UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

IGOR NASCIMENTO DUARTE

O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: ABORDAGENS PARA O ENSINO DE TÓPICOS DA TEORIA DE CONJUNTOS E DA GEOMETRIA PLANA

CURITIBA

2024

IGOR NASCIMENTO DUARTE

O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: ABORDAGENS PARA O ENSINO DE TÓPICOS DA TEORIA DE CONJUNTOS E DA GEOMETRIA PLANA

The use of concrete manipulatives in the light of the theory of registers of semiotic representations: approaches to teaching topics in set theory and plane geometry

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientadora: Leônia Gabardo Negrelli.

CURITIBA

2024

IGOR NASCIMENTO DUARTE

O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: ABORDAGENS PARA O ENSINO DE TÓPICOS DA TEORIA DE CONJUNTOS E DA GEOMETRIA PLANA

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 27/junho/2024

Leônia Gabardo Negrelli
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Elisangela de Campos
Doutorado
Universidade Federal do Paraná

Marco Aurélio Kalinke
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora Prof.ª Dra. Leônia Gabardo Negrelli, pela paciência e pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

Aos meus colegas de curso, com os quais compartilhei desafios.

À Coordenação do Curso pela organização, cooperação e retidão.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento a Deus, à minha família e aos meus amigos pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar possíveis utilizações de Materiais Didáticos (MD) à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) no processo de ensino-aprendizagem de matemática com o propósito de elaborar Sequências Didáticas de tópicos da Teoria de Conjuntos e da Geometria Plana que contemplem o MD alinhado à TRRS. Para tanto foi realizado um estudo da referida teoria, proposta por Raymond Duval, a partir de seus esforços em investigar a aprendizagem matemática levando em consideração um embasamento sobre representações na área da Semiótica e fundamentando-se em estudos cognitivos de aprendizagem de Jean Piaget. Neste contexto as representações semióticas fazem referência a sistemas particulares de signos, como a linguagem, a escrita algébrica e os gráficos cartesianos. Representações semióticas de um determinado sistema podem ser convertidas em representações "equivalentes" de um outro sistema, mas podem também tomar significações diferentes. Dentre os sistemas semióticos, aqueles que permitem três atividades cognitivas (formação, tratamento, conversão) são exatamente aqueles nos quais é possível a existência de diferentes registros. à luz dessa abordagem teórica, a apreensão de um conceito matemático somente é possível através da coordenação, isto é, o uso de vários registros de representações e a transição entre diferentes registros. Para fins educativos, o importante não são as representações em si, mas a capacidade do estudante transitar com naturalidade entre elas. Por isso, nesta pesquisa foram caracterizados adequadamente os materiais didáticos manipuláveis fisicamente, uma vez que se constituem no objeto inicial de interesse que resultou na proposição deste trabalho de conclusão de curso. Como objetos, tais materiais "incorporam" algumas características dos conceitos a serem apreendidos. Propostas iniciais de abordagem de conceitos matemáticos presentes em livros didáticos foram exploradas e como resultado dessa análise foram delimitados os conceitos, os registros e os materiais didáticos manipuláveis que orientaram a elaboração das Sequências Didáticas.

Palavras-chave: teoria dos registros de representação semiótica; materiais didáticos; teoria dos conjuntos; geometria plana; educação matemática.

ABSTRACT

This research aimed to investigate possible uses of Concrete Manipulatives (CM) in light of the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSR) in the teaching-learning process of mathematics with the purpose of developing Didactic Sequences of topics from Set Theory and Plane Geometry that contemplate CM aligned with TRSR. To this end, a study of the aforementioned theory, proposed by Raymond Duval, was carried out based on his efforts to investigate mathematical learning taking into account a basis on representations in the area of Semiotics and based on cognitive studies of learning by Jean Piaget. In this context, semiotic representations refer to particular systems of signs, such as language, algebraic writing and Cartesian graphs. Semiotic representations of a given system can be converted into "equivalent" representations of another system, but they can also take on different meanings. Among the semiotic systems, those that allow three cognitive activities (formation, treatment, conversion) are exactly those in which the existence of different registers is possible. In light of this theoretical approach, the apprehension of a mathematical concept is only possible through coordination, that is, the use of several representation registers and the transition between different registers. For educational purposes, what is important is not the representations themselves, but the student's ability to transition naturally between them. Therefore, in this research, the concrete manipulatives were adequately characterized, since they constitute the initial object of interest that resulted in the proposition of this undergraduate thesis. As objects, such manipulatives "incorporate" some characteristics of the concepts to be learned. Initial proposals for approaching mathematical concepts present in textbooks were explored and, as a result of this analysis, the concepts, registers and concrete manipulatives that guided the elaboration of the Didactic Sequences were delimited.

Keywords: theory of registers of semiotic representation; concrete manipulatives; set theory; plane geometry; mathematics education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho situa-se na área da Educação Matemática, especificamente em Didática da Matemática, investigando possíveis utilizações de Materiais Didáticos Manipuláveis (MDM) à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) no processo de ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Médio (EM).

Nas seções seguintes são apresentadas: as motivações que culminaram na construção deste trabalho, os objetivos propostos e a metodologia utilizada, além de um panorama do corpo deste texto.

1.1 Justificativa

Optei por investigar mais a fundo o uso de MDM e a TRRS considerando que os primeiros podem munir a prática docente com vários recursos capazes de mitigar algumas incompreensões relacionadas a aspectos tidos como 'muito abstratos' por estudantes de matemática na etapa da Educação Básica. Já a abordagem teórica foi escolhida por considerar que a transição entre formas variadas de representação de um mesmo conceito pode contribuir significativamente para a aprendizagem dele.

Durante minha vida escolar, enquanto estudante da Educação Básica, possuía questionamentos sobre alguns conceitos matemáticos e dificuldades que mesmo as aulas e livros não conseguiam sanar. Como licenciando em matemática observei que, durante as disciplinas de Estágio Supervisionado, em atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), em vivências do programa Residência Pedagógica (RP) e nas experiências com o Programa de Iniciação Científica Jr (PIC) vinculado à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), alguns estudantes do ensino fundamental e médio também possuíam dificuldades e questionamentos semelhantes.

Por essa razão e pelo interesse em entender de forma mais ampla a matemática, decidi investigar aspectos dessa área do conhecimento que envolvem sua linguagem e sua representação. Concomitantemente, busquei conhecer artefatos e recursos didáticos que ajudassem a experimentar e compreender melhor a matemática.

Durante o período em que participei do programa RP (2018/2019) pude observar de perto as condições do ambiente escolar e algumas particularidades do ensino e aprendizagem dos estudantes. Nesse programa, somente ao fim do ano de

2018, nas aulas para o 9º ano, após vários meses de atividades e simulados, entre eles atividades e exercícios envolvendo ângulos, relógios e a noção de sentido horário e anti-horário, eu descobri que vários estudantes, entre 13 e 15 anos, sequer sabiam como ver as horas em um relógio de ponteiros. Algo desse porte passar desapercebido ao longo de todo o Ensino Fundamental é no mínimo preocupante, ainda mais quando se ensina e se exige que os estudantes resolvam questões que envolvem relógios de ponteiros. No ano seguinte, descobri, que alguns dos professores e pedagogos sabiam dos problemas, mas acabaram deixando essa situação avançar, por razões diversas, pessoais ou administrativas.

A questão central da situação era: se os estudantes, que estão acostumados a ver as horas em um relógio digital, em um celular, não sabem ao menos ver as horas no relógio de ponteiros e talvez por conta disso, não entendem direito os significados de “sentido horário” e “sentido anti-horário”, como é que eles conseguiram responder as perguntas e atividades? Eles sabiam o que estavam fazendo? Ou simplesmente responderam sem entender e ficou por isso mesmo?

Todos os exemplos e exercícios usados nas aulas, com desenhos de ponteiros de relógios para falar sobre ângulos, ou que faziam referência ao sentido de rotação dos ponteiros, simplesmente não tinham significado para muitos dos estudantes. O funcionamento do relógio de ponteiros era o de um objeto exótico, totalmente estranho e alheio.

Como “ensinar a ler as horas” não faz parte do currículo de matemática, não foi feita uma aula para isso no período “regular”. No fim do ano, em uma das aulas de recuperação, para 10 estudantes aproximadamente, em cada uma das três turmas do 9º ano, eu levei dois relógios, para ensinar os estudantes a “ler as horas”. Lembro de eles terem entendido, mas um pedaço de aula não compensa vários anos do Ensino Fundamental sem essa prática. Isso indica um problema maior, já que a quase onipresença dos relógios digitais faz com que essa habilidade de leitura fique cada vez mais restrita apenas ao contexto teórico das aulas de matemática. Alguns conteúdos, atividades e exercícios de matemática se baseiam em instrumentos, objetos, artefatos tecnológicos que não são mais comuns no ideário dos estudantes, e cada vez menos comuns na sociedade em geral.

No mesmo ano, participei do II Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática (SENALEM) como ouvinte. Lá tive a oportunidade de entrar em contato com as ideias de Ludwig Wittgenstein e seus “Jogos de Linguagem” aplicados à

Educação Matemática que foram apresentadas em sua maioria pelos acadêmicos da Universidade Federal do Pará (UFPA), entre vários outros trabalhos que envolviam linguagem, matemática e educação. Uma das palestrantes do evento era justamente um dos tradutores do livro “Semiósis e pensamento humano” do Raymond Duval, autor da TRRS, na qual se baseia este trabalho.

No ano seguinte, em 2019, também durante o RP, ocorreu algo semelhante à situação do relógio, mas desta vez envolvendo o ensino de equações do 1º grau. Para a atividade, construímos uma balança mecânica para auxiliar na aprendizagem dos estudantes, e junto levamos uma balança digital, além de vários outros objetos que pudessem ser “pesados” nas balanças para possibilitar a comparação e assim facilitar o entendimento pelos estudantes.

Disso resultou um poster, apresentado no III Encontro das Licenciaturas da Região Sul (ENLIC SUL) que ocorreu em conjunto ao III Encontro do PIBID e o I Encontro do Residência Pedagógica: “Uma abordagem lúdica no ensino básico: a utilização da balança para ensinar equações” (DUARTE *et al.*, 2019). Nele explora-se justamente o fato de que a balança mecânica, a maior referência para o conceito de equação, é na verdade, para muitos estudantes, um objeto nebuloso que pertence a um passado imaginário.

Situação semelhante se repetiu, ainda mais uma vez, mas agora no 15º PIC da OBMEP em 2020, dando aulas para uma turma com estudantes do 6º e 7º ano, medalhistas na OBMEP.

Dois exercícios, com o mesmo problema: os objetos ali representados não faziam referência a nenhuma vivência dos estudantes. Um dos exercícios falava sobre a rotação em conjunto de 11 engrenagens (representadas por uma figura) e havia a dificuldade adicional de um conceito novo aos estudantes, o de Paridade. Estudantes do 6º e 7º ano que aparentemente nunca tinham sequer tocado em uma única engrenagem na vida, não sabiam o que era “sentido horário” e “sentido anti-horário” (acredito que também não sabiam “ler as horas” no relógio de ponteiros) e que pela primeira vez estavam estudando sozinhos o conceito de Paridade, foram colocados para resolver como primeiro exercício, um que envolvia 11 engrenagens conectadas entre si e perguntados se elas rodarão, devendo explicar a resposta detalhadamente por extenso. Alguns entenderam o exercício e conseguiram responder utilizando os termos e conceitos que eles conheciam, como por exemplo “girar para direita/esquerda”, embora não esteja correto, nem o que era esperado ou cobrado como resposta adequada já que muitos nem sequer notaram a relação das engrenagens girando com o conceito de paridade.

Esperar que estudantes que não sabem o que são sentidos “horário” e “anti-horário”, nem sabem direito como engrenagens funcionam e que nunca estudaram Paridade, leiam o exercício, abstraiam, acertem como é o funcionamento devido de 11 delas e ainda expliquem por extenso de maneira detalhada a solução é excessivo. Nenhum deles conseguiu responder “de primeira” da maneira “adequada” como era esperado. Apenas após algumas explicações.

Independentemente disso, o professor que elaborou a questão acreditou que ela estava totalmente adequada, tanto que o exercício compôs a 1ª Lista de exercícios enviada para o país inteiro. Talvez a enorme proximidade do professor com os conceitos que eram abordados e representados nem sequer fizeram com que ele ao menos considerasse que os estudantes poderiam não partilhar desta proximidade. Os conceitos pertenciam ao ideário do professor, ao seu passado, à sua vivência, mas não à dos estudantes.

O segundo exercício envolvia uma balança mecânica. As dificuldades foram semelhantes às já relatadas.

Se até para estudantes que supostamente são “os melhores”, que “mais sabem” matemática, que “mais estudam” em relação aos estudantes da mesma faixa etária escolar, que foram selecionados pela prova de uma olimpíada, existe uma dificuldade em entender, resolver e expressar a solução do exercício, então isso está totalmente fora da realidade da grande maioria dos estudantes da rede pública. E o ensino público é o oferecido para a maioria esmagadora da população brasileira. O desencontro é gigantesco.

As balanças e os relógios de ponteiros já começam a ocupar o mesmo espaço dos ábacos. Extremamente presentes nos últimos séculos, tornam-se cada vez mais obsoletos, principalmente nos últimos 20 anos, com o avanço tecnológico e massiva presença de celulares e computadores. O currículo de matemática ainda não se adequou como no caso do ábaco e continua se sustentando em dar exemplos que não são nem um pouco comuns aos estudantes ou ao seu cotidiano, mas que são comuns a muitos dos professores, pois esses exemplos fizeram parte de suas infâncias, formações acadêmicas e por consequência de ideário do mundo. Embora os mesmos exemplos estejam fora do ideário dos estudantes e de sua vida cotidiana.

Ao que tudo indica, existe, esse desencontro entre os conceitos matemáticos que são ensinados pelos professores através de objetos (até mesmo por exemplos e exercícios baseados nesses objetos) e a vivência dos estudantes no mundo fora da escola.

Tudo isso me encaminhou ao estudo das relações que são feitas entre ideias (conceitos matemáticos) e suas representações, e concomitantemente, entre ideais (conceitos matemáticos) e os objetos físicos que servem de modelos por incorporarem algumas das características dessas ideias. E por conseguinte, o estudo da relação de encontro e desencontro do trio ideias-representações-objetos que ocorre no processo de ensino-aprendizagem. Em resumo, me levou à investigação do uso de Materiais Didáticos à luz da TRRS no processo de ensino-aprendizagem.

1.2 Objetivos

Propor alternativas para o uso de Materiais Didáticos e as diferentes representações de conceitos matemáticos no processo de ensino-aprendizagem. Dentre as diversas possibilidades de conceitos, materiais e abordagens, optou-se pela formulação de sequências didáticas sobre tópicos referentes à: Teoria de Conjuntos, Geometria Plana. Os conceitos matemáticos, Materiais Didáticos e representações utilizados serão apresentados nas seções do capítulo 3: Sequências Didáticas.

Cada uma das propostas desenvolvidas almejou como objetivo responder a seguinte questão: *como abordar o ensino de conceitos matemáticos por meio do uso de Materiais Didáticos manipuláveis à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica?*

Assim, a elaboração das sequências didáticas visa apresentar possibilidades de um uso intermediário e facilitador dos Materiais Didáticos que, aliados à coordenação de diferentes registros de representação, promoveriam uma aprendizagem ativa e dinâmica por parte dos estudantes, além de fornecer informações claras sobre a efetividade e qualidade desse aprendizado.

1.2.1 Objetivos Específicos

- Exemplificar como os conceitos matemáticos selecionados são abordados atualmente.
- Apresentar os Materiais Didáticos utilizados nas Sequências Didáticas.
- Relacionar os Materiais Didáticos aos conceitos matemáticos e as representações, listando as características similares.
- Apresentar as Sequências Didáticas, mostrando como os conceitos matemáticos selecionados podem ter seus significados e representações ampliados à luz da TRRS.
- Comentar sobre possibilidades de usos alternativos, viabilizações e possíveis desafios no uso dos Materiais Didáticos à luz da TRRS.

1.3 Metodologia

O trabalho é majoritariamente teórico já que visa a concepção de sequências didáticas. O processo de confecção de alguns dos materiais didáticos é apresentado nos Apêndices A e B. As atividades apresentadas não foram testadas no ambiente escolar, nem na dinâmica do dia a dia da sala de aula convencional das escolas públicas estaduais, mas utilizam como referência de possível implementação a experiência de sala de aula do autor.

Nas sequências didáticas buscou-se contextualizar os conceitos matemáticos à vivência cotidiana. As situações e atividades apresentadas buscaram colocar em evidência como alguns dos atributos dos conceitos matemáticos possuem similaridade com objetos concretos e situações corriqueiras. Essa busca pela vivência e experimentação concreta do conceito matemático foi também utilizada na forma como os estudantes deveriam interagir com os materiais didáticos na execução das atividades propostas.

1.4 Panorama

No capítulo 2, a seguir, apresenta-se conceitos e áreas do conhecimento que muitas vezes se entrelaçam. Procurando deixar clara essas caracterizações e relações estreitas, na primeira seção, fundamenta-se teoricamente sobre Semiótica e relaciona-se também sua influência, muitas vezes recíproca, com as áreas de

Matemática e Didática da Matemática. Como uma extensão particular da teoria semiótica, apresenta-se na seção seguinte a TRRS. Logo após, tem-se a delimitação teórica dos Materiais Didáticos e sua relação com os conceitos matemáticos, seguida de uma elucidação de como eles podem atuar à luz da TRRS no processo de ensino e aprendizagem. Finaliza-se o capítulo, contextualizando toda a produção do trabalho com os currículos vigentes, através de uma breve correlação entre as bases teóricas desses trabalhos e as competências apresentadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No capítulo 3, apresentam-se as sequências didáticas, produzidas com o objetivo de prestigiar as funções de tratamento e conversão, apresentadas pelas bases teóricas da TRRS. Nas subseções são listados os materiais didáticos e os principais conceitos matemáticos utilizados nas sequências. Na subseção dos conceitos, a fim de haver um ponto de referência, fez-se um levantamento de como eles são apresentados nos livros didáticos. O processo de elaboração, alternativas para algumas das etapas das sequências e possíveis obstáculos são apresentados na seção de comentários de cada subseção. Na última seção deste capítulo estão também incluídas outras possibilidades de propostas utilizando os materiais didáticos à luz da TRRS.

Nas considerações finais, retomam-se alguns aspectos importantes sobre a TRRS, sobre os materiais didáticos e suas influências nas elaborações das sequências didáticas. Elencam-se também novos questionamentos, futuras linhas de investigações e algumas perspectivas sobre o processo educativo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo são apresentadas as bases teóricas que direcionaram a produção deste texto. Inicialmente, através de recortes da história da Semiótica caracteriza-se seu relacionamento com as áreas de Matemática e Educação Matemática. Um dos desdobramentos das pesquisas nas áreas anteriores, a TRRS, é apresentado em seguida. Os conceitos acerca do uso de Materiais Didáticos ocupam duas seções, uma geral, outra específica. Por fim, faz-se uma abordagem da BNCC no contexto do presente estudo.

2.1 Semiótica

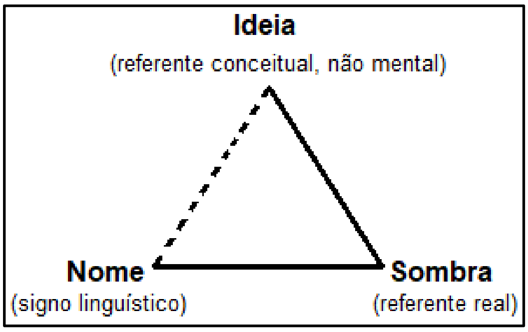
Embora as ideias que permeiam a semiótica tenham um histórico milenar, foi somente a partir da década de 90 que a semiótica, a ciência que estuda os signos e os processos de significação, começou a integrar-se extensivamente às pesquisas na área de didática da matemática. As compreensões e ferramentas por ela fornecidas colaboram para um melhor entendimento das relações presentes entre os objetos matemáticos e suas manifestações culturais, acadêmicas ou individuais, possibilitando novos olhares para aqueles interessados em melhorar os processos de ensino e de aprendizagem de matemática.

A semiótica está entrelaçada com a matemática, com a didática da matemática (processo de aquisição do conhecimento) e consequente com as bases teóricas deste trabalho. A seguir, conforme apresenta (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015), estão alguns momentos relevantes da história da semiótica.

Uma das primeiras ocorrências de uma teoria que buscasse explicar o funcionamento dos signos aparece na obra 'Crátilo' de Platão (428 a.C. a 347 a.C.). Na construção de uma teoria da linguagem, os "nomes", que atualmente são designados como "signos linguísticos", eram meios para representar as coisas existentes no mundo, mas apenas de uma maneira imprecisa e incompleta, pois, conforme estabelece sua filosofia, as coisas presentes do mundo são apenas sombras e projeções de entes perfeitos, eternos e imutáveis que habitam um mundo além do nosso, o Hiperurânio.

A matemática e seus objetos estariam então restritos a um reino de objetos ideais, não espaciais e não temporais, que não podem ser alcançados diretamente, mas apenas representados por meio de termos (“nomes”) de objetos concretos. Portanto, estabelecendo uma relação triádica entre “nomes”, objetos e ideias.

Figura 1 - Modelo platônico do signo



Fonte: Adaptado de D’Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 30)

Em suas obras, Aristóteles (384 a.C. a 322 a.C.) apresenta uma distinção entre signos linguísticos e signos não-linguísticos. Os primeiros têm uma relação de equivalência com os conceitos ou às coisas que designam, enquanto os últimos têm uma relação de inferência. Os signos não-linguísticos são considerados como “signos naturais”, são fatos ou eventos naturais (causas) dos quais é possível inferir outros fatos ou eventos naturais (consequências).

