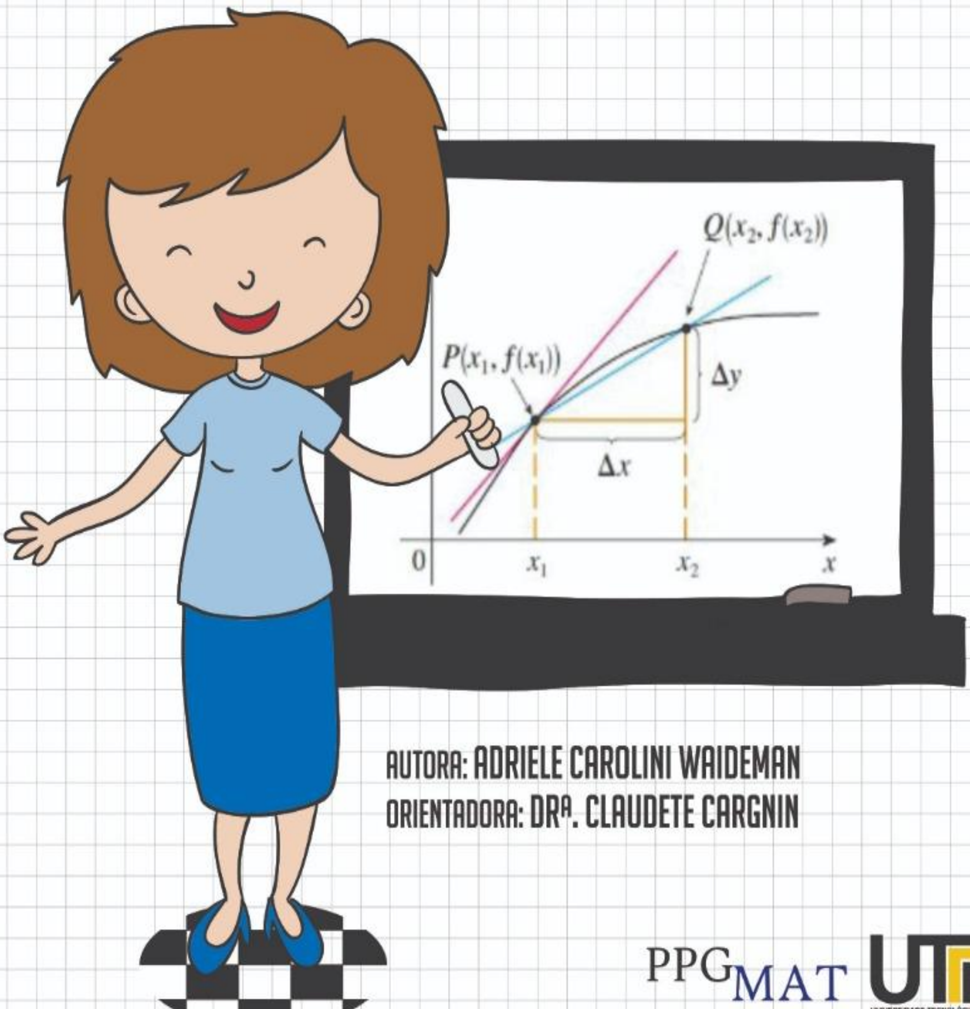
CADERNO DE QUESTÕES PARA O ESTUDO DE DERIVADAS



AUTORA: ADRIELE CAROLINI WAIDEMAN
ORIENTADORA: DRª. CLAUDETE CARGNIN

PPGMAT UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA CÂMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO

PPGMAT

ADRIELE CAROLINI WAIDEMAN

CADERNO DE QUESTÕES PARA O ESTUDO DE DERIVADAS

PRODUTO EDUCACIONAL II

LONDRINA - PR

2018

ADRIELE CAROLINI WAIDEMAN

CADERNO DE QUESTÕES PARA O ESTUDO DE DERIVADAS

Produto Educacional II apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Campus Londrina/ Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profª. Drª. Claudete Cargnin

LONDRINA - PR

2018

Sumário

1. APRESENTAÇÃO

Caro(a) professor(a),

É com prazer que apresentamos questões para o estudo de derivadas, as quais têm o objetivo de contribuir para o estudo de derivadas de uma função real de variável real. As questões compõem o Produto Educacional II, intitulado “Caderno de Questões para o Estudo de Derivadas”.

Esse material é fruto da pesquisa publicada na dissertação “Um aplicativo para o estudo de derivadas[1]” de Waideman (2018), do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR, sob orientação da Profª. Drª Claudete Cargnin.

As questões, elaboradas à luz da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) (DUVAL, 2012), foram testadas e modificadas a partir de uma pesquisa realizada com estudantes de graduação dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Engenharia de Produção Agroindustrial, realizada no período de outubro a dezembro de 2017,e são apresentadas de forma dinâmica com auxílio de vídeos e gráficos no aplicativo “*Derivadas Quiz*[2]”. A interface do aplicativo é apresentada e explicada no Produto Educacional I, intitulado “Do Papel À Tela Do Celular: Um Aplicativo para os Estudos de Derivadas”[3]. A interface do aplicativo encontra-se disponível também no Apêndice D e, o cadeno de questões no Apêndice E de Waideman (2018)**.**

Nesse produto educacional, apresentamos as questões que compõem o aplicativo, as quais foram testadas em condições reais de ensino, e que podem ser utilizadas com papel e lápis, em sala de aula, para aprofundar os conhecimentos sobre derivadas ou simplesmente estudo individual.

---

[1]Disponível no site: http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-em-ensino-de-matematica/dissertacoes
[2] Disponível na *Play Store.*
[3]Disponível também no site: http://www.utfpr.edu.br/londrina/cursos/mestrados-doutorados/Ofertados-neste-Campus/mestrado-em-ensino-de-matematica/produto-educacional

As questões foram separadas por fases. A primeira, chamada de "Questões de Aquecimento", possibilita a revisão de conceitos gerais envolvendo a derivada de uma função real de variável real; já a segunda fase, intitulada "Questões de Aprofundamento", busca trabalhar diferentes conceitos de derivadas, enfocando a representação gráfica[4], tratamentos e conversões.

Atenciosamente,

Profª. Me. Adriele Carolini Waideman

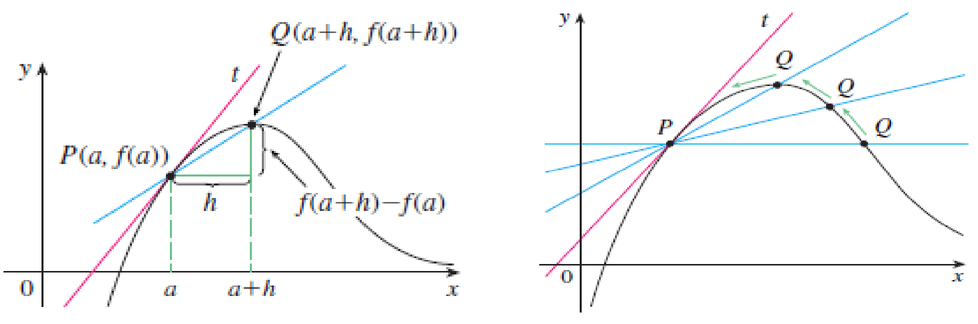
[4] O Produto Educacional II traz uma um suporte ao professor de como explorar as questões (usadas no aplicativo) com foco nas representações semióticas.

2. AS FACES DO OBJETO MATEMÁTICO: DERIVADAS

O conceito de derivadas de funções de uma variável real, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pode ser explorado em diversos âmbitos, ou seja, derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvem taxa instantânea de variação, máximos e mínimos, entre outros.

A pesquisa realizada (WAIDEMAN, 2018) assumiu como as diversas faces do objeto matemático "derivadas" as definições apresentadas no livro-texto Cálculo, Volume 1, do Stewart (2010). A seguir, as definições:

Quadro 1 - Definição da Inclinação da Reta Tangente

(a)
DEFINIÇÃO 1 - A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem inclinação $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ Desde que esse limite exista.
(b)


Fonte: Stewart (2010, p.129-130)

Quadro 2 - Definição de Velocidade Instantânea

DEFINIÇÃO 2 - Velocidade (ou **velocidade instantânea**) no instante $t = a$ como o limite de velocidades médias: $$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$ se o limite existir.

Fonte: Adaptado de Stewart (2010, p. 132)

Quadro 3 - Definição de Derivada

DEFINIÇÃO 3 - A **derivada de um função f em um número a,** denotada por $f'(a)$, é $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ Se o limite existir.

Fonte: Stewart (2010, p. 133)

Quadro 4 - Definição de Taxa Instantânea de Variação

DEFINIÇÃO 4 - O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa** (**instantânea**) **de variação de *y* em relação a *x*** em $x - x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$: $$taxa\ instantânea\ de\ variação = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fonte: Adaptado de Stewart (2010, p. 134)

Analisando as definições dos quadros 1; 2; 3 e 4 podemos perceber que trata-se do mesmo limite, caso o limite exista. E ainda, cada definição tem sua importância e seu significado, mesmo que a resolução matemática seja a resolução do mesmo limite.

