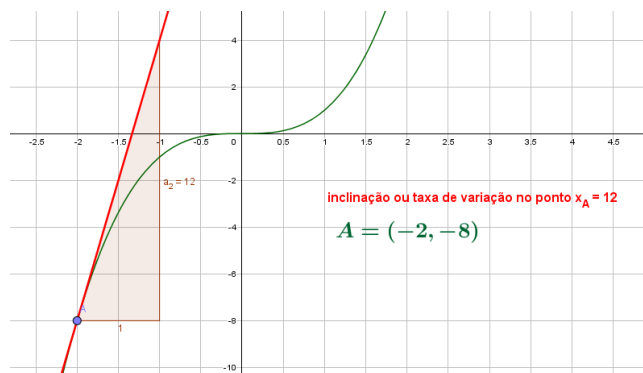
Dica:

1. Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Onde, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima; se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.
2. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.
3. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.
4. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.
5. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.
6. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 27 E 28.

Observe a reta tangente sobre a curva.



No ponto $(-2, -8)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

27. A posição da reta tangente em $x = -2$ é
 a () Crescente b () Horizontal c () Decrescente d () Vertical

28. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é
 a () Crescente e positiva
 b () Decrescente e negativa
 c () Crescente e negativa
 d () Decrescente e positiva

Resposta. A. C.

Dica:

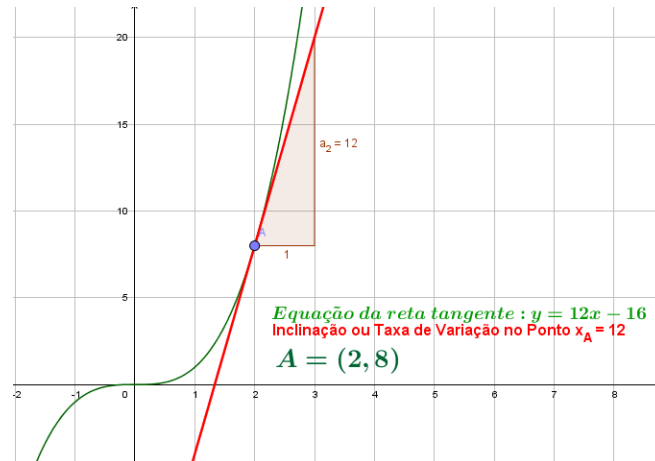
1. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.
2. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.
3. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto e é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.
4. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.
5. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 29 E 30.

Observe a reta tangente sobre a curva.

(clique no botão para visualizar o gráfico)



No ponto $(2,8)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

29. Em relação à posição da reta tangente em $x = 2$ é
 a () Crescente b () horizontal c () Decrescente d () Vertical

30. Em relação ao intervalo $x > 0$, a $f(x)$ é
 a () Crescente e positiva
 b () Decrescente e negativa
 c () Crescente e negativa
 d () Decrescente e positiva

Resposta. A. A.

Dica:

1. O ponto $A(x,y)$ é o ponto em que você está.
2. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.
3. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto e é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.
4. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.
5. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica

31. Se a função é crescente, então a derivada é
 a () Negativa b) Nula c () Positiva d () Nenhuma das Alternativas

32. Se a função é decrescente, então a derivada é
 a () Negativa b) Nula c () Positiva d () Nenhuma das Alternativas

Resposta. C. A.

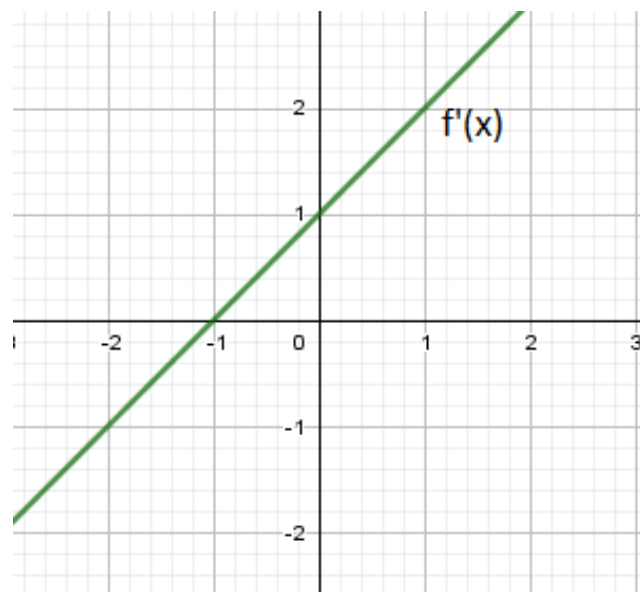
Dica

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) :

- i) Se $f'(x) > 0$ (a derivada em x_i for positiva) para todo x em (a, b) , então f será crescente em $[a, b]$;
- ii) Se $f'(x) < 0$ (a derivada em x_i for negativa) para todo x em (a, b) , então f será decrescente em $[a, b]$;

Dica**Dica**

33. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.
 (clique no botão para visualizar o gráfico)



Com base no gráfico, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$?

- a () $(-\infty; +\infty)$ crescente
- b () $(-\infty, -1]$ crescente; $[-1, +\infty)$ decrescente
- c () $(-\infty, -1]$ decrescente; $[0, +\infty)$ crescente
- d () $(-\infty, -1]$ decrescente; $[-1, +\infty)$ crescente

Resposta: D

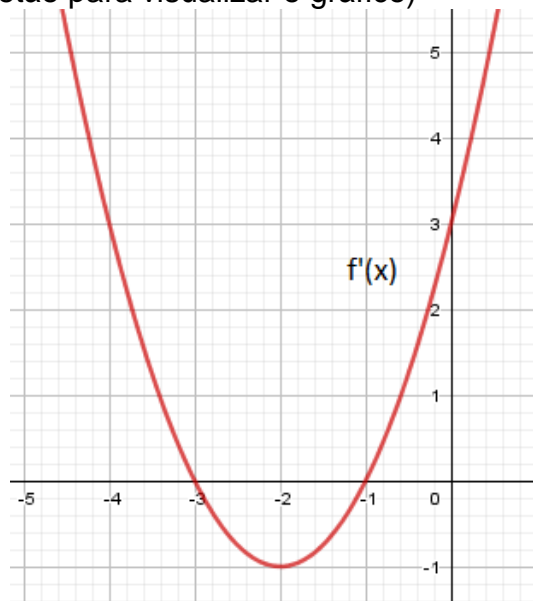
Dica

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) ,

- i) Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b) , então f será *crescente* em $[a, b]$.
- ii) Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b) , então f será *decrecente* em $[a, b]$.

Dica

34. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.
(clique no botão para visualizar o gráfico)



Com base nele, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decréscimo de $f(x)$?

- a () $(-\infty; -2]$ *decrecente*; $[-2; +\infty)$ *crescente*
- b () $(-\infty; -3]$ *crescente*; $[-3; -1]$ *decrecente*; $[-1; +\infty)$ *crescente*
- c () $(-\infty; -2]$ *crescente*; $[-2; +\infty)$ *decrecente*
- d () $(-\infty; -3]$ *decrecente*; $[-3; -1]$ *crescente*; $[-1; +\infty)$ *decrecente*

Resposta: B

Dica

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) ,

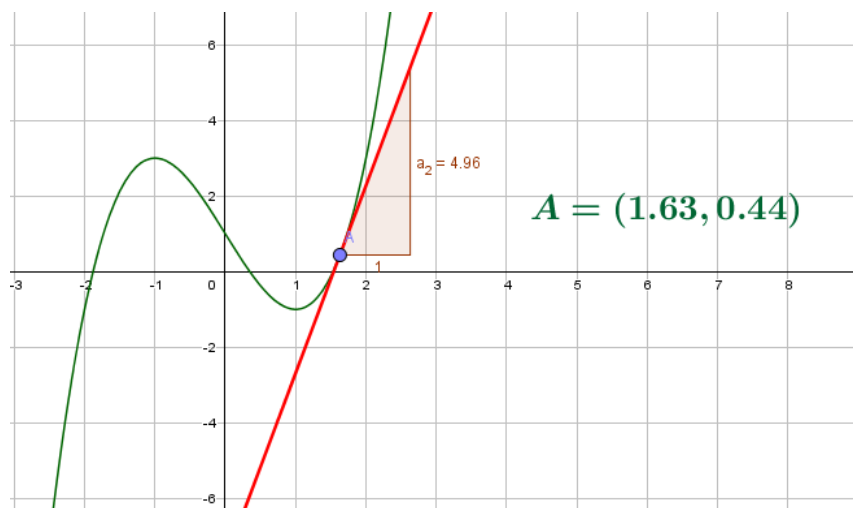
- i) Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b) , então f será *crescente* em $[a, b]$.
- ii) Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b) , então f será *decrecente* em $[a, b]$.

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 35 E 36.

No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.

(clique no botão para visualizar o gráfico)



35. Quais são as coordenadas do ponto de máximo local?

- a () $(-2; 0)$
- b () $(-1; 3)$
- c () $(0; 1)$
- d () $(1; -1)$

36. Quais são as coordenadas do ponto de mínimo local?

- a () $(-1; 3)$
- b () $(0; 1)$
- c () $(1; -1)$
- d () $(2; 3)$

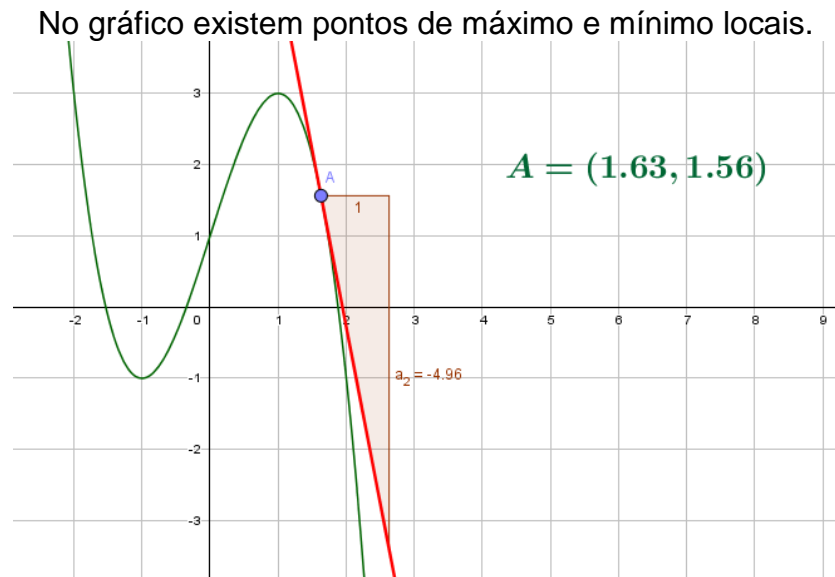
Resposta: *B. C.*

Dica

- 1) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos (a, b) , exceto possivelmente em c .
 - I) Se o sinal de f' mudar de POSITIVO para NEGATIVO em c , então f tem um **MÁXIMO LOCAL** em c .
 - II) Se o sinal de f' mudar de NEGATIVO para POSITIVO em c , então f tem um **MÍNIMO LOCAL** em c .
- 2) Se a reta tangente em alguma $f(c)$ tiver inclinação zero, esse c é um candidato a ser **MÁXIMO LOCAL OU MÍNIMO LOCAL**.

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 37 E 38.



37. Quais são as coordenadas do ponto de máximo local?

- a () $(-2; 3)$
- b () $(0; 1)$
- c () $(1; 3)$
- d () $(2; 0)$

38. Quais são as coordenadas do ponto de mínimo local?

- a () $(-1; -1)$
- b () $(0; 1)$
- c () $(1; 3)$
- d () $(2; 0)$

Resposta: C.A

Dica

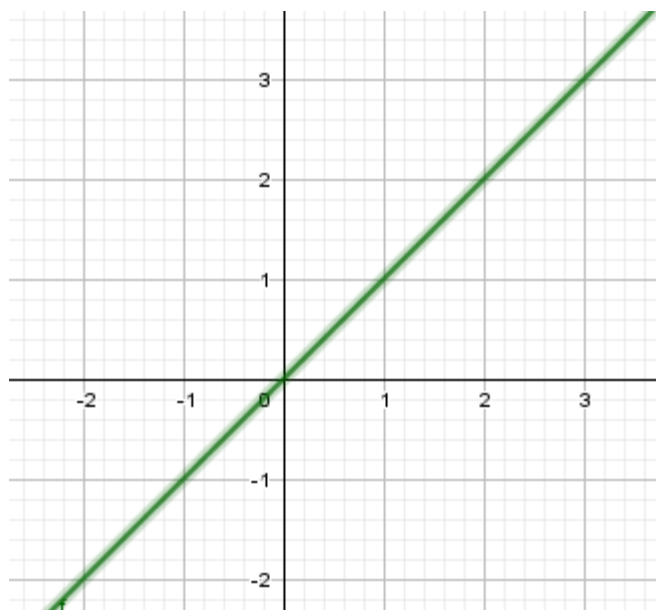
1) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos (a, b) , exceto possivelmente em c .

- I) Se o sinal de f' mudar de POSITIVO para NEGATIVO em c , então f tem um **MÁXIMO LOCAL** em c .
- II) Se o sinal de f' mudar de NEGATIVO para POSITIVO em c , então f tem um **MÍNIMO LOCAL** em c .

2) Se a reta tangente em alguma $f(c)$ tiver inclinação zero, esse c é um candidato a ser **MÁXIMO LOCAL OU MÍNIMO LOCAL**.