Aristóteles, ao contrário de Platão, admitia a possibilidade de alcançar os objetos matemáticos por meio da abstração, dado que partindo do contato com os objetos concretos e do processo de abstração pode-se chegar aos objetos matemáticos. Ocorrendo justamente por meio do pensamento a separação dos objetos matemáticos de suas exemplificações físicas.

O matemático Euclides (325 a.C. a 265 a.C.), possivelmente influenciado pelos seus contemporâneos Estoicos (Séc. IV. ao Séc. III) e Epicuristas (341 a.C. a 270 a.C.), trata os objetos geométricos, em “Os Elementos”, como frutos da intuição.

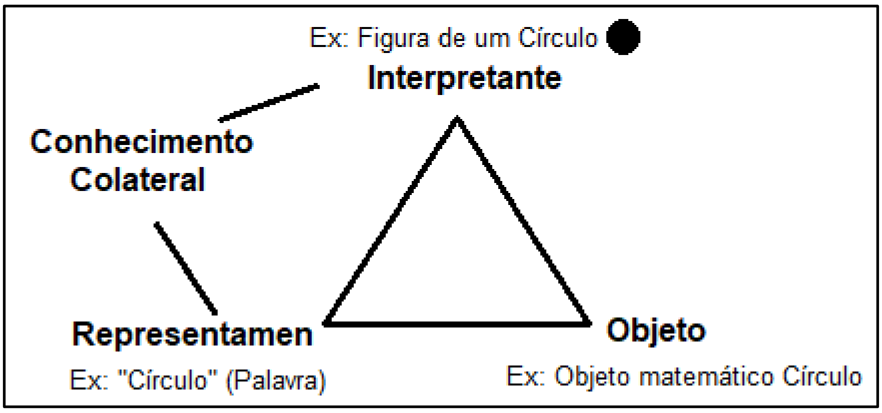
Os axiomas ou postulados, são tidos com intuitivamente evidentes e os entes fundamentais, ponto e reta, são também tidos como absolutamente evidentes, sendo intuídos diretamente e independentes da teoria. É a partir deles que a existência dos outros objetos é construída. Os objetos geométricos não são tratados como ideias ou formas puras, mas como indivíduos particulares, sendo comum o uso de diagramas (representações semióticas) que possibilitam modificações e novas construções.

Até Agostinho de Hipona (354 a 430) a teoria da linguagem e a teoria do signo eram consideradas separadas. A primeira estabelecida em termos de equivalência e a segunda em termos de inferência. As palavras (signos linguísticos) antes não considerados como signos completos são incluídas por Agostinho. Assim, para Agostinho, signos são todas as coisas que significam algo para alguém (mentalmente), incluindo as palavras.

Immanuel Kant (1724 a 1804) ao negar que a aquisição de conhecimento seja um processo enclausurado na mente (Racionalismo) ou exclusivamente um resultado das experiências (Empirismo), defende que os sujeitos, na verdade, participam ativamente no processo cognitivo de representação da realidade. Ao interagirem com objetos particulares, os sentidos fornecem impressões para a mente através de representações intermediárias que por sua vez são associadas a outras representações. E é justamente pela capacidade de síntese das diferentes impressões e representações que os sujeitos têm um papel dinâmico como produtores do próprio conhecimento.

O fundador da semiótica moderna, Charles Sanders Peirce (1839 a 1914), defende que tudo possui uma natureza essencialmente semiótica, ou seja, tudo pode funcionar como um signo, desde que alguém o interprete como tal. Para Peirce o signo faz parte de uma relação triádica. Um signo (representamen) representa um objeto com a intenção de sinalizar alguma outra coisa (interpretante). No entanto, também se faz necessário um conhecimento colateral para a interpretação dos signos.

Figura 2 - Relação entre os signos segundo Peirce



Fonte: Adaptado de D’Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 61)

O fundador da linguística moderna, Ferdinand de Saussure (1857 a 1913), também contribuiu para a semiótica ao buscar construir uma ciência dos signos (semiologia) que estudasse os signos no contexto da vida social e da psicologia social. O signo para Saussure é um ente psíquico (mental) que tem origem nas interações sociais e, portanto, é uma construção coletiva, estando sujeito a novas significações ou convenções.

Todas as concepções apresentadas até aqui investigavam os objetos da realidade, a natureza das ideias e o processo de aquisição do conhecimento de modo geral. Os objetos matemáticos e suas variadas representações (linguísticas, figurais, algébricas e até mesmo mentais), mesmo quando incluídos, não mantinham o protagonismo. Isso muda com os estudos de Jean Piaget.

Jean Piaget (1896 a 1980) ao se debruçar sobre a aquisição de conhecimento busca estabelecer, desde o nascimento do indivíduo, os diferentes estágios do seu desenvolvimento cognitivo. Em suas esquematizações, na relação entre os signos e a aprendizagem, Piaget dialoga com as ideias de Kant, Saussure e Peirce, ao mesmo tempo em que difere deles em alguns pontos. O conhecimento não se origina da linguagem (signos linguísticos), mas das ações reais ou interiorizadas (ações mentais) e de processos de adaptação. O intelecto emoldura e regula a experiência ao mesmo tempo em que a própria experiência modifica o intelecto. A capacidade semiótica se manifesta nos indivíduos quando conseguem representar um objeto ou um evento que não está presente (significado) por meio de outros que estão presentes (significante). A linguagem, a imitação, o uso simbólico, os desenhos, as imagens mentais e as memórias são todos instrumentos semióticos para evocar e pensar naquilo que foi percebido, mas que não está, por algum motivo, ao alcance externamente.

Em contínua interação com o ambiente os indivíduos passam por um processo de adaptação. Ao construírem seus conhecimentos necessitam fazer uso de assimilações e acomodações do conhecimento, isto é, incorporam (interpretam) as informações e os eventos externos e buscam um equilíbrio conciliador entre as novas informações e as antigas. É nesse processo de adaptação que os indivíduos avançam pelos diferentes estágios do desenvolvimento cognitivo, da mera evocação mental dos objetos, para manipulação lógica de símbolos que representam de certa maneira objetos concretos, até a capacidade de compreender conceitos abstratos efetuando sobre eles raciocínios hipotéticos e dedutivos.

2.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Várias pesquisas atuais na área da Educação Matemática têm tido como foco de investigação a TRRS de Raymond Duval. Ela utiliza como base, entre muitos outros referenciais, os estudos cognitivos de aprendizagem desenvolvidos por Jean Piaget, se aprofundando na análise do funcionamento cognitivo do pensamento, no processo de representação de conceitos e no impacto do uso das representações na aprendizagem de matemática.

Nesse sentido Damm (2002, p. 135) afirma que:

> Em matemática, toda comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Como essa teoria do processo de ensino-aprendizagem se ampara nos conceitos de “representações” e “registros”, torna-se necessário o esclarecimento acerca desses conceitos.

Segundo Duval (2009, p. 29-34) a noção do fenômeno da representação já foi abordada de três modos diferentes: como representação mental, representação interna ou computacional, representação semiótica.

A representação mental faz referência aos estudos de Piaget, dentre eles “O Nascimento da inteligência na criança” (1937) em que a noção de representação é tratada como “evocação dos objetos ausentes”; a representação interna ou computacional faz referência aos estudos envolvendo sistemas que realizam o tratamento de informações introduzidas e dos resultados providos pelo sistema após esse tratamento. (DUVAL, 2009, p. 30).

Ambas as concepções anteriores são fundamentalmente diferentes entre si e da concepção de representação semiótica.

As representações semióticas são:

> [...] relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza. (DUVAL, 2009, p. 32).

Já um sistema semiótico é definido por Duval (1996 apud D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 65) como um conjunto de:

> a) regras organizadoras para combinar e agrupar elementos (signos) em unidades significativas (expressões, unidades figurais elementares);
> b) elementos que assumem valor de sentido somente em oposição de escolha a outros elementos e a seu uso segundo as regras organizadores

> que permitem designar objetos (por exemplo, os algarismos de uma base de um sistema de numeração).

As possibilidades de conversão de representações de um sistema em representações equivalentes de outro sistema, agrega para cada representação novas significações. Assim, viabilizando novas relações entre os conhecimentos, antes isolados, e as representações particulares de cada sistema.

Dentre todos os sistemas semióticos, aqueles que permitirem as três atividades cognitivas a seguir, são exatamente aqueles que possuem a possibilidade de expressão por meio de diferentes registros.

1ª A **formação**: a possibilidade de constituir traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa;

2ª O **tratamento**: a possibilidade de transformar as representações em outras dentro do próprio sistema utilizando as regras do sistema;

3ª A **conversão**: a possibilidade de converter as representações de um sistema nas representações de outro sistema, mantendo uma relação com conhecimento representado e permitindo novas significações.

> Falaremos, então, de **registros de representação semiótica**. Tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda que confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor. (DUVAL, 2009, p. 37).

Por exemplo, alguns dos sistemas semióticos que permitem essas três atividades cognitivas são: a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas etc., enquanto o código morse e o código rota não permitem (DUVAL, 2009, p. 37).

As consequências que se seguem da TRRS para o processo de ensino-aprendizagem de matemática são que:

> A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com *registros de representação diferentes* do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto. (DAMM, 2002, p. 143-144).

E conforme afirma Ferreira (2015, p. 28):

> As representações semióticas possuem grande importância à atividade cognitiva. Porém, Duval (2009), destaca que das três atividades citadas anteriormente, somente às duas primeiras (formação e tratamento), na

> maioria dos casos, são consideradas para o ensino. Para Brandt e Moretti (2005, p. 205), "o privilégio de uma das três atividades cognitivas prejudica a conceitualização do objeto matemático".

Levando em conta a TRRS e que, muitas vezes, ao estudante é imposto um ensino privilegiando a formação e o tratamento, percebe-se uma necessidade de maior enfoque na proficiência do estudante em lidar com o conceito em diferentes representações e registros. Assim, parece adequado que o centro do processo de ensino e aprendizagem deve se deslocar no sentido de privilegiar o **tratamento** e a **conversão** entre os diferentes registros utilizados durante as situações de ensino de matemática.

O **tratamento** é uma transformação interna ao sistema de um tipo de registro, como se é feito, por exemplo, no cálculo algébrico ao se resolver equações, ou ao se manipular a regra de uma certa função. Já a **conversão** é uma transformação entre dois sistemas de registro diferentes, por exemplo, na conversão da expressão algébrica da regra de uma função para a representação de gráficos, ou ainda, em uma descrição de uma imagem, passando da representação figural para uma representação linguística, em língua natural. (DAMM, 2002).

Como as conversões acontecem envolvendo dois tipos diferentes de sistemas de representação é possível a ocorrência de "não-congruências" entre as representações. Segundo Duval (2009, p.18) duas representações são congruentes quando atendem a três condições:

> Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada.

Quando pelo menos uma das três não está presente, as representações não são congruentes entre si, e a conversão entre elas não é imediata nem intuitiva.

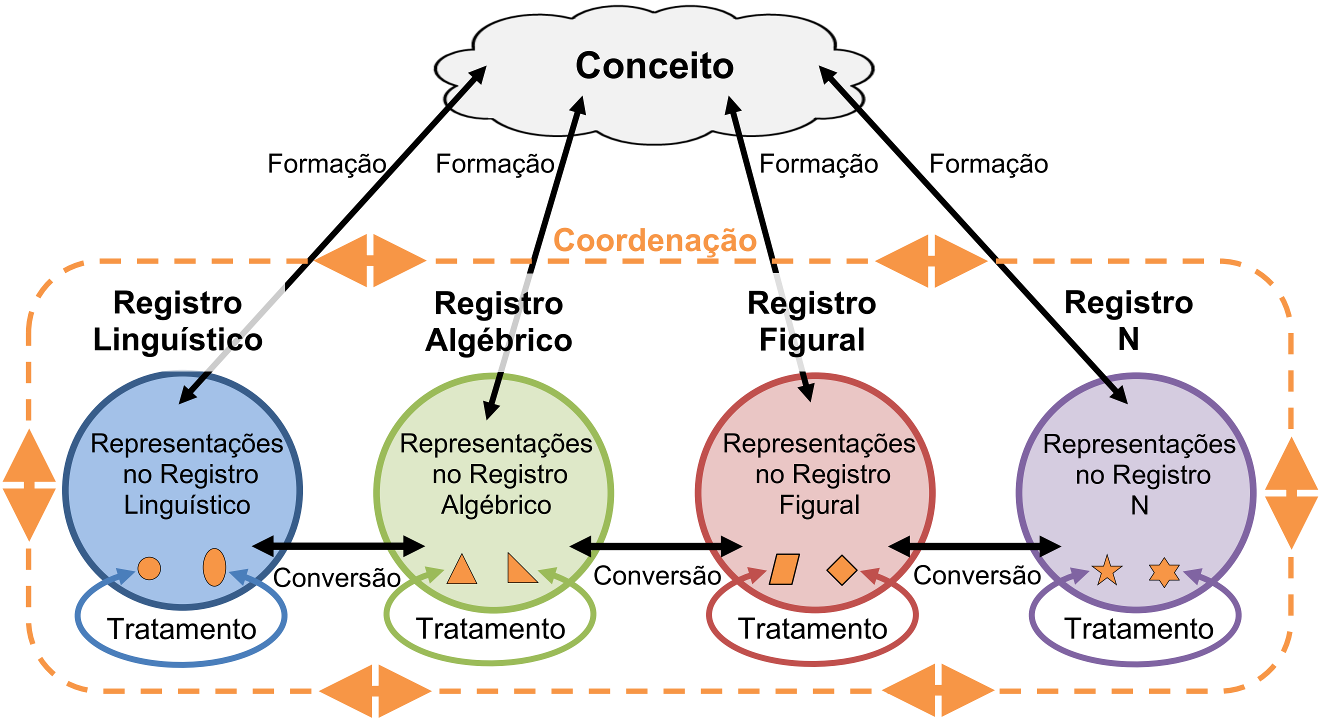
Lembrando ainda que:

> [...] o essencial não são os registros de representação que estão sendo utilizados, mas a maneira como estão sendo utilizados. Poderemos falar em conceitualização, aquisição de conhecimentos, somente a partir do momento em que o aluno "transitar" naturalmente por diferentes registros. (DAMM, 2002, p. 142).

Assim, ao se estabelecer propostas usando a TRRS também é importante se atentar a congruência das representações dos sistemas semióticos já que a capacidade de coordenação para realizar as conversões entre dois tipos de registros diferentes de maneira autônoma e consciente é o que revela avanços na aprendizagem de um conceito.

Toda a descrição pode ser sumarizada na Figura 3 a seguir, mostrando a relação entre conceito, registros e a coordenação entre eles através das ações de formação, tratamento e conversão.

Figura 3 - Representação esquemática da TRRS



Fonte: Autoria própria (2024)

2.3 Materiais didáticos

Nesta seção apresenta-se uma breve introdução sobre as definições acerca do que é um Material Didático Manipulável (MDM) e a definição que será utilizada no desenvolvimento das sequências didáticas. A utilização de Materiais Didáticos à luz da TRRS será o assunto da seção seguinte.

Dos diferentes entendimentos presentes na literatura sobre o que seja um Material Didático tem-se, além de diversas nomenclaturas, definições cujas características se sobrepõem. Conforme relata (BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 259-260) algumas dessas divergências são que:

> [...] Hole (1977) [...] diferencia 'materiais didáticos' de 'materiais estruturados'. Em relação aos primeiros, o autor define-os como meios de aprendizagem e ensino, enquanto descreve os segundos como "uma colecção de objectos, configurados de maneira a corporizarem, de uma forma apropriada, uma ou mais estruturas matemáticas" (p. 150), [...] Ribeiro (1995) sugere que o material estruturado corresponde ao material manipulável e "que subjacente à sua elaboração, se identifica implícita ou explicitamente pelo menos um fim educativo" (p. 6). Ou seja, materiais estruturados apresentam ideias matemáticas definidas, [...] o material não estruturado é aquele que, ao ser concebido, não corporizou estruturas matemáticas e que não foi idealizado para trabalhar um determinado conceito matemático, [...] Sendo assim, Ribeiro (1995) conclui que 'material manipulável' é qualquer objeto concreto que incorpora conceitos matemáticos, apela a diferentes sentidos, podendo ser tocado, movido, rearranjado e manipulado pelas crianças. Acrescenta ainda que 'material didático' é qualquer recurso utilizado na sala de aula tendo como objetivo promover a aprendizagem.
>
> As perspetivas de Ribeiro (1995), Mansutti (1993), Chamorro (2003) e Graells (2000) convergem quando consideram que os materiais didáticos são todos os materiais a que se recorre durante o processo de ensino-aprendizagem. No entanto, divergem em alguns pontos. Ribeiro (1995) apresenta uma definição mais ampla porque considera todos os materiais, enquanto Mansutti (1993) e Chamorro (2003) tornam essa definição mais restrita, abrangendo apenas objetos manipuláveis. Daqui se pode inferir que a ideia de chegar a um conceito de 'material didático' pode ser complexa e por vezes confundir-se com outro conceito, nomeadamente o de 'material manipulável'.

As concepções de (LORENZATO, 2012) e (PASSOS, 2012) caminham no sentido do referido Material Didático Manipulável (MDM). Destacam que o ele é um dos tipos de materiais didáticos, ou seja, um dos tipos de instrumentos úteis ao processo de ensino e de aprendizagem, que pode ser sentido, manipulado e movimentado.

Podem ser objetos do dia a dia ou projetados para representar uma ideia. Quando são projetados, o são de modo a permitir que através de um processo de abstração e interiorização seja possível separar mentalmente os atributos e propriedades do objeto físico em si.

Neste processo de criação de materiais didáticos manipuláveis, é necessário atentar para o fato de que, como diz Reys (apud PASSOS, 2012), bons materiais didáticos manipuláveis são verdadeiras personificações dos conceitos matemáticos, representando-os claramente.

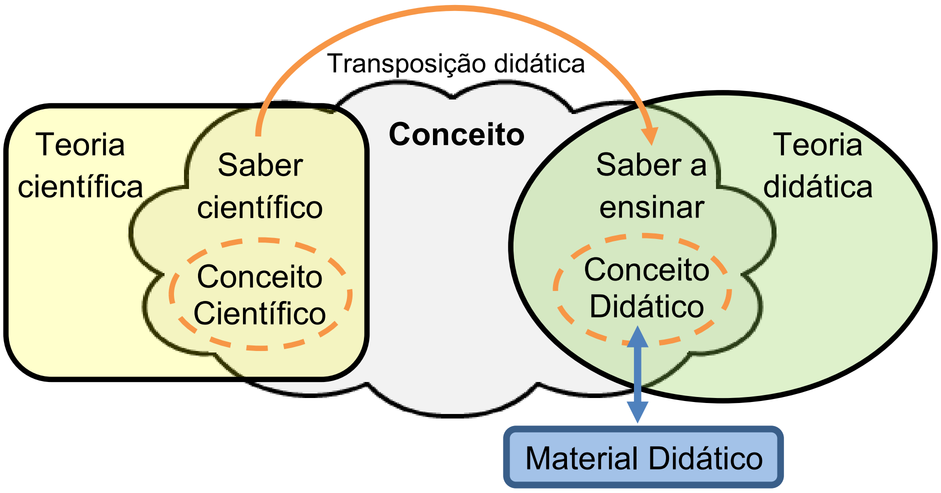
Este discernimento capaz de representar claramente os conceitos é fundamentado pelas Transposições Didáticas de Yves Chevallard, uma vez que os materiais didáticos são exemplos de criações pedagógicas facilitadoras do processo de aquisição de conhecimento (PAIS, 2000 apud PASSOS, 2012).

Um conteúdo do conhecimento, delimitado como saber científico, precisa passar por transformações didáticas que o tornem adequado para a prática educativa, vindo a ser um saber a ensinar. Convertido num objeto de ensino, o saber a ensinar (PAIS, 2002, p.23):

> [...] trata-se de um saber ligado a uma forma didática que serve para apresentar o saber ao aluno. Em seguida, ocorre uma mudança considerável não só no conteúdo em si como também nos objetivos de sua utilização. Na passagem do saber científico ao saber a ser ensinado ocorre a criação de um verdadeiro modelo teórico que ultrapassa os próprios limites do saber matemático. A partir dessa teoria surgem os materiais de apoio pedagógico que fornecem o essencial da intenção de ensino. Nessa etapa há portanto a predominância de uma teoria didática cuja finalidade está voltada para o trabalho do professor.

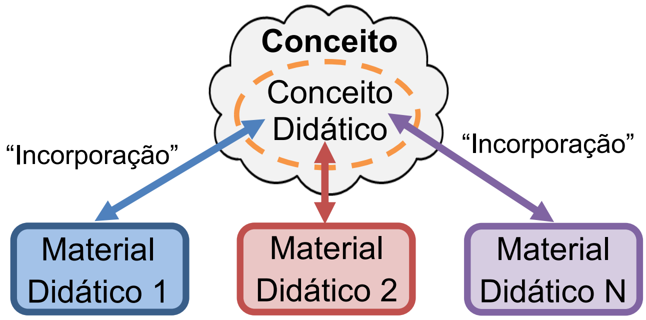
O processo de transposição didática, nas quais conceitos pertencentes aos saberes científicos tomam a forma de conceitos didáticos adequados para serem objetos de ensino, e sua relação com os materiais didáticos são ilustrados a seguir.

Figura 4 - Transposição Didática e Material Didático



Fonte: Autoria própria (2024)

Figura 5 - Conceitos e Materiais Didáticos



Fonte: Autoria própria (2024)

Dada essa grande diversidade de concepções e processos envolvendo os materiais didáticos define-se a seguir as características que um material didático manipulável deve possuir para que possa ser utilizado conforme a proposta deste trabalho: a capacidade de analogia, a qualidade manipulável, a diversidade de interação e a não restrição.