Assim, podemos dizer que as definições de coeficiente de inclinação da reta tangente a uma curva num ponto, velocidade instantânea, derivada de uma função num ponto e taxa instantânea de variação de uma função, estão associadas a diferentes conceitos matemáticos, porém fazem referência ao mesmo objeto matemático (derivada) e, por isso, dependendo do contexto, a derivada de uma função f em relação à variável x assume várias notações, como, por exemplo, $y'(x), D_x f(x), \frac{dy}{dx}$. São vários nomes e uma única interpretação geométrica (Quadro 1, item b). Essa diversidade de nomes contribui para ressaltar a importância de estudar e buscar a compreensão das várias facetas de um mesmo objeto matemático.

Os estudos apresentados no Capítulo 2 de Waideman (2018) que gerou este produto educacional, indicam que o ensino de derivadas precisa acontecer por meio de várias representações e atribui essa necessidade para melhor compreensão do objeto matemático (CONSCIÊNCIA, OLIVEIRA, 2011; ORHUM, 2012).

Entre as representações, Orhum (2012) destaca a representação gráfica como a que gera muita dificuldade entre os alunos, como, por exemplo, em estabelecer conexões entre o gráfico da função original e o gráfico da função derivada, além de terem dificuldades também de associar a escrita algébrica com gráfico que a representa (GIL, 2014).

Assim, esse produto educacional, busca apresentar questões que possam contribuir tanto com o aluno, como com o professor, a estudar derivadas utilizando-se de diversas representações semióticas, assunto que abordaremos a seguir.

3. TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (TRRS)

Segundo Duval (1993, 1995, 2012), registros de representações semióticas são um sistema de signos, que tem por objetivo a comunicação e atividades cognitivas do pensamento, o tratamento da informação e a objetivação.

Existem vários registros de representações no sistema semiótico. Matematicamente, é comum a apresentação de quatro (Figura 1), o que permite a exposição de diferentes sistemas semióticos, com diferentes signos.

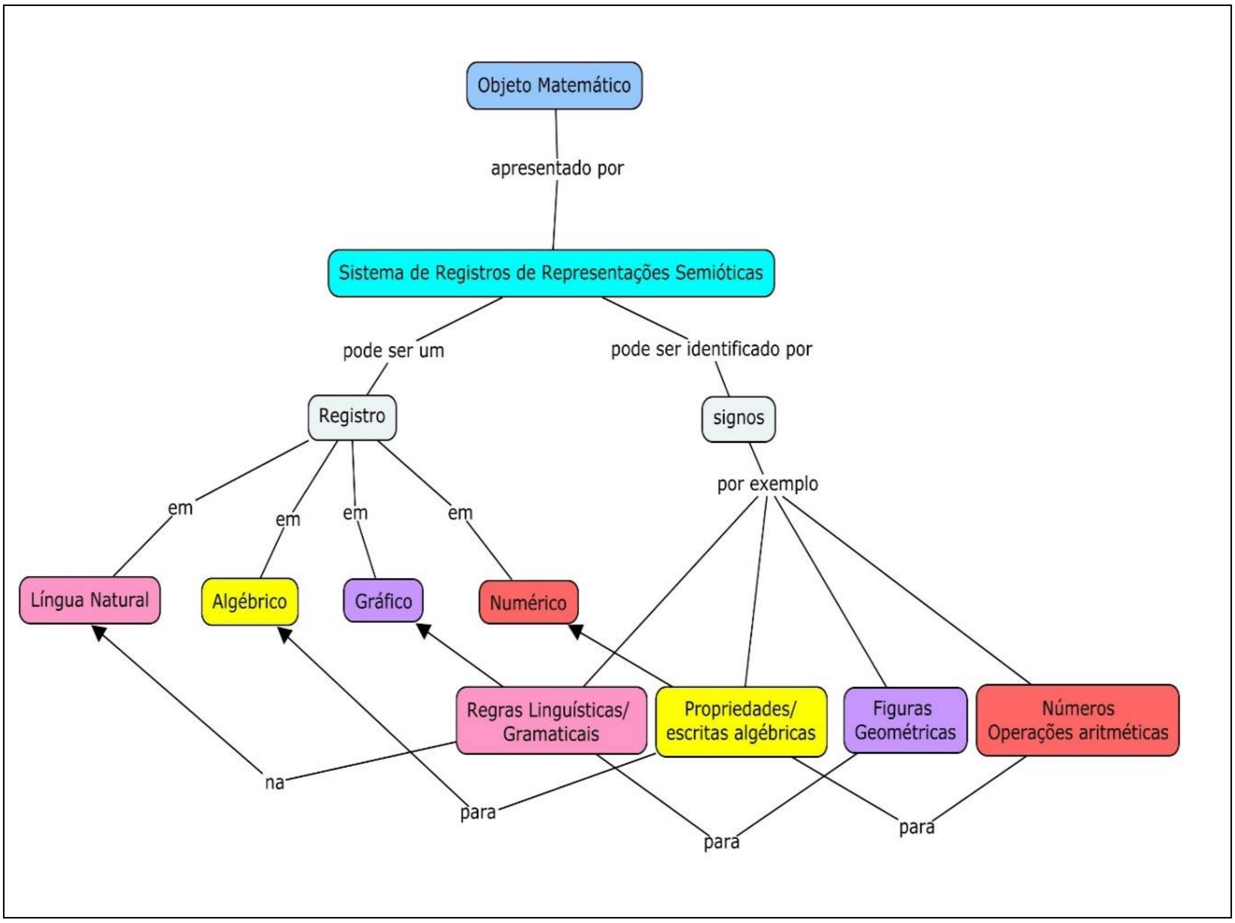


Tabela 1 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático
Fonte: Adaptado de Henriques e Almouloud (2016, p. 468)

Ao considerarmos as possíveis representações semióticas de um objeto matemático (Figura 1), como, por exemplo, a derivada, pode-se elencá-las de acordo com o Quadro 5:

Quadro 5 - Tipos de Registro de Representações Semióticas

a) Representação em língua natural;

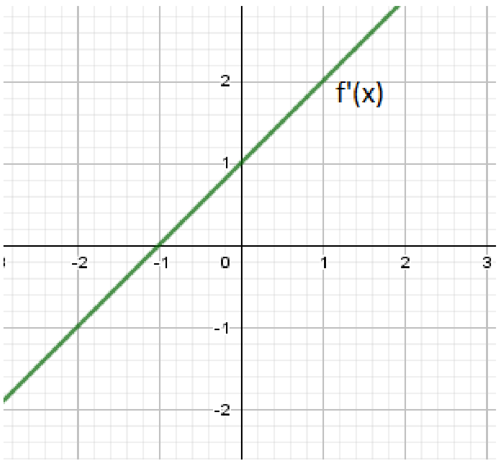
Exemplo a) Em um ponto de *Máximo* ou *Mínimo,* a inclinação da reta tangente é nula sempre?

b) Representação em forma algébrica;

Exemplo b): Derive: $f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$

c) Representação de figura geométrica ou gráfica;

Exemplo c)



d) Representação numérica

$A = (1.63, 1.56)$

Fonte: A autora.

Segundo Duval (2012), esses registros de representações semióticas são uma forma de exteriorizar o que as nossas representações mentais “formam” do objeto matemático analisado. Desse modo, um diferencial da teoria de Duval é considerar que as representações não só comunicam as representações mentais, como também possibilitam novas compreensões, reflexões e a construção/revisão/reestruturação das representações mentais.

O Quadro 6 apresenta as características de um registro de representação semiótica, de acordo com Duval (2012).

Quadro 6 - Características de um registro de representação semiótica descrita por Duval (2012)

I) A formação de uma representação identificável *Definição:* A formação de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido. Representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc. (Exemplificado no Quadro 12) A formação da representação deve respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entraves de construção para as figuras...).
II) Tratamento *Definição:* O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro. A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural.
III) Conversão *Definição:* A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística.
IV) Observação A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento.

Fonte: A autora

Os quadros 7 e 8, ilustram tratamentos e conversões.

Quadro 7 - Ilustração de Tratamento

Item b) do Quadro 5

Derive:

$f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$ } Representação

$f(x) = 6x^3 - 4x^1 + 2x^{-3} + 5x^0$

$f'(x) = 3.6x^{3-1} - 1.4\,x^{1-1} + (-3).2x^{-3-1} + 0.5x^{0-1}$

$f'(x) = 18x^2 - 4x^0 - 6\,x^{-4} + 0$

$f'(x) = 18x^2 - 4 - 6x^{-4}$

} **TRATAMENTO**

Podemos observar que, desde a análise da função até o término da resolução ao encontrarmos a derivada primeira da $f(x)$, usamos **tratamento.** Porque estamos em um único registro, o registro semiótico algébrico. Cada linha da resolução representa uma transformação interna nesse registro.

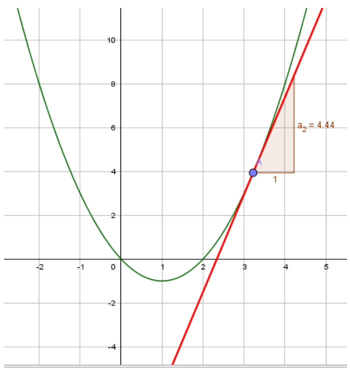
Fonte: A autora

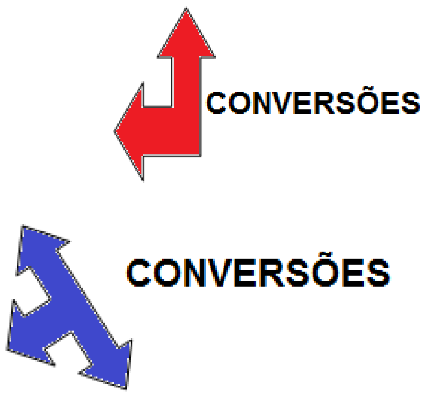
Quadro 8 - Ilustração de Conversão

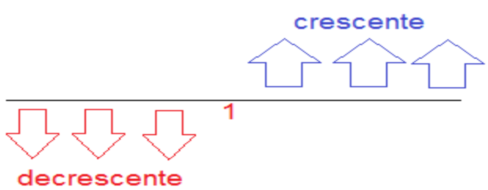
Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função

$f(x) = x^2 - 2x$

(I) Conversão do exercício do registro em língua natural para o registro gráfico.