Dica

39. O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para cima da $f(x)$ é

- a () $(-\infty, 0)$
- b () $(0, +\infty)$
- c () $(-\infty, +\infty)$
- d () Nenhuma das Alternativas

Resposta: B

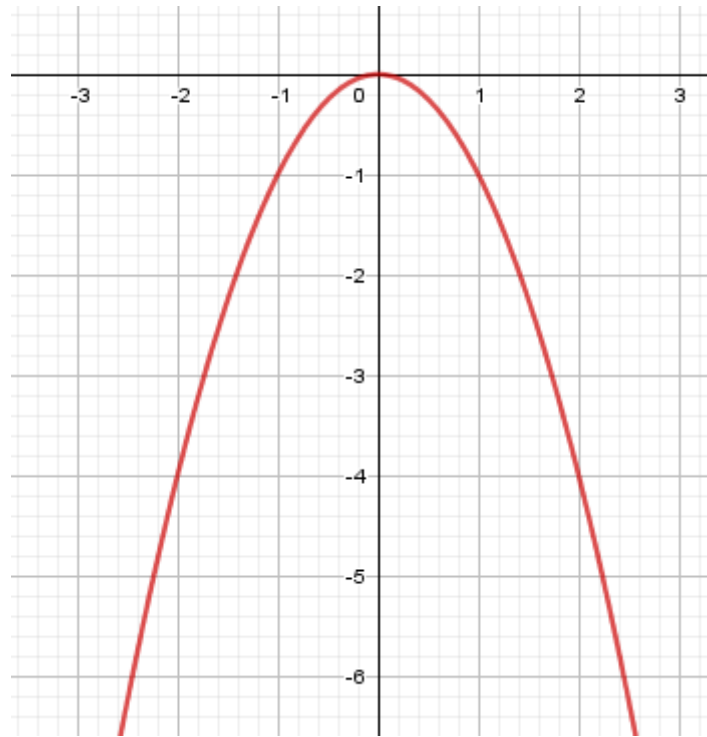
Dica

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c , então:

- i) Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;
- ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$;

Dica

O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



40. O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para baixo da $f(x)$ é

- a () $(-\infty, 0)$
- b () $(0, +\infty)$
- c () $(-\infty, +\infty)$
- d () Nenhuma das Alternativas

Resposta: C

Dica

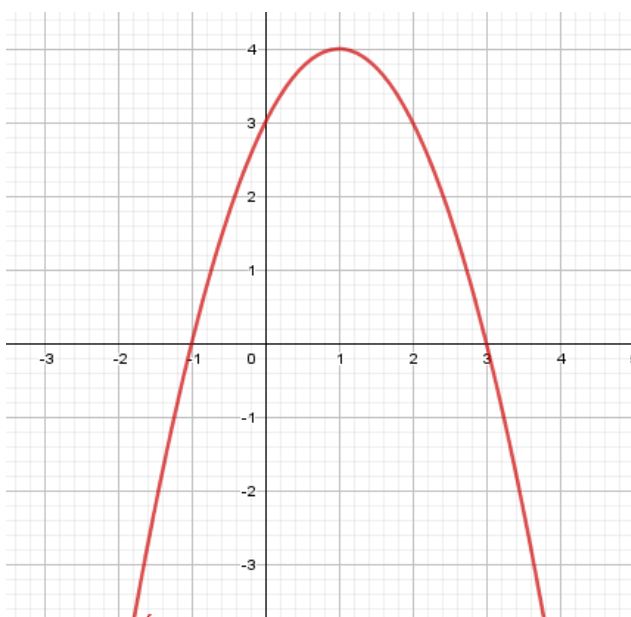
Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c , então:

- i) Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;
- ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$;

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 41 E 42.

O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$
(clique no botão para visualizar o gráfico)



41. O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para baixo da $f(x)$ é

- a () $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
- b () $(-\infty, 1)$
- c () $(1, 4)$
- d () $(-1, 3)$

42. O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para cima da $f(x)$ é

- a () $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
- b () $(-\infty, 1)$
- c () $(1, 4)$
- d () $(-1, 3)$

Resposta: A. D

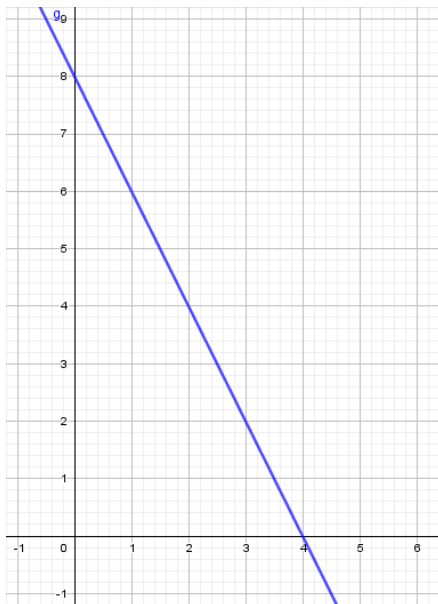
Dica

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c , então:

- i) Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;
- ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$.

Dica

43. O gráfico refere-se à derivada segunda $f''(x)$ da $f(x)$.
(clique no botão para visualizar o gráfico)



Observando esse gráfico podemos dizer que o ponto (4,0) representa:

- a () um ponto crítico na $f(x)$
- b () um ponto Máximo ou Mínimo na $f(x)$
- c () um ponto de inflexão na $f(x)$
- d () Nenhuma das Alternativas

Resposta: C

Ajuda

Um ponto de inflexão é um ponto sobre uma $f(x)$ na qual a derivada de segunda ordem troca o sinal. A $f(x)$ muda de ter concavidade para cima (positiva) para concavidade para baixo (negativa), ou vice-versa.

APÊNDICE D

PRODUTO EDUCACIONAL

DO PAPEL À TELA DO CELULAR:

UM APLICATIVO PARA OS ESTUDOS DE DERIVADAS



AUTORA: ADRIELE CAROLINI WAIDEMAN
ORIENTADORA: DR^ª. CLAUDETE CARGNIN
PROGRAMADORA: LETÍCIA MAZZO PORTELA

PPG^{MAT} **UTFPR**
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

1. APRESENTAÇÃO

Caro(a) professor(a),

É com prazer que apresentamos o “Derivada Quiz”, um aplicativo didático ²³ para o estudo de derivadas de uma função real de variável real, que compõe o produto educacional I, intitulado “Do papel à tela do celular: um aplicativo para os estudos de derivadas”.

Esse material é fruto da pesquisa publicada como dissertação “Um aplicativo para o estudo de derivadas²⁴” (WAIDEMAN, 2018), do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR, sob orientação da Prof^a. Dr^a Claudete Carginin.

A pesquisa é resultado de um amplo estudo sobre dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem de derivadas, e que culminaram na criação de um aplicativo didático para o tema. As questões, elaboradas à luz da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) (DUVAL, 2012), foram testadas e modificadas a partir de uma pesquisa realizada com estudantes de graduação dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Engenharia de Produção Agroindustrial, realizada no período de outubro a dezembro de 2017. Tanto as questões como a TRRS, são apresentadas e discutidas no produto educacional II, intitulado Caderno de Questões para o Estudo de Derivadas²⁵, disponível também no Apêndice E da dissertação de Waideman (2018).

Após a implementação das melhorias nas questões, criou-se o aplicativo que foi testado com alunos dos dois cursos supracitados, no período de fevereiro a março de 2018.

O *Derivadas Quiz* é composto por duas fases, sendo que a primeira delas, chamada de “Questões de Aquecimento”, possibilita a revisão de conceitos gerais envolvendo a derivada de uma função real de variável real; já a segunda fase, intitulada

²³ Disponível na *Play Store*.

²⁴ Disponível no site: <http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-em-ensino-de-matematica/dissertacoes>

²⁵ Disponível no site <http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-em-ensino-de-matematica/produto-educacional>

de “Questões de Aprofundamento”, busca trabalhar diferentes conceitos de derivadas, enfocando a representação gráfica, tratamentos e conversões²⁶.

Muitas tecnologias que vêm ganhando espaço na educação, especialmente na disciplina de CDI, podem estar ligadas ao fato de devolver um *feedback* rápido e diferenciado, de acordo com o nível de cada aluno. Assim, as tecnologias estão disponíveis no dia a dia do professor, do aluno, nas escolas, universidades, etc, ou seja, fazem parte do cotidiano de todos.

Como uma maneira de dar suporte a essa “conexão” entre professores e alunos, a UNESCO (2017, s/p.) declarou que as mídias portáteis podem ajudar a preparar novos professores, proporcionando um melhor desempenho profissional. Dessa forma, busca ampliar as parcerias e promover atividades e discussões sobre tópicos de ponta, como, por exemplo, os Recursos Educacionais Abertos, aplicativos de sala de aula para *smartphone* e celulares simples, conteúdos para *tablet e netbook*, métodos pedagógicos para a aprendizagem móvel, desenvolvimento de aplicativos para a aprendizagem móvel, mídias sociais e muito mais.

Não acreditamos no desprezo do uso de tecnologias como lápis, papel e régua, usadas em sala de aula, mas aliadas às tecnologias digitais podem contribuir de forma mais eficaz para o ensino e a aprendizagem, gerando percepções e habilidades nessa via de mão dupla. Segundo Couy (2008), as ferramentas tecnológicas para o ensino são eficazes e, se utilizadas de forma adequada, podem potencializar a representação gráfica no ensino de Cálculo, não somente para derivadas, “estimulando a observação, a busca de regularidades e padrões e possibilitando, através da comparação com as outras formas de se representar uma função, o entendimento das ligações entre elas”(COUY, 2008, p. 47).

Segundo Mendes Neto (2017), o intuito de utilizar o celular como recurso pedagógico em algumas aulas é despertar a consciência dos alunos quanto ao favorecimento da aprendizagem.

Assim, introduzir as tecnologias nas suas práticas letivas é uma forma de os professores trabalharem conceitos de derivada e função derivada desenvolvendo mais de um tipo de representação, em simultâneo, para favorecer que os alunos compreendam o seu significado, pois a utilização das diferentes representações pode

²⁶ Termos utilizados por Duval na TRRS. E, a luz dessa teoria foram elaboradas as questões.

proporcionar aos alunos uma construção das “ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão” (NCTM, 2008).

Na próxima capítulo, apresenta-se como aconteceu a construção do aplicativo e suas questões.

Atenciosamente,
Prof^a. Me. Adriele Carolini Waideman

2. DO PAPEL À TELA DO CELULAR: um aplicativo para estudo de derivadas

Na busca de uma Nova Tecnologia de Informação e Comunicação (NTIC) que pudesse colaborar com a pesquisa de mestrado e, de alguma forma, colaborar com o estudo de derivadas, optou-se por usar o *smartphone*, especificamente, um aplicativo. A escolha justifica-se por ser considerado de fácil acesso, interativo e não precisar de internet para o uso, uma vez baixado.

Após a escolha de um aplicativo como ferramenta de estudo, selecionou-se um quiz de perguntas e respostas, em duas fases. A primeira como retomada geral do tema, já a segunda com um foco mais específico, principalmente, nas representações gráficas.

Levando-se em consideração os apontamentos da literatura em relação aos processos de ensino e aprendizagem de derivadas (Cap. 2 de Waideman (2018) e as contribuições da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS), elaboraram-se questões para o aplicativo que trabalhassem mais fortemente a interpretação gráfica de funções, suas derivadas primeira e segunda.

Para maior aproveitamento do aplicativo como instrumento de estudo, ele foi dividido em duas fases: “Questões de Aquecimento”, cujas respostas restringiam-se apenas a “Sim” ou “Não” e, para alcançar o segundo nível, eram necessários 7 acertos de um total de 11 questões, percentual considerado, pela autora, mínimo para um melhor desempenho na segunda fase.

Já a segunda fase, chamada de “Questões de Aprofundamento”, foi composta por 32 questões objetivas com quatro alternativas, sendo uma única correta. Algumas imagens e vídeos com gráficos (produzidos pela autora no GeoGebra) foram colocados para auxiliar na interpretação da questão e outros vídeos (também de gráficos) enunciavam a questão. Ressaltamos que esses vídeos podem ser pausados e recomeçados quantas vezes for necessário, além de uma “Dica” que fica disponível nessa fase, a qual só é habilitada após a primeira tentativa de resolução. As questões

dessa fase tiveram por objetivo trabalhar conceitos referentes ao tema de derivadas, enfocando a representação gráfica, tratamentos e conversões.

Essa organização em fases foi elogiada pelos estudantes que testaram o aplicativo justamente por permitir um apanhado geral do tema a ser estudado, o que favoreceu efetivar maiores ligações entre os mais variados conceitos abordados na segunda fase, chamada de Questões de Aprofundamento. Além disso, algumas outras possibilidades ao usar um aplicativo nos estudos foram citadas pelos colaboradores da pesquisa: o dinamismo, a facilidade de onde usá-lo, como no ônibus a caminho da faculdade, estudo em grupo, forma interativa de estudar.

O aplicativo testado “Derivadas Quiz” foi considerado o Produto Educacional I referente à Waideman (2018) e pode ser baixado na *Play Store*.

No capítulo a seguir, apresentaremos as interfaces do aplicativo, com o objetivo de situar o(a) professor(a) sobre as telas e recursos existentes no recurso didático.

3. IMAGENS DO APLICATIVO

Apresentaremos, a seguir, imagens do aplicativo, as quais consideramos autoexplicativas, com o intuito de familiarizar o docente com o aplicativo, antes do seu uso efetivo. Ressaltamos ainda que o aplicativo pode ser usado dentro da sala de aula, como forma de avaliação ou retomada de conteúdo, ou extra-classe, pelos alunos, como forma autônoma de estudar.



Apresentação

Este aplicativo é resultado da pesquisa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina/Cornélio Procópio.