A capacidade de analogia se refere ao processo de “corporização” (“personificação”, “incorporação”) do Material Didático Manipulável (MDM). Deve ser possível estabelecer uma analogia clara entre os atributos físicos do MDM e as características dos conceitos matemáticos que se pretendem ensinar. Uma vez que se busca uma interação com a TRRS, a clareza nas semelhanças entre os MDM e os diferentes tipos de representações dos conceitos matemáticos auxiliará na transição entre eles.

A possibilidade de manipulação do material didático pelo professor e pelos estudantes, sem restrição a um ou a outro. De modo que os materiais didáticos possam ser utilizados tanto para apresentação do conteúdo por parte do professor, quanto para a interação simultânea do professor e do estudante com o material didático e a autonomia de manipulação do material didático pelo estudante.

Essa diversidade de interação deve possibilitar o distanciamento do professor e o protagonismo do estudante na produção do próprio conhecimento, saindo de uma observação passiva para a execução ativa.

Oferecer essa liberdade de produção por parte do estudante acarreta evitar o aprisionamento por um objeto em particular, já que isso poderia ocasionar a associação indevida de que os objetos matemáticos são os objetos físicos. Assim, quando necessário utiliza-se um conjunto de objetos (mais distantes e diversos entre si do que ocorre nos usos tradicionais), mas que, como um todo, são os materiais didáticos que se tinha em mente para as atividades propostas.

2.3.1 O uso de Materiais Didáticos à luz da TRRS

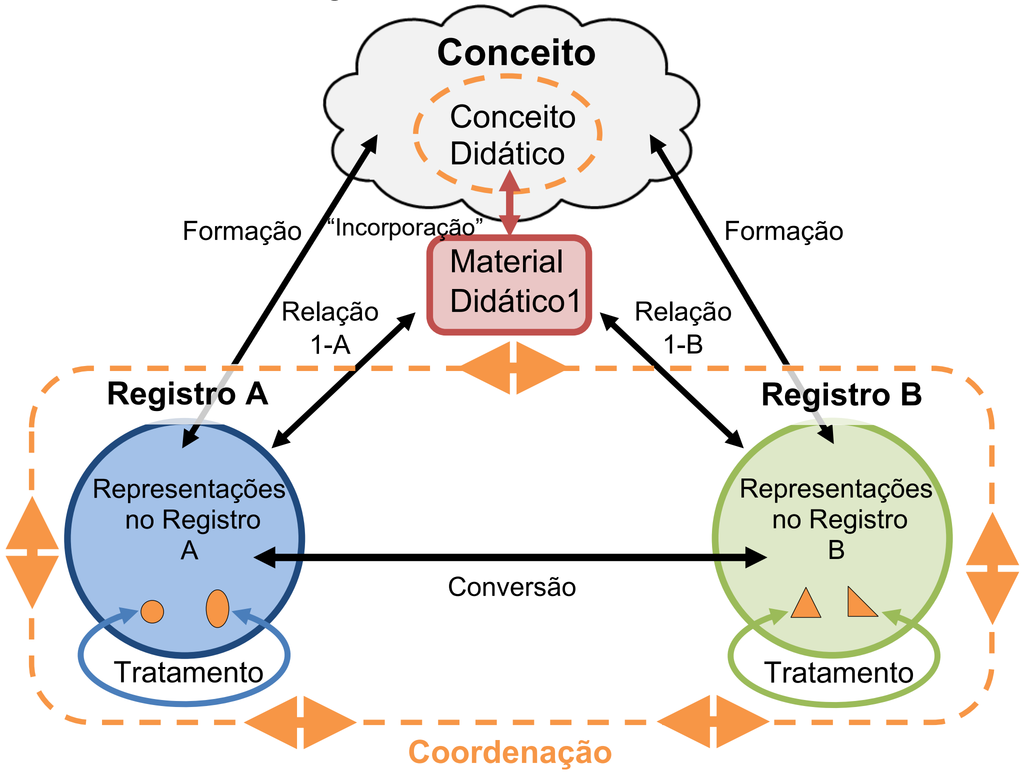
A TRRS e as concepções de Materiais Didáticos apresentam algumas similaridades. Tal teoria engloba conceitos que assumem diferentes representações dentro de sistemas semióticos. As concepções sobre os MDs também atuam em um contexto semiótico ao buscar estabelecer relações entre objetos concretos (representantes) e conceitos (objetos do pensamento), embora elas atuem mais amplamente, já que não operam necessariamente sobre nenhum sistema bem definido, e a princípio não fazem distinção entre as entidades (signos, ícones, índices, símbolos etc.), presente nos estudos de semiótica.

Essa semelhança na estrutura do funcionamento da TRRS e dos MDs, ocorre principalmente pois elas têm como objetivo a atividade educacional, de modo que o mais importante não são as representações ou os materiais didáticos em si, mas os conceitos que se pretendem fazer compreender.

Dado que a TRRS sistematiza a interação dos objetos teóricos representados dentro de sistemas semióticos e pelo fato dos materiais didáticos representarem analogicamente os mesmos objetos teóricos, os MDs podem servir como facilitadores para introdução das representações presentes nos sistemas semióticos, bem como facilitadores na transição entre diferentes representações.

Por estarem TRRS e Materiais Didáticos associados aos mesmos conceitos, poder-se-ia estabelecer uma relação entre eles.

Figura 6 - TRRS e Materiais Didáticos



Fonte: Autoria própria (2024)

A pluralidade e a transição entre representações e materiais didáticos, indicaria, se executada de modo adequado, o potencial educativo para o ensino e poderia auxiliar na aprendizagem dos estudantes.

Um material didático mais próximo da realidade do estudante, podendo ser experienciado de maneira mais livre e plural, é um facilitador para inteligibilidade dos conceitos, visto que o uso exclusivo de registros de representações, de um sistema semiótico arbitrário, necessitaria antes um longo "processo de alfabetização" para somente após poder ser utilizado para expressão e comunicação dos estudantes.

Mesmo com essas potencialidades e possíveis benefícios é preciso atentar-se ao fato de que as conversões entre tipos de registros diferentes podem estar sujeitas a "não-congruência" (final da seção 2.2). Os materiais didáticos também podem estar sujeitos a algum tipo de "não-congruência" já que apresentam apenas algumas características semelhantes aos conceitos. Ambas exigem cuidados durante o processo de ensino e de aprendizagem e foram levadas em conta na construção das sequências didáticas deste trabalho.

2.4 Base Nacional Comum Curricular

A BNCC, documento normativo que serve como referência para a formulação de currículos e propostas educacionais na Educação Básica, estabelece que os aprendizados essenciais aos estudantes devem ser desenvolvidos por meios que competências que desenvolvam conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que possibilitem a resolução das diversas demandas da vida cotidiana. (BRASIL, 2018, p. 7-8).

Dentre as 10 competências gerais estabelecidas pela BNCC, a 4ª competência possui uma afinidade com a proposta deste trabalho, pois estabelece grande valor em

> Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. (BRASIL, 2018, p. 9).

Em sua comunhão de princípios com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a BNCC também orienta que decisões que levam em consideração as realidades locais, as características dos estudantes e visam “selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;” (BRASIL, 2018, p. 17) tem um compromisso com a formação e desenvolvimento humano.

O incentivo a adoção de recursos didáticos se estende dos anos iniciais do ensino fundamental até o ensino médio. Do mesmo modo, está presente a necessidade de integração desses recursos a situações que promovam reflexões, sistematizações e formalizações dos objetos matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 276, p. 298, p. 540). O mesmo ocorrendo para a utilização de diferentes registros e representações já que estes fornecem acesso aos objetos matemáticos e são fundamentais para a compreensão dos conceitos. (BRASIL, 2018, p. 267, p. 298, p. 529).

Para o ensino médio, as competências específicas de matemática e suas tecnologias articulam o aprendizado de habilidades voltadas para a compreensão e o uso flexível de diferentes registros de representação (Competência Específica 4) e habilidades voltadas para investigações e estabelecimento de explicações com a possibilidade de experimentações empíricas (Competência Específica 5).

A Competência Específica 4 justifica a prática das habilidades vinculadas pois elas ampliam a capacidade de pensar matematicamente. O domínio delas potencializa a capacidade de comunicação, argumentação e resolução de problemas. Elas mobilizam o estudante a utilizar e converter entre diferentes representações matemáticas, possibilitando, deste modo, a compreensão das ideias matemáticas a elas associadas.

> Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece. (BRASIL, 2018, p. 538).

A Competência Específica 5 defende o exercício das habilidades vinculadas já que elas capacitam os estudantes nos atos de investigar, argumentar, experimentar, demonstrar e validar proposições, que podem surgir indutivamente, dentre outros contextos, de experiências empíricas com materiais concretos e da utilização de tecnologias digitais.

> Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação. (BRASIL, 2018, p. 540).

Ambas em favor de um fazer matemático diversificado, ativo e reflexivo que proporcione uma formação integral ao estudante, capacitando-o a empenhar seus conhecimentos para agir na resolução dos problemas presentes nos variados contextos da vida cotidiana.

3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

O capítulo é formado por duas propostas de sequências didáticas, as seções de cada sequência são organizadas da seguinte maneira: 1º A apresentação da proposta com suas divisões em momentos (sem uma delimitação de duração); 2º A listagem dos conceitos utilizados, um levantamento em 4 livros didáticos de como eles são representados em suas introduções e de que modo suas representações são cobradas nas etapas de exercícios; 3º Os materiais didáticos utilizados; 4º A sequência propriamente dita; 5º Comentários gerais sobre a sequência em si, expondo alternativas, dificuldades e novos questionamentos.

3.1 Sequência 1

A seguinte proposta utiliza a situação de ida à escola e ao mercado como subsídio para contextualizar alguns conceitos de Teoria de Conjuntos que são abordados durante o Ensino Médio.

Dividida em 5 momentos a sequência estrutura-se deste modo:

1º Momento: Explicação contextualizada pelo professor, já exemplificando a atividade que será feita, as representações que deverão ser utilizadas e utilizando alguns dos materiais didáticos como exemplo.

2º Momento: Os estudantes fazem as construções relativas ao trajeto até a escola. Primeiro individualmente e depois em grupo auxiliados pelo professor.

3º Momento: Os estudantes fazem as construções relativas a uma lista de compras. Novamente individualmente e depois em grupo, com um menor suporte do professor

4º Momento: Revisão dos conceitos vistos e apresentação das definições formais comumente utilizadas.

5º Momento: Atividades que exercitam as representações e operações. Devem ser feitas de maneira independente sem auxílio do professor. As atividades incluem uma representação dos itens da mochila de cada estudante e uma lista de exercícios.

3.1.1 Conceitos utilizados

A fim de esclarecer como a presente sequência didática pode contribuir para a aquisição de conhecimento, conforme a proposta da TRRS, é compilado a seguir como os conceitos matemáticos, utilizados nesta sequência, são abordados em diferentes livros didáticos. Analisa-se os tipos de registros utilizados fazendo um destaque para os conceitos de conjunto, subconjuntos, conjunto vazio, conjunto universo, interseção de conjuntos, união de conjuntos e diferença de conjuntos.

Os 4 livros didáticos analisados (ver referências) são:

1. “Matemática Interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica” (páginas 11 a 15) de Thais Marcelle de Andrade, publicado após a BNCC.
2. “Multiversos Matemática: Conjuntos e função afim: Ensino Médio” (páginas 10 a 23) de Joamir Roberto de Souza, publicado após a BNCC.
3. “Prisma matemática: conjuntos e funções: ensino médio” (páginas 10 a 21, 23 e 24) de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Souza, publicado após a BNCC.
4. “Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 1” (páginas 7 a 17) de Gelson Iezzi *et al.*, publicado antes da BNCC.

Nos 4 livros listados a apresentação dos conteúdos constrói-se de maneira semelhante, orientando os usos dos registros num mesmo sentido: o registro algébrico. Mesmo se tratando da introdução de um assunto, o registro algébrico possui maior protagonismo, tanto na explanação teórica quanto nos exercícios propostos. O maior uso do registro algébrico (por vezes misturado com o registro linguístico) é seguido do registro linguístico. O registro figural embora presente é o de menor uso. O uso de materiais didáticos ou de alguma outra modalidade de representação é inexistente.

A ordem de apresentação dos registros escolhidos (linguístico, algébrico, figural) e a maneira como isso é apresentado indica uma contradição na abordagem. O registro figural desempenha um papel auxiliar, não sendo realizadas operações e tratamentos nele, sendo majoritariamente utilizado para ilustrar as situações apresentadas pelo registro algébrico, indicando uma aparente intenção de retirar a nebulosidade dos registros algébricos. Embora estes mesmos registros algébricos tenham justamente sido escolhidos previamente para servir como introdução ao conteúdo ou como uma etapa intermediária.

Ao avançar as páginas dos livros é possível perceber que a representação figural vai sendo deixada cada vez mais de lado, priorizando uma dinâmica diádica de conversões entre os registros linguísticos e algébricos ou entre registros algébricos (misturado com registros linguísticos) e registros puramente algébricos, e por fim abandonando as conversões e focando exclusivamente nos tratamentos de diferentes registros algébricos. Isso ocorre principalmente na seção de exercícios, onde pede-se a comprovação de que uma expressão algébrica representa o mesmo objeto da expressão do enunciado da questão.

Nas tabelas a seguir tem-se, para cada livro, a sumarização dos dados coletados sobre os tipos de representações.

A primeira tabela contabiliza os tipos de representações utilizadas durante a introdução dos conteúdos (Linguístico, Algébrico, Algébrico-Linguístico, Figural, Figural-Linguístico, outros tipos de representações). Algumas delas são representações intermediárias entre dois registros como, por exemplo, aquelas classificadas como Algébrico-Linguístico.

A segunda tabela contabiliza os exercícios (presentes na seção em que os conceitos são apresentados), as representações em que são apresentados (enunciados) e as representações que são esperadas nas respostas. Elas devem ser lidas da linha para a coluna: o exercício contabilizado exige a conversão (ou tratamento) da representação indicada na linha para a representação indicado pela coluna.

No livro 1 os conceitos de conjunto, subconjuntos, interseção, união e diferença de conjuntos são apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 1 - Representação dos conceitos no Livro 1 (Sequência 1)

Representação	Conj.	Sub. Conj.	Conj. Vazio	Conj. Univ.	Inter.	União	Dif.	Total
Ling.	1	1	1	1	-	-	-	4
Alg.	-	-	-	-	-	-	-	0
Alg. - Ling.	-	1	1	-	-	-	-	2
Fig.	1	1	-	1	-	-	-	3
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	-	0
Outro	-	-	-	-	-	-	-	0
Total	2	3	2	2	0	0	0	9

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 1 contam-se 13 exercícios, na seção, dispostos da seguinte forma:

Tabela 2 - Representação dos exercícios no Livro 1 (Sequência 1)

Representação	Ling.	Alg.	Alg. - Ling.	Fig.	Fig. - Ling.	Outro	Total
Ling.	-	2	-	-	-	-	2
Alg.	-	1	2	-	-	-	3
Alg. - Ling.	-	3	1	-	-	-	4
Fig.	-	1	-	-	-	-	1
Fig. - Ling.	-	-	1	-	-	-	1
Outro	-	-	2	-	-	-	2
Total	0	7	6	0	0	0	13

Fonte: Autoria própria (2024)

"Outro" se refere a 2 exercícios com duas ou mais etapas, nas quais são realizadas conversões e tratamentos intermediários até se chegar no algébrico-linguístico.

No livro 2 os conceitos são apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 3 - Representação dos conceitos no Livro 2 (Sequência 1)

Representação	Conj.	Sub. Conj.	Conj. Vazio	Conj. Univ.	Inter.	União	Dif.	Total
Ling.	1	1	1	1	1	1	1	7
Alg.	-	-	-	-	1	1	1	3
Alg. - Ling.	-	1	1	-	1	1	1	5
Fig.	1	1	-	1	1	1	1	6
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	-	0
Outro	-	-	-	-	-	-	-	0
Total	2	3	2	2	4	4	4	21

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 2 contam-se 18 exercícios, na seção, dispostos da seguinte forma:

Tabela 4 - Representação dos exercícios no Livro 2 (Sequência 1)

Representação	Ling.	Alg.	Alg.- Ling.	Fig.	Fig. - Ling.	Outro	Total
Ling.	4	-	2	-	-	-	6
Alg.	-	3	-	-	-	1	4
Alg. - Ling.	-	1	-	-	-	1	2
Fig.	-	3	-	-	-	-	3
Fig. - Ling.	1	-	-	-	-	2	3
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	5	7	2	0	0	4	18

Fonte: Autoria própria (2024)

"Outro" se refere a 4 exercícios. Em dois ocorre a conversão do registro algébrico para registro figural e depois existia a opção de conversão do figural para algébrico ou um tratamento no registro algébrico. Um exercício pede a elaboração de um problema dado uma tabela (conversão de figural-linguístico para algum outro registro dependendo da escolha do estudante). Um exercício envolve um quadro e uma tabela (figural-linguístico) e várias conversões linguísticas.

No livro 3 os conceitos são apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 5 - Representação dos conceitos no Livro 3 (Sequência 1)

Representação	Conj.	Sub. Conj.	Conj. Vazio	Conj. Univ.	Inter.	União	Dif.	Total
Ling.	1	1	1	1	1	1	1	7
Alg.	-	-	-	-	1	1	1	3
Alg. - Ling.	-	1	1	-	-	-	-	2
Fig.	2	1	-	1	1	1	1	7
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	-	0
Outro	-	-	-	-	-	-	-	0
Total	3	3	2	2	3	3	3	19

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 3 contam-se 31 exercícios, na seção, dispostos da seguinte forma:

Tabela 6 - Representação dos exercícios no Livro 3 (Sequência 1)

Representação	Ling.	Alg.	Alg. - Ling.	Fig.	Fig. - Ling.	Outro	Total
Ling.	4	2	-	-	-	-	6
Alg.	1	12	2	-	-	1	16
Alg. - Ling.	1	3	1	-	-	-	5
Fig.	-	3	-	-	-	-	3
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	1	1
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	6	20	3	0	0	2	31

Fonte: Autoria própria (2024)

“Outro” se refere a 2 exercícios. Um deles pede representações nos registros algébrico e figural, o outro utiliza uma mistura entre os registros linguístico, algébrico e figural em etapas intermediárias.

No livro 4 os conceitos são apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 7 - Representação dos conceitos no Livro 4 (Sequência 1)

Representação	Conj.	Sub. Conj.	Conj. Vazio	Conj. Univ.	Inter.	União	Dif.	Total
Ling.	1	1	1	1	1	1	1	7
Alg.	-	-	1	-	1	1	1	4
Alg. - Ling.	-	1	1	-	1	1	1	5
Fig.	1	1	-	1	1	1	1	6
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	-	0
Outro	-	-	-	-	-	-	-	0
Total	2	3	3	2	4	4	4	22

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 4 contam-se 36 exercícios, na seção, dispostos da seguinte forma:

Tabela 8 - Representação dos exercícios no Livro 4 (Sequência 1)

Representação	Ling.	Alg.	Alg. - Ling.	Fig.	Fig. - Ling.	Outro	Total
Ling.	-	-	-	1	-	5	6
Alg.	-	20	-	2	-	1	23
Alg. - Ling.	-	2	4	-	-	-	6
Fig.	-	1	-	-	-	-	1
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	0
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	0	23	4	3	0	6	36

Fonte: Autoria própria (2024)

“Outro” se refere a 6 exercícios que recorriam ao registro figural em etapas intermediárias para depois chegarem a uma solução em registro algébrico. Um deles sugere explicitamente o uso dos diagramas de Venn para justificar as respostas.

Agrupando as informações dos 4 livros, tem-se:

Tabela 9 - Síntese dos dados das representações dos conceitos (Sequência 1)

Representação	Conj.	Sub. Conj.	Conj. Vazio	Conj. Univ.	Inter.	União	Dif.	Total
Ling.	4	4	4	4	3	3	3	25
Alg.	-	-	1	-	3	3	3	10
Alg. - Ling.	-	4	4	-	2	2	2	14
Fig.	5	4	-	4	3	3	3	22
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	-	-
Outro	-	-	-	-	-	-	-	-
Total	9	12	9	8	11	11	11	71

Fonte: Autoria própria (2024)

Nos 4 livros contam-se 98 exercícios dispostos da seguinte forma:

Tabela 10 - Síntese dos dados das representações dos exercícios (Sequência 1)

Representação	Ling.	Alg.	Alg. - Ling.	Fig.	Fig. - Ling.	Outro	Total
Ling.	8	4	2	1	-	5	20
Alg.	1	36	4	2	-	3	46
Alg. - Ling.	1	9	6	-	-	1	17
Fig.	-	8	-	-	-	-	8
Fig. - Ling.	1	-	1	-	-	3	5
Outro	-	-	2	-	-	-	2
Total	11	57	15	3	0	12	98

Fonte: Autoria própria (2024)

Pelas tabelas anteriores pode-se perceber que o registro linguístico ou uma representação parcialmente linguística são preponderantes para a apresentação dos conteúdos, enquanto os registros algébricos e figurais ficam em segundo plano, o conjunto vazio, por exemplo, não é representado no registro figural em nenhum dos livros. E conforme os conteúdos avançam para etapas mais complexas (Interseção, União e Diferença de conjuntos) passa-se a agregar maior número de tipos de registros e representações auxiliares para elucidar as ideias que são apresentadas.

Nas seções de exercícios, no entanto, as atividades focam majoritariamente no tratamento do registro algébrico ou na conversão para um registro algébrico. Conversões partindo do registro linguístico ocupam a segunda posição, próximas das que partem de representações parcialmente algébricas. O registro linguístico só não é o menor resultado de conversões pois supera o registro figural.