(I) Registro numérico	(II) Registro figural
$(-\infty, 1)$ *Decrescente* $(1; +\infty)$ *Crescente*	

A resposta ao exercício acontece em um registro semiótico diferente do enunciado do exercício e diferente do item (I), portanto chamamos de Conversão.	O item (II) é outra opção de conversão para esse exercício, da língua natural para a figural.

Fonte: A autora

A utilização de vários registros de representação semióticos aumentam significativamente as capacidades cognitivas de um indivíduo com a diversificação das representações, especialmente quando há uma conversão entre representações em dois registros de representações. As questões abordadas a seguir foram pensadas a partir da utilização de tratamentos e conversões, especialmente partindo das representações gráficas.

Para facilitar a utilização em sala de aula, cada questão, ou conjunto de questões, é apresentado em uma única página, o que permite ao professor simplesmente imprimir a página de interesse, se for o caso.

4. QUESTÕES SOBRE O CONTEÚDO DERIVADAS

Inicialmente, apresentamos um bloco de questões, chamado de Questões de Aquecimento, com a finalidade de proporcionar uma rápida revisão sobre conceitos essenciais relacionados às derivadas. São 11 questões a serem respondidas com “Sim” ou “Não”. Nesta fase, optamos apenas por Registro em Língua Natural, tanto a pergunta como a resposta. Sugerimos que esse bloco seja aplicado como uma retomada do conteúdo, e o professor aproveite as respostas dos estudantes para corrigir eventuais entendimentos que possam causar impedimentos para as compreensões das questões futuras.

Em seguida, apresentamos 32 questões mais aprofundadas, buscando mais de um tópico sobre derivadas em algumas questões. Essas questões possuem dicas para auxiliarem nos estudos, as quais são definições, teoremas, e outros que são vistos em sala de aula. Ainda, nessa fase, buscamos priorizar mais um registro de representação semiótico por questão, por exemplo, com enunciado em Registro em Língua Natural e resposta em Registro Numérico. As dicas são apresentadas logo após as questões e podem ser utilizadas, ou não, pelos docentes.

As questões desse segundo bloco compõem a 2ª fase do aplicativo “*Derivadas Quiz*”, que pode ser encontrado na *Play Store*, ou, no Apêndice E de Waideman (2018). Sugerimos que as eventuais dificuldades apresentadas pelos estudantes nas resoluções sejam discutidas em sala de aula, confrontando representações algébricas e gráficas.

1ª fase: Questões de Aquecimento

1. **A derivada pode ser considerada como uma função?**

2. **Se f é uma função polinomial, é possível calcular a derivada de f num ponto $P(a, f(a))$?**

3. **Considerando $P(a, f(a))$ pertencente ao domínio da f, a derivada de uma função f num ponto $P(a, f(a))$ pode ser considerada a *TAXA DE VARIAÇÃO* da função em P?**

4. **Considere um ponto de máximo ou mínimo do gráfico f no qual exista reta tangente. Nesse caso, podemos dizer que a inclinação dessa reta tangente ao gráfico nesse ponto é sempre nula ?**

5. **Um ponto de inflexão do gráfico de uma função $f(x)$ pode ser também ponto de *Máximo* ou *Mínimo* desse gráfico?**

6. **A abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de uma função $f(x)$ pode ser abscissa de um ponto de *Máximo* ou *Mínimo* da função derivada $f'(x)$?**

7. **Uma função crescente, num intervalo I, tem derivada primeira negativa nesse intervalo?**

8. **Quando a derivada $f'(x)$ muda de sinal positivo (+) para negativo (-) ao passar por uma abscissa $x = a$, então o ponto $P(a, f(a))$ é um ponto de mínimo do gráfico da função $f(x)$?**

9. **Para valores pequenos de Δx, tem-se que $dy \approx \Delta y$. Dessa forma, podemos dizer que, para calcular pequenas variações de y, pode-se utilizar *Diferencial* dessa função?**

10. **Toda função $f(x)$ definida num domínio D sempre assumirá ao menos um valor *máximo (ou mínimo) em algum $x \in D$?***

11. **Se o gráfico da $f(x)$ possui um ponto de inflexão $P(a, f(a))$, então a abscissa $x = a$ será raiz da função derivada $f'(x)$?**

Fonte: A Autora

2ª fase: Questões de Aprofundamento

Dica

12. Derive: $f(x) = 6x^3 - 4x + 2x^{-3} + 5$

a. ( ) $f'(x) = 6x^2 - 4x - 6x^{-4} + 1$

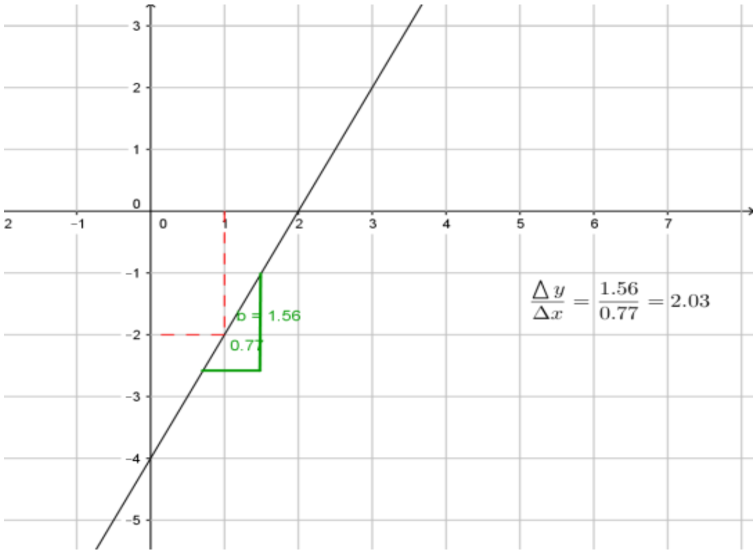
b. ( ) $f'(x) = 18x - 4 + 2x^{-4}$

c. ( ) $f'(x) = 18x^2 - 4 - 6x^{-4}$

d. ( ) $f'(x) = 18x^2 + 4 - 6x^{-4} + 0$

Dica

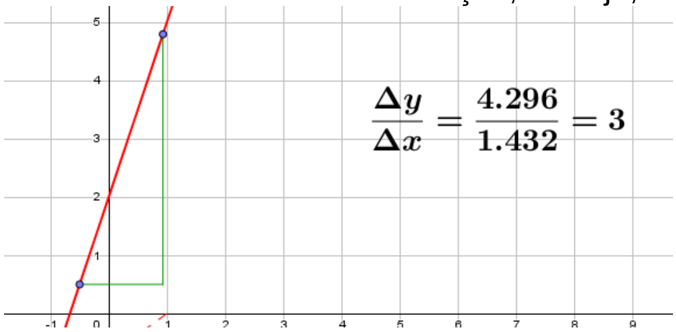
13. Seja $f(x) = 2x - 4$ a reta representada no gráfico. Observe os pontos em destaque sobre a reta. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a taxa média de variação na função entre esses dois pontos. Qual é a taxa instantânea de variação, ou seja, em um ponto P?



a) ( ) 0
b) ( ) 2
c) ( ) -2
d) ( ) não é possível calcular

Dica

14. Seja $f(x) = 3x + 2$ a reta representada no gráfico. Observe os pontos em destaque sobre a reta. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a taxa média de variação na função entre esses dois pontos. Qual é a taxa instantânea de variação, ou seja, em um ponto P?



a) ( ) 0

b) ( ) 3

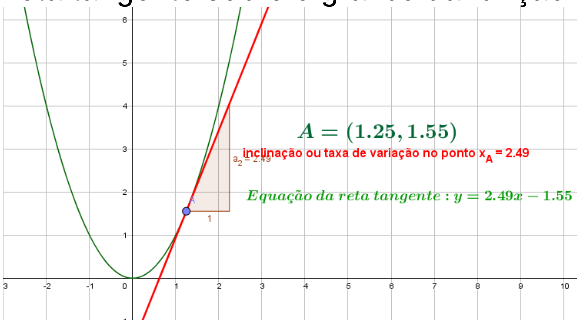
c) ( ) -3

d) ( ) não é possível calcular

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 15 A 18.

Observe a inclinação reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(-1{,}1)$, a inclinação, ou taxa de variação, é -2.

15. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:
a ( ) $f(x) = x^2$ b ( ) $f(x) = -x^2$ c ( ) $f(x) = 2x$ d ( ) $f(x) = -2x$

16. A posição da reta tangente em $x = -1$ é
a ( ) Crescente b ( ) Horizontal c ( ) Decrescente d ( ) Vertical

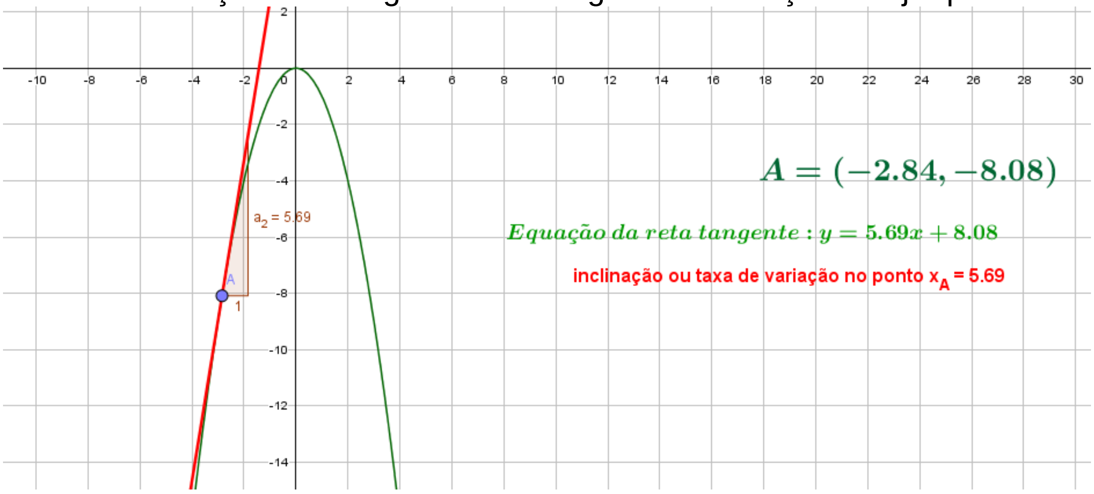
17. O sinal do coeficiente angular da reta tangente no intervalo $x < 0$ é
a ( ) Negativo b) Zero c ( ) Positivo d ( ) Nenhuma das alternativas

18. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é
a ( ) Crescente e positiva b ( ) Decrescente e negativa
c ( ) Crescente e negativa d ( ) Decrescente e positiva

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 19 A 22.

Observe a inclinação reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(-2, -4)$, a inclinação, ou taxa de variação, é -4.

19. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:
a ( ) $f(x) = x^2$ b ( ) $f(x) = -x^2$ c ( ) $f(x) = 2x$ d ( )f(x)=-2x

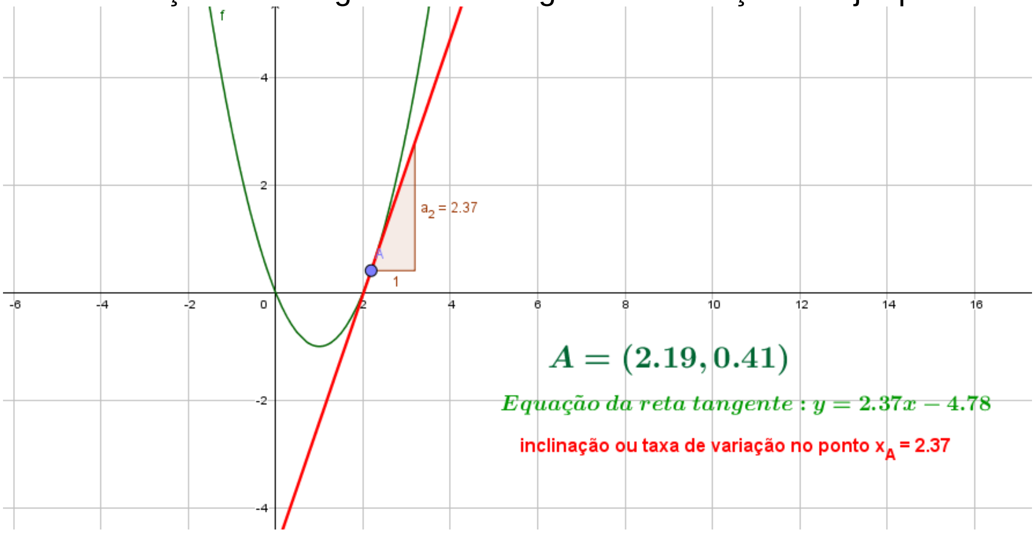
20. A posição da reta tangente em $x = -2$ é
a ( )Crescente b ( ) Horizontal c ( ) Decrescente d ( )Vertical

21. O sinal do coeficiente angular da reta tangente no intervalo $x < 0$ é
a ( ) Negativo b) Zero c ( ) Positivo d ( ) Nenhuma das alternativas

22. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é
a ( ) Crescente e positiva
b ( ) Decrescente e negativa
c ( ) Crescente e negativa
d ( ) Decrescente e positiva

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 23 A 26.
Observe a inclinação reta tangente sobre o gráfico da função e veja que:



No ponto $(1, -1)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 0.

23. De acordo com o padrão das inclinações das retas tangentes, pode-se dizer que a função representada é:
a ( ) $f(x) = x^2 + 2x$ b ( ) $f(x) = x^2 - 2x$ c ( ) $f(x) = 2x + 2$ d ( ) $f(x) = -2x - 2$

24. A posição da reta tangente em $x = 1$ é
a ( ) Crescente b ( ) Horizontal c ( ) Decrescente d ( ) Vertical

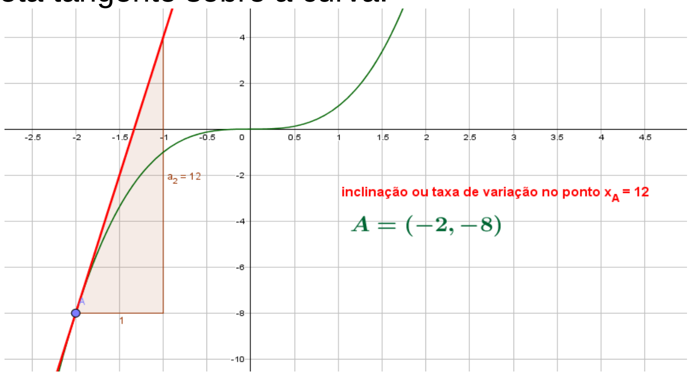
25. O coeficiente angular da reta tangente em x=1 é
a ( ) Negativo b) Zero c ( ) Positivo d ( ) Nenhuma das Alternativas

26. Na função $f(x)$ o ponto $(1, -1)$, é:
a ( ) Ponto de Máximo
b ( ) Ponto de Mínimo
c ( ) Apenas um ponto da função
d ( ) Nenhuma das alternativas

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 27 E 28.

Observe a reta tangente sobre a curva.



No ponto $(-2,-8)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

27. A posição da reta tangente em $x = -2$ é

a ( ) Crescente b ( ) Horizontal c ( ) Decrescente d ( ) Vertical

28. Em relação ao intervalo $x < 0$, a $f(x)$ é

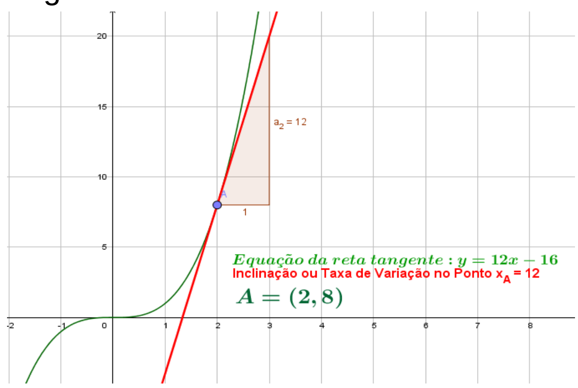
a ( )Crescente e positiva b ( ) Decrescente e negativa

c ( ) Crescente e negativa d ( ) Decrescente e positiva.

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 29 E 30.

Observe a reta tangente sobre a curva.



No ponto $(2{,}8)$, a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

29. Em relação à posição da reta tangente em x= 2 é

a ( ) Crescente b ( ) horizontal c ( ) Decrescente d ( ) Vertical

30. Em relação ao intervalo $x > 0$, a $f(x)$é

a ( ) Crescente e positiva b ( ) Decrescente e negativa

c ( ) Crescente e negativa d ( ) Decrescente e positiva

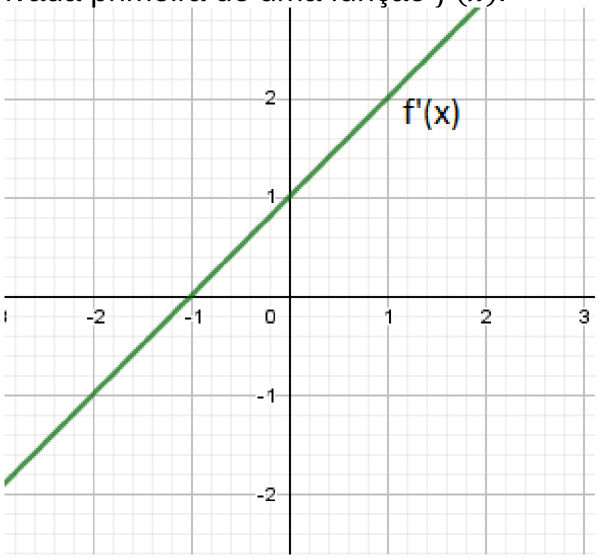
Dica

31. Se a função é crescente, então a derivada é
a( ) Negativa b) Nula c ( ) Positiva d ( ) Nenhuma das Alternativas

32. Se a função é decrescente, então a derivada é
a( ) Negativa b) Nula c ( ) Positiva ( ) Nenhuma das Alternativas

Dica

33. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.