Abordagem:

- **Derivadas**

Mestranda:

- **Adriele Carolini Waideman**

Orientadora:

- **Claudete Cargnin**

Desenvolvedora:

- **Letícia Mazzo Portela**



INÍCIO

Instruções Gerais

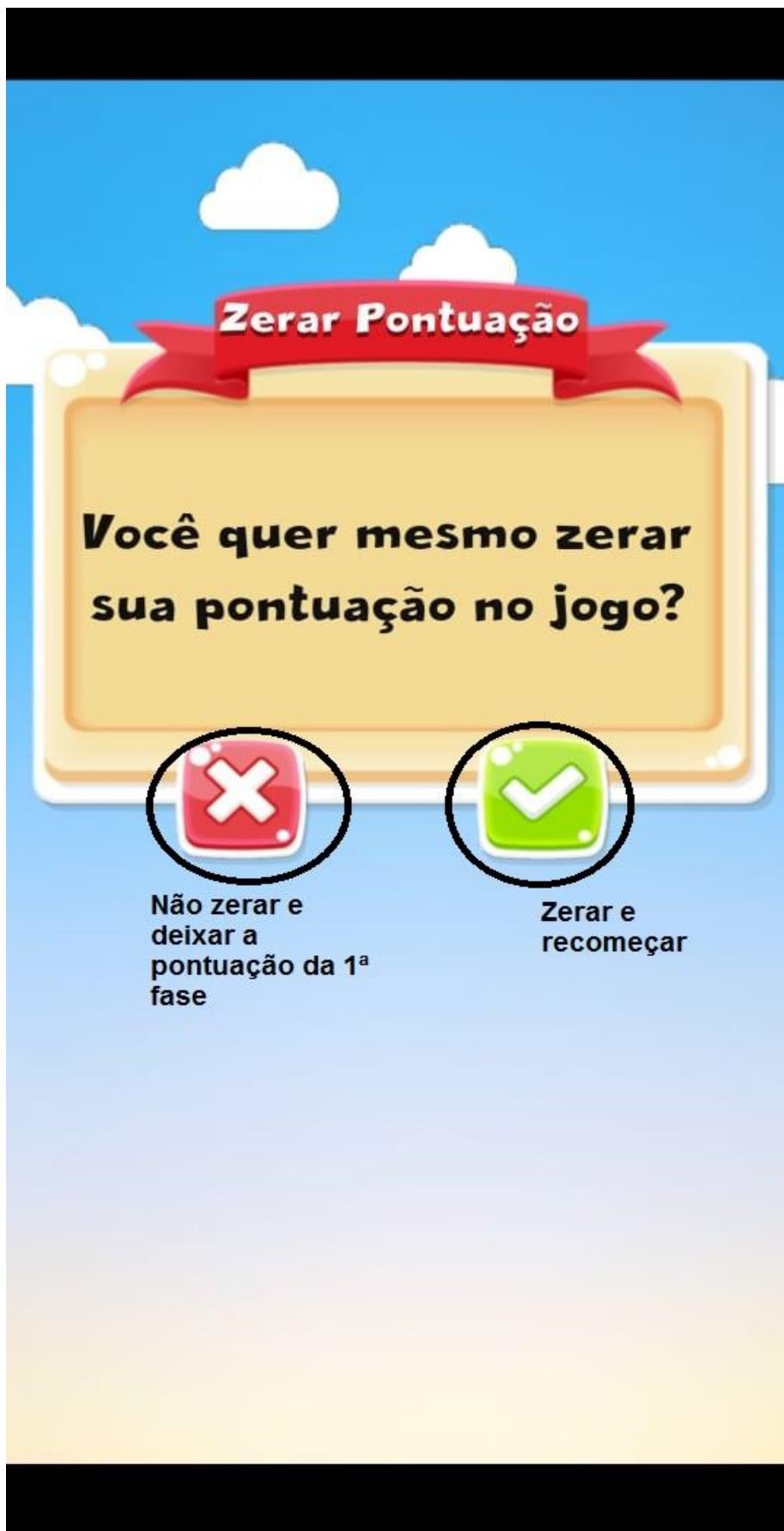
- **Selecione o botão de Play** para jogar.
- **Caso queira sair**, selecione o botão no canto inferior da tela **Home**.
- **Na tela de Desempenho**, você escolhe qual fase deseja: "Questões de Aquecimento" ou "Questões de Aprofundamento", no entanto, a segunda opção só é desbloqueada caso atinja uma pontuação específica na primeira.
- **Ainda na tela de Desempenho**, você tem as opções "zerar pontuação" e "voltar para a tela Home".
- **Quando terminar de responder as questões**, é apresentada uma tela com sua pontuação. **Nela**, você opta por repetir a partida, ir para a tela **Home** ou ir para a tela de **Desempenho**.



Voltar ao quiz







Instruções

Modo de Jogo 1: Questões de Aquecimento. Essa fase conta com 11 questões de "Sim" ou "Não", abordando de forma mais geral o conteúdo de *Derivadas*. Nela, assim que se escolhe a resposta é mostrada qual a alternativa correta.

Modo de Jogo 2: Questões de Aprofundamento. Nesta fase são abordadas questões mais específicas, totalizando 32 questões com 4 alternativas cada. Nela, você tem duas chances de responder, caso erre na primeira, a dica é habilitada, na segunda vez o jogo avança para a próxima questão, mostrando antes qual a resposta correta. Em algumas questões, são apresentados vídeos para evidenciar a interação com gráficos e, em outras, apenas o gráfico. Nas duas fases de jogo existe a possibilidade de desistir da partida, através do botão localizado no canto inferior esquerdo.



Voltar ao quiz



Questões aleatórias ↓

Questão 11 de 11


Uma função crescente, num intervalo I , tem derivada primeira negativa nesse intervalo?

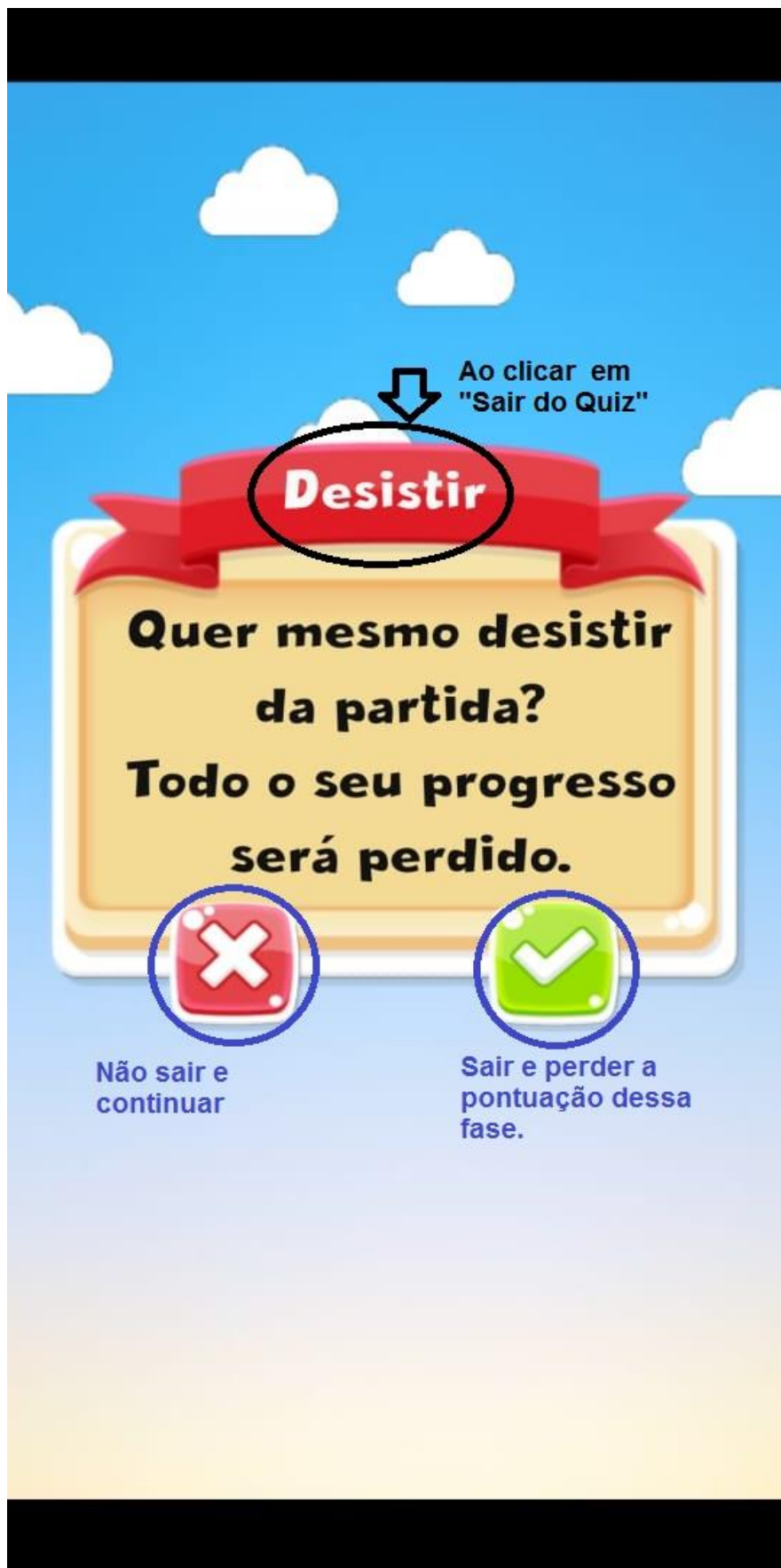
Resposta não correta em vermelho

SIM

NÃO

Resposta correta em verde e piscando

 → Sair do quiz







Orientação:
Questões de Aprofundamento

- Algumas questões deste tema, possuem gráficos. Para acessá-los, basta selecionar o botão com símbolo de gráfico que aparecerá no canto inferior direito da tela.
- Como já mencionado nas instruções, você tem duas chances de responder cada questão. Caso erre da primeira vez, é habilitada a **Dica** para a questão, que pode ser acessada através do botão com símbolo de interrogação que aparece na parte inferior da tela. Se novamente você errar, você não pontua, é mostrada a resposta correta e o jogo avança para a próxima questão.



Voltar ao quiz

Questões em ordem de elaboração

Questão 5 de 32


Observe a inclinação da reta tangente sobre o gráfico da função e veja que no ponto $(-1,1)$ a inclinação, ou taxa de variação, é -2 . A posição da reta tangente em $x = -1$ é:


Crescente Apenas uma alternativa correta


Horizontal

Decrescente

Vertical Habilitar o gráfico

 Sair do quiz

 Dica após 1ª tentativa de resposta



Dica

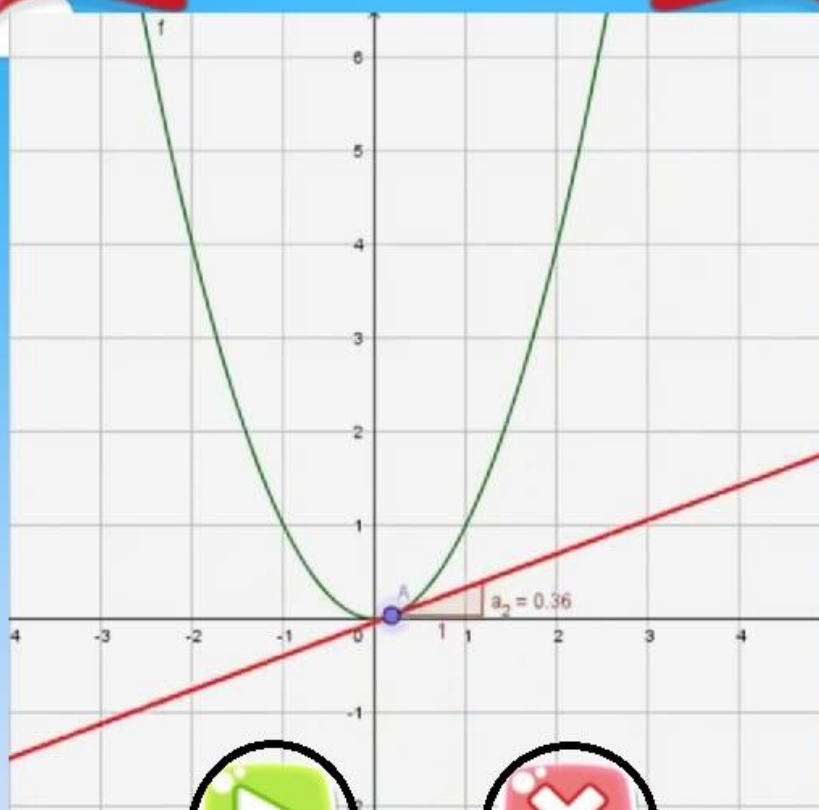
- 1. Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Onde, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima; se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.**
- 2. O ponto $A(x,y)$ é o ponto em que você está.**
- 3. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.**
- 4. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.**
- 5. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.**
- 6. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).**



Voltar ao quiz

Imagens ou vídeos para apresentação de gráficos em algumas questões

Vídeo



Para vídeos:
Iniciar, pausar, reiniciar



Voltar a questão



REFERÊNCIAS

COUY, L. **Pensamento visual no estudo da variação de funções**. 2008. 160f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), Belo Horizonte, 2008.

DUVAL, R. Abordagem Cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Mércles T. Moretti. **Revemat**: R.Eletr. de Edu. Mat. Florianópolis (SC), 7(1), pp.118-138, 2012.