Pelos dados apresentados, o encaminhamento dos livros segue a estrutura de apresentar os conteúdos em um tipo de representação (majoritariamente linguística) mas requer dos estudantes a capacidade de expressão em outro tipo de representação (majoritariamente algébrica). Apresentar de um modo e exigir de outro não parece adequado. Talvez essa seja uma das razões que torne o aprendizado de conteúdos matemáticos mais complexos uma tarefa mais árdua e exigente. Podendo este fator também estar relacionado ao abandono da aprendizagem desses conteúdos.

Por que não exercitar o conhecimento apresentado pelos conteúdos no mesmo tipo de representação? Por que não exercitar o registro linguístico? Ou no sentido oposto, já que as representações algébricas serão as mais utilizadas nas atividades, por que não apresentar o conteúdo utilizando mais exemplos e encaminhamentos com representações algébricas?

Se representações linguísticas e figurais não são adequadas o bastante para a prática matemática, como justificar seu uso na apresentação, exemplificação e intermediação na resolução dos problemas propostos? Elas são deixadas de lado por serem menos “matemáticas”, mas são utilizadas para resolver problemas. Isso não tornaria as resoluções dos problemas menos “matemáticas”? A resposta sempre foi não. Outros tipos de representações além da algébrica são tidas como menos “matemáticas” mesmo quando são utilizadas para auxiliar as representações algébricas. Essa é uma das contradições no uso de diferentes registros e representações para o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

A TRRS levando em consideração as diferentes formas de representação do conhecimento matemático, chama atenção para como o uso dessas diferentes representações pode impactar na aprendizagem e na compreensão dos objetos matemáticos. Isso instiga a consideração de outros tipos de encaminhamentos e atividades que vão para além do âmbito algébrico e de suas representações.

3.1.2 Materiais didáticos utilizados

Na primeira parte da atividade balões e caixas fazem o papel de um conjunto que contém de alguma maneira seus elementos. Eles são recipientes, invólucros, objetos que passam a impressão da existência de uma borda, deixando perceptível uma divisão entre duas regiões, uma interna e uma externa. São utilizados de modo analógico no qual o que pertence ao conjunto, ou seja, seus elementos, ficam dispostos na parte interna do objeto que tido como conjunto e, por consequência, o que não pertence ao conjunto está na parte externa, fora das fronteiras impostas pelo objeto. Utiliza-se também tampinhas de garrafa com etiquetas que servem como os elementos dos conjuntos.

Figura 7 - Materiais Didáticos

Fonte: Autoria própria (2024)

Em um último momento da atividade, a mochila dos estudantes também fará o papel de conjunto enquanto os materiais escolares deles serão os elementos.

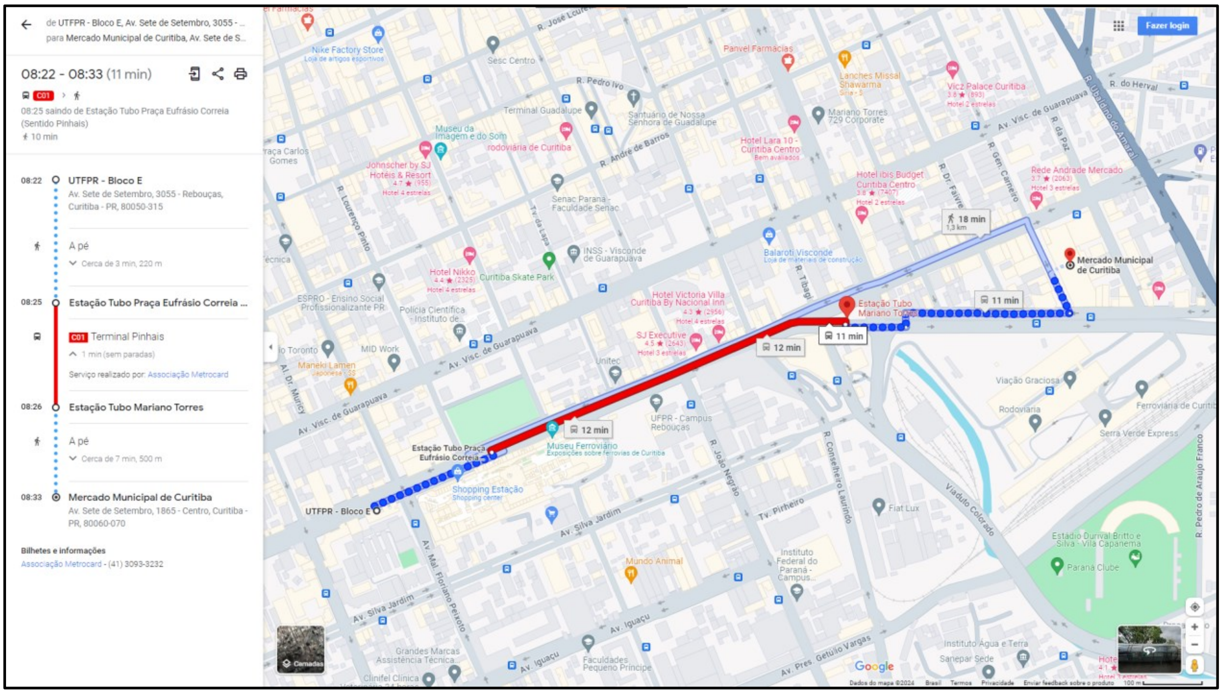
3.1.3 Ida às compras (Tópicos da Teoria de Conjuntos)

Uma exposição inicial sobre as etapas da atividade seria adequada para orientar os estudantes sobre quais serão os procedimentos necessários para a atividade. A atividade consiste em mapear o caminho da casa de cada estudante até a escola e do caminho da escola até um mercado escolhido. Cada estudante deverá trazer uma lista de compras com pelo menos 10 itens que sua família costuma comprar no mercado, a quantidade e o preço dos itens não são importantes, apenas a variedade dos 10 itens. Nessa ida ao mercado eles trabalharão em grupo para chegar a uma lista única que atenda todos os integrantes do grupo.

1º Momento: “Exploração guiada pelo professor”.

Iniciando a explicação de como os estudantes deverão realizar as atividades o professor deve primeiramente expor aos estudantes um trajeto de ônibus que vai da escola até algum mercado. No exemplo, tem-se o trajeto da UTFPR (Campus Curitiba - Sede Centro – Bloco E) até o Mercado Municipal de Curitiba, fornecido pelo Google Maps. Isso pode ser feito utilizando um projetor, figuras impressas ou desenhando na lousa.

Figura 8 - Trajeto Mercado 1



Fonte: Adaptado de Google Maps (2024)

Feita a exposição do trajeto, o professor começa uma conversão dos dados oferecidos pelo mapa do trajeto, para uma representação escrita e em seguida para uma representação algébrica e sempre que possível, reforçando oralmente as etapas e caso seja conveniente pedindo a colaboração dos estudantes para a construção de algum passo das próximas etapas.

O caminho escolhido foi: partir da UTFPR, subir no ponto/tubo da Eufrásio Correia, ir de ônibus até o ponto/tubo Mariano Torres, descer e ir até o Mercado Municipal a pé.

Resumindo, os principais pontos do trajeto são: **UTFPR**, **Praça Eufrásio Correia**, **Mariano Torres**, **Mercado Municipal**.

Como utiliza-se apenas o trajeto feito pelo ônibus, remove-se os pontos de partida (UTFPR) e destino (Mercado Municipal). Logo o trajeto até o mercado é igual à Praça Eufrásio Correia, Mariano Torres.

Na etapa anterior foi realizado justamente o tratamento das informações disponíveis em registro escrito, adequando a ordem do trajeto e os elementos que serão utilizados.

A seguir, uma conversão por etapas para o registro algébrico.

Pode-se resumir um pouco mais essas informações evitando repetir a mesma escrita toda vez.

1. O **conjunto** de pontos/tubos do **trajeto** até o **mercado é igual a: Eufrásio Correia**, **Mariano Torres**.

2. Conjunto **T**rajeto-**M**ercado = {Praça Eufrásio correia, Mariano Torres}

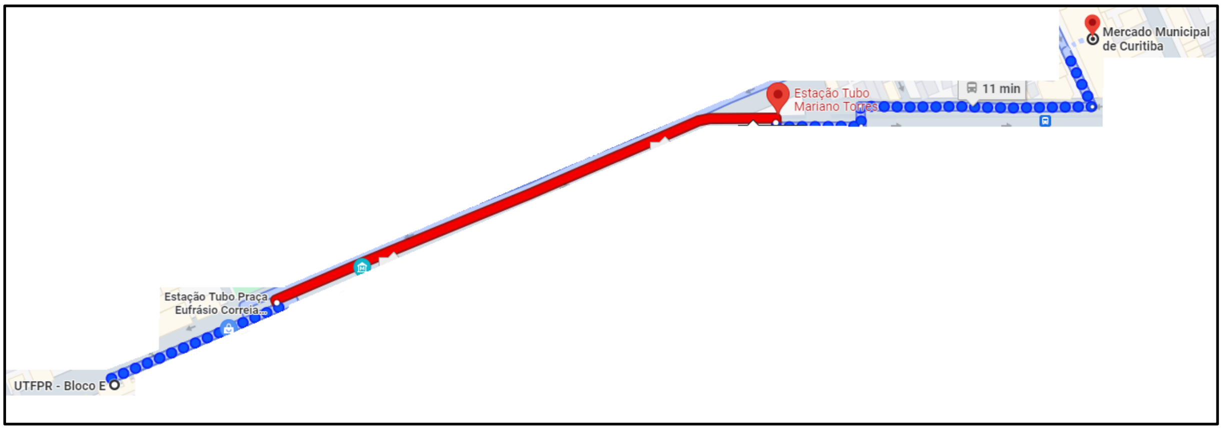
3. TM = {**P**raça **E**ufrásio **C**orreia, **M**ariano **T**orres}

4. TM = {pec, mt}

Em 1. tem-se a escrita por extenso; em 2. selecionam-se apenas as palavras chaves para representar o trajeto e passa-se a utilizar uma notação matemática mais próxima da usual com o sinal de igual substituindo a expressão “é igual a”; em 3. resume-se utilizando as iniciais da expressão “Trajeto-Mercado” para produzir uma sigla; em 4. produz-se uma sigla para os nomes dos pontos de ônibus, colocando para os elementos as letras em minúsculo pois é o padrão comumente utilizado.

Pode-se também resumir as informações apresentadas no mapa, recortando apenas os pontos essenciais do trajeto.

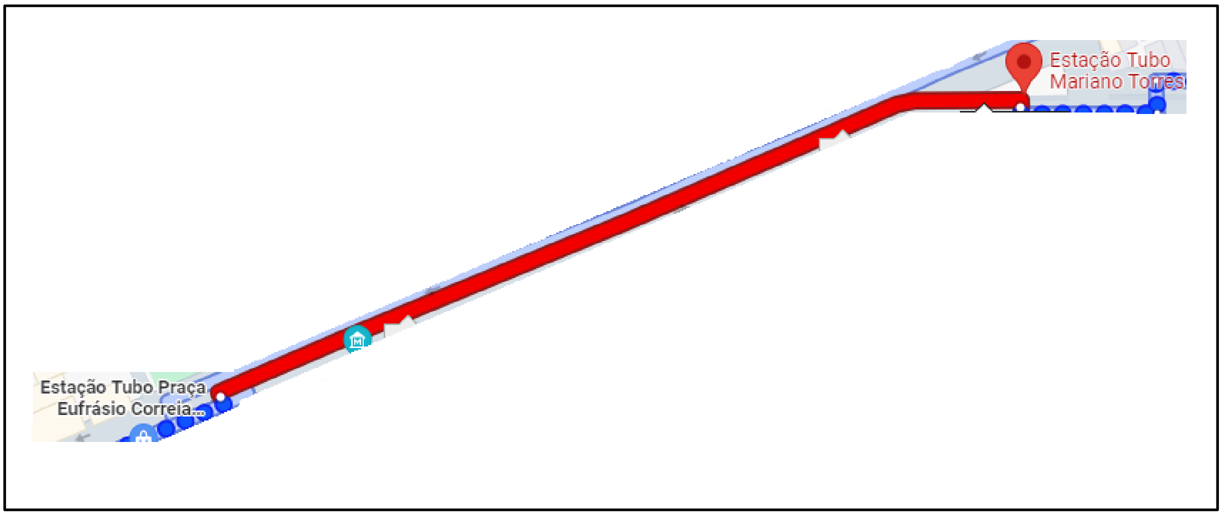
Figura 9 - Trajeto Mercado 2



Fonte: Adaptado de Google Maps (2024)

Como estão sendo considerados apenas os pontos de ônibus utilizados no caminho, pode-se resumir mais um pouco as informações da figura.

Figura 10 - Trajeto Mercado 3

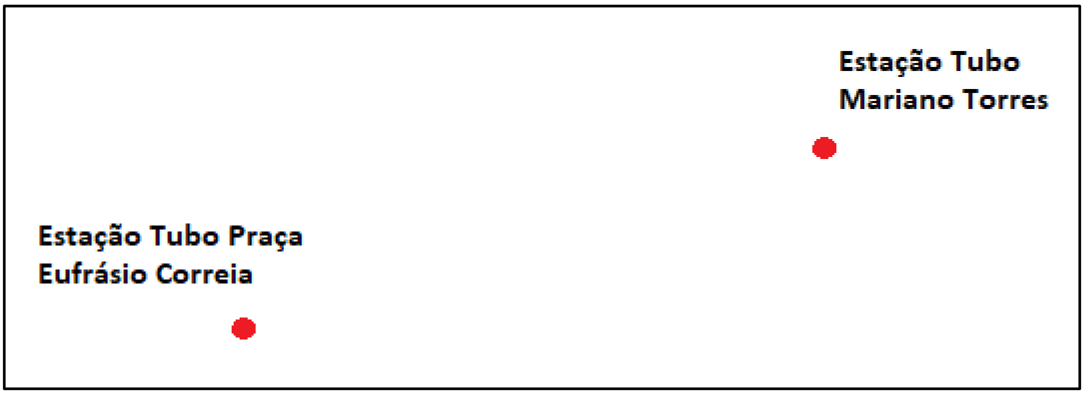


Fonte: Adaptado de Google Maps (2024)

O tracejado vermelho é o caminho que liga os dois pontos. Como só existe um caminho, sem outras alternativas, não é necessário se preocupar com o trajeto entre esses dois pontos. O importante é que a pessoa subirá no ônibus no ponto Praça Eufrásio Correia e descerá no ponto Mariano Torres.

Assim, tem-se uma representação figural utilizando os habituais Diagramas de Euler-Venn, mostrando os dois pontos do conjunto.

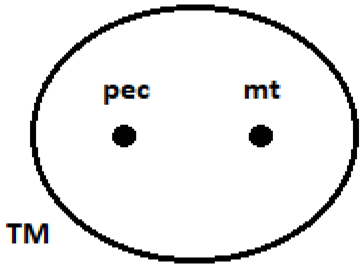
Figura 11 - Trajeto Mercado 4



Fonte: Autoria própria (2024)

Pode-se continuar nesse processo de resumo e adaptação das informações, substituindo os nomes por siglas, identificando a figura com o já utilizado TM (Trajeto-Mercado) e até mesmo alterando o formato retangular do mapa original.

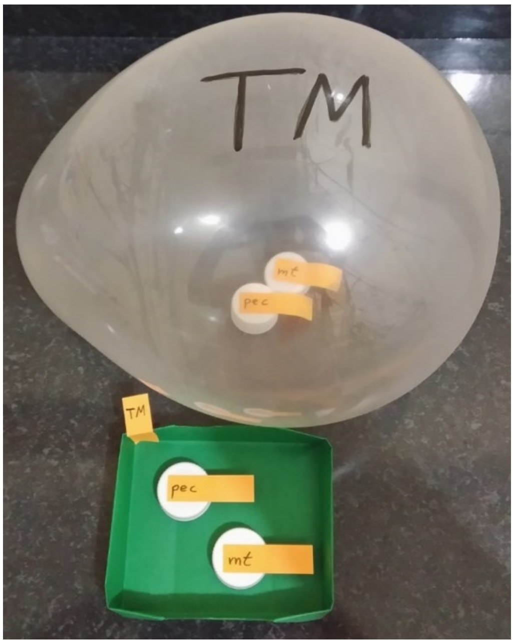
Figura 12 - Conjunto Trajeto Mercado



Fonte: Autoria própria (2024)

Pode-se ainda utilizar os materiais didáticos e construir, por analogia, as representações anteriores.

Figura 13 - Conjunto Trajeto no Material Didático



Fonte: Autoria própria (2024)

Assim, no mapa original, no Diagrama Euler-Venn, no Material Didático, na escrita por extenso em língua portuguesa ("O conjunto de pontos/tubos do trajeto até o mercado é igual a: Eufrásio Correia, Mariano Torres.") e a expressão algébrica TM = {pec, mt} representam o mesmo objeto, o conjunto de pontos de ônibus do trajeto em questão. O que varia são os tamanhos, as formas, e maneiras de representação (registros diferentes) com mais ou menos informações explícitas ou implícitas.

Para finalizar essa etapa, exploraram-se outras possibilidades de trajetos e representações: o trajeto equivalente ao conjunto vazio, um trajeto maior que inclui o conjunto Trajeto-Mercado e a relação de inclusão de um subconjunto.

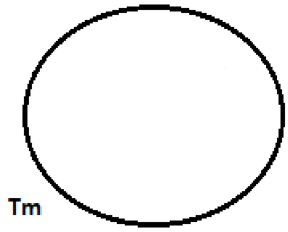
O trajeto equivalente ao conjunto vazio é quando não se utiliza nenhum ponto de ônibus, como no caso do ponto de partida e chegada serem o mesmo, neste caso, o Mercado Municipal.

No registro linguístico tem-se: "O **conjunto** de pontos/tubos do **trajeto** até o **mercado é vazio**, pois não utilizamos nenhum ponto"**.**

No registro algébrico tem-se: TM = { } ou TM = ∅

No registro figural tem-se:

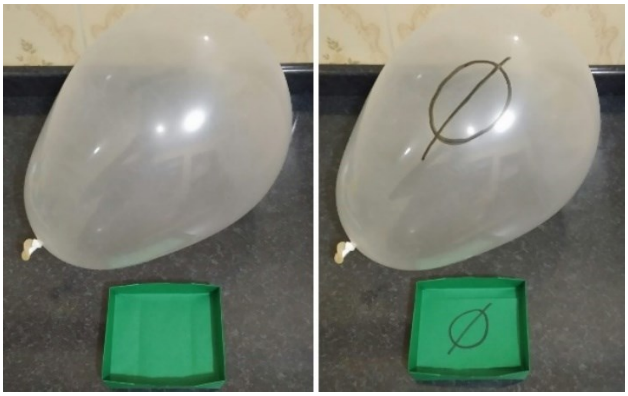
Figura 14 - Conjunto Vazio



Fonte: Autoria própria (2024)

Utilizando o material didático:

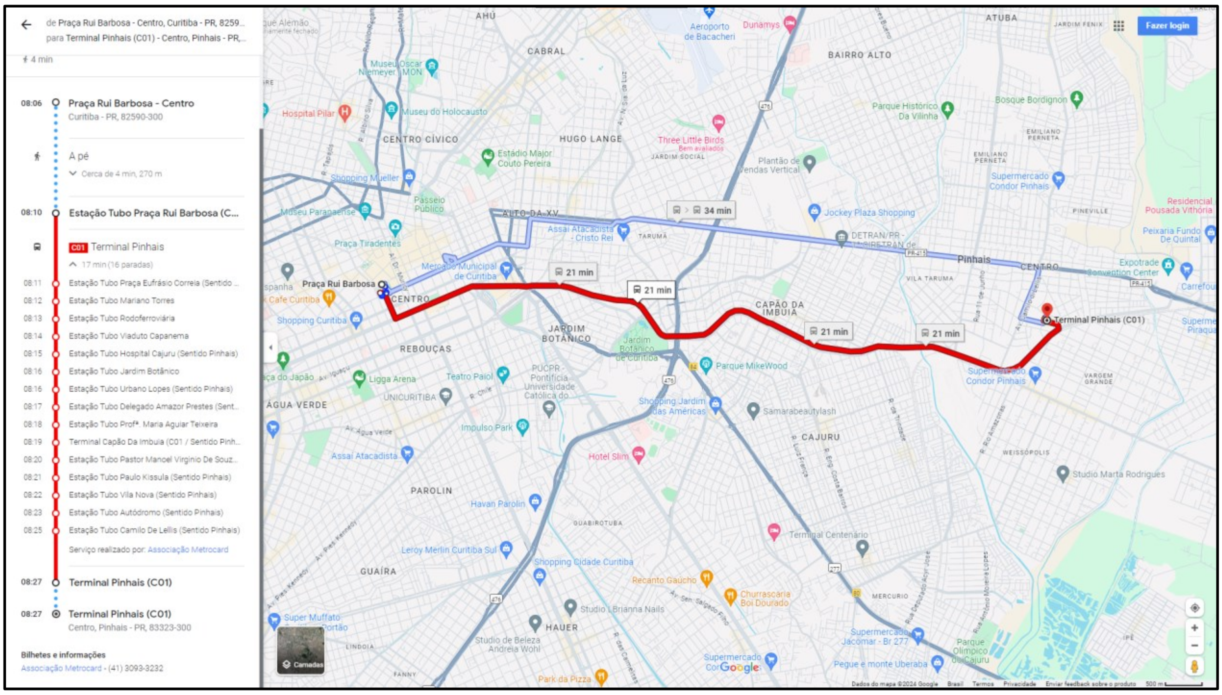
Figura 15 - Conjunto Vazio no Material Didático



Fonte: Autoria própria (2024)

Um trajeto maior que inclua os pontos utilizados no Trajeto-Mercado é a linha de ônibus nesse trajeto, ou seja, a listagem de todos os pontos/tubos existentes da linha de ônibus utilizado, mesmo que não sejam utilizados. Este constitui justamente a totalidade de pontos de onde selecionou-se os pontos para o trajeto. Neste caso é a linha **C01** (**Rui Barbosa - Terminal Pinhais**).