Com base no gráfico, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$?

a ( ) $(-\infty;+\infty)$ $crescente$

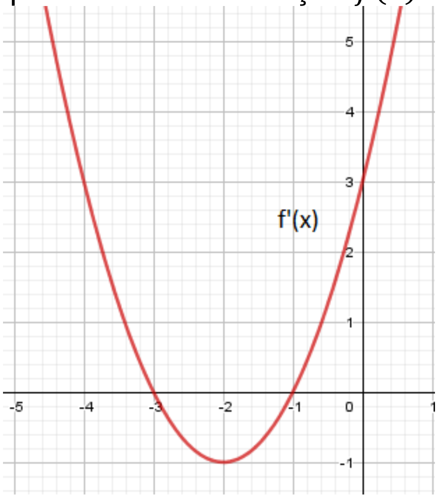
$b($ $)(-\infty,-1]crescente;[-1,+\infty)decrescente$

c( ) (-∞, $-1]decrescente$; [0,+∞)$crescente$

d( ) $(-\infty,-1]decrescente;[-1,+\infty)crescente$

Dica

34. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.



Com base nele, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$?

a ( ) $(-\infty; -2]$ $decrescente$; $[-2, +\infty)$$crescente$

b ( ) $(-\infty; -3]$ $crescente$; $[-3; -1]$$decrescente$; $[-1; +\infty)$$crescente$

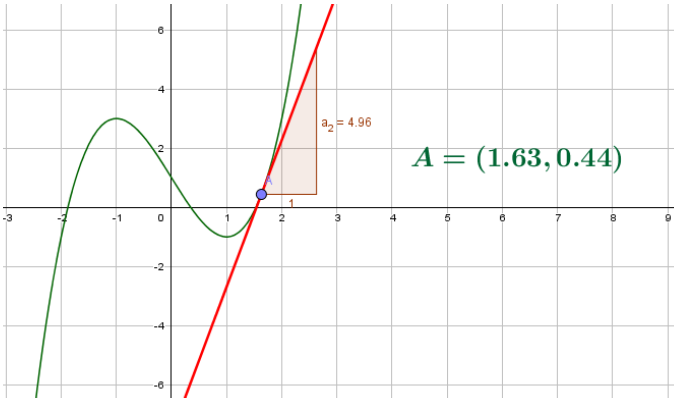
c ( ) $(-\infty; -2]$ $crescente$; $[-2; +\infty)$$decrescente$

d ( ) (-∞; $-3]$ $decrescente$; $[-3; -1]$$crescente$; $[-1; +\infty)$decrescente

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 35 E 36.

No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.



35. Quais são as coordenadas do ponto de máximo local?

a ( ) $(-2; 0)$ b ( ) $(-1; 3)$ c ( ) $(0; 1)$ d ( ) $(1; -1)$

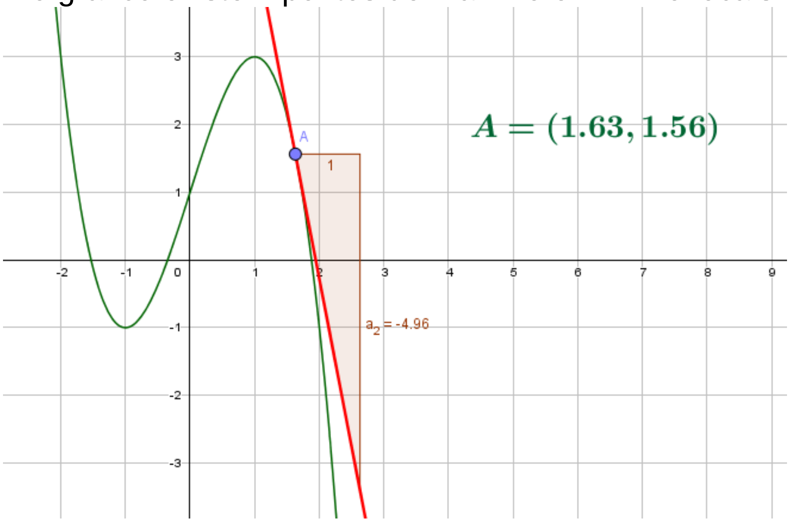
36. Quais são as coordenadas do ponto de mínimo local?

a ( ) $(-1; 3)$ b ( ) $(0; 1)$ c ( ) $(1; -1)$ d ( ) $(2; 3)$

Dica

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 37 E 38.

No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.



37. Quais são as coordenadas do ponto de máximo local?

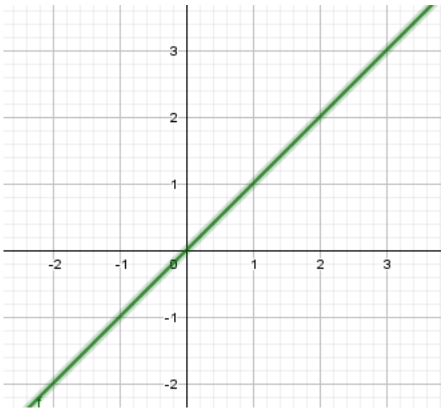
a ( ) $(-2; 3)$ b ( ) $(0; 1)$ c ( ) $(1; 3)$ d ( ) $(2; 0)$

38. Quais são as coordenadas do ponto de mínimo local?

a ( ) $(-1; -1)$ b ( ) $(0; 1)$ c ( ) $(1; 3)$ d ( ) $(2; 0)$

Dica

39. O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



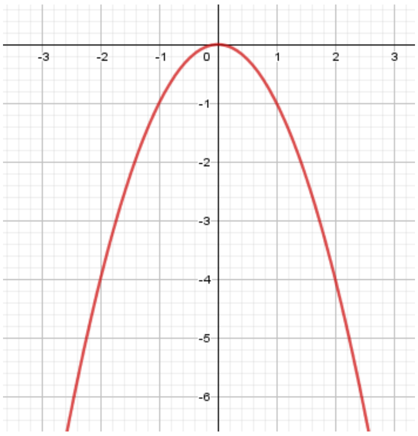
O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para cima da $f(x)$ é

a ( ) $(-\infty, 0)$ b ( ) $(0, +\infty)$

c ( ) $(-\infty, +\infty)$ d ( ) Nenhuma das Alternativas

Dica

O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



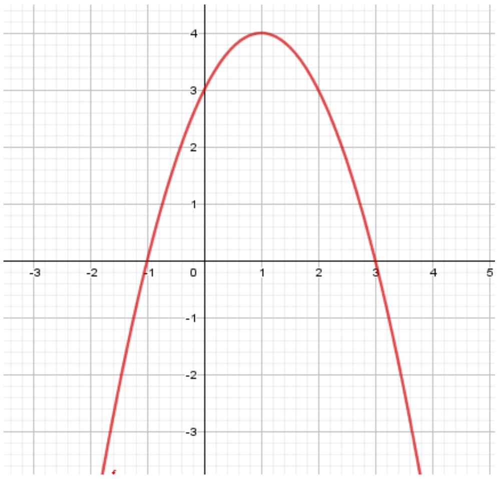
40. O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para baixo da $f(x)$ é

a ( ) $(-\infty, 0)$ b ( ) $(0, +\infty)$

c ( ) $(-\infty, +\infty)$ d ( ) Nenhuma das Alternativas

O GRÁFICO ABAIXO FAZ PARTE DO ENUNCIADO DAS QUESTÕES 41 E 42.

O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$



41. O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para baixo da $f(x)$ é

a ( ) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b ( ) $(-\infty, 1)$

c ( ) $(1,4)$ d ( ) $(-1,3)$

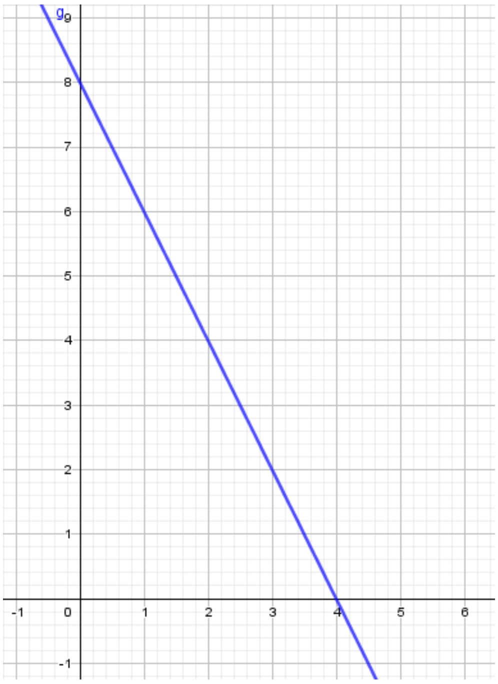
42. O gráfico mostra que o intervalo de concavidade para cima da $f(x)$ é

a ( ) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b ( ) $(-\infty, 1)$

c ( ) $(1,4)$ d ( ) $(-1,3)$

43. O gráfico refere-se à derivada segunda $f''(x)$ da $f(x)$.

(clique no botão para visualizar o gráfico)



Observando esse gráfico podemos dizer que o ponto (4,0) representa:

a ( ) um ponto crítico na $f(x)$

b ( ) um ponto Máximo ou Mínimo na $f(x)$

c ( ) um ponto de inflexão na $f(x)$

d ( ) Nenhuma das Alternativas

Dicas para auxiliar na resolução de cada questão.

Dica: Para a questão 12

TEOREMA 1 Se $f(x) = c$, c uma constante real, então $f'(x) = 0$, para todo x.

TEOREMA 2 Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{x-1}$, para todo n inteiro positivo.