MENDES NETO, A. O uso do celular como recurso pedagógico. **Infogeekie**. 2017. Disponível em: <http://info.geekie.com.br/uso-celular/>. Acesso em 23 de agosto de 2018.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM. 2008.

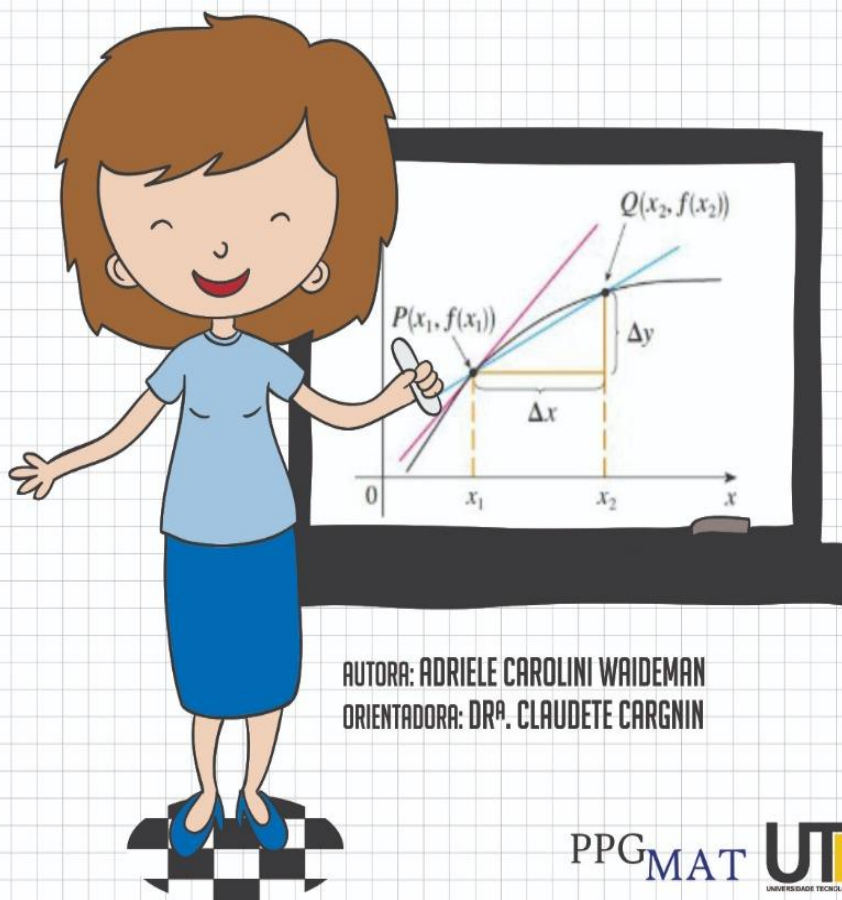
UNESCO. **Aprendizagem Móvel**. Representação da UNESCO no Brasil. 2017. Disponível em <<http://www.unesco.org/new/pt/brasil/communication-and-information/access-to-knowledge/ict-in-education/mobile-learning/>> Acesso em: 07. Ago.2018.

WAIDEMAN, A. C. **Um aplicativo para o estudo de derivadas**. 2018. 173 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Ensino de Matemática, UTFPR, Londrina, 2019.

APÊNDICE E

PRODUTO EDUCACIONAL II

CADERNO DE QUESTÕES PARA O ESTUDO DE DERIVADAS



1. APRESENTAÇÃO

Caro(a) professor(a),

É com prazer que apresentamos questões para o estudo de derivadas, as quais têm o objetivo de contribuir para o estudo de derivadas de uma função real de variável real. As questões compõem o Produto Educacional II, intitulado “Caderno de Questões para o Estudo de Derivadas”.

Esse material é fruto da pesquisa publicada na dissertação “Um aplicativo para o estudo de derivadas²⁷” de Waideman (2018), do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR, sob orientação da Prof^a. Dr^a Claudete Carginin.

As questões, elaboradas à luz da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) (DUVAL, 2012), foram testadas e modificadas a partir de uma pesquisa realizada com estudantes de graduação dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Engenharia de Produção Agroindustrial, realizada no período de outubro a dezembro de 2017, e são apresentadas de forma dinâmica com auxílio de vídeos e gráficos no aplicativo “*Derivadas Quiz*²⁸”. A interface do aplicativo é apresentada e explicada no Produto Educacional I, intitulado “Do Papel À Tela Do Celular: Um Aplicativo para os Estudos de Derivadas”²⁹. A interface do aplicativo encontra-se disponível também no Apêndice D e, o caderno de questões no Apêndice E de Waideman (2018).

Nesse produto educacional, apresentamos as questões que compõem o aplicativo, as quais foram testadas em condições reais de ensino, e que podem ser utilizadas com papel e lápis, em sala de aula, para aprofundar os conhecimentos sobre derivadas ou simplesmente estudo individual.

²⁷ Disponível no site: <http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-em-ensino-de-matematica/dissertacoes>

²⁸ Disponível na *Play Store*.

²⁹ Disponível também no site: <http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-em-ensino-de-matematica/produto-educacional>

As questões foram separadas por fases. A primeira, chamada de “Questões de Aquecimento”, possibilita a revisão de conceitos gerais envolvendo a derivada de uma função real de variável real; já a segunda fase, intitulada “Questões de Aprofundamento”, busca trabalhar diferentes conceitos de derivadas, enfocando a representação gráfica³⁰, tratamentos e conversões.

Atenciosamente,
Prof^a. Me. Adriele Carolini Waideman

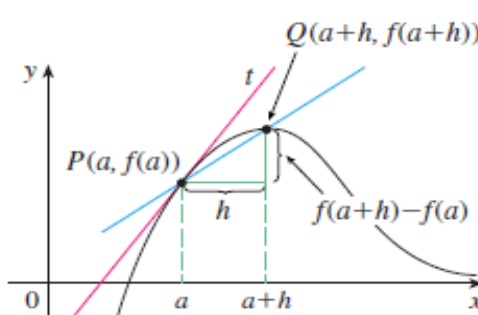
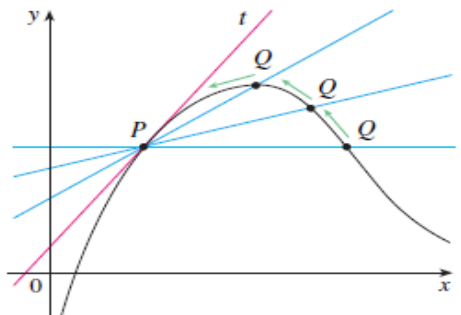
³⁰ O Produto Educacional II traz uma um suporte ao professor de como explorar as questões (usadas no aplicativo) com foco nas representações semióticas.

2. AS FACES DO OBJETO MATEMÁTICO: DERIVADAS

O conceito de derivadas de funções de uma variável real, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pode ser explorado em diversos âmbitos, ou seja, derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvem taxa instantânea de variação, máximos e mínimos, entre outros.

A pesquisa realizada (WAIDEMAN, 2018) assumiu como as diversas faces do objeto matemático “derivadas” as definições apresentadas no livro-texto Cálculo, Volume 1, do Stewart (2010). A seguir, as definições:

Quadro 31 - Definição da Inclinação da Reta Tangente

(a)	
<p>DEFINIÇÃO 1 - A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem inclinação</p>	$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
<p>Desde que esse limite exista.</p>	
(b)	
	

Fonte: Stewart (2010, p.129-130)

Quadro 32 - Definição de Velocidade Instantânea

<p>DEFINIÇÃO 2 - Velocidade (ou velocidade instantânea) no instante $t = a$ como o limite de velocidades médias:</p>	$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
<p>se o limite existir.</p>	

Fonte: Adaptado de Stewart (2010, p. 132)

Quadro 33 - Definição de Derivada

DEFINIÇÃO 3 - A derivada de um função f em um número a , denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se o limite existir.

Fonte: Stewart (2010, p. 133)

Quadro 34 - Definição de Taxa Instantânea de Variação

DEFINIÇÃO 4 - O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de y em relação a x** em $x - x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fonte: Adaptado de Stewart (2010, p. 134)

Analisando as definições dos quadros 1; 2; 3 e 4 podemos perceber que trata-se do mesmo limite, caso o limite exista. E ainda, cada definição tem sua importância e seu significado, mesmo que a resolução matemática seja a resolução do mesmo limite.

Assim, podemos dizer que as definições de coeficiente de inclinação da reta tangente a uma curva num ponto, velocidade instantânea, derivada de uma função num ponto e taxa instantânea de variação de uma função, estão associadas a diferentes conceitos matemáticos, porém fazem referência ao mesmo objeto matemático (derivada) e, por isso, dependendo do contexto, a derivada de uma função f em relação à variável x assume várias notações, como, por exemplo, $y'(x)$, $D_x f(x)$, $\frac{dy}{dx}$. São vários nomes e uma única interpretação geométrica (Quadro 1, item b). Essa diversidade de nomes contribui para ressaltar a importância de estudar e buscar a compreensão das várias facetas de um mesmo objeto matemático.

Os estudos apresentados no Capítulo 2 de Waideman (2018) que gerou este produto educacional, indicam que o ensino de derivadas precisa acontecer por meio de várias representações e atribui essa necessidade para melhor compreensão do objeto matemático (CONSCIÊNCIA, OLIVEIRA, 2011; ORHUM, 2012).

Entre as representações, Orhum (2012) destaca a representação gráfica como a que gera muita dificuldade entre os alunos, como, por exemplo, em estabelecer

conexões entre o gráfico da função original e o gráfico da função derivada, além de terem dificuldades também de associar a escrita algébrica com gráfico que a representa (GIL, 2014).

Assim, esse produto educacional, busca apresentar questões que possam contribuir tanto com o aluno, como com o professor, a estudar derivadas utilizando-se de diversas representações semióticas, assunto que abordaremos a seguir.

3. TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (TRRS)

Segundo Duval (1993, 1995, 2012), registros de representações semióticas são um sistema de signos, que tem por objetivo a comunicação e atividades cognitivas do pensamento, o tratamento da informação e a objetivação.

Existem vários registros de representações no sistema semiótico. Matematicamente, é comum a apresentação de quatro (Figura 1), o que permite a exposição de diferentes sistemas semióticos, com diferentes signos.

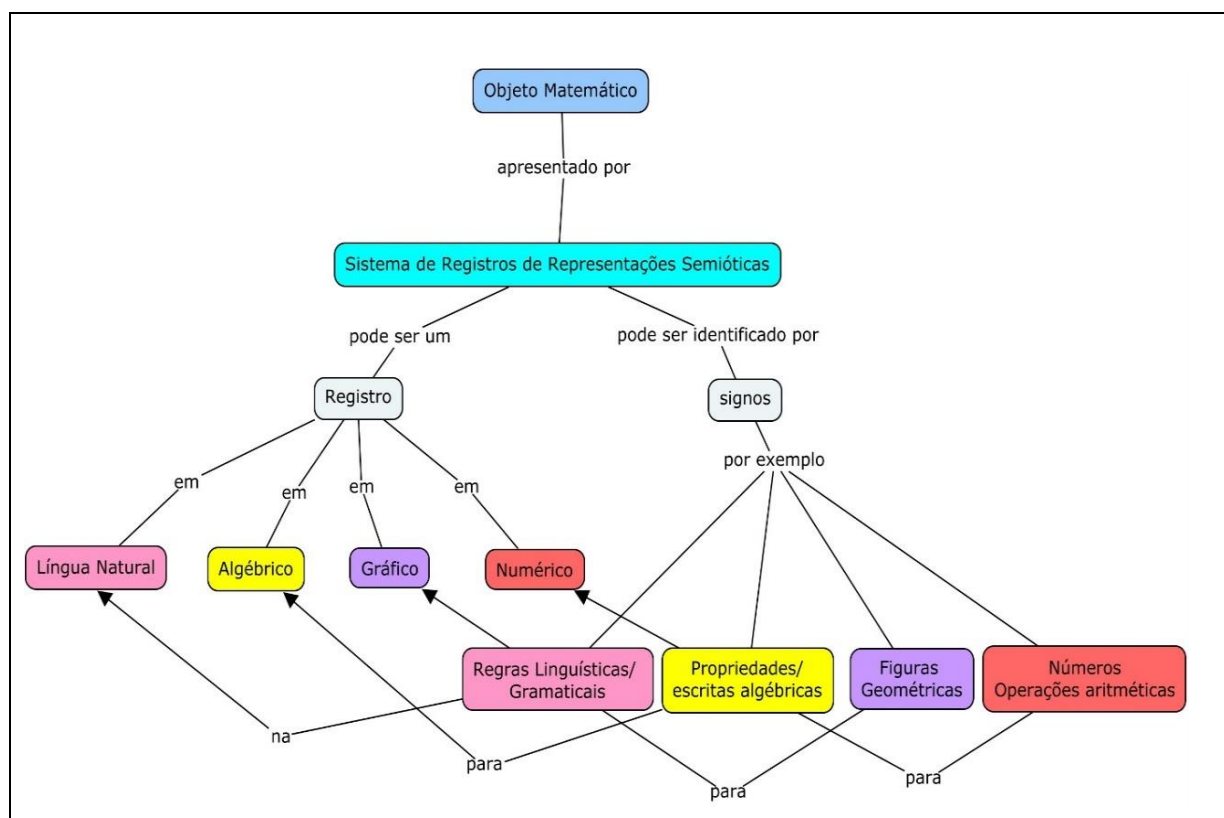


Tabela 1 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático

Fonte: Adaptado de Henriques e Almouloud (2016, p. 468)

Ao considerarmos as possíveis representações semióticas de um objeto matemático (Figura 1), como, por exemplo, a derivada, pode-se elencá-las de acordo com o Quadro 5:

Quadro 5 - Tipos de Registro de Representações Semióticas

e) Representação em língua natural;

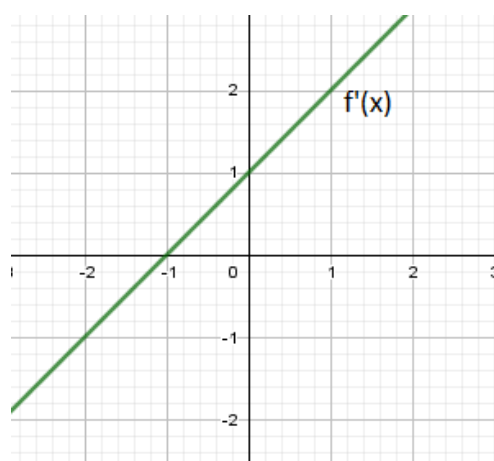
Exemplo a) Em um ponto de *Máximo* ou *Mínimo*, a inclinação da reta tangente é nula sempre?

f) Representação em forma algébrica;

Exemplo b): Derive: $f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$

g) Representação de figura geométrica ou gráfica;

Exemplo c)



h) Representação numérica

$$A = (1.63, 1.56)$$

Fonte: A autora.