Figura 16 - Linha C01



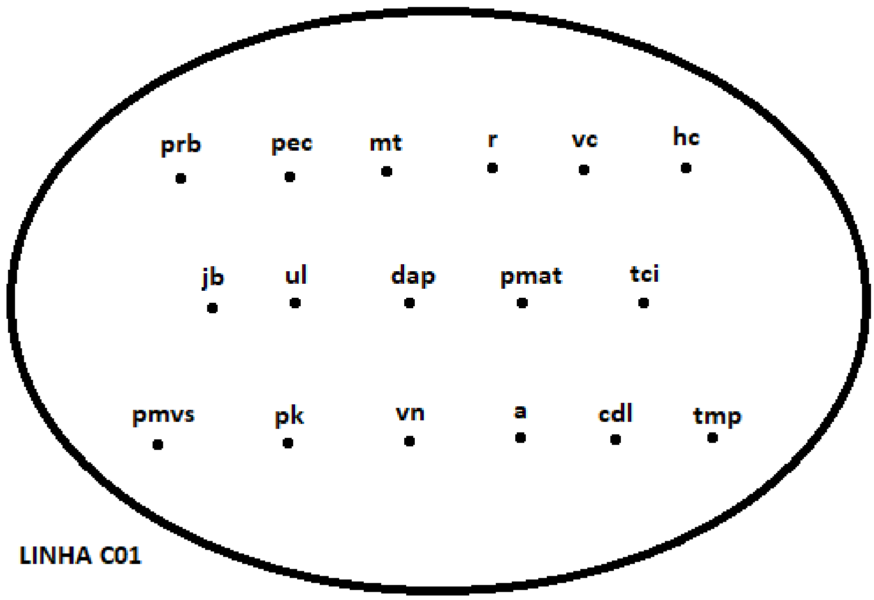
Fonte: Adaptado de Google Maps (2024)

No registro linguístico tem-se: “O **conjunto** de **todos os pontos/tubos** da linha de ônibus do trajeto que estamos utilizando, ou seja, listando todos os pontos da linha **C01**: **Praça Rui Barbosa**, **Praça Eufrásio Correia**, **Mariano Torres**, **Rodoferroviária**, **Viaduto Do Capanema**, **Hospital Cajuru**, **Jardim Botânico**, **Urbano Lopes**, **Delegado Amazor Prestes**, **Professora Maria Aguiar Teixeira**, **Terminal Capão Da Imbuia**, **Pastor Manoel Virgínio De Souza**, **Paulo Kissula**, **Vila Nova**, **Autódromo**, **Camilo Di Lellis**, **Terminal Metropolitano Pinhais**”.

No registro algébrico tem-se por exemplo: Conjunto LINHA C01 = {prb, **pec**, **mt**, r, vc, hc, jb, ul, dap, pmat, tci, pmvs, pk, vn, a, cdl, tmp}.

No registro figural tem-se:

Figura 17 - Linha C01



Fonte: Autoria própria (2024)

Utilizando o Material Didático:

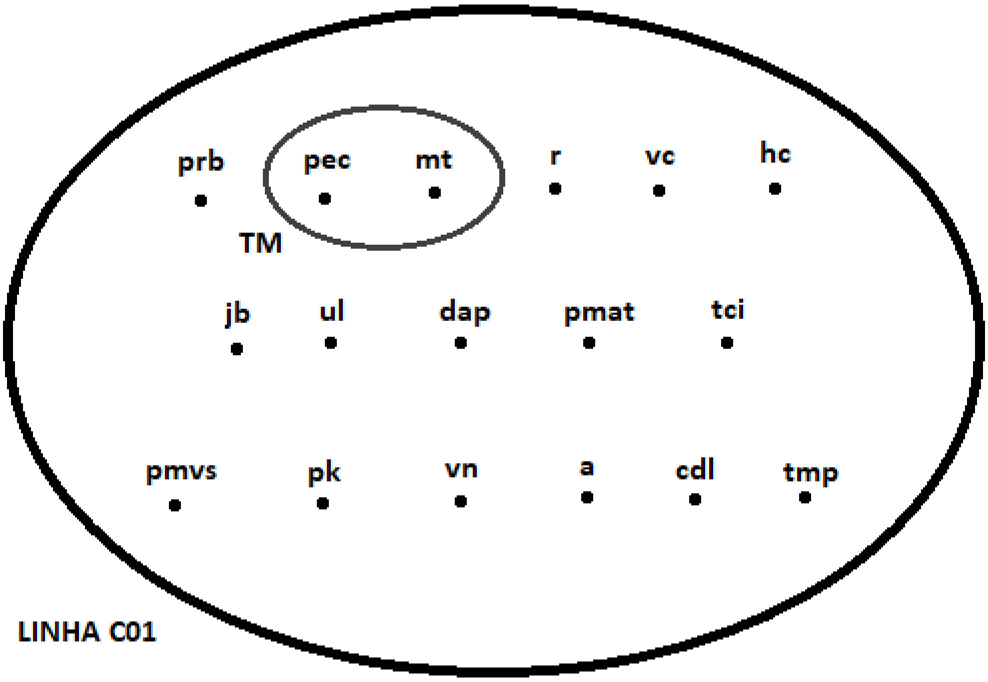
Figura 18 - Linha C01 no Material Didático

Fonte: Autoria própria (2024)

Agora com o conjunto de pontos da LINHA C01 pode-se expor a relação de inclusão entre dois conjuntos, já que o conjunto TM (Trajeto-Mercado) é um subconjunto do conjunto LINHA C01.

No registro figural:

Figura 19 - Linha C01 e Trajeto Mercado



Fonte: Autoria própria (2024)

Utilizando o Material Didático:

Figura 20- Linha C01 e Trajeto Mercado no Material Didático

Fonte: Autoria própria (2024)

No registro algébrico tem-se por exemplo: conjunto LINHA C01 = {prb, **TM**, r, vc, hc, jb, ul, dap, pmat, tci, pmvs, pk, vn, a, cdl, tmp}.

No registro linguístico a representação é similar ao registro do conjunto Linha C01, apenas destacando e substituindo os pontos “pec” e “mt” pelo conjunto TM.

Vale a pena esclarecer que o Conjunto Universo, em que todos esses conjuntos são selecionados, são, neste caso, justamente todas as linhas e pontos de ônibus existentes na Região Metropolitana de Curitiba. Podendo ser representado como: U = {Todos os pontos de ônibus da região metropolitana de Curitiba}.

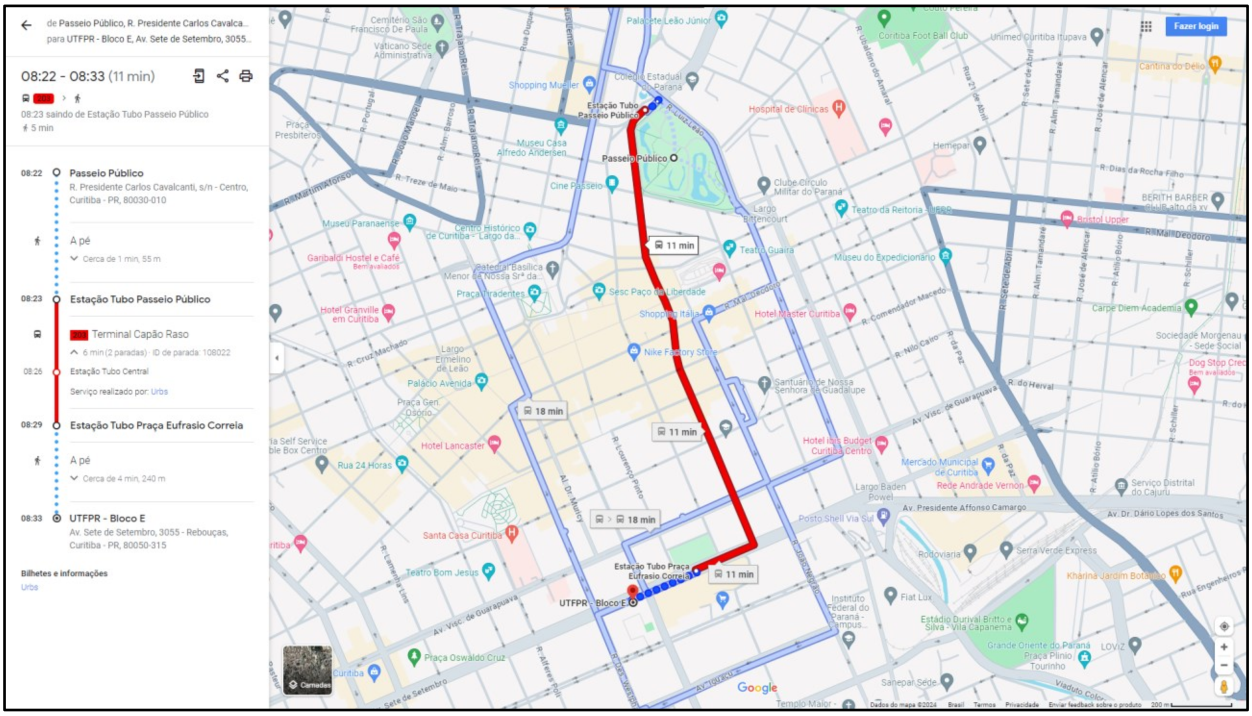
2º Momento: “Construção dos estudantes guiada pelo professor”.

Nesta etapa é requerido que os estudantes se juntem em grupos de pelos menos 3 integrantes e que construam seus próprios caminhos, de suas casas até a escola, utilizando os diversos registros e materiais didáticos, com auxílio do professor. Em uma segunda etapa, cada grupo terá que representar os conjuntos Interseção e União dos seus trajetos, fazendo os tratamentos adequados em cada tipo de registro.

A seguir apresenta-se exemplos representando os trajetos de 3 estudantes até a escola (UTFPR).

Estudante 1:

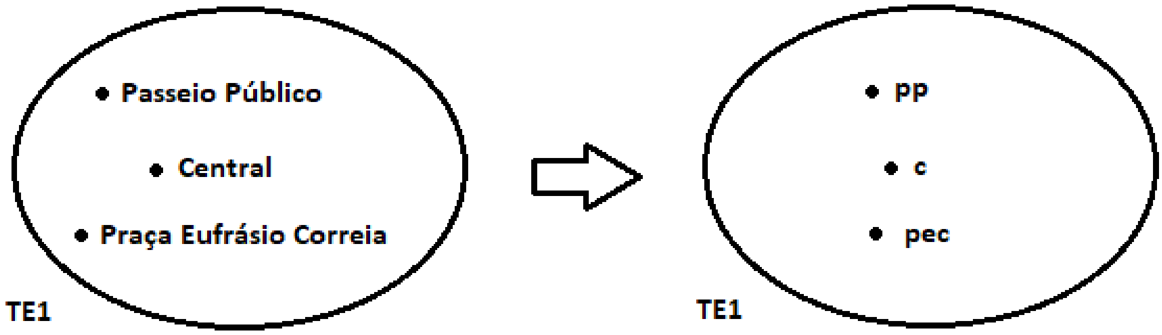
Figura 21 - Mapa com trajeto Estudante 1



Fonte: Adaptado de Google Maps (2024)

Registro Figural:

Figura 22 - Conjunto Trajeto Estudante 1



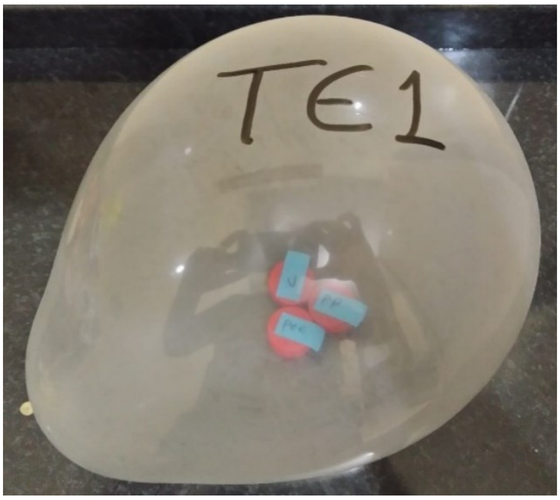
Fonte: Autoria própria (2024)

Registro Algébrico: TE1 = {pp, c, pec}.

Registro Linguístico: “Trajeto do estudante 1 começa no ponto Passeio Público, passa pelo ponto Central e termina na Praça Eufrásio Correia”.

Material Didático:

Figura 23 - Conjunto Trajeto Estudante 1

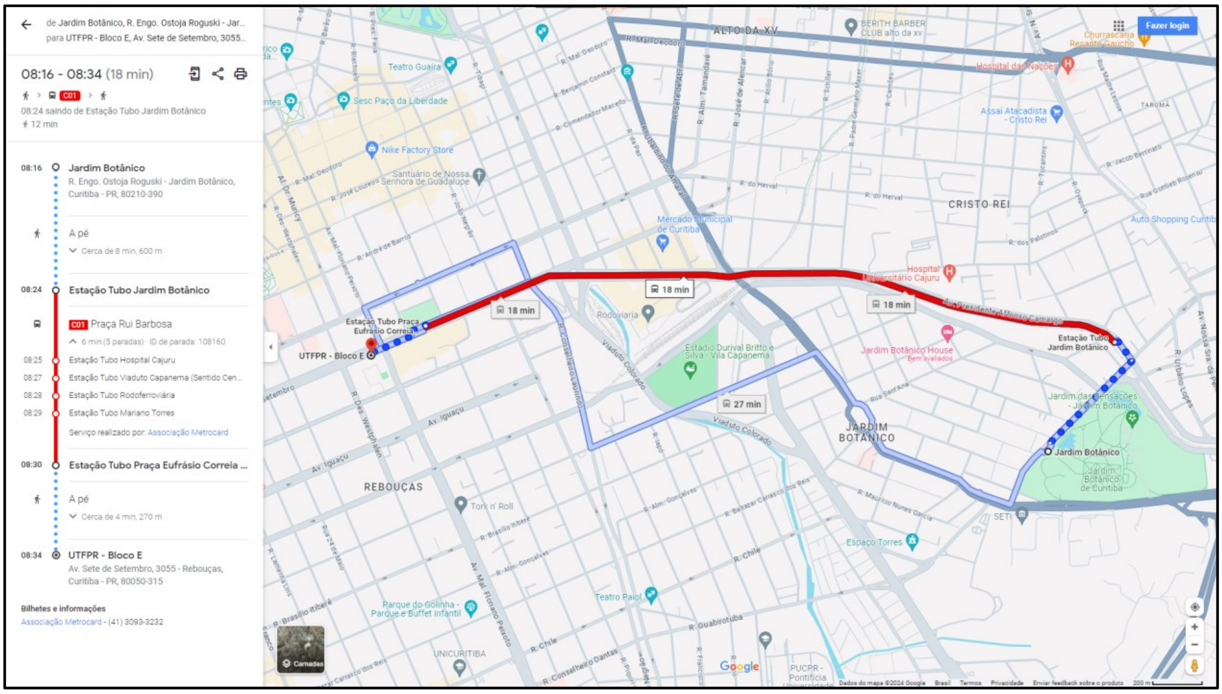


Fonte: Autoria própria (2024)

Estudante 2:

Mapa:

Figura 24 - Mapa com trajeto Estudante 2



Fonte: Adaptado de Google Maps (2024)

Registro Linguístico: “O trajeto do estudante 2 começa na Estação Tubo Jardim Botânico, em seguida passa pela Estação Tubo Hospital Cajuru, logo após a Estação Tubo Viaduto do Capanema, depois a Estação Tubo Rodoferroviária, seguido da Estação Tubo Mariano Torres e finalmente chegando ao destino na Estação Tubo Praça Eufrásio Correia”.

Material Didático:

Figura 25 - Conjunto Trajeto Estudante 2 no Material Didático

Fonte: Autoria própria (2024)

Registro Figural:

Figura 26 - Conjunto Trajeto Estudante 2

- Estação Tubo Jardim Botânico
- Estação Tubo Hospital Cajuru
- Estação Tubo Viaduto do Capanema
- Estação Tubo Rodoferroviária
- Estação Tubo Mariano Torres
- Estação Tubo Praça Eufrásio Correia

TE2

→

- etjb
- ethc
- etvc
- etr
- etmt
- etpec

TE2

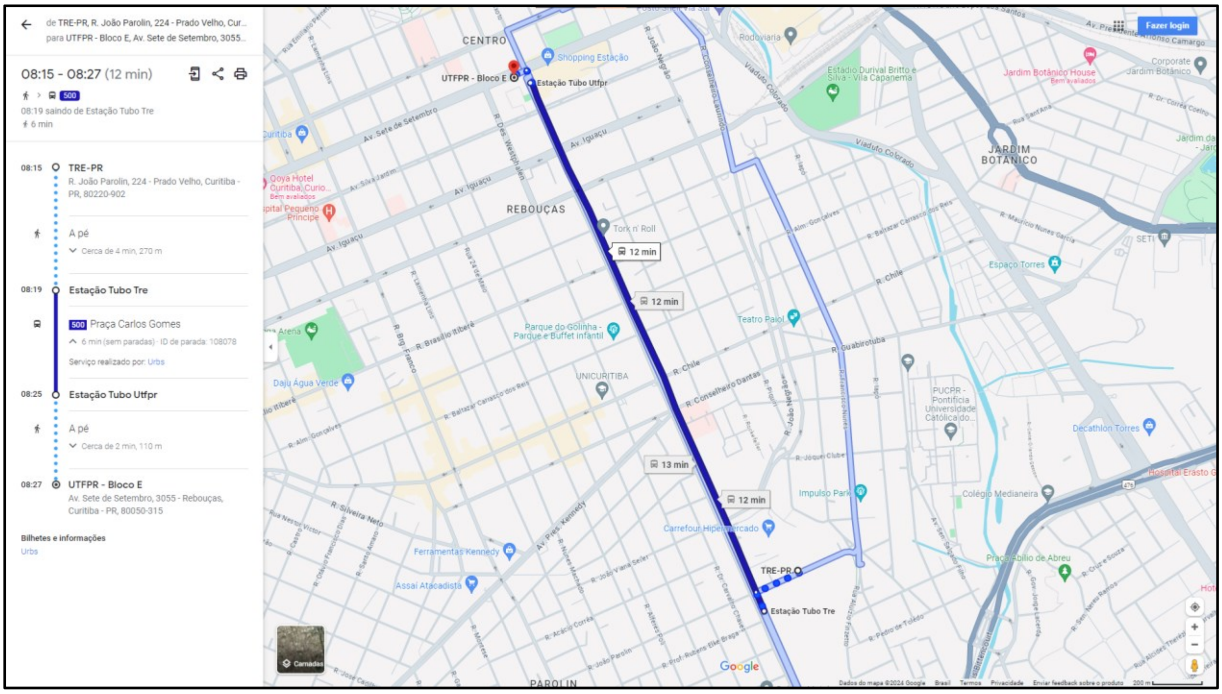
Fonte: Autoria própria (2024)

Registro Algébrico: Conjunto TE2 = {etjb, ethc, etvc, etr, etmt, etpec}.

Estudante 3:

Mapa:

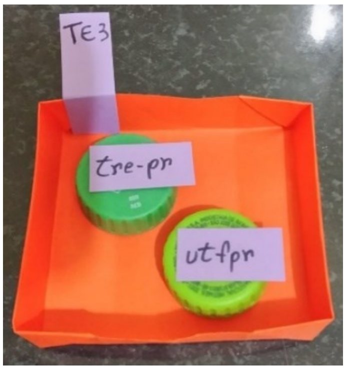
Figura 27 - Mapa com trajeto Estudante 3



Fonte: Adaptado de Google Maps (2024)

Material Didático:

Figura 28 - Conjunto Trajeto Estudante 3 no Material Didático



Fonte: Autoria própria (2024)

Registro Figural:

Figura 29 - Conjunto Trajeto Estudante 3

Fonte: Autoria própria (2024)

Registro Algébrico: TE3 = {tre-pr, utfpr}.

Registro Linguístico: “O trajeto do estudante 3 é começa no tubo TRE-PR e termina no tubo UTFPR”.

Feitos os trajetos inicia-se pelo professor uma exemplificação do que são os conjuntos Interseção e União.

A Interseção de dois conjuntos é definida como a seleção dos elementos que pertencem a ambos os conjuntos considerados.

Assim, utilizando os 3 trajetos anteriores como exemplo tem-se:

Trajeto Estudante 1: Passeio Público, Central, Praça Eufrásio Correia.

Trajeto Estudante 2: Jardim Botânico, Hospital Cajuru, Viaduto do Capanema, Rodoferroviária, Mariano Torres, Praça Eufrásio Correia.

Trajeto Estudante 3: TRE-PR, UTFPR.

Trajeto Interseção de 3 estudantes:

“A interseção entre o Trajeto do Estudante 1 e Estudante 2 é Praça Eufrásio Correa”.

“A interseção entre o Trajeto do Estudante 1 e Estudante 3 é vazio”.

“A interseção entre o Trajeto do Estudante 2 e Estudante 3 é vazio”, “Não existe interseção”, “Não existe ponto em comum”.

“A interseção entre os trajetos dos 3 estudantes é vazia”.