TEOREMA 3 Se $f(x) = k.g(x)$, k constante, então $f'(x) = k.g'(x)$.

TEOREMA 4 Se $h(x) = f(x) + g(x)$, então se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$, teremos: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Dica: para as questões 13 e14

1. Se $y = f(x)$, e se x variar de x_1+Δx, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y, denotada por Δy, é $f(x_1 + \Delta x)$ - $f(x_1)$, quando a variação de x for Δx. A **Taxa Média de Variação** de y por unidade de x, quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. A **Taxa de Variação Instantânea** de uma função f no ponto a é o limite, quando $h \to 0$, do quociente entre a variação da função no intervalo $[a, a + h]$ e o comprimento do intervalo, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(a)$$

Dica: para as questões 15 a 26

1. Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e$a \neq 0$. Onde, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima; se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

2. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.

3. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.

4. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.

5. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.

6. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica: para as questões 27 ; 28; 29 e 30.

1. O ponto $A(x, y)$ é o ponto em que você está.
2. A reta tangente representa a reta que se movimenta sobre a curva.
3. Inclinação ou taxa de variação instantânea no ponto e é o coeficiente angular da reta tangente e é calculado pela derivada no ponto de tangência.
4. O crescimento da função está associado ao sinal da derivada.
5. O sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa (abaixo do eixo das abscissas) e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva (acima do eixo das abscissas).

Dica para questões 31; 32; 33 e 34

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b):

i) Se $f'(x) > 0$ (a derivada em x_i for positiva) para todo x em (a, b), então f será crescente em $[a, b]$;
ii) Se $f'(x) < 0$ (a derivada em x_i for negativa) para todo x em (a, b), então f será decrescente em $[a, b]$;

Dica para as questões 35; 36; 37 e 38

1) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos (a, b), exceto possivelmente em c.

   I) Se o sinal de f' mudar de POSITIVO para NEGATIVO em c, então f tem um **MÁXIMO LOCAL** em c.

   II) Se o sinal de f' mudar de NEGATIVO para POSITIVO em c, então f tem um **MÍNIMO LOCAL** em c.

2) Se a reta tangente em alguma $f(c)$ tiver inclinação zero, esse c é um candidato a ser **MÁXIMO LOCAL OU MÍNIMO LOCAL.**

Dica para as questões 39; 40; 41 e 42

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c, então:

i) Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;

ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$;

Dica para a questão 43

Um **ponto de inflexão** é um ponto sobre uma $f(x)$ na qual a derivada de segunda ordem troca o sinal. A $f(x)$ muda de ter concavidade para cima (positiva) para concavidade para baixo (negativa), ou vice-versa.

Gabarito das questões

<u>1ª FASE</u>

1. SIM	5. NÃO	9. SIM
2. SIM	6. SIM	10. NÃO
3. SIM	7. NÃO	11. SIM
4. SIM	8. NÃO	

<u>2ª FASE</u>

12. C	23. B	34. B
13. B	24. B	35. B
14. B	25. B	36. C
15. A	26. B	37. C
16. C	27. A	38. A
17. A	28. C	39. B
18. D	29. A	40. C
19. B	30. A	41. A
20. A	31. C	42. D
21. C	32. A	43. C
22. C	33. D	

5. ALGUNS COMENTÁRIOS EM RELAÇÃO ÀS QUESTÕES

1ª fase

As quatro primeiras questões da 1ª fase, referem-se a diferentes conceitos associados ao conceito de derivada (e foram apresentadas nos quadros 1, 2, 3 e 4). Admite-se que a taxa de variação instantânea pode ser "visualizada" pela inclinação da reta tangente em um dado ponto, que, por sua vez, é necessário para compreender e atribuir um sentido ao teste da derivada 1ª ($f'(x)$), por exemplo.

A questão 4 (Quadro 6), por exemplo, ilustra a primeira perspectiva: enunciada apenas no registro em língua natural, pode ser respondida em outros registros semióticos ou, ainda, por meio de tratamentos. Nesta questão, se optarmos por alguma conversão, dizemos que há uma conversão intermediária, pois a resposta final volta a ser em registro em língua natural, a mesma do enunciado.

As questões 5 a 8, 10 e11 retomam conceitos amplamente utilizados nas aulas de CDI, sobre os quais repousam inúmeras soluções de problemas reais.

Os problemas envolvendo taxas de variações são frequentes em vários estudos, como, por exemplo, na Biologia quando se estuda a taxa de crescimento de uma população de bactérias em relação ao tempo; na Economia ao estudar a evolução do custo marginal em relação ao tempo; em Medicina, quando se estuda a taxa de crescimento de um tumor em relação ao tempo; em Mecânica ao se estudar fluidos em movimento em relação ao tempo; em Eletricidade, ao se descrever a variação da carga elétrica e da corrente em um circuito elétrico em relação ao tempo. Na Física, a derivada do espaço está presente na própria definição de velocidade (Quadro 2) e aceleração, em que a velocidade é definida como a taxa instantânea da variação da posição no espaço em relação ao tempo. Em várias áreas, diversos problemas de máximos e mínimos são resolvidos utilizando-se a derivada (AGUIAR, SIPLE, MORO, 2012).

Caso o estudante não compreenda o significado de ponto de máximo, mínimo, ponto de inflexão, provavelmente não conseguirá utilizar conceitos para descrever um determinado comportamento, como, por exemplo, perceber que o valor de uma reação química se altera em um dado momento (ponto de inflexão), ou se pretende encontrar áreas máximas a serem cercadas com uma certa quantidade de tela.

Nessa perspectiva de resolver problemas, a questão 9 trata das diferenciais, o que causa uma confusão para os estudantes, pois tem-se a : $dy = f'(x)dx$, o que remete a semelhanças das definições de derivadas apresentadas anteriormente. A consequência direta desse fato é que a derivada não é o quociente entre duas diferenciais, mas comporta-se como se fosse esse quociente. Isto significa que a partir da relação: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, é possível escrever: $dy = f'(x)dx,$ que se denomina equação diferencial, outra interpretação para a resolução de problemas.

Quadro 5 - Questão do aplicativo e possibilidades de conversões e tratamentos

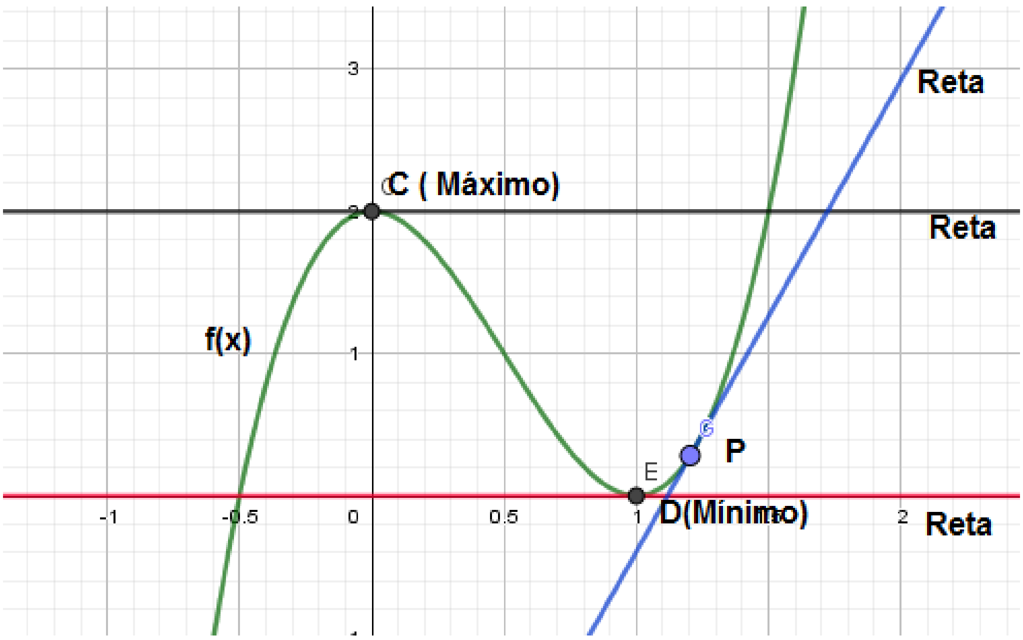
4. Considere um ponto de máximo ou mínimo do gráfico de f para o qual exista reta tangente. Nesse caso, podemos dizer que a inclinação dessa reta tangente ao gráfico nesse ponto é sempre nula?

( ) Sim ( ) Não

Possíveis interpretações:

(I) **Conversão intermediária** - Conversão entre a língua natural (enunciado) para a gráfica.

Por meio dessa conversão, é possível perceber que tanto no ponto C quanto no D a inclinação da reta tangente, nesses pontos, é nula, ou seja, são paralelas ao eixo x em C e D. No ponto P, existe uma inclinação da reta tangente, diferente de zero, logo não é paralela ao eixo x. Dizemos que o registro gráfico contribui para a interpretação do enunciado, levando a resposta “Sim” para a questão.



(II) Tratamentos e conversões

Partindo da hipótese de que a reta tangente é nula em um ponto, então o coeficiente angular da reta será zero. Logo, tomando $P(x_0;\ y_0)$ e $m = 0$, podemos encontrar a reta tangente.