Segundo Duval (2012), esses registros de representações semióticas são uma forma de exteriorizar o que as nossas representações mentais “formam” do objeto matemático analisado. Desse modo, um diferencial da teoria de Duval é considerar que as representações não só comunicam as representações mentais, como também possibilitam novas compreensões, reflexões e a construção/revisão/reestruturação das representações mentais.

O Quadro 6 apresenta as características de um registro de representação semiótica, de acordo com Duval (2012).

Quadro 6 - Características de um registro de representação semiótica descrita por Duval (2012)

<p>V) A formação de uma representação identificável</p> <p><i>Definição:</i> A formação de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido.</p> <p>Representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc. (Exemplificado no Quadro 12)</p> <p>A formação da representação deve respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entraves de construção para as figuras...).</p>
<p>VI) Tratamento</p> <p><i>Definição:</i> O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro.</p> <p>A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural.</p>
<p>VII) Conversão</p> <p><i>Definição:</i> A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial.</p> <p>A conversão é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística.</p>
<p>VIII) Observação</p> <p>A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento.</p>

Fonte: A autora

Os quadros 7 e 8, ilustram tratamentos e conversões.

Quadro 7 - Ilustração de Tratamento

Item b) do Quadro 5	
Derive: $f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$	} Representação
$f(x) = 6x^3 - 4x^1 + 2x^{-3} + 5x^0$ $f'(x) = 3.6x^{3-1} - 1.4x^{1-1} + (-3).2x^{-3-1} + 0.5x^{0-1}$ $f'(x) = 18x^2 - 4x^0 - 6x^{-4} + 0$ $f'(x) = 18x^2 - 4 - 6x^{-4}$	} TRATAMENTO
Podemos observar que, desde a análise da função até o término da resolução ao encontrarmos a derivada primeira da $f(x)$, usamos tratamento . Porque estamos em um único registro, o registro semiótico algébrico. Cada linha da resolução representa uma transformação interna nesse registro.	

Fonte: A autora

Quadro 835 - Ilustração de Conversão

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^2 - 2x$	
(II) Conversão do exercício do registro em língua natural para o registro gráfico.	
(III) Registro numérico $(-\infty, 1)$ <i>Decrescente</i> $(1; +\infty)$ <i>Crescente</i>	(IV) Registro figural
A resposta ao exercício acontece em um registro semiótico diferente do enunciado do exercício e diferente do item (I), portanto chamamos de Conversão.	O item (II) é outra opção de conversão para esse exercício, da língua natural para a figural.

Fonte: A autora

A utilização de vários registros de representação semióticos aumentam significativamente as capacidades cognitivas de um indivíduo com a diversificação das representações, especialmente quando há uma conversão entre representações em dois registros de representações. As questões abordadas a seguir foram pensadas a partir da utilização de tratamentos e conversões, especialmente partindo das representações gráficas.

Para facilitar a utilização em sala de aula, cada questão, ou conjunto de questões, é apresentado em uma única página, o que permite ao professor simplesmente imprimir a página de interesse, se for o caso.

4. QUESTÕES SOBRE O CONTEÚDO DERIVADAS

Inicialmente, apresentamos um bloco de questões, chamado de Questões de Aquecimento, com a finalidade de proporcionar uma rápida revisão sobre conceitos essenciais relacionados às derivadas. São 11 questões a serem respondidas com “Sim” ou “Não”. Nesta fase, optamos apenas por Registro em Língua Natural, tanto a pergunta como a resposta. Sugerimos que esse bloco seja aplicado como uma retomada do conteúdo, e o professor aproveite as respostas dos estudantes para corrigir eventuais entendimentos que possam causar impedimentos para as compreensões das questões futuras.

Em seguida, apresentamos 32 questões mais aprofundadas, buscando mais de um tópico sobre derivadas em algumas questões. Essas questões possuem dicas para auxiliarem nos estudos, as quais são definições, teoremas, e outros que são vistos em sala de aula. Ainda, nessa fase, buscamos priorizar mais um registro de representação semiótico por questão, por exemplo, com enunciado em Registro em Língua Natural e resposta em Registro Numérico. As dicas são apresentadas logo após as questões e podem ser utilizadas, ou não, pelos docentes.

As questões desse segundo bloco compõem a 2ª fase do aplicativo “*Derivadas Quiz*”, que pode ser encontrado na *Play Store*, ou, no Apêndice E de Waideman (2018). Sugerimos que as eventuais dificuldades apresentadas pelos estudantes nas resoluções sejam discutidas em sala de aula, confrontando representações algébricas e gráficas.

1ª fase: Questões de Aquecimento

- 1.** A derivada pode ser considerada como uma função?
- 2.** Se f é uma função polinomial, é possível calcular a derivada de f num ponto $P(a, f(a))$?
- 3.** Considerando $P(a, f(a))$ pertencente ao domínio da f , a derivada de uma função f num ponto $P(a, f(a))$ pode ser considerada a **TAXA DE VARIAÇÃO** da função em P ?
- 4.** Considere um ponto de máximo ou mínimo do gráfico f no qual exista reta tangente. Nesse caso, podemos dizer que a inclinação dessa reta tangente ao gráfico nesse ponto é sempre nula ?
- 5.** Um ponto de inflexão do gráfico de uma função $f(x)$ pode ser também ponto de *Máximo* ou *Mínimo* desse gráfico?
- 6.** A abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de uma função $f(x)$ pode ser abscissa de um ponto de *Máximo* ou *Mínimo* da função derivada $f'(x)$?
- 7.** Uma função crescente, num intervalo I , tem derivada primeira negativa nesse intervalo?
- 8.** Quando a derivada $f'(x)$ muda de sinal positivo (+) para negativo (-) ao passar por uma abscissa $x = a$, então o ponto $P(a, f(a))$ é um ponto de mínimo do gráfico da função $f(x)$?
- 9.** Para valores pequenos de Δx , tem-se que $dy \approx \Delta y$. Dessa forma, podemos dizer que, para calcular pequenas variações de y , pode-se utilizar *Diferencial* dessa função?
- 10.** Toda função $f(x)$ definida num domínio D sempre assumirá ao menos um valor *máximo* (ou *mínimo*) em algum $x \in D$?
- 11.** Se o gráfico da $f(x)$ possui um ponto de inflexão $P(a, f(a))$, então a abscissa $x = a$ será raiz da função derivada $f'(x)$?

Fonte: A Autora

2ª fase: Questões de Aprofundamento

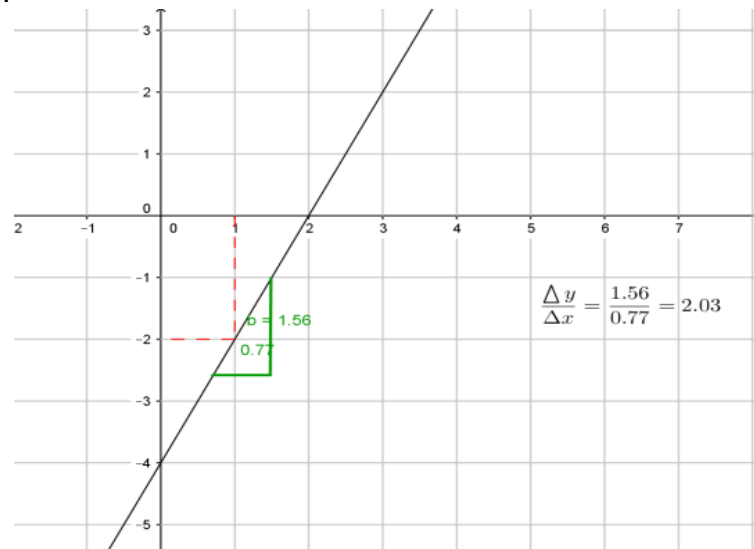
Dica

12. Derive: $f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$

- a. $f'(x) = 6x^2 - 4x - 6x^{-4} + 1$
- b. $f'(x) = 18x - 4 + 2x^{-4}$
- c. $f'(x) = 18x^2 - 4 - 6x^{-4}$
- d. $f'(x) = 18x^2 + 4 - 6x^{-4} + 0$

Dica

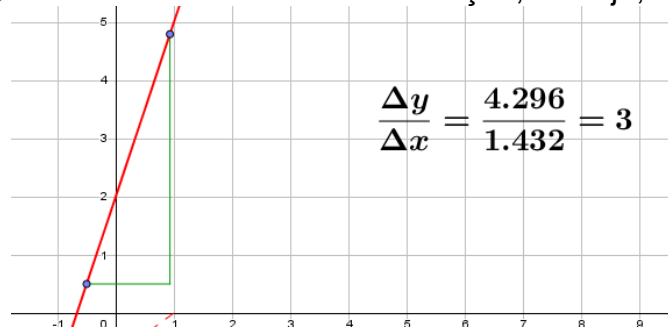
13. Seja $f(x) = 2x - 4$ a reta representada no gráfico. Observe os pontos em destaque sobre a reta. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a taxa média de variação na função entre esses dois pontos. Qual é a taxa instantânea de variação, ou seja, em um ponto P?



- b) 0
- c) 2
- d) -2
- e) não é possível calcular

Dica

14. Seja $f(x) = 3x + 2$ a reta representada no gráfico. Observe os pontos em destaque sobre a reta. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a taxa média de variação na função entre esses dois pontos. Qual é a taxa instantânea de variação, ou seja, em um ponto P?

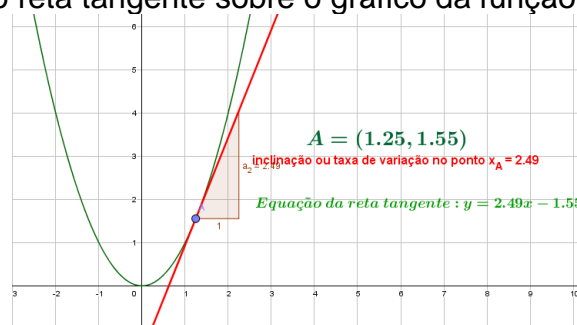


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.296}{1.432} = 3$$

- b) 0
 c) 3
 d) -3
 e) não é possível calcular

Dica**O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES****15 A 18.**

Observe a inclinação da reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(-1, 1)$, a inclinação, ou taxa de variação, é -2 .

15. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = 2x$ d) $f(x) = -2x$

16. A posição da reta tangente em $x = -1$ é

a) Crescente b) Horizontal c) Decrescente d) Vertical

17. O sinal do coeficiente angular da reta tangente no intervalo $x < 0$ é

a) Negativo b) Zero c) Positivo d) Nenhuma das alternativas

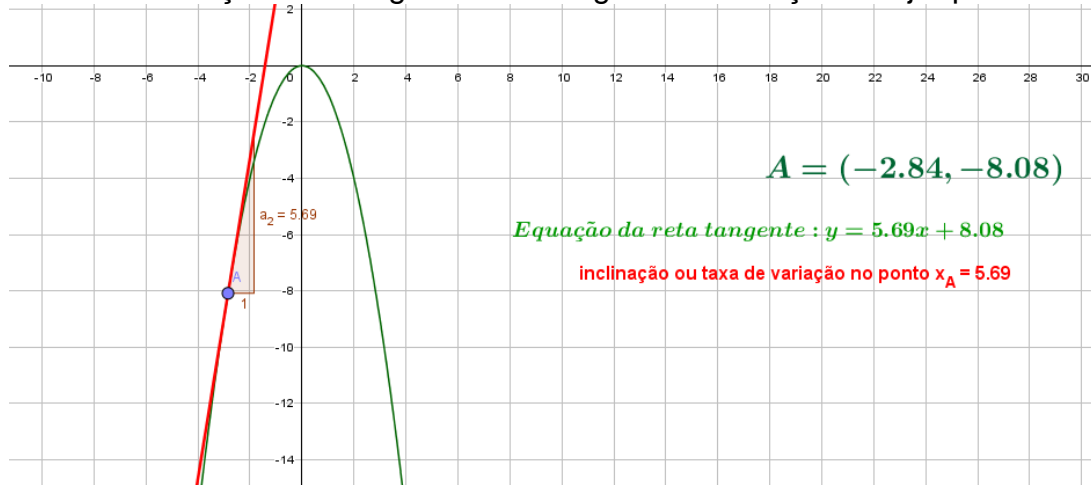
18. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é

a) Crescente e positiva b) Decrescente e negativa
 c) Crescente e negativa d) Decrescente e positiva

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 19 A 22.