Registro Algébrico:

Como os registros algébricos dos três estudantes não foram os mesmos, aqui é necessária uma intervenção do professor e um acordo entre os estudantes para qual representação usar, justamente para não se cometer o erro de repetir duas vezes o mesmo elemento.

TE1 = {pp, c, pec}

TE2 = {etjb, ethc, etvc, etr, etmt, etpec} passa a ser o seguinte:

TE2 = {jb, hc, vc, r, mt, pec}

TE3 = {tre-pr, utfpr}

TE1 ∩ TE2:

1. TE1 ∩ TE2 = {Praça Eufrásio Correia}
2. TE1 ∩ TE2 = {pec}

TE1 ∩ TE3:

1. TE1 ∩ TE3 = { }

TE2 ∩ TE3:

1. TE2 ∩ TE3 = { }

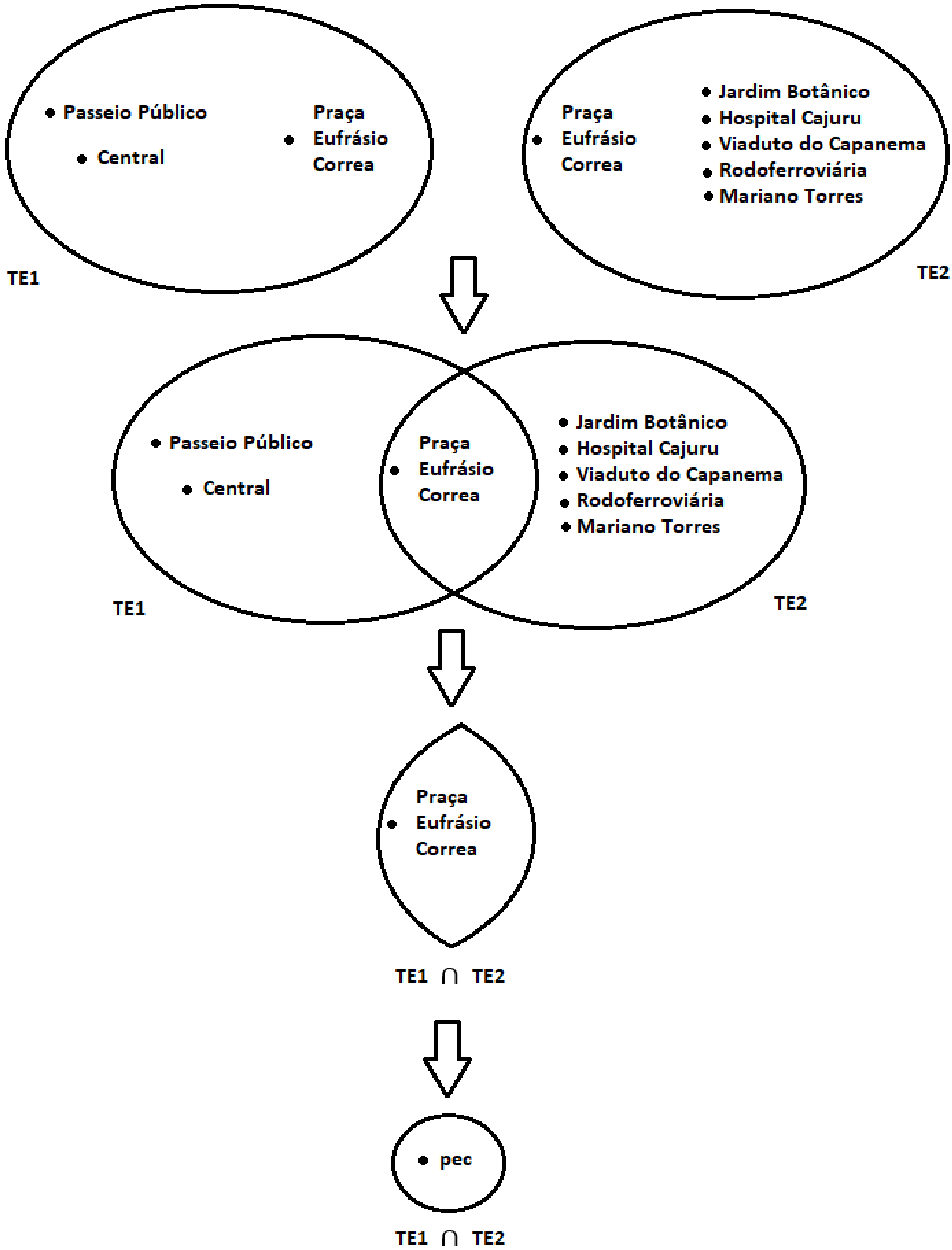
TE1 ∩ TE2 ∩ TE3:

1. TE1 ∩ TE2 ∩ TE3 = { }

Registro Figural:

TE1 ∩ TE2:

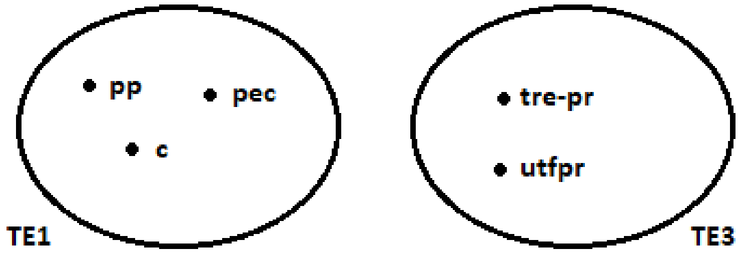
Figura 30 - Interseção dos conjuntos TE1 e TE2



Fonte: Autoria própria (2024)

TE1 ∩ TE3:

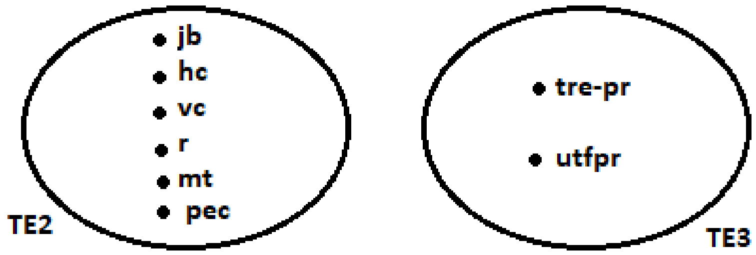
Figura 31 - Interseção dos Conjuntos TE1 e TE3



Fonte: Autoria própria (2024)

TE2 ∩ TE3:

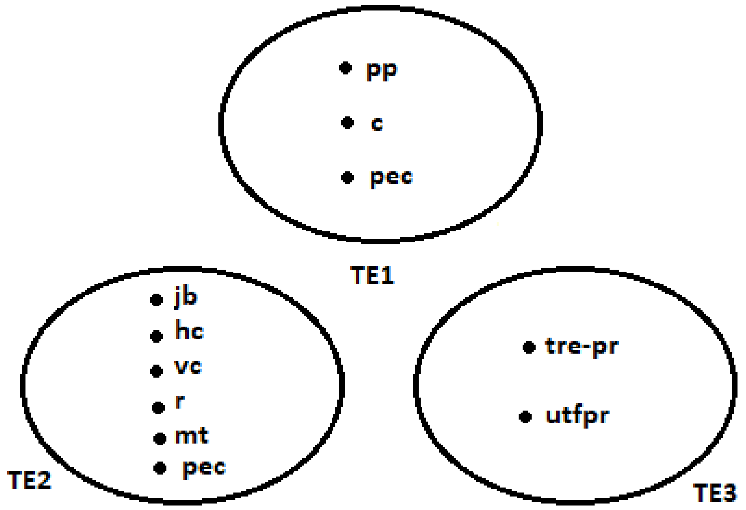
Figura 32 - Interseção dos Conjuntos TE2 e TE3



Fonte: Autoria própria (2024)

TE1 ∩ TE2 ∩ TE3:

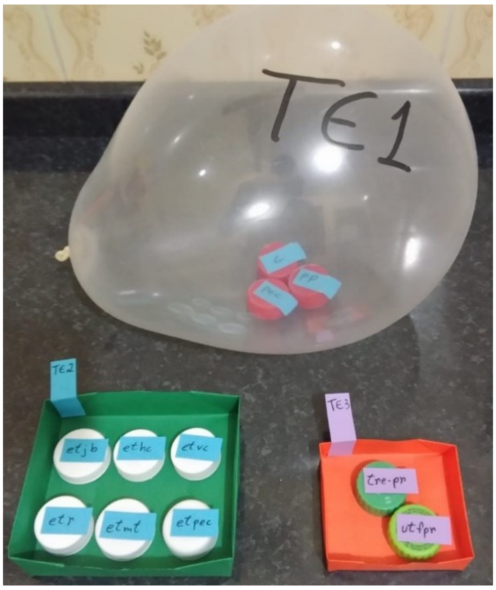
Figura 33 - Interseção dos Conjuntos TE1, TE2 e TE3



Fonte: Autoria própria (2024)

Material Didático:

Figura 34 - Interseção dos Conjuntos TE1, TE2 e TE3 no Material Didático



Fonte: Autoria própria (2024)

A União de dois conjuntos é definida como a seleção dos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos considerados.

Assim, utilizando os 3 trajetos anteriores como exemplo tem-se:

Trajeto Estudante 1: Passeio Público, Central, Praça Eufrásio Correia.

Trajeto Estudante 2: Jardim Botânico, Hospital Cajuru, Viaduto do Capanema, Rodoferroviária, Mariano Torres, Praça Eufrásio Correia.

Trajeto Estudante 3: TRE-PR, UTFPR.

Trajeto União de 3 estudantes:

“A união entre o Trajeto do Estudante 1 e Estudante 2 é Passeio Público, Central, Praça Eufrásio Correia, Jardim Botânico, Hospital Cajuru, Viaduto do Capanema, Rodoferroviária, Mariano Torres”.

“A união entre o Trajeto do Estudante 1 e Estudante 3 é Passeio Público, Central, Praça Eufrásio Correia, TRE-PR, UTFPR”.

“A interseção entre o Trajeto do Estudante 2 e Estudante 3 é Jardim Botânico, Hospital Cajuru, Viaduto do Capanema, Rodoferroviária, Mariano Torres, Praça Eufrásio Correia, TRE-PR, UTFPR”.

“A união entre os trajetos dos 3 estudantes é: Passeio Público, Central, Praça Eufrásio Correia, Jardim Botânico, Hospital Cajuru, Viaduto do Capanema, Rodoferroviária, Mariano Torres, TRE-PR, UTFPR”.

Atenção para o fato de o ponto Praça Eufrásio Corrêa não aparecer duas vezes.

Registro Algébrico:

TE1 = {pp, c, pec}

TE2 = {jb, hc, vc, r, mt, pec}

TE3 = {tre-pr, utfpr}

TE1 ∪ TE2:

1. TE1 ∪ TE2 = {pp, c, pec, jb, hc, vc, r, mt}

TE1 ∪ TE3:

1. TE1 ∪ TE3 = {pp, c, pec, tre-pr, utfpr}

TE2 ∪ TE3:

1. TE2 ∪ TE3 = {jb, hc, vc, r, mt, pec, tre-pr, utfpr}

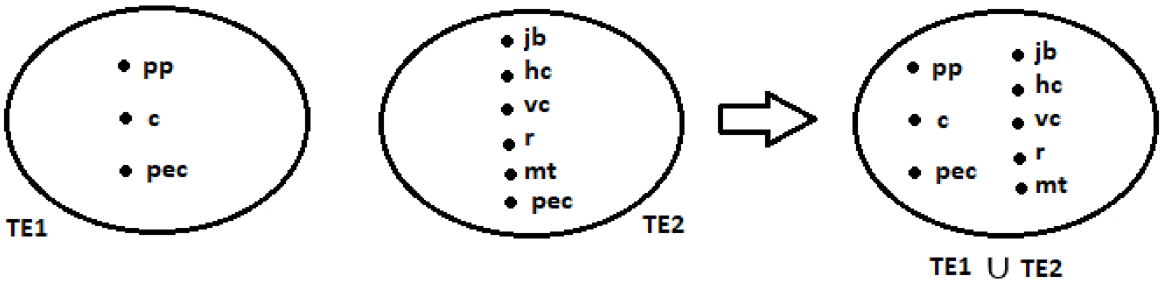
TE1 ∪ TE2 ∪ TE3:

1. TE1 ∪ TE2 ∪ TE3 = {pp, c, pec, jb, hc, vc, r, mt, tre-pr, utfpr}

Registro Figural:

TE1 ∪ TE2:

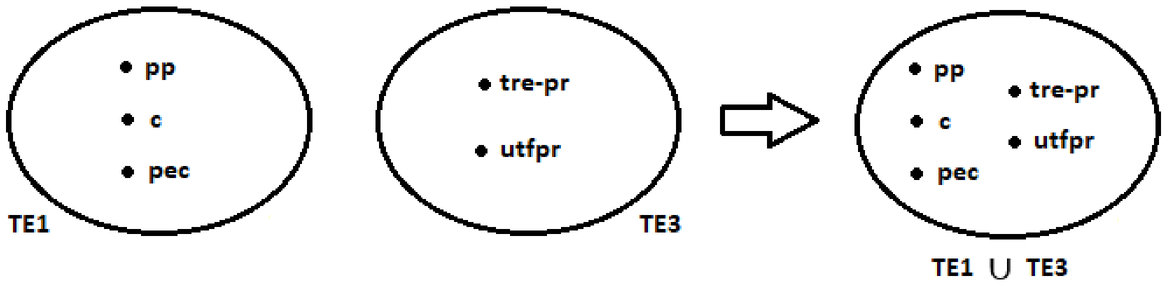
Figura 35 - União dos Conjuntos TE1 e TE2



Fonte: Autoria própria (2024)

TE1 ∪ TE3:

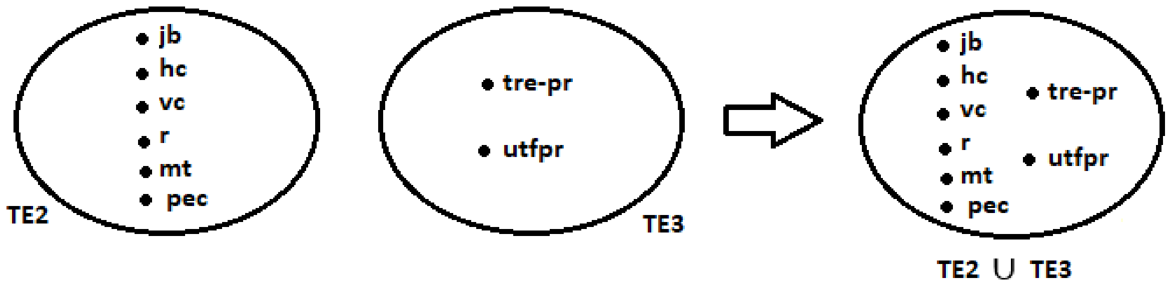
Figura 36 - União dos Conjuntos TE1 e TE3



Fonte: Autoria própria (2024)

TE2 ∪ TE3:

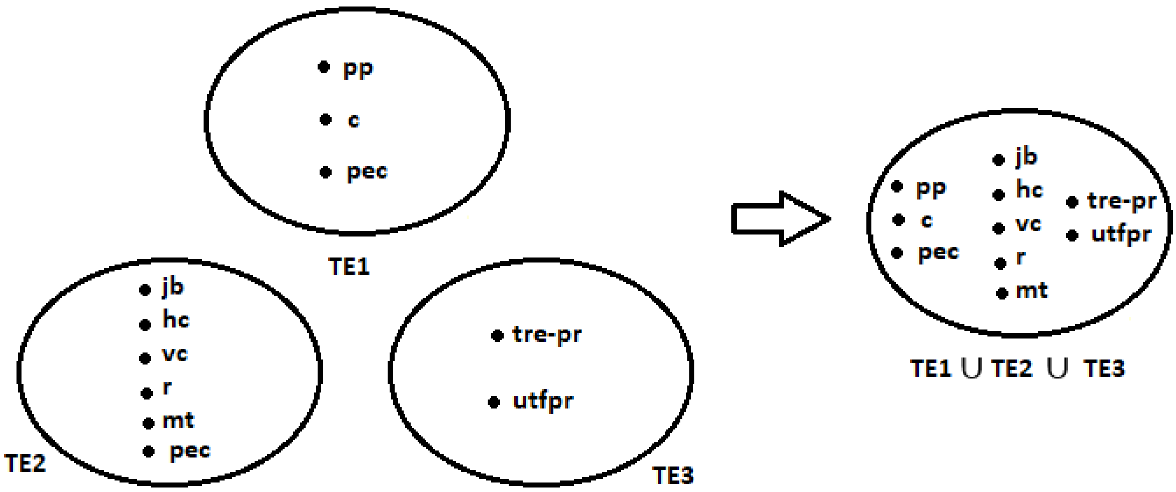
Figura 37 - União dos Conjuntos TE2 e TE3



Fonte: Autoria própria (2024)

TE1 ∪ TE2 ∪ TE3:

Figura 38 - União dos Conjuntos TE1, TE2 e TE3



Fonte: Autoria própria (2024)

Material Didático:

Figura 39 - União dos Conjuntos TE1, TE2 e TE3 no Material Didático

Fonte: Autoria própria (2024)

Aqui o foco muda para acompanhar a execução da atividade pelos estudantes. O acompanhamento deve-se basear em verificar os detalhes de como os estudantes estão representando os trajetos, quais tipos de representações intermediárias estão utilizando, se existe uma variação ou constância nas representações finais de cada tipo de registro. Por exemplo, se na mesma representação o estudante usa ao mesmo tempo nomes completos e siglas, ou se ele alterna entre nomes completos e siglas sem nenhum padrão específico. Observar se quando os estudantes fazem as representações das interseções e uniões eles modificam o padrão de representação que estavam fazendo individualmente, se entram em consenso ou se são “democráticos” e misturam um pouco do estilo de cada estudante. Como é impossível prever todos os tipos de representações que os estudantes podem produzir, essa etapa requer uma postura mais maleável do professor para analisar o que realmente tem valor de ser adequado e o que é apenas uma manifestação individual do processo de aprendizagem do estudante.

Depois de representados e registradas as atividades (fotos, anotações pelos estudantes ou pelo professor para garantir que a atividade foi executada por cada estudante e grupo) são feitos os conjuntos Interseção e União da turma, utilizando todos os trajetos dos grupos.

É importante que o professor vá anotando no quadro, lousa, projetor, os resultados intermediários das interseções e uniões para manter um controle do progresso. Um grupo/trajeto por vez.

3º Momento: "Construção dos estudantes supervisionada pelo professor".

Agora que os estudantes tiveram alguns exemplos de como usar as representações e os materiais didáticos eles deverão exercitar essa capacidade de representação de maneira mais independente.

A atividade a seguir envolve o uso de uma lista de compras para exercitar os conceitos vistos anteriormente. A ideia principal continua a mesma, explorar os diferentes tipos de representações, trabalhar individualmente e em grupo, ir aumentando a complexidade das operações e das representações.

Para exemplificar, utilizam-se 4 estudantes.

Para poupar tempo pode-se pedir que organizem e tragam uma lista de compras contendo no mínimo 10 itens diferentes. Itens que normalmente a família deles compra mensalmente. A quantidade e preço não são importantes neste caso.

Figura 40 - Listas de compras 1 e 2

Fonte: Autoria própria (2024)

Figura 41 - Listas de compras 3 e 4

Fonte: Autoria própria (2024)

A lista de compras já representa o uso do registro linguístico.

Registro algébrico:

Lista do Estudante 1 = {café, arroz, feijão, suco de uva, pão, margarina, detergente, sabão, papel higiênico, pasta de dente}.

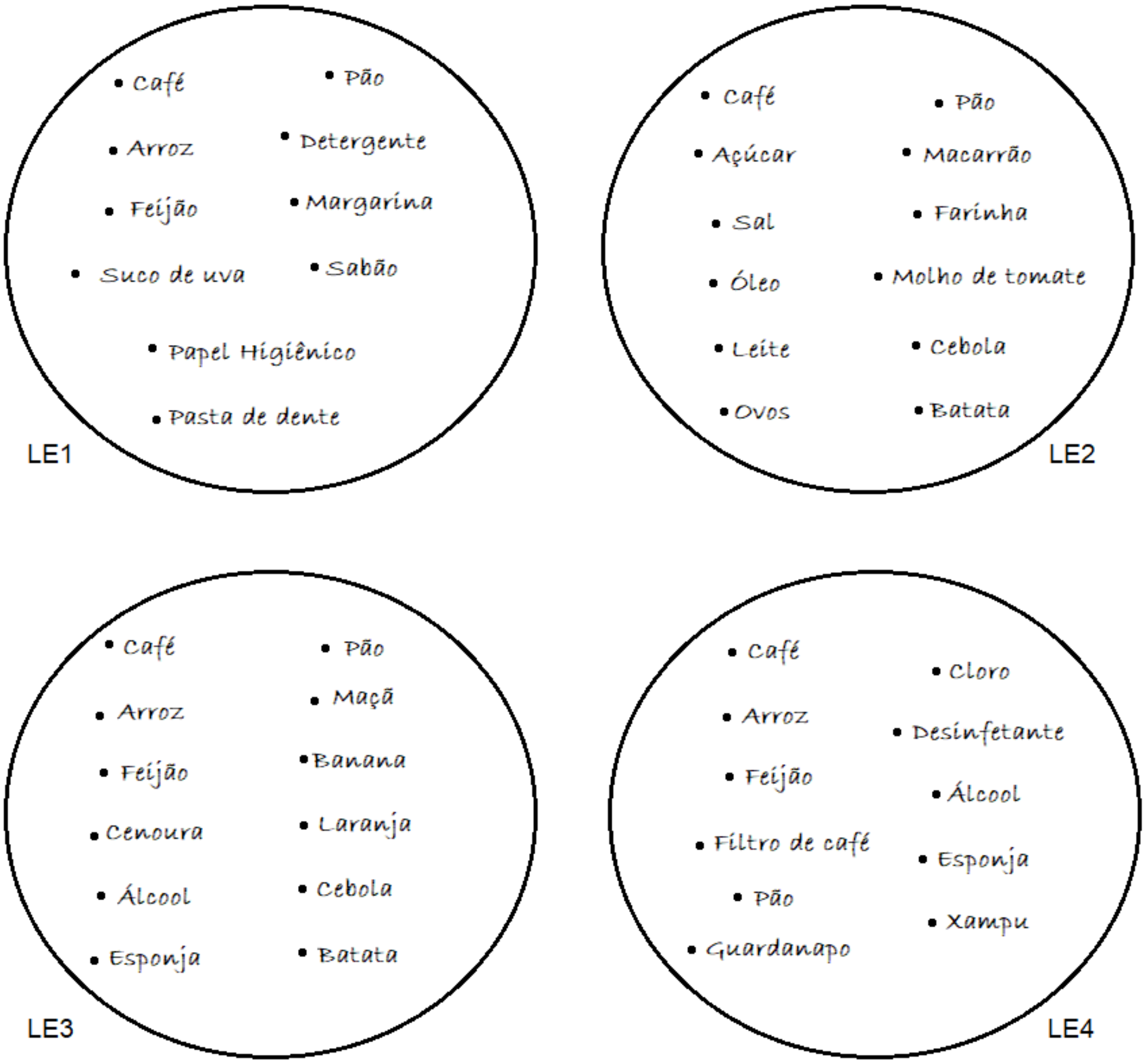
LE2 = {café, açúcar, sal, óleo, pão, macarrão, farinha, molho de tomate, leite, ovos, cebola, batata}.