CONVERSÃO: Língua natural para linguagem algébrica

TRATAMENTO DO ENUNCIADO em RLN

$$\left.\begin{array}{c} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - y_0 = 0(x - x_0) \end{array}\right\} \text{TRATAMENTO}$$

$$y = y_0 \qquad \text{em RA}$$

CONVERSÃO: Linguagem algébrica para língua natural

Sabendo que, $y = y_0$ representa um função constante e, seu gráfico é uma reta sem inclinação e paralela ao eixo x, logo em pontos de máximos e mínimos de uma função, a reta tangente nesses pontos terá características similares com as apresentadas acima. Portanto, a resposta será sim.

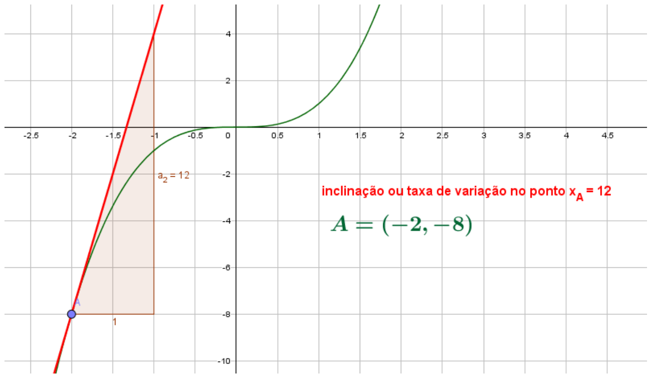
Legenda: Registro Algébrico (RA) e Registro em Língua Natural (RLN)
Fonte: A autora

2ª fase

Ao realizar o tratamento em uma representação, o estudante precisa “dominar” as regras de funcionamento daquele Registro de Representação Semiótico. Por exemplo, a questão 12 (item b do Quadro 5) tem enunciado e solução, por meio de tratamento, no registro algébrico. A questão 27 (Quadro 10) tem enunciado e solução, por meio de tratamento, no registro de língua natural, porém, para resolução da questão, é apresentado um registro gráfico que é tão importante quanto o enunciado da questão.

Quadro 10 - Questão 27 que mobiliza tratamento para sua resolução, por meio de uma conversão intermediária no registro gráfico

27. Observe a reta tangente sobre a curva.



No ponto $(-2, -8)$ a inclinação, ou taxa de variação, é 12.

Em relação à posição da reta tangente ao gráfico no ponto $(-2, f\,(-2))$ podemos afirmar que é:

a( )Crescente

b ( )horizontal

c ( ) Decrescente

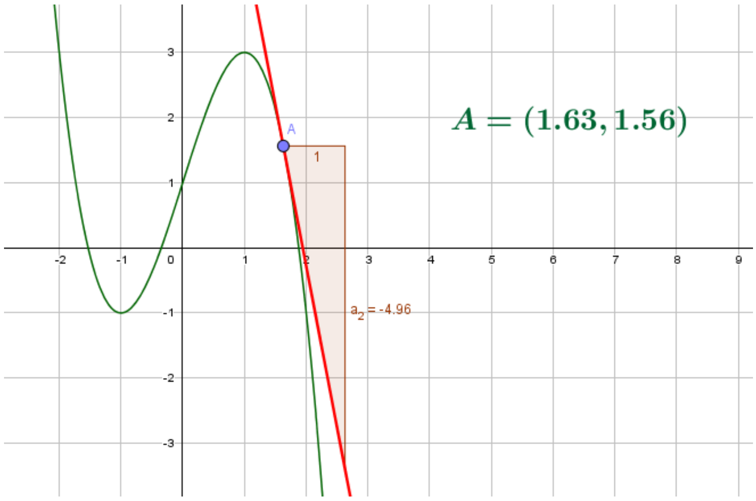
d( )Vertical

Fonte: A autora.

Por exemplo, a questão 37 (Figura 2) da 2ª fase possui um gráfico. Ressaltamos, a disponibilidade da “dica” presente em cada questão da segunda fase. O(s) ponto(s) de máximo(s) e/ou mínimo(s) e a observação da posição da reta tangente em cada ponto ou em algum intervalo da curva também puderam ser observados nessa questão, como o “Teste Crescente e Decrescente de uma função”. Alguns pontos citados não são cobrados na questão, porém, podem despertar no aluno a ligação de vários conceitos envolvidos, o que pode contribuir para não ter uma aprendizagem “fragmentada”, ou em tópicos. Essa ligação foi citada (na dissertação) como dificuldades (de associar os dados presentes no gráfico com as suas respectivas funções e derivadas) dos alunos em conteúdos que envolvem gráficos.

Dica[5]

37. No gráfico existem pontos de máximo e mínimo locais.



Quais as coordenadas do ponto de máximo local?

a( ) $(-2; 3)$
b ( ) $(0; 1)$
c ( ) $(1; 3)$
d ( ) $(2; 0)$

Resposta: C

Dica

1) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos (a, b), exceto possivelmente em c.

I) Se o sinal de f' mudar de POSITIVO para NEGATIVO em c, então f tem um **MÁXIMO LOCAL** em c.

II) Se o sinal de f' mudar de NEGATIVO para POSITIVO em c, então f tem um **MÍNIMO LOCAL** em c.

2) Se a reta tangente em alguma $f(c)$ tiver inclinação zero, esse c é um candidato a ser **MÁXIMO LOCAL OU MÍNIMO LOCAL.**

Figura 2 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada
Fonte: A autora

[5] Essa "dica" é um botão que aparece no aplicativo, apenas na segunda fase, quando o estudante erra a primeira tentativa de resposta. Abaixo de cada questão está a "dica" indicada para a mesma.

Ainda em relação à Figura 2, podemos observar o registro gráfico que faz parte do enunciado, que precisa de uma resposta em registro numérico e que ainda possui uma dica em língua natural, ou seja, para que essa dica funcione, é preciso que o estudante coordene esses registros de representações.

As questões 41 e 42 apresentadas na Figura 3 não são comuns nos livros-textos usados como referência na disciplina de CDI. Como já citado, os alunos apresentam (NASSER, 2007; ALORY *et al*., 2015; VASQUES, 2015) dificuldades em questões em que precisam traçar e analisar gráficos, dada uma função no registro semiótico algébrico. No caso dessa questão, há uma inversão do que é comum na disciplina.

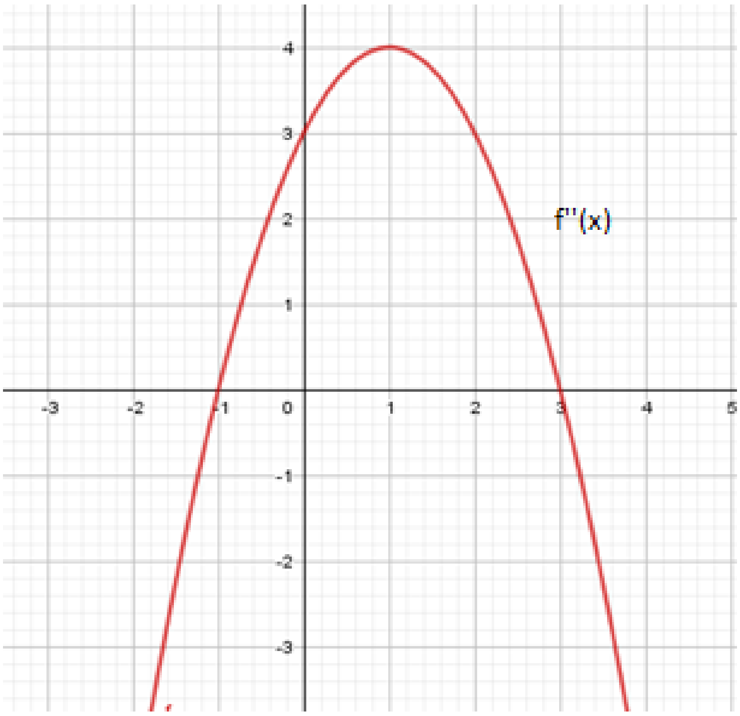
Em especial no conteúdo de derivadas, para encontrar o intervalo de concavidade de uma função, calcula-se a derivada segunda, encontra-se o ponto de inflexão e, só em seguida, estuda-se para encontrar o intervalo de concavidade, tudo no registro algébrico. Nessa questão, é apresentado apenas o gráfico da segunda derivada, sem qualquer registro algébrico. Duval (2012) ressaltou a importância de apresentar um objeto matemático em mais de um registro e, nesse caso, ressaltamos a importância de apresentarmos enunciados diferentes do que os alunos estão acostumados. Para Duval (2009), existe um alerta para o sentido da conversão, fazer uma conversão, por exemplo, da representação algébrica para o representação gráfica não significa que a conversão no sentido contrária se dará de forma natural, ou seja, fazer uma conversão da representação gráfica para a algébricoa do mesmo objeto matemático.

Olhar para o gráfico da Figura 3 não traz apenas o conteúdo concavidade. Permite retomar a diferença entre uma função ser positiva e crescente, negativa e decrescente e, ainda, algo que pode chamar a atenção dos alunos é a possibilidade de ter uma função positiva e decrescente ou negativa e crescente. Fato que, na fase teste das questões, trouxe confusões de conceitos aos alunos. Traz também a informação de que o ponto de inflexão $(f''(x) = 0)$ é um ponto de máximo ou mínimo da função derivada primeira.