Observe a inclinação reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(-2, -4)$, a inclinação, ou taxa de variação, é -4 .

19. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:

a () $f(x) = x^2$ b () $f(x) = -x^2$ c () $f(x) = 2x$ d () $f(x) = -2x$

20. A posição da reta tangente em $x = -2$ é

a () Crescente b () Horizontal c () Decrescente d () Vertical

21. O sinal do coeficiente angular da reta tangente no intervalo $x < 0$ é

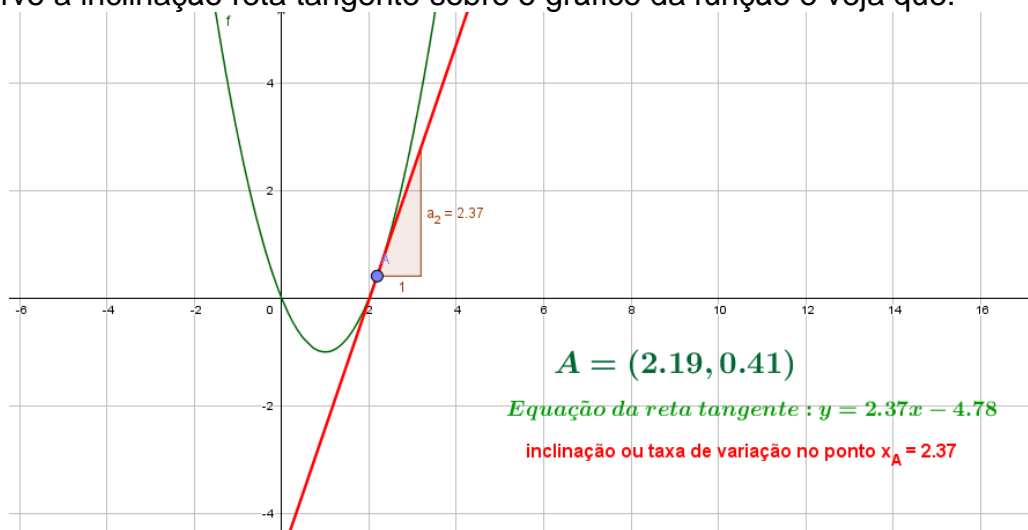
a () Negativo b () Zero c () Positivo d () Nenhuma das alternativas

22. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é

a () Crescente e positiva
 b () Decrescente e negativa
 c () Crescente e negativa
 d () Decrescente e positiva

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 23 A 26.
 Observe a inclinação reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(1, -1)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 0.

23. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:

- a () $f(x) = x^2 + 2x$ b () $f(x) = x^2 - 2x$ c () $f(x) = 2x + 2$ d () $f(x) = -2x - 2$

24. A posição da reta tangente em $x = 1$ é

- a () Crescente b () Horizontal c () Decrescente d () Vertical

25. O coeficiente angular da reta tangente em $x=1$ é

- a () Negativo b) Zero c () Positivo d () Nenhuma das Alternativas

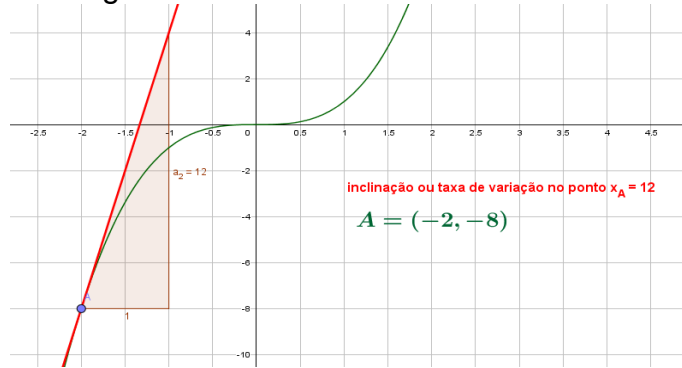
26. Na função $f(x)$ o ponto $(1, -1)$, é:

- a () Ponto de Máximo
 b () Ponto de Mínimo
 c () Apenas um ponto da função
 d () Nenhuma das alternativas

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 27 E 28.

Observe a reta tangente sobre a curva.



No ponto $(-2, -8)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

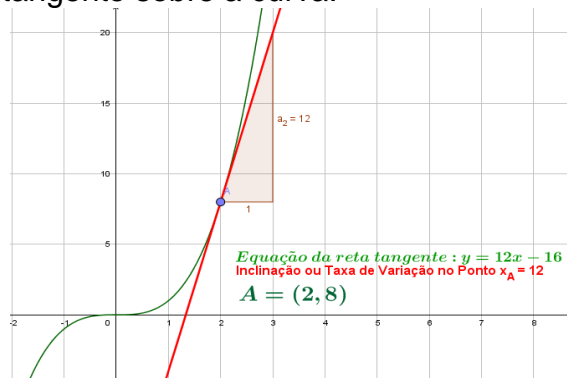
27. A posição da reta tangente em $x = -2$ é
 a () Crescente b () Horizontal c () Decrescente d () Vertical

28. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é
 a () Crescente e positiva b () Decrescente e negativa
 c () Crescente e negativa d () Decrescente e positiva.

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 29 E 30.

Observe a reta tangente sobre a curva.



No ponto $(2,8)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

29. Em relação à posição da reta tangente em $x = 2$ é
 a () Crescente b () horizontal c () Decrescente d () Vertical

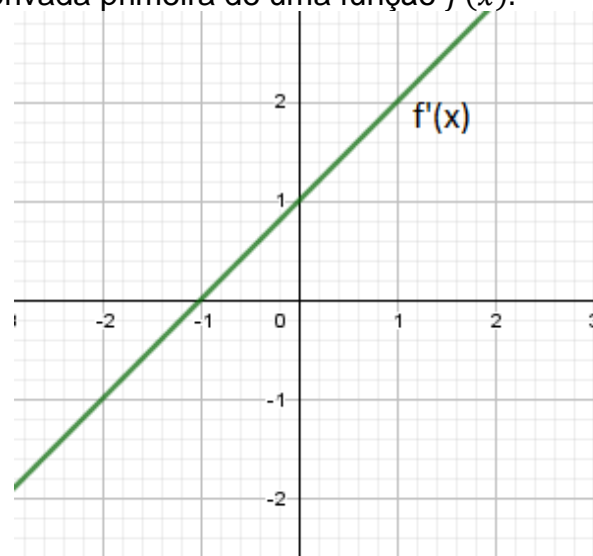
30. Em relação ao intervalo $x > 0$, a $f(x)$ é
 a () Crescente e positiva b () Decrescente e negativa
 c () Crescente e negativa d () Decrescente e positiva

Dica

31. Se a função é crescente, então a derivada é
 a() Negativa b) Nula c () Positiva d () Nenhuma das Alternativas
32. Se a função é decrescente, então a derivada é
 a() Negativa b) Nula c () Positiva () Nenhuma das Alternativas

Dica

33. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.

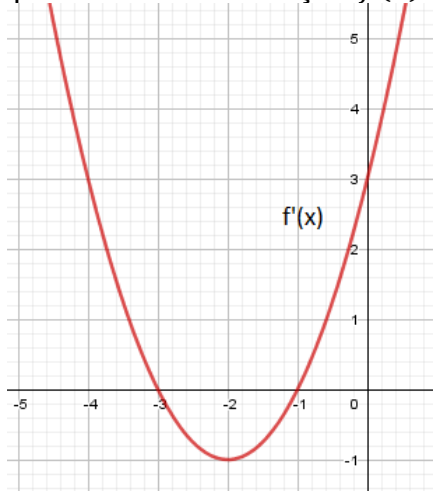


Com base no gráfico, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decréscimo de $f(x)$?

- a () $(-\infty; +\infty)$ crescente
- b () $(-\infty, -1]$ crescente; $[-1, +\infty)$ decrescente
- c () $(-\infty, -1]$ decrescente; $[0, +\infty)$ crescente
- d () $(-\infty, -1]$ decrescente; $[-1, +\infty)$ crescente

Dica

34. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.



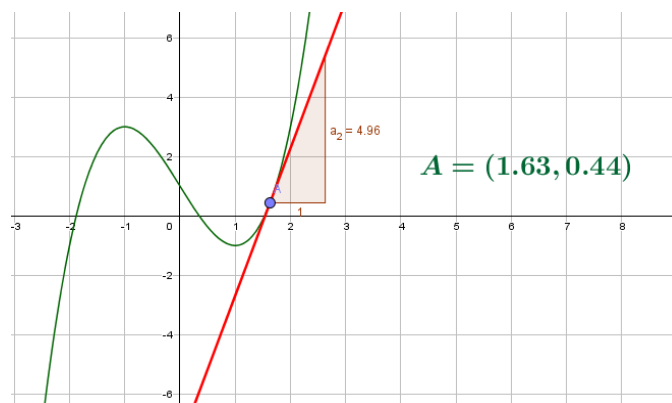
Com base nele, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$?

- a () $(-\infty; -2]$ decrescente; $[-2; +\infty)$ crescente
- b () $(-\infty; -3]$ crescente; $[-3; -1]$ decrescente; $[-1; +\infty)$ crescente
- c () $(-\infty; -2]$ crescente; $[-2; +\infty)$ decrescente
- d () $(-\infty; -3]$ decrescente; $[-3; -1]$ crescente; $[-1; +\infty)$ decrescente

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 35 E 36.

No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.



35. Quais são as coordenadas do ponto de máximo local?

- a () $(-2; 0)$
- b () $(-1; 3)$
- c () $(0; 1)$
- d () $(1; -1)$

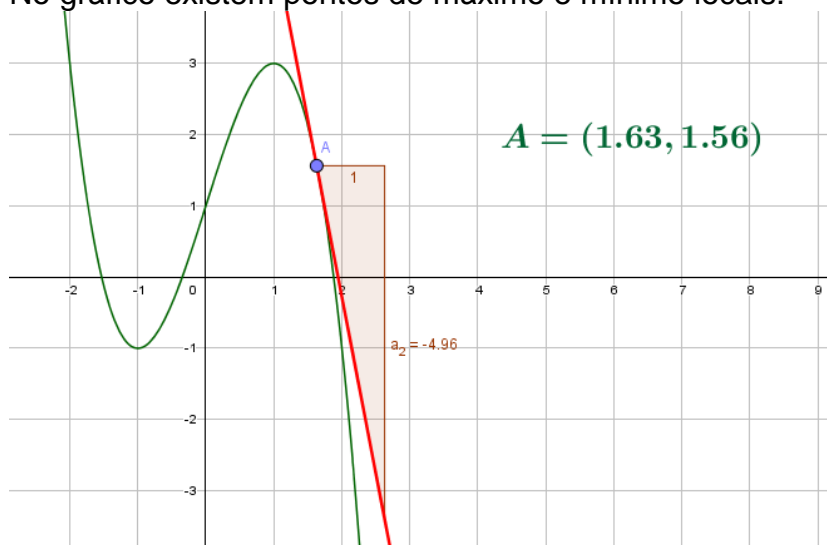
36. Quais são as coordenadas do ponto de mínimo local?

- a () $(-1; 3)$
- b () $(0; 1)$
- c () $(1; -1)$
- d () $(2; 3)$

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 37 E 38.

No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.



37. Quais são as coordenadas do ponto de máximo local?

a () $(-2; 3)$

b () $(0; 1)$

c () $(1; 3)$

d () $(2; 0)$

38. Quais são as coordenadas do ponto de mínimo local?

a () $(-1; -1)$

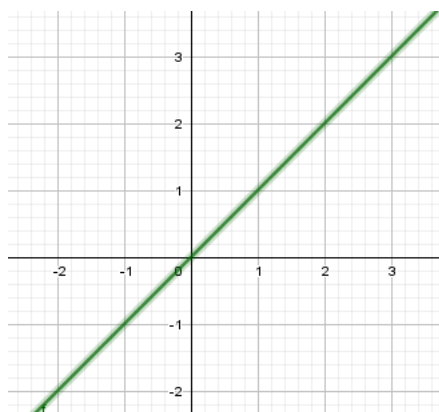
b () $(0; 1)$

c () $(1; 3)$

d () $(2; 0)$

Dica

41. O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para cima da $f(x)$ é

a () $(-\infty, 0)$

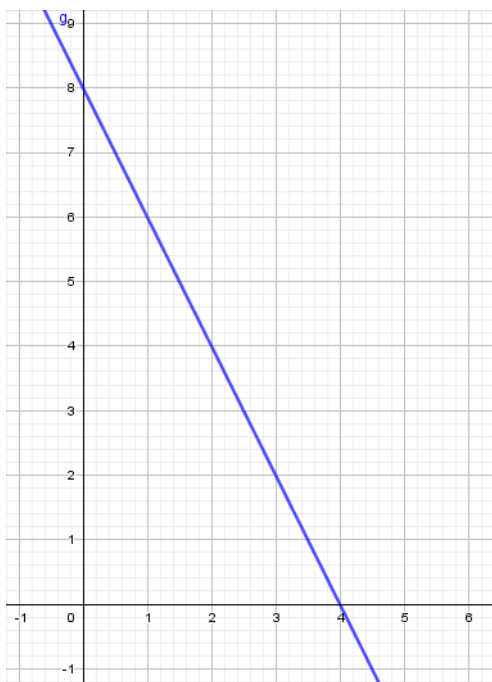
b () $(0, +\infty)$

c () $(-\infty, +\infty)$

d () Nenhuma das Alternativas

Dica

43. O gráfico refere-se à derivada segunda $f''(x)$ da $f(x)$.
(clique no botão para visualizar o gráfico)



Observando esse gráfico podemos dizer que o ponto $(4,0)$ representa:

- a () um ponto crítico na $f(x)$
- b () um ponto Máximo ou Mínimo na $f(x)$
- c () um ponto de inflexão na $f(x)$
- d () Nenhuma das Alternativas

Dicas para auxiliar na resolução de cada questão.