LE3 = {café, arroz, feijão, cenoura, pão, maçã, banana, laranja, álcool, esponja, cebola, batata}.

LE4 = {café, arroz, feijão, filtro de café, pão, guardanapo, cloro, desinfetante, álcool, esponja, xampu}.

Registro figural:

Figura 42 - Listas de compras 1, 2, 3 e 4



Fonte: Autoria própria (2024)

Material Didático:

Figura 43 - Listas de compras 1, 2, 3 e 4 no Material Didático

Fonte: Autoria própria (2024)

A título de exemplo utiliza-se a operação de Diferença de Conjuntos. O procedimento para construção da Interseção e da União dos conjuntos é similar ao que foi apresentado anteriormente com os pontos de ônibus.

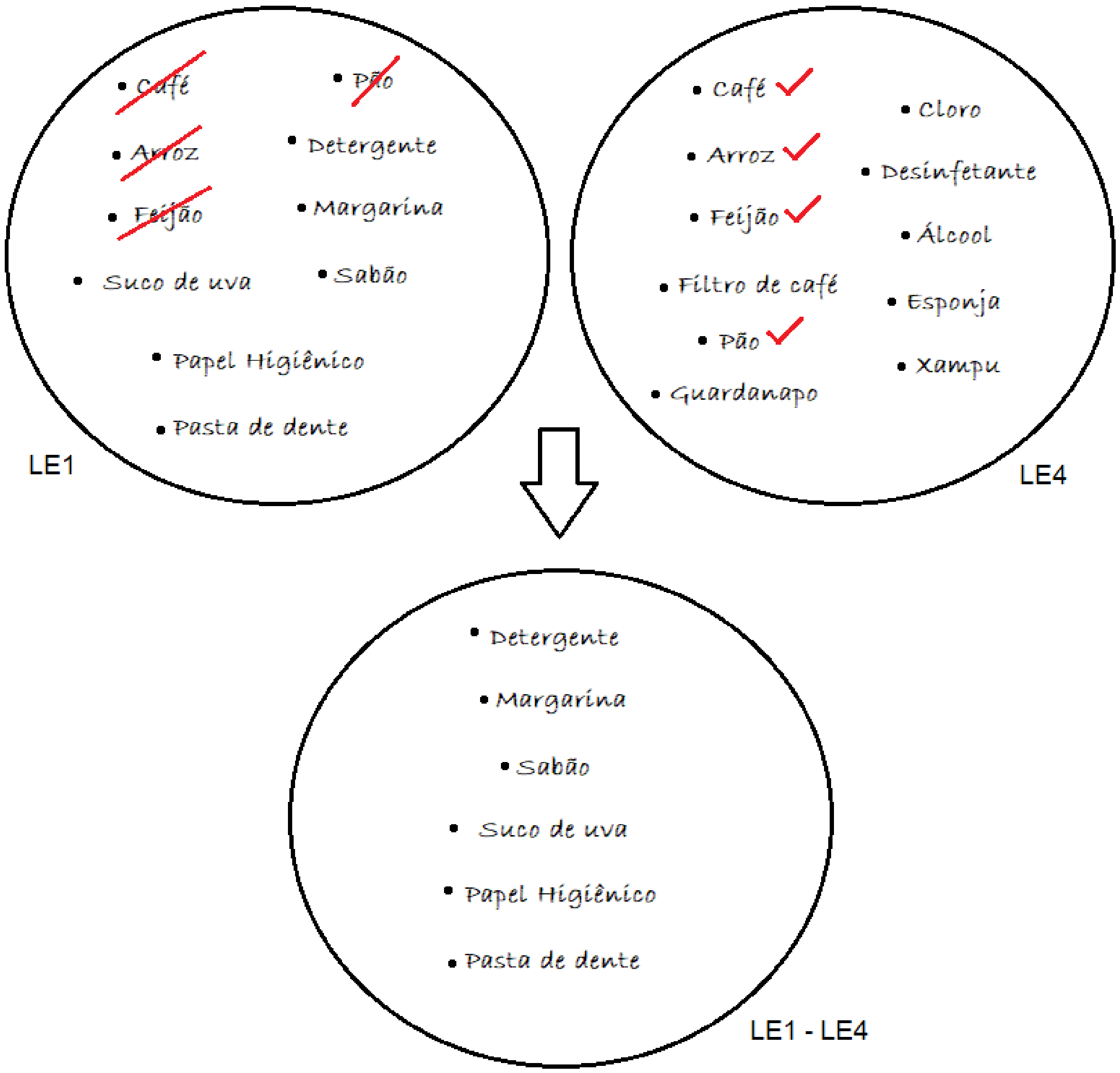
A diferença entre dois conjuntos A e B é definida como o conjunto de elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.

Imaginando duas pessoas que moram juntas e dividem as compras mensais. Todo mês elas fazem uma lista em conjunto. Se uma delas faz a compra de vários itens da lista, mas acaba esquecendo alguma coisa e pede para a outra pessoa comprar, a segunda pessoa não vai comprar a lista inteira, mas somente aqueles itens restantes. Para saber quais são esses itens que devem ser comprados é necessário justamente realizar uma operação de diferença entre o conjunto de itens da lista e o conjunto de itens comprados, ou seja, eliminando o que foi comprado da lista resta o que precisa ser comprado.

Utilizando a Lista do Estudante 1 = {café, arroz, feijão, suco de uva, pão, margarina, detergente, sabão, papel higiênico, pasta de dente} e considerando que foram comprados os itens da Lista do Estudante 4 = {café, arroz, feijão, filtro de café, pão, guardanapo, cloro, desinfetante, álcool, esponja, xampu}. Tem-se que a Diferença entre a Lista 1 e a Lista 4 = {suco de uva, margarina, detergente, sabão, papel higiênico, pasta de dente}.

Registro figural:

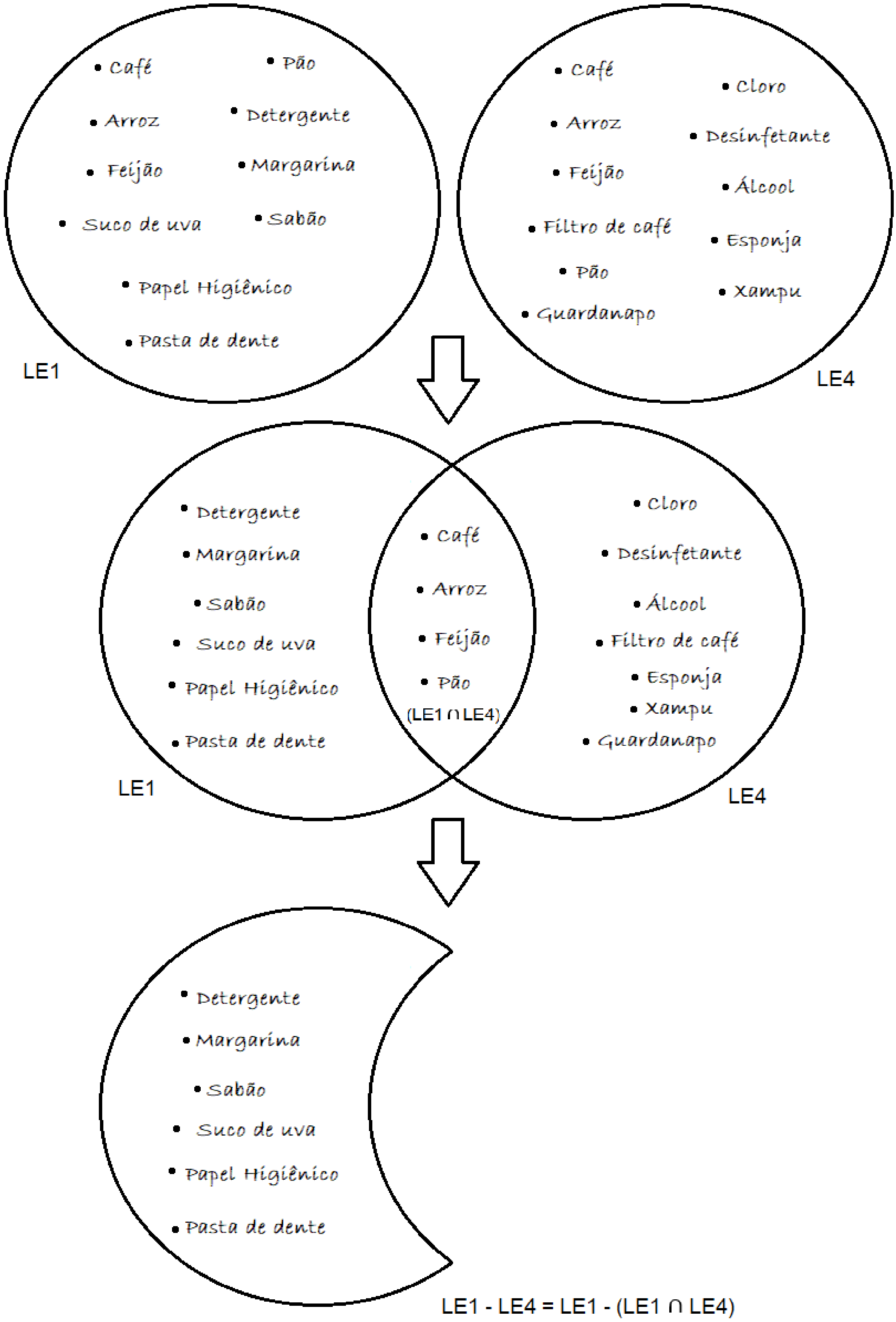
Figura 44 - Diferença entre os conjuntos LE1 e LE4



Fonte: Autoria própria (2024)

Ou entendo que a diferença entre os conjuntos A e B é o mesmo que a diferença entre o conjunto A e a Interseção de A com B.

Figura 45 - Diferença entre os conjuntos LE1 e LE4



Fonte: Autoria própria (2024)

Material Didático:

Figura 46 - Diferença entre os conjuntos LE1 e LE4 no Material Didático

Fonte: Autoria própria (2024)

Além de pedir que os estudantes realizem as operações de Interseção, União e Diferença, a variedade de itens possibilita explorar diferentes tipos de subconjuntos baseados nos tipos de itens ou seções do mercado, como por exemplo, produtos de limpeza, alimentos, bebidas, frutas, verduras, frios, congelados etc.

4º Momento: "Revisão: alinhamento com os saberes dos estudantes".

Neste momento deve ser revisado o que foi feito nos momentos anteriores priorizando os esclarecimentos de dúvidas. Deve-se complementar as representações que já foram apresentadas com suas versões mais abstratas, gerais e formais, como as expressas a seguir segundo (IEZZI, 2013) e (NOVAES, 2018).

"Um conjunto é qualquer coleção de objetos definidos, distinguíveis, de nossa intuição ou de nosso intelecto, para serem concebidos como um todo. Os objetos são chamados elementos (membros) do conjunto." Georg Cantor (apud NOVAES, 2018, p. 2).

Descrição de um conjunto pelas características dos seus elementos:

"A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$

Subconjuntos: "Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B".

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall\, x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Conjunto Vazio: "O conjunto vazio é aquele conjunto que não possui elementos. Podemos usar qualquer propriedade contraditória para definir o conjunto vazio, como, por exemplo, o conjunto vazio é o conjunto dos objetos x tais que x é diferente de si mesmo".

$\emptyset = \{x : x \neq x\}$

O conjunto vazio é único. Assim não se diz "um conjunto vazio", mas "o conjunto vazio".

Conjunto Universo: "O conjunto ao qual pertencem todos os elementos de interesse em determinado contexto é denominado conjunto universo (universo do discurso ou conjunto fundamental)".

$U = \{x : x = x\}$

Conjuntos Iguais: "Dois conjuntos são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A".

$A = B \Leftrightarrow (\forall\, x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ e $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$

Interseção de conjuntos: "Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e B".

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

União de conjuntos: "Dados dois conjuntos A e B, chama-se reunião de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B".

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Diferença de conjuntos: "Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B".

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

5º Momento: “Construção dos estudantes”.

O último momento é reservado para que os estudantes reproduzam as representações e realizem as operações da maneira mais independente. Funciona como um trabalho ou tarefa de casa.

Atividade 1: Após o estudante ter tido contato com os conteúdos, e com várias de suas formas de representação, seria esperado que ao observar o mundo ao seu redor, desde as coisas mais sofisticadas às mais mundanas, que ele conseguisse lançar um novo olhar adaptado a ver também relações com aquilo que aprendeu.

Essa nova capacidade poderia ser explorada por esta atividade, na qual se requer do estudante a representação e a aplicação de operações sobre uma situação única, mas ao mesmo tempo familiar.

Ao pedir que o estudante represente os itens de sua própria mochila, supostamente com uma listagem única de itens, ele estaria exercitando suas habilidades de experimentação e representação, numa atividade semelhante aos colegas mais ao mesmo tempo exclusiva.

Pede-se então que cada estudante construa um “Conjunto Mochila”, no qual devem constar todos os itens que eles carregam. Devendo apresentar pelo menos dois subconjuntos (livros, estojo, canetas, eletrônicos, alimentos etc.). E que realizem com um colega pelo menos uma das operações que foram apresentadas anteriormente. Representando nos diferentes registros seus Conjuntos Mochilas, o processo da operação escolhida.

É necessário nesta atividade que o estudante leve a mochila com os materiais para escola, já que ela serve de gabarito da representação, para correção e comprovação de que a atividade foi feita corretamente

Atividade 2: De maneira semelhante aos livros didáticos analisados, propõe-se uma seleção de exercícios visando a prática das habilidades de representação e do uso de diferentes registros.

Lista de exercícios:

1. “Um substantivo coletivo é o nome comum que se dá a um conjunto de seres ou coisas da mesma espécie. O substantivo coletivo costuma estar em sua forma no singular, embora designe um conjunto de múltiplos seres ou de coisas.” (VIANA, 2024). Ex.: Colmeia é o coletivo de abelhas e orquestra é o coletivo de músicos. Para cada item, escreva o substantivo coletivo que indica o conjunto dos elementos listados.

a) Estudantes b) Palavras c) Livros

d) Faculdades e) Mapas f) Estrelas

2. "Os numerais coletivos são aqueles que indicam um conjunto de seres ou coisas dentro de uma categoria. Diferentemente dos substantivos coletivos, os numerais coletivos apontam o número exato de seres ou coisas. Os numerais coletivos são variáveis em número (singular ou plural), mas não em gênero (masculino ou feminino)." (VIANA). Ex: Um par é um conjunto com duas unidades, um trio é um conjunto com três unidades, uma semana um conjunto de 7 dias, um biênio é um conjunto de dois anos.

a) Milhar b) Novena c) Quarentena

d) Vintênio e) Tonelada f) Sextilha

3. De acordo com o que foi estudado, reescreva os termos dos itens a seguir utilizando sinônimos. (“Sinônimos são palavras que apresentam o mesmo sentido ou sentido aproximado." (SOUZA, 2024):

a) elemento, pertencer, conjunto

b) vazio, unitário, universo

c) relação, inclusão, conter,

d) igual, união, interseção, diferença.

4. Leia o texto a seguir, reescreva-o com suas palavras e o resolva:

“Dos diversos tipos de jogos on-line, existem aqueles que só podem ser jogados individualmente, outros onde a interação com mais jogadores é a regra, mas também existem jogos que possuem as duas características, podendo se alternar entre jogo individual e o jogo “multiplayer” (compartilhado). Em uma pesquisa realizada por um site especializado em jogos digitais apenas dez dos entrevistados não se interessavam pelo assunto. Entre os jogadores, os estilos dos jogos variam bastante: 30 responderam preferir jogos de corrida, 55 optam por jogos esportivos, 135 são viciados em jogos de ação, 70 em jogos de aventura e 30 preferem jogos de simulação. Do total de jogadores, 85 sempre jogavam os jogos individualmente, enquanto 215 sempre jogavam no modo compartilhado. Considerando os dados coletados na entrevista, quantas pessoas optaram por jogos que apresentavam ambas as características, do jogo poder ser individual e compartilhado?”.

5. Uma agência de viagens, ao vender pacotes turísticos, organiza-os de modo a tornar toda a operação logística o mais eficiente possível. Na organização das viagens de 20 clientes diferentes constatou-se que vários deles tinham o mesmo destino e trechos do trajeto semelhantes: Todos sairiam de Curitiba, 3 tinha como destino o exterior, 10 tinham como destino o Nordeste, destes 5 iriam para Fortaleza, 4 iriam para a região Norte, destes 1 iria para Manaus e o restante iria para a cidade de São Paulo. Ciente destas informações, use diagramas para representar os destinos dos passageiros.

6. Utilizando a representação algébrica, escreva os conjuntos descritos abaixo:

a) Conjunto de números primos maiores que 2 e menores que 30.

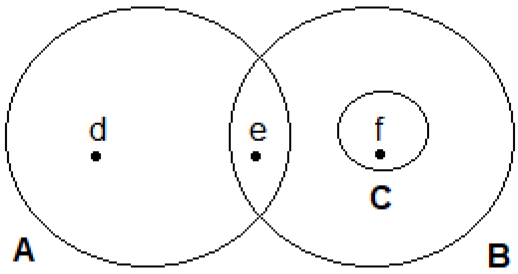
b) Conjuntos dos substantivos presentes na frase do matemático Karl Weierstrass: “Um matemático que não tenha algo de poeta, nunca será um matemático completo”.

7. Utilizando materiais didáticos represente a seguinte situação:

a) Os 3 conjuntos, A, B, C, não possuem nenhum elemento em comum. O conjunto A possui 3 elementos. Nos conjuntos restantes, um deles contém o outro, e aquele que é contido possui apenas um elemento.