Questões como as apresentadas na Figura 3 podem contribuir para minimizar as dificuldades mencionadas anteriormente, além de ir ao encontro dos aspectos da TRRS. Ao analisar essas questões, é preciso ter como conhecimento qual é o fator que leva à determinação da concavidade de uma função. Uma das técnicas utilizadas é a derivada de 2ª ordem da função, sendo ela a responsável por determinar os intervalos, no eixo das abscissas, onde a concavidade da função, no seu gráfico, é para cima (ou para baixo). Ou seja, quando a derivada de 2ª ordem de uma função, dentro de um intervalo, for positiva, então a concavidade do gráfico dessa função será para cima, ou quando a derivada de 2ª ordem de uma função, dentro de um intervalo, for negativa, logo a concavidade do gráfico dessa função será para baixo. O limitador entre as mudanças de concavidade é chamado de "ponto de inflexão". O mesmo é determinado pela equação $f''(x) = 0$. Quando essa equação não tiver solução real, temos que não existem mudanças de concavidade no gráfico de uma função. Ao passo que, se ela tiver soluções reais, ou seja, n números reais como solução da equação nessa equação$f''(x) = 0$, temos n mudanças de concavidades no gráfico da f. Portanto, no gráfico das questões 41 e 42, temos dois pontos de inflexões, ou seja, a função possui duas mudanças de concavidades, nos pontos $(-1,0)$ e $(3,0)$.

Dica

O gráfico é da segunda derivada $f''(x)$ da função $f(x)$.



41. O gráfico informa que o intervalo sobre o qual o gráfico de $f\ (x)$ possui concavidade voltada para cima é

a ( ) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b ( ) $(-\infty, 1)$ c ( ) $(1,4)$ d ( ) $(-1,3)$

42. O gráfico informa que o intervalo sobre o qual o gráfico de $f\ (x)$ possui concavidade voltada para baixo é

a ( ) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b ( ) $(-\infty, 1)$ c ( ) $(1,4)$ d ( ) $(-1,3)$

Dica

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c:

i) Se $f''(c) > 0$, ou seja, positiva, então o gráfico de f será côncavo para cima em $(c, f(c))$;
ii) Se $f''(c) < 0$, ou seja, negativa, então o gráfico de f será côncavo para baixo em $(c, f(c))$;

Figura 3 - Questão do aplicativo e dica disponibilizada
Fonte: A autora

Ainda nessas questões, temos que, no intervalo de $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ a concavidade da $f(x)$ é para baixo e, no intervalo de $(-1{,}3)$, a concavidade é para cima. Ou seja, $f''(x)$ negativa, concavidade para baixo; $f''(x)$ positiva, concavidade para cima, conforme mostra a Figura 4.

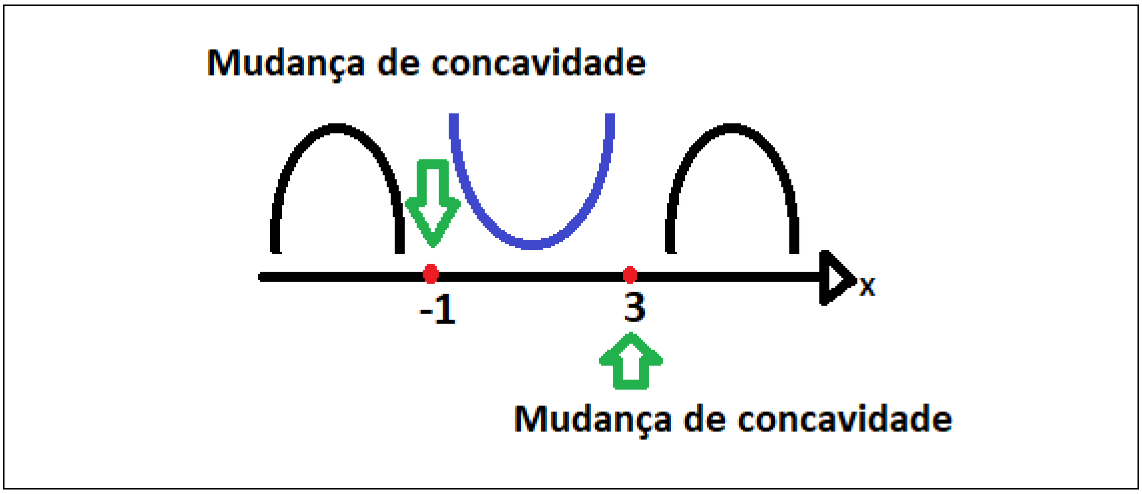


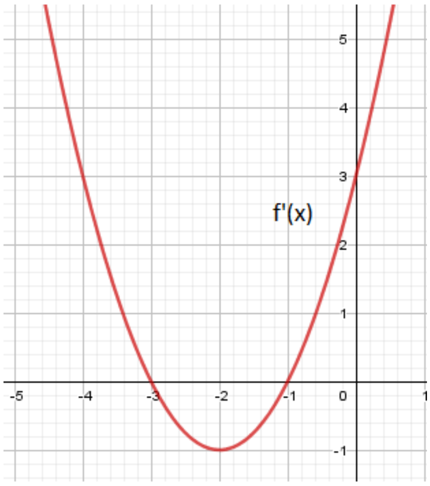
Figura 4 – Representação Figural da análise das questões 41 e 42

O objetivo de analisar algumas questões é mostrar que é possível "passear" pelos registros semióticos e, assim, poder construir conceitos sobre qualquer tema. Analisar várias facetas de um objeto matemático é fundamental, tanto para o ensino como para a aprendizagem. Na língua natural, mais utilizada em exercícios, devemos nos atentar para a clareza, objetividade e coerência nos enunciados.

Na questão 34, por exemplo, fizemos um outro tipo de análise, em que o(a) professor(a) pode solicitar ou indagar seus alunos e tentar minimizar a possível falta de compreensão. A questão em si pede apenas o intervalo de crescimento e decrescimento da função por meio da derivada primeira.

Quadro 6 - Análise da questão 34 em relação às informações observadas

34. O gráfico é da derivada primeira de uma função $f(x)$.



Com base nele, o que se pode concluir a respeito dos intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$?

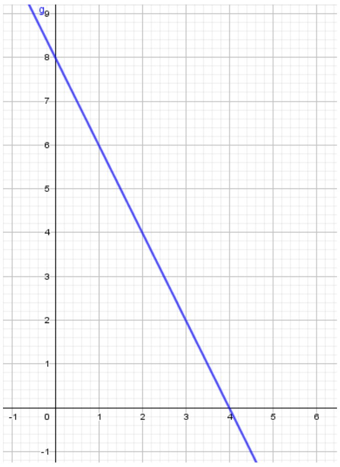
Análises de características que devem ser observadas pelos estudantes	**Implicação**
$f'(x) > 0$, intervalos $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$	$f(x)$ crescente nesses intervalos.
$f'(x) < 0$, intervalo $(-3, -1)$	$f(x)$ decrescente nesse intervalo.
zeros da $f'(x)$ $-3\ e - 1$	Pontos de Máximos ou Mínimos Locais da $f(x)$
Mudança de sinal da $f'(x)$ de positivo para negativo em $(-3{,}0)$	Ponto de Máximo Local
Mudança de sinal da $f'(x)$ de negativo para positivo em $(-1{,}0)$	Ponto de Mínimo Local

Fonte: A autora

Uma análise do gráfico da derivada segunda de uma função $f(x)$ qualquer, torna-se um exercício de reflexão do conceito derivadas. No Quadro 24 abordaremos a questão 43 do aplicativo e indicaremos algumas informações que o professor pode explorar ao trabalhar com questões desse tipo.

Quadro 7 - Análise da questão 43 em relação às informações observadas

43. O gráfico refere-se à derivada segunda $f''(x)$ da $f(x)$.



Observando esse gráfico podemos dizer que o ponto (4,0) representa:

a ( ) um ponto crítico na $f(x)$

b ( ) um ponto Máximo ou Mínimo na $f(x)$

c ( ) um ponto de inflexão na $f(x)$

d ( ) Nenhuma das Alternativas

Análises de características que devem ser observadas pelos estudantes	**Implicação**
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Ponto de máximo ou mínimo da $f'(x)$.
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Ponto de inflexão da $f(x)$.
Zero da $f''(x)$: $x = 4$	Determina o limite que $f'(x)$ é crescente e/ou decrescente.
$f'' > 0\ em\ (-\infty, 4)$	Concavidade da $f(x)$ para cima, neste intervalo
$f''(x) < 0\ em\ (4, +\infty)$	Concavidade da $f(x)$ para baixo, neste intervalo.

Fonte: A autora

Outras indagações também podem ser feitas pelo professor(a). O objetivo é que o aluno não veja apenas o conteúdo em tópicos, sem ligações, mas que também seja oportunizado mais de um registro de representação semiótico.

REFERÊNCIAS

CONSCIÊNCIA, M.; OLIVEIRA, H. Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo. In **Actas do XXII SIEM** (pp.1-15) Lisboa: APM. 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012. p. 266-297.

_________. **Sémiosis et pensée humaine**: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang, 1995.

_________.**Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (fascículo I). Tradução de Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012. p. 266-297.

GIL, R. **A aprendizagem da noção de derivada no 11.º ano** (Relatório da Prática de ensino supervisionada). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa. 2014.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

Orhun, N. Graphical understanding in mathematics education: derivate functions and students’ difficulties. Procedia – **Social and Behavioral Sciences**, nº55, 679-684. 2012.

STEWART, J. **Cálculo**. V. 1. 6ª edição. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2010.

WAIDEMAN, A. C. **Um aplicativo para o estudo de derivada**s. 2018. 173 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Ensino de Matemática, UTFPR, Londrina, 2019.