Dica: Para a questão 12

TEOREMA 1 Se $f(x) = c$, c uma constante real, então $f'(x) = 0$, para todo x .

TEOREMA 2 Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, para todo n inteiro positivo.

TEOREMA 3 Se $f(x) = k \cdot g(x)$, k constante, então $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

TEOREMA 4 Se $h(x) = f(x) + g(x)$, então se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$, teremos:
 $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Dica: para as questões 13 e 14

1. Se $y = f(x)$, e se x variar de $x_1 + \Delta x$, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y , denotada por Δy , é $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, quando a variação de x for Δx . A **Taxa Média de Variação** de y por unidade de x , quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. A **Taxa de Variação Instantânea** de uma função f no ponto a é o limite, quando $h \rightarrow 0$, do quociente entre a variação da função no intervalo $[a, a + h]$ e o comprimento do intervalo, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(a)$$

Dica: para as questões 15 a 26

1. Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Onde, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima; se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

2. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.

3. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.

4. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.

5. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.

6. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica: para as questões 27 ; 28; 29 e 30.

1. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.
2. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.
3. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto e é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.
4. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.
5. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica para questões 31; 32; 33 e 34

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) :

- i) Se $f'(x) > 0$ (a derivada em x_i for positiva) para todo x em (a, b) , então f será crescente em $[a, b]$;
- ii) Se $f'(x) < 0$ (a derivada em x_i for negativa) para todo x em (a, b) , então f será decrescente em $[a, b]$;

Dica para as questões 35; 36; 37 e 38

1) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos (a, b) , exceto possivelmente em c .

i) Se o sinal de f' mudar de POSITIVO para NEGATIVO em c , então f tem um **MÁXIMO LOCAL** em c .

ii) Se o sinal de f' mudar de NEGATIVO para POSITIVO em c , então f tem um **MÍNIMO LOCAL** em c .

2) Se a reta tangente em alguma $f(c)$ tiver inclinação zero, esse c é um candidato a ser **MÁXIMO LOCAL OU MÍNIMO LOCAL**.

Dica para as questões 39; 40; 41 e 42

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c , então:

- i) Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;
- ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$;

Dica para a questão 43

Um **ponto de inflexão** é um ponto sobre uma $f(x)$ na qual a derivada de segunda ordem troca o sinal. A $f(x)$ muda de ter concavidade para cima (positiva) para concavidade para baixo (negativa), ou vice-versa.

Gabarito das questões1ª FASE

1. SIM	5. NÃO	9. SIM
2. SIM	6. SIM	10. NÃO
3. SIM	7. NÃO	11. SIM
4. SIM	8. NÃO	

2ª
FASE

12. C	29. A
13. B	30. A
14. B	31. C
15. A	32. A
16. C	33. D
17. A	34. B
18. D	35. B
19. B	36. C
20. A	37. C
21. C	38. A
22. C	39. B
23. B	40. C
24. B	41. A
25. B	42. D
26. B	43. C
27. A	
28. C	

5. ALGUNS COMENTÁRIOS EM RELAÇÃO ÀS QUESTÕES

1ª fase

As quatro primeiras questões da 1ª fase, referem-se a diferentes conceitos associados ao conceito de derivada (e foram apresentadas nos quadros 1, 2, 3 e 4). Admite-se que a taxa de variação instantânea pode ser “visualizada” pela inclinação da reta tangente em um dado ponto, que, por sua vez, é necessário para compreender e atribuir um sentido ao teste da derivada 1ª ($f'(x)$), por exemplo.

A questão 4 (Quadro 9), por exemplo, ilustra a primeira perspectiva: enunciada apenas no registro em língua natural, pode ser respondida em outros registros semióticos ou, ainda, por meio de tratamentos. Nesta questão, se optarmos por alguma conversão, dizemos que há uma conversão intermediária, pois a resposta final volta a ser em registro em língua natural, a mesma do enunciado.

As questões 5 a 8, 10 e 11 retomam conceitos amplamente utilizados nas aulas de CDI, sobre os quais repousam inúmeras soluções de problemas reais.

Os problemas envolvendo taxas de variações são frequentes em vários estudos, como, por exemplo, na Biologia quando se estuda a taxa de crescimento de uma população de bactérias em relação ao tempo; na Economia ao estudar a evolução do custo marginal em relação ao tempo; em Medicina, quando se estuda a taxa de crescimento de um tumor em relação ao tempo; em Mecânica ao se estudar fluidos em movimento em relação ao tempo; em Eletricidade, ao se descrever a variação da carga elétrica e da corrente em um circuito elétrico em relação ao tempo. Na Física, a derivada do espaço está presente na própria definição de velocidade (Quadro 3) e aceleração, em que a velocidade é definida como a taxa instantânea da variação da posição no espaço em relação ao tempo. Em várias áreas, diversos problemas de máximos e mínimos são resolvidos utilizando-se a derivada (AGUIAR, SIPLE, MORO, 2012).

Caso o estudante não compreenda o significado de ponto de máximo, mínimo, ponto de inflexão, provavelmente não conseguirá utilizar conceitos para descrever um determinado comportamento, como, por exemplo, perceber que o

valor de uma reação química se altera em um dado momento (ponto de inflexão), ou se pretende encontrar áreas máximas a serem cercadas com uma certa quantidade de tela.

Nessa perspectiva de resolver problemas, a questão 9 trata das diferenciais, o que causa uma confusão para os estudantes, pois tem-se a : $dy = f'(x)dx$, o que remete a semelhanças das definições de derivadas apresentadas anteriormente. A consequência direta desse fato é que a derivada não é o quociente entre duas diferenciais, mas comporta-se como se fosse esse quociente. Isto significa que a partir da relação: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, é possível escrever: $dy = f'(x)dx$, que se denomina equação diferencial, outra interpretação para a resolução de problemas.

Quadro 36 - Questão do aplicativo e possibilidades de conversões e tratamentos

4. Considere um ponto de máximo ou mínimo do gráfico de f para o qual exista reta tangente. Nesse caso, podemos dizer que a inclinação dessa reta tangente ao gráfico nesse ponto é sempre nula?

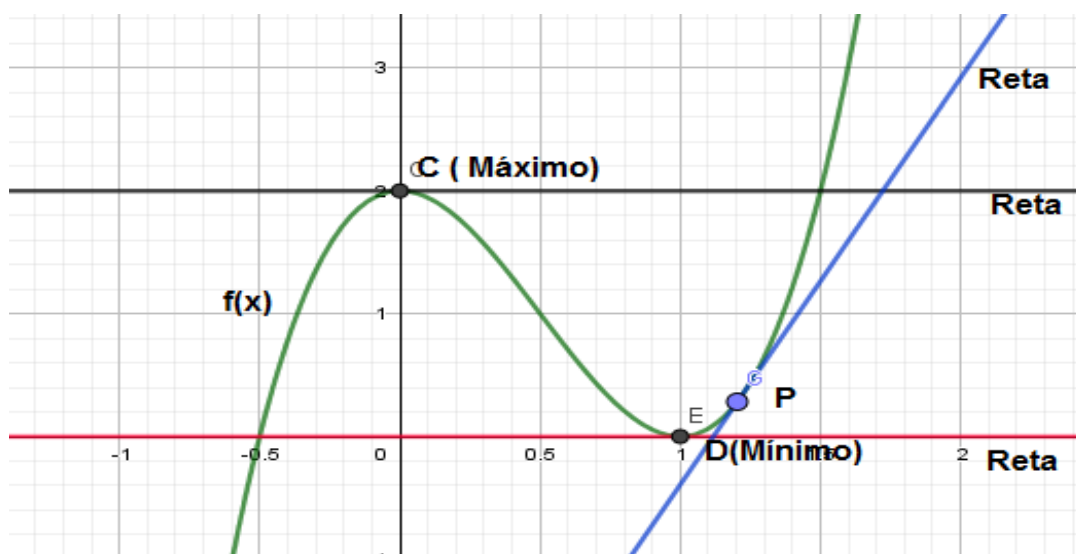
Sim

Não

Possíveis interpretações:

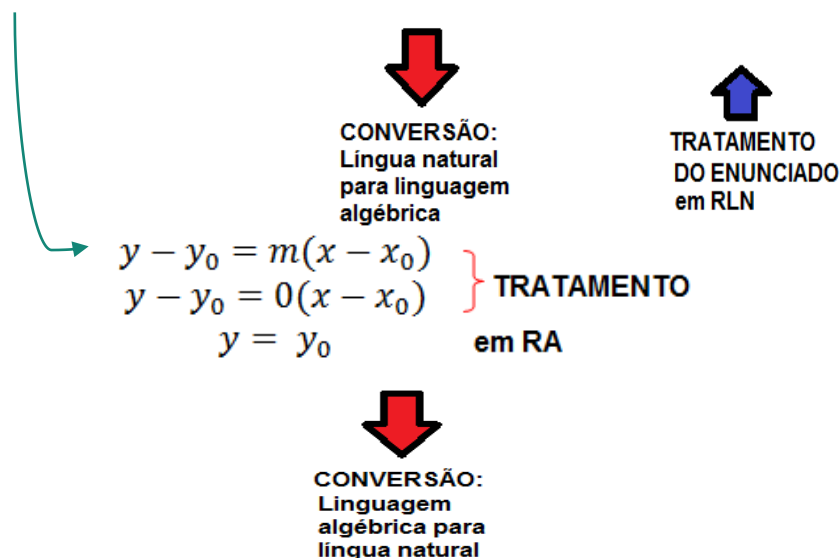
(III) **Conversão intermediária** - Conversão entre a língua natural (enunciado) para a gráfica.

Por meio dessa conversão, é possível perceber que tanto no ponto C quanto no D a inclinação da reta tangente, nesses pontos, é nula, ou seja, são paralelas ao eixo x em C e D. No ponto P, existe uma inclinação da reta tangente, diferente de zero, logo não é paralela ao eixo x . Dizemos que o registro gráfico contribui para a interpretação do enunciado, levando a resposta “Sim” para a questão.



(IV) Tratamentos e conversões

Partindo da hipótese de que a reta tangente é nula em um ponto, então o coeficiente angular da reta será zero. Logo, tomando $P(x_0; y_0)$ e $m = 0$, podemos encontrar a reta tangente.



Sabendo que, $y = y_0$ representa um função constante e, seu gráfico é uma reta sem inclinação e paralela ao eixo x , logo em pontos de máximos e mínimos de uma função, a reta tangente nesses pontos terá características similares com as apresentadas acima. Portanto, a resposta será sim.

Legenda: Registro Algébrico (RA) e Registro em Língua Natural (RLN)

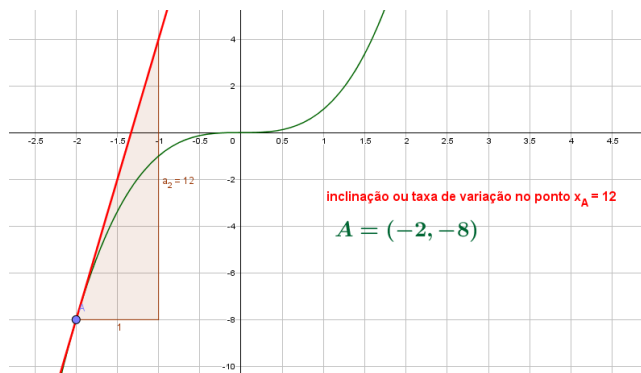
Fonte: A autora

2ª fase

Ao realizar o tratamento em uma representação, o estudante precisa “dominar” as regras de funcionamento daquele Registro de Representação Semiótico. Por exemplo, a questão 12 (item b do Quadro 5) tem enunciado e solução, por meio de tratamento, no registro algébrico. A questão 27 (Quadro 10) tem enunciado e solução, por meio de tratamento, no registro de língua natural, porém, para resolução da questão, é apresentado um registro gráfico que é tão importante quanto o enunciado da questão.

Quadro 10 - Questão 27 que mobiliza tratamento para sua resolução, por meio de uma conversão intermediária no registro gráfico

27. Observe a reta tangente sobre a curva.



No ponto $(-2, -8)$ a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

Em relação à posição da reta tangente ao gráfico no ponto $(-2, f(-2))$ podemos afirmar que é:

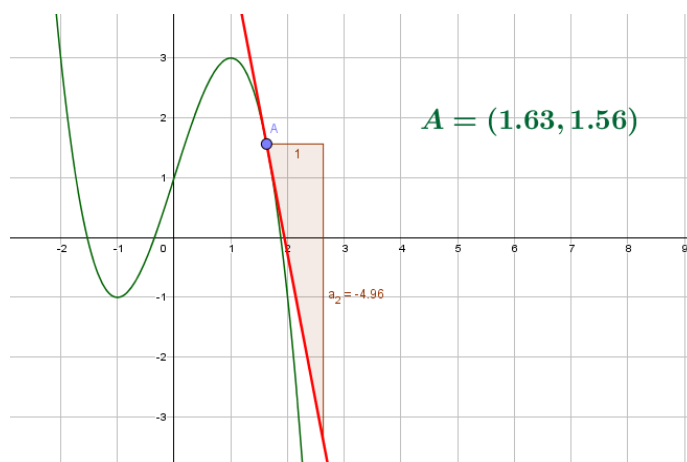
- a () Crescente
- b () horizontal
- c () Decrescente
- d () Vertical

Fonte: A autora.

A parte gráfica, por exemplo, da questão 37 (Figura 2) da 2ª fase possui um gráfico. Ressaltamos, a disponibilidade da “dica” presente em cada questão da segunda fase. O(s) ponto(s) de máximo(s) e/ou mínimo(s) e a observação da posição da reta tangente em cada ponto ou em algum intervalo da curva também puderam ser observados nessa questão, como o “Teste Crescente e Decrescente de uma função”. Alguns pontos citados não são cobrados na questão, porém, podem despertar no aluno a ligação de vários conceitos envolvidos, o que pode contribuir para não ter uma aprendizagem “fragmentada”, ou em tópicos. Essa ligação foi citada (na dissertação) como dificuldades (de associar os dados presentes no gráfico com as suas respectivas funções e derivadas) dos alunos em conteúdos que envolvem gráficos.

Dica³¹

35. No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.



Quais as coordenadas do ponto de máximo local?

a () $(-2; 3)$ b () $(0; 1)$ c () $(1; 3)$ d () $(2; 0)$ 

Resposta: C

Dica

1) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos (a, b) , exceto possivelmente em c .

i) Se o sinal de f' mudar de POSITIVO para NEGATIVO em c , então f tem um **MÁXIMO LOCAL** em c .

ii) Se o sinal de f' mudar de NEGATIVO para POSITIVO em c , então f tem um **MÍNIMO LOCAL** em c .

2) Se a reta tangente em alguma $f(c)$ tiver inclinação zero, esse c é um candidato a ser **MÁXIMO LOCAL OU MÍNIMO LOCAL**.

Figura 2 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada

Fonte: A autora

Ainda em relação à Figura 2, podemos observar o registro gráfico que faz parte do enunciado, que precisa de uma resposta em registro numérico e que ainda possui uma dica em língua natural, ou seja, para que essa dica funcione, é preciso que o estudante coordene esses registros de representações.

³¹ Essa “dica” é um botão que aparece no aplicativo, apenas na segunda fase, quando o estudante erra a primeira tentativa de resposta. Abaixo de cada questão está a “dica” indicada para a mesma.

As questões 41 e 42 apresentadas na Figura 3 não são comuns nos livros-textos usados como referência na disciplina de CDI. Como já citado, os alunos apresentam (NASSER, 2007; ALORY *et al.*, 2015; VASQUES, 2015) dificuldades em questões em que precisam traçar e analisar gráficos, dada uma função no registro semiótico algébrico. No caso dessa questão, há uma inversão do que é comum na disciplina.

Em especial no conteúdo de derivadas, para encontrar o intervalo de concavidade de uma função, calcula-se a derivada segunda, encontra-se o ponto de inflexão e, só em seguida, estuda-se para encontrar o intervalo de concavidade, tudo no registro algébrico. Nessa questão, é apresentado apenas o gráfico da segunda derivada, sem qualquer registro algébrico. Duval (2012) ressaltou a importância de apresentar um objeto matemático em mais de um registro e, nesse caso, ressaltamos a importância de apresentarmos enunciados diferentes do que os alunos estão acostumados. Para Duval (2009), existe um alerta para o sentido da conversão, fazer uma conversão, por exemplo, da representação algébrica para a representação gráfica não significa que a conversão no sentido contrário se dará de forma natural, ou seja, fazer uma conversão da representação gráfica para a algébrica do mesmo objeto matemático.

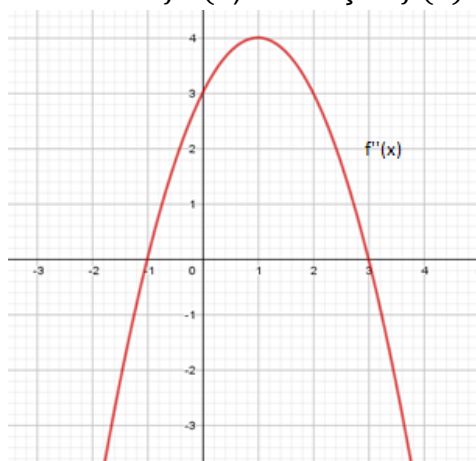
Olhar para o gráfico da Figura 3 não traz apenas o conteúdo concavidade. Permite retomar a diferença entre uma função ser positiva e crescente, negativa e decrescente e, ainda, algo que pode chamar a atenção dos alunos é a possibilidade de ter uma função positiva e decrescente ou negativa e crescente. Fato que, na fase teste das questões, trouxe confusões de conceitos aos alunos. Traz também a informação de que o ponto de inflexão ($f''(x) = 0$) é um ponto de máximo ou mínimo da função derivada primeira.

Questões como as apresentadas na Figura 3 podem contribuir para minimizar as dificuldades mencionadas anteriormente, além de ir ao encontro dos aspectos da TRRS. Ao analisar essas questões, é preciso ter como conhecimento qual é o fator que leva à determinação da concavidade de uma função. Uma das técnicas utilizadas é a derivada de 2ª ordem da função, sendo ela a responsável por determinar os intervalos, no eixo das abscissas, onde a concavidade da função, no seu gráfico, é para cima (ou para baixo). Ou seja, quando a derivada de 2ª ordem de uma função, dentro de um intervalo, for positiva, então a concavidade do gráfico dessa função será para cima, ou quando a derivada de 2ª ordem de uma função,

dentro de um intervalo, for negativa, logo a concavidade do gráfico dessa função será para baixo. O limitador entre as mudanças de concavidade é chamado de “ponto de inflexão”. O mesmo é determinado pela equação $f''(x) = 0$. Quando essa equação não tiver solução real, temos que não existem mudanças de concavidade no gráfico de uma função. Ao passo que, se ela tiver soluções reais, ou seja, n números reais como solução da equação nessa equação $f''(x) = 0$, temos n mudanças de concavidades no gráfico da f . Portanto, no gráfico das questões 41 e 42, temos dois pontos de inflexões, ou seja, a função possui duas mudanças de concavidades, nos pontos $(-1,0)$ e $(3,0)$.

Dica

O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



44. O gráfico informa que o intervalo sobre o qual o gráfico de $f(x)$ possui concavidade voltada para cima é
 a () $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b () $(-\infty, 1)$ c () $(1, 4)$ d () $(-1, 3)$

45. O gráfico informa que o intervalo sobre o qual o gráfico de $f(x)$ possui concavidade voltada para baixo é
 a () $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b () $(-\infty, 1)$ c () $(1, 4)$ d () $(-1, 3)$

Dica

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c :

Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;

ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$;

Figura 3 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada

Fonte: A autora

Ainda nessas questões, temos que, no intervalo de $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ a concavidade da $f(x)$ é para baixo e, no intervalo de $(-1, 3)$, a concavidade é para

cima. Ou seja, $f''(x)$ negativa, concavidade para baixo; $f''(x)$ positiva, concavidade para cima, conforme mostra a Figura 4.

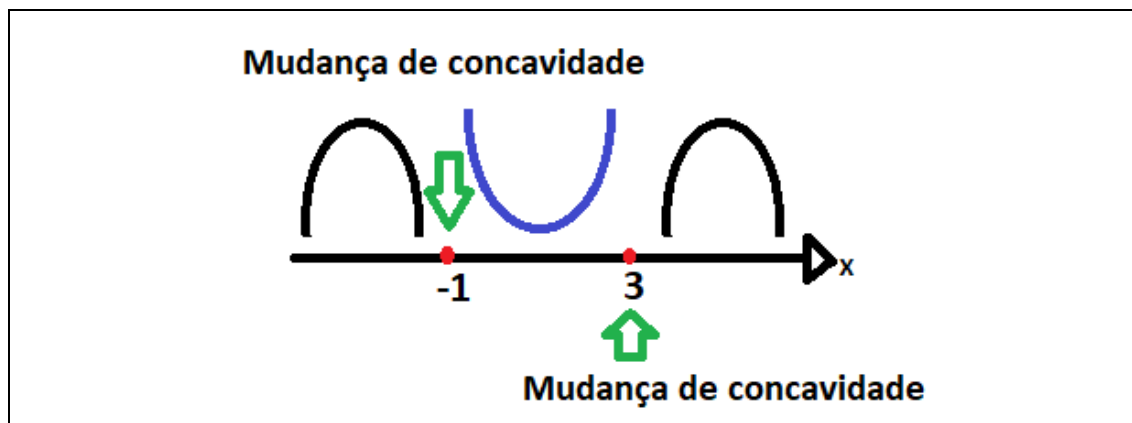


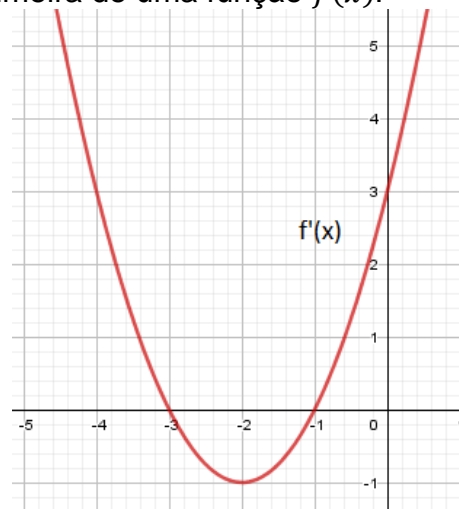
Figura 4 – Representação Figural da análise das questões 41 e 42

O objetivo de analisar algumas questões é mostrar que é possível “passar” pelos registros semióticos e, assim, poder construir conceitos sobre qualquer tema. Analisar várias facetas de um objeto matemático é fundamental, tanto para o ensino como para a aprendizagem. Na língua natural, mais utilizada em exercícios, devemos nos atentar para a clareza, objetividade e coerência nos enunciados.

Na questão 34, por exemplo, fizemos um outro tipo de análise, em queo(a) professor(a) pode solicitar ou indagar seus alunos e tentar minimizar a possível falta de compreensão. A questão em si pede apenas o intervalo de crescimento e decrescimento da função por meio da derivada primeira.

Quadro 37 - Análise da questão 34 em relação às informações observadas

34. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.



Com base nele, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decréscimo de $f(x)$?

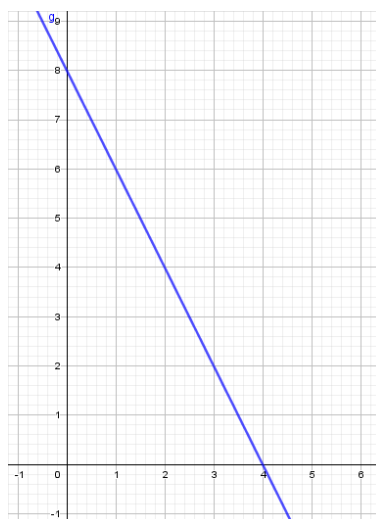
Análises de características que devem ser observadas pelos estudantes	Implicação
$f'(x) > 0$, intervalos $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$	$f(x)$ crescente nesses intervalos.
$f'(x) < 0$, intervalo $(-3, -1)$	$f(x)$ decrescente nesse intervalo.
zeros da $f'(x)$ -3 e -1	Pontos de Máximos ou Mínimos Locais da $f(x)$
Mudança de sinal da $f'(x)$ de positivo para negativo em $(-3,0)$	Ponto de Máximo Local
Mudança de sinal da $f'(x)$ de negativo para positivo em $(-1,0)$	Ponto de Mínimo Local

Fonte: A autora

Uma análise do gráfico da derivada segunda de uma função $f(x)$ qualquer, torna-se um exercício de reflexão do conceito derivadas. No Quadro 24 abordaremos a questão 43 do aplicativo e indicaremos algumas informações que o professor pode explorar ao trabalhar com questões desse tipo.

Quadro 38 - Análise da questão 43 em relação às informações observadas

46. O gráfico refere-se à derivada segunda $f''(x)$ da $f(x)$.



Observando esse gráfico podemos dizer que o ponto $(4,0)$ representa:

- a () um ponto crítico na $f(x)$
- b () um ponto Máximo ou Mínimo na $f(x)$
- c () um ponto de inflexão na $f(x)$
- d () Nenhuma das Alternativas

Análises de características que devem ser observadas pelos estudantes	Implicação
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Ponto de máximo ou mínimo da $f'(x)$.
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Ponto de inflexão da $f(x)$.
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Determina o limite que $f'(x)$ é crescente e/ou decrescente.
$f'' > 0$ em $(-\infty, 4)$	Concavidade da $f(x)$ para cima, neste intervalo
$f''(x) < 0$ em $(4, +\infty)$	Concavidade da $f(x)$ para baixo, neste intervalo.

Fonte: A autora

Outras indagações também podem ser feitas pelo professor(a). O objetivo é que o aluno não veja apenas o conteúdo em tópicos, sem ligações, mas que também seja oportunizado mais de um registro de representação semiótico.

REFERÊNCIAS

CONSCIÊNCIA, M.; OLIVEIRA, H. Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo. In **Actas do XXII SIEM** (pp.1-15) Lisboa: APM. 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012. p. 266-297.

_____. **Sémiosis et pensée humaine**: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang, 1995.

_____. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (fascículo I). Tradução de Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012. p. 266-297.

GIL, R. **A aprendizagem da noção de derivada no 11.º ano** (Relatório da Prática de ensino supervisionada). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa. 2014.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

Orhun, N. Graphical understanding in mathematics education: derivate functions and students' difficulties. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, nº55, 679-684. 2012.

STEWART, J. **Cálculo**. V. 1. 6ª edição. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2010.

WAIDEMAN, A. C. **Um aplicativo para o estudo de derivadas**. 2018. 173 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Ensino de Matemática, UTFPR, Londrina, 2019.