8. Descreva com suas palavras as relações entre os conjuntos e os elementos representados nos diagramas a seguir.

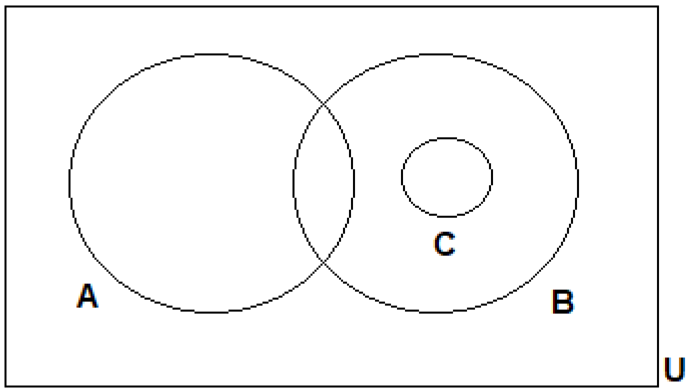
Figura 47- Exercício 8



Fonte: Autoria própria (2024)

9. Dada a configuração dos conjuntos (não-vazios) no diagrama a seguir, use diagramas de Venn e cores para representar graficamente o que é pedido:

Figura 48 - Exercício 9

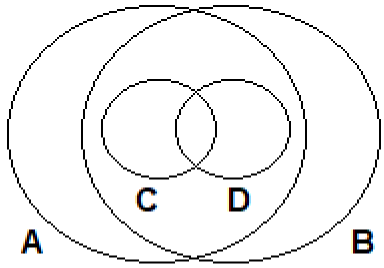


Fonte: Autoria própria (2024)

a) $A \cap B$	b) $B \cap C$	c) $A \cap B \cap C$
d) $A - B$	e) $B - C$	f) $(U - A) - C$

10. Na figura abaixo tem-se a representação dos conjuntos A, B, C, D (não-vazios).

Figura 49 - Exercício 10



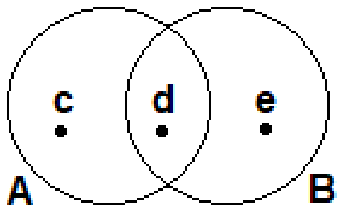
Fonte: Autoria própria (2024)

Quais das afirmações são verdadeiras?

a) $(A - C) \subset B$ b) $B - (C \cap D) \subset (C \cap B)$ c) $((B - D) \cup (A - C)) \subset (A \cap B)$

11. Represente o diagrama a seguir usando materiais didáticos

Figura 50 - Exercício 10



Fonte: Autoria própria (2024)

12. Dado o conjunto U = {1, 2, 3, 4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, 128}, reescreva os conjuntos a seguir listando os elementos textualmente.

a) $Q = \{x \in U \mid 0 < x^2 < 100\}$

b) $D = \{y \in U \mid 3y - 24 = 0\}$

c) $C = \{w \in U \mid 2w = 0\}$

13. Represente, em um único diagrama, os conjuntos a seguir: A = {a, 5, 6}, B = {a, m, 8, 9}, C = {m, 9}, D = {6}, E = $\emptyset$

14. Sejam os conjuntos Z = {z, y, x, w}, Y = {x, w, v, u, t} e X = {y, w, v, t}. Determine:

a) (Z - Y) - X   b) Y - (X ∩ Z)   c) (Y ∪ Z) - X

15. Represente os conjuntos a seguir utilizando o material didático:

a) {a}   b) {{a}}   c) {a, {a}}

d) {{ }, a, {b}}   e) {a, b, c, { }}   f) { { }, {{ }} }

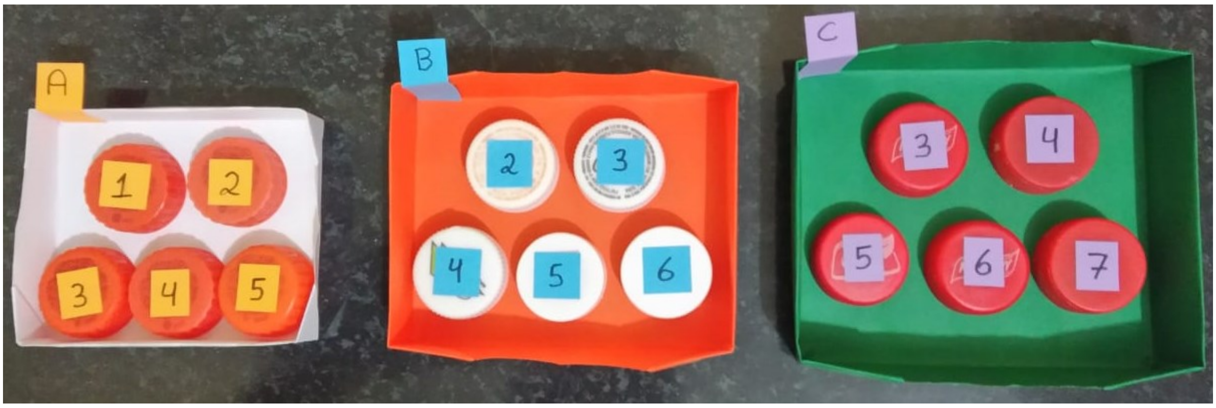
16. Dada a configuração no material didático, descreva textualmente a relação entre os elementos e os conjuntos ("pertence", "está contido").

Figura 51 - Exercício 16

Fonte: Autoria própria (2024)

17. Levando em consideração a representação no material didático, use diagramas para responder os itens a seguir:

Figura 52 - Exercício 17

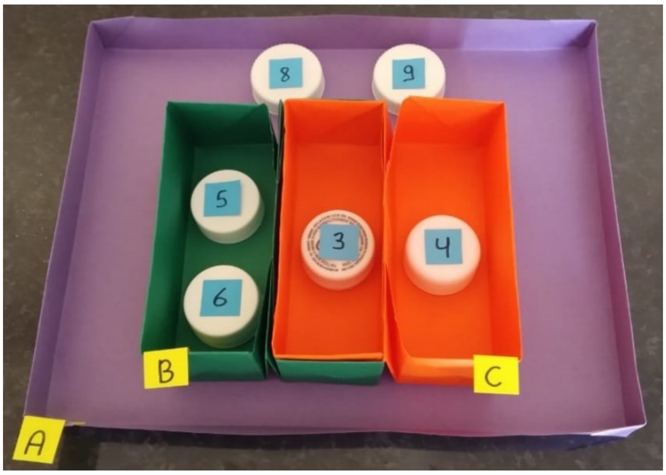


Fonte: Autoria própria (2024)

a) A ∩ (B ∪ C)   b) (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

18. Considere a representação no material didático e escreva na notação algébrica os conjuntos a seguir:

Figura 53 - Exercício 18



Fonte: Autoria própria (2024)

a) A ∪ B　　b) A ∪ C　　c) B ∪ C　　d) A ∪ B ∪ C

e) A ∩ B　　f) A ∩ C　　g) B ∩ C　　h) A ∩ B ∩ C

i) A - B　　j) A - C　　k) B - C　　l) (A - B) - C

19. Dada a configuração no material didático utilize outro material didático (ou outros objetos) para representar os itens solicitados:

Figura 54 - Exercício 19

Fonte: Autoria própria (2024)

a) A ∪ (B ∩ C)　　b) (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

3.1.4 Comentários

O trajeto feito como exemplo pelo professor deve ser escolhido apropriadamente para que facilite a futura apreensão de um conjunto genérico, com diferentes quantidades de elementos. Fazer um caminho que represente o conjunto vazio, um conjunto unitário ou um conjunto com muitos elementos pode dificultar o entendimento. Numa situação em que o uso de pontos de ônibus não seja viável, pode-se utilizar as ruas do trajeto da escola até o mercado como os elementos do conjunto. O conjunto vazio nesse caso seria o ponto de partida ser na mesma quadra do ponto de chegada e não haver a necessidade de utilizar a rua. O conjunto universo seria o caminho que se utiliza o maior número de ruas possíveis da cidade, possivelmente todas as ruas, dependendo da cidade.

O Google Maps pode oferecer várias rotas alternativas que utilizam uma quantidade diferente de pontos de ônibus e até mesmo uma rota que substitui parte do trajeto de ônibus por uma a pé. O trajeto também pode sofrer alterações dependendo do horário em que é feita a busca. É necessário, portanto, um preparo antes da atividade para saber quais são as possibilidades de trajeto e o entendimento de que a atividade pode mudar consideravelmente dependendo do trajeto feito. O que implica uma mudança no tempo de execução por parte do professor e de acompanhamento por parte dos estudantes.

Uma alternativa aos trajetos sem a opção de ônibus é usar o nome das ruas pelo qual o estudante passa para chegar até a escola. O nome das ruas são os elementos do conjunto trajeto-escola. Se a maioria dos estudantes não utiliza o transporte público ou se não existe transporte público, talvez utilizar os nomes das ruas seja a melhor opção.

No caso de dois estudantes fazerem a mesma rota, mas um utilizar mais pontos de ônibus do que outro que utilizou um caminho a pé, o conjunto representado pelo caminho com partes a pé é um subconjunto do caminho com mais pontos de ônibus.

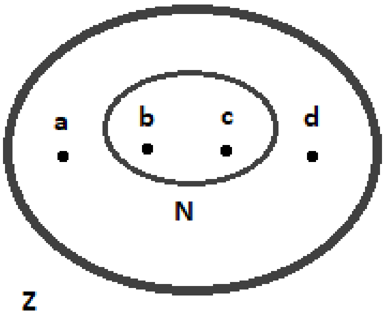
O tratamento e as conversões feitas podem ser feitos no quadro junto com os estudantes, mostrando justamente a construção das diferentes representações.

O uso de siglas impõe a situação de possíveis repetições, o que pode ser contornado modificando as siglas apropriadamente.

Uma questão que surge, e que não será respondida neste trabalho, é quanto a uma dúvida na correspondência entre os registros figurais e algébricos.

No caso a seguir qual o registro algébrico que corresponde corretamente ao registro figural? E se corresponde a apenas um dos registros algébricos, como representar figuralmente o registro algébrico desconsiderado?

Figura 55 - Conjuntos N e Z



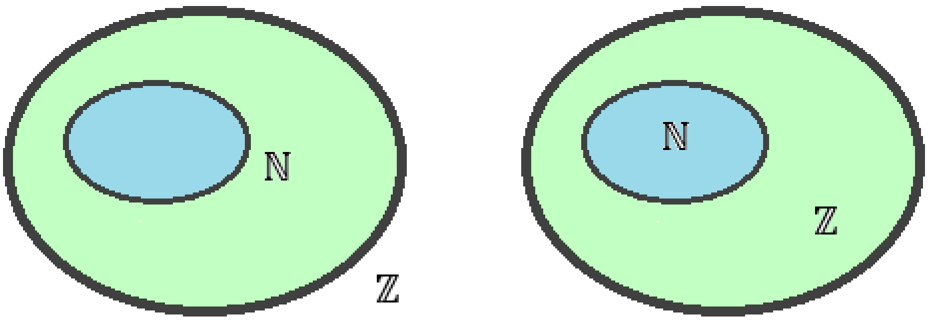
Fonte: Autoria própria (2024)

Opção 1: Z = {a, b, c, d}

Opção 2: Z = {a, {b, c}, d} = {a, N, d}

Ou colocando a questão de outra maneira utilizando o Conjunto dos números Inteiros e o Conjunto dos números Naturais. As duas representações figurais a seguir são utilizadas indistintamente nos livros didáticos.

Figura 56 - Conjuntos dos números Naturais e dos números Inteiros



Fonte: Autoria própria (2024)

ℤ = {..., -3, -2, -1, 0, ℕ} = {..., -3, -2, -1, 0, {1, 2, 3, …}}

Ou ℤ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}

Os mesmos questionamentos valem para as seguintes expressões:

{{a}, {}}, {a, {}}, {a}, {a, a}, {a, {a}}.

As suas respectivas representações figurais são equivalentes entre si?

No 2º Momento, pode-se poupar tempo pedindo em aulas anteriores que os estudantes já tragam uma relação do caminho que percorrem até a escola e os pontos de ônibus utilizados.

A quantidade de estudantes por grupo impactará nos resultados da Interseção e Reunião dos conjuntos. Quanto menos estudantes, maior a chance de a Interseção ser vazia. Quanto mais estudantes por grupo maior a chance do conjunto União ser muito numeroso. A gestão da sala de aula também sofrerá impacto conforme a configuração dos grupos.

É importante registrar que talvez seja mais fácil realizar primeiro Interseção e depois União, já que uma vez unidas as anotações, registros e materiais didáticos fique razoavelmente mais difícil separá-los para depois realizar a Interseção.

Cada estudante pode fazer o seu trajeto no caderno como uma lista. É importante pedir para representar por extenso (registro linguístico), depois por abreviaturas (registro algébrico), isso ajuda a exercitar no estudante o processo de abstração. Caso facilite a representação usando o Material Didático, os estudantes podem recortar os pontos de ônibus da lista (por extenso) e usar apenas os papéis, sem necessariamente usar as tampinhas, desde que fique claro que ambos estão representando os pontos de ônibus.

Durante as representações utilizando o material didático as cores das tampinhas podem servir para ajudar a identificar um tipo de subconjunto dentro do conjunto inicial, seja um pedaço do trajeto ou alguns itens do mercado.

Embora as operações apresentadas tenham se limitado a Interseção, União e Diferença, a estrutura da sequência didática permite a substituição por outras operações.

A execução das atividades nos diferentes momentos possui cada vez menos intervenções do professor, de modo que no último momento espera-se que os estudantes consigam realizar todas as atividades e todo o processo de representação nos diferentes registros sozinhas ou em grupo (já que o ambiente escolar brasileiro não favorece muito o isolamento). O êxito dos estudantes na execução das representações daria indícios de que a proposta educacional de aquisição do conhecimento estabelecida pela Teoria dos Registros de Representação estaria no caminho correto. Necessitando apenas ajustes, revisões e reavaliações futuras do conhecimento agregado às atitudes e percepções dos estudantes em relação aos conteúdos apresentados.

Não existe necessariamente um limite para os diferentes tipos de objetos que podem ser utilizados para fazer o papel de conjunto, desde que se atente-se a analogia de envoltório que delimita uma região interna e outra externa. Exemplos alternativos: sacolas, potes, garrafas, bolsas, malas, cestas, ‘looks’ (figurino, “visual”), roupas, calçados, eletrodomésticos (geladeira por exemplo), livros (cada página ou folha corresponderia a um elemento), textos, maquetes, espaços físicos, espaços abertos (sala de aula e o próprio colégio), etc.

Uma lista de exercícios condizente com a proposta do uso de materiais didáticos à luz da TRRS envolve ampliar a diversidade das conversões para além do sentido do registro algébrico (normalmente adotadas nos livros didáticos). Primeiramente, essa ampliação do uso de registros favorece a proposta da TRRS para aquisição do conhecimento, mas ainda se limita na modalidade escrita e no rol das representações de duas dimensões. O material didático, que é um dos vários tipos possíveis de representações em três dimensões, fornece, dentre outros benefícios pedagógicos, um complemento a TRRS, possibilitando uma conversão das representações de duas dimensões para uma representação de três dimensões.

As conversões e representações propostas na lista de exercícios são as seguintes. Do registro linguístico para os registros linguístico, figural, algébrico e para o material didático. Do registro figural para os registros linguístico, figural, algébrico e para o material didático. Do registro algébrico para os registros linguístico, figural, algébrico e para o material didático. E do material didático para os registros linguístico, figural, algébrico e para o material didático.

Sempre que o tipo da representação de partida é diferente do tipo de representação final está sendo proposta uma conversão e quando as representações são do mesmo tipo (de registro) está sendo proposto um tratamento.

Os exercícios de conversão para o registro linguístico estimulam o uso de habilidade de interpretação e compreensão uma vez que força a expressão do que está sendo lido com as próprias palavras.

Espera-se que com esse aumento de possibilidades de representações aumente também as possibilidades de aquisição do conhecimento, já que o estudante volta a atuar com os objetos do mundo ao seu redor com um olhar orientado pelo conteúdo que se propõe a ensinar.

Na sequência didática os conceitos de conjunto, subconjuntos, interseção, união e diferença de conjuntos são representados nos seguintes tipos de registros.

Tabela 11 - Representação dos conceitos na Sequência Ida às compras

Representação	Conj.	Sub. Conj.	Conj. Vazio	Conj. Uni.	Inter.	União	Dif.	Total
Ling.	1	1	1	1	1	1	1	7
Alg.	-	1	1	1	1	1	1	6
Alg. - Ling.	1	-	-	1	-	-	-	2
Fig.	1	1	1	-	1	1	1	6
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	-	0
Outro	1	1	1	-	1	1	1	6
Total	4	4	4	3	4	4	4	27

Fonte: Autoria própria (2024)

Na sequência didática contam-se 19 exercícios, na seção, dispostos da seguinte forma:

Tabela 12 - Representação dos exercícios na Sequência Ida às Compras

Representação	Ling.	Alg.	Alg. - Lig.	Fig.	Fig. - Lig.	Outro	Total
Ling.	4	1	-	1	-	1	7
Alg.	1	1	-	1	-	1	4
Alg. - Ling.	-	-	-	-	-	-	0
Fig.	1	1	-	1	-	1	4
Fig. - Ling.	-	-	-	-	-	-	0
Outro	1	1	-	1	-	1	4
Total	7	4	0	4	0	4	19

Fonte: Autoria própria (2024)

“Outro” se refere às representações usando os materiais didáticos.

3.2 Sequência 2

A seguinte proposta utiliza a situação da análise das posições dos jogadores durante uma partida de futebol como subsídio para contextualizar os Teoremas de Tales e o Teorema Fundamental da Semelhança.

Dividida em 5 momentos a sequência estrutura-se deste modo:

1º Momento: Explicação contextualizada pelo professor, apresentando algumas configurações das posições dos jogadores, explorando o uso do material didático e encaminhando os exemplos para as questões que devem ser investigadas pelos estudantes.

2º Momento: O professor apresenta as questões a serem investigadas e os estudantes, individualmente ou em grupos realizam a atividade utilizando o material didático, registrando suas hipóteses e seus raciocínios.

3º Momento: Os estudantes apresentam seus raciocínios e resultados, bem como dúvidas, dificuldades e outras considerações. Seguido de, para cada situação, uma análise apropriada do professor.

4º Momento: Revisão dos conceitos vistos e apresentação das definições formais comumente utilizadas, apresentando as demonstrações dos Teoremas.

5º Momento: Propõe-se que outras atividades sejam feitas almejando exercitar o uso de diferentes representações e operações. Devem ser feitas de maneira independente sem auxílio do professor.

3.2.1 Conceitos utilizados

De modo semelhante a Sequência 1, a fim de esclarecer como a presente sequência didática pode contribuir para a aquisição de conhecimento, conforme a proposta da TRRS, é compilado a seguir como os conceitos matemáticos, utilizados nesta sequência, são abordados em diferentes livros didáticos. Analisa-se os tipos de registros utilizados fazendo um destaque para os conceitos do Teorema de Tales e o Teorema Fundamental da Semelhança.

Os 4 livros didáticos analisados (ver referências) são:

1. “Matemática Interligada: trigonometria, fenômenos periódicos e programação” (páginas 15 a 17 e 19) de Thais Marcelle de Andrade, publicado após a BNCC.

2. “Multiversos Matemática: sequências e trigonometria: ensino médio” (páginas 58 a 62 e 65) de Joamir Roberto de Souza, publicado após a BNCC.

3. “Prisma matemática: geometria e trigonometria: Ensino Médio” (páginas 13 a 17, 39 a 41) de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa, publicado após a BNCC.

4. “Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 1” (páginas 199 a 201, 204 a 206) de Gelson Iezzi *et al.*, publicado antes da BNCC.

Nos 4 livros listados a apresentação dos conteúdos constrói-se de maneira semelhante, orientando os usos dos registros num mesmo sentido: o registro algébrico. Entretanto, neste caso do Teorema de Tales, a representação figural dos feixes de retas se torna tão imprescindível para a exemplificação e entendimento que acompanha toda a introdução até o último momento, onde são apresentadas as relações algébricas.

A ordem de apresentação dos registros escolhidos é semelhante nos 4 livros, geralmente iniciando-se com o linguístico (enunciação do teorema). Em seguida, as representações algébricas e figurais aparecem juntas, uma ao lado da outra, às vezes com representações que misturam os dois tipos.

Na apresentação da demonstração do teorema, quando construída, as representações figurais e algébricas caminham juntas, ocorrendo tratamentos e conversões que se entrelaçam conforme o avanço da demonstração. Nos exercícios propostos ocorrem o mesmo, sendo mais difícil encontrar um enunciado que não apresenta ao menos uma representação figural. Entretanto, as últimas etapas da resolução e respostas esperadas caminham sempre para o registro algébrico. Também é inexistente a sugestão ao uso de materiais didáticos, além daquilo que é representado no texto dos livros.

Nas tabelas a seguir tem-se, para cada livro, a sumarização dos dados coletados sobre os tipos de representações.

A primeira tabela contabiliza os tipos de representações utilizadas durante a introdução dos conteúdos (Linguístico, Algébrico, Figural, outros tipos de representações).

A segunda tabela contabiliza os exercícios (presentes na seção em que os conceitos são apresentados), as representações em que são apresentados (enunciados) e as representações que são esperadas nas respostas. Algumas delas são representações intermediárias entre dois registros como, por exemplo, aquelas classificadas como figural-linguístico, figural-algébrico. As tabelas devem ser lidas da linha para a coluna: o exercício contabilizado exige a conversão (ou tratamento) da representação indicada na linha para a representação indicado pela coluna.

No livro 1 os conceitos do Teorema de Tales, Teorema Fundamental da Semelhança são apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 13 - Representação dos conceitos no Livro 1 (Sequência 2)

Representação	Teorema de Tales	Teorema Fundamental da Semelhança	Total
Ling.	1	1	2
Alg.	1	-	1
Fig.	1	1	2
Outro	-	-	0
Total	3	2	5

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 1 contam-se 8 exercícios, na seção, dispostos da seguinte forma:

Tabela 14 - Representação dos exercícios no Livro 1 (Sequência 2)

Representação	Ling.	Alg.	Fig. - Ling.	Fig.	Fig. - Alg.	Outro	Total
Ling.	-	-	-	-	-	-	0
Alg.	-	-	-	-	-	-	0
Fig. - Ling.	-	2	-	-	-	-	2
Fig.	-	4	-	-	-	-	4
Fig. - Alg.	-	2	-	-	-	-	2
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	0	8	0	0	0	0	8

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 2 os conceitos são apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 15 - Representação dos conceitos no Livro 2 (Sequência 2)

Representação	Teorema de Tales	Teorema Fundamental da Semelhança	Total
Ling.	1	1	2
Alg.	1	1	2
Fig.	1	1	2
Outro	-	-	0
Total	3	3	6

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 2 contam-se 8 exercícios, na seção, dispostos da seguinte forma:

Tabela 16 - Representação dos exercícios no Livro 2 (Sequência 2)

Representação	Ling.	Alg.	Fig. - Ling.	Fig.	Fig. - Alg.	Outro	Total
Ling.	-	-	-	-	-	-	0
Alg.	-	-	-	-	-	-	0
Fig. - Ling.	-	1	-	-	-	1	2
Fig.	-	6	-	-	-	-	6
Fig. - Alg.	-	-	-	-	-	-	0
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	0	7	0	0	0	1	8

Fonte: Autoria própria (2024)

“Outro” se refere a 1 exercício em que se propõe que os estudantes criem problemas, troquem entre si e resolvam.

No livro 3 os conceitos apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 17 - Representação dos conceitos no Livro 3 (Sequência 2)

Representação	Teorema de Tales	Teorema Fundamental da Semelhança	Total
Ling.	1	1	2
Alg.	1	1	2
Fig.	1	1	2
Outro	-	-	0
Total	3	3	6

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 3 contam-se 14 exercícios, nas duas seções, dispostos da seguinte forma:

Tabela 18 - Representação dos exercícios no Livro 3 (Sequência 2)

Representação	Ling.	Alg.	Fig. - Ling.	Fig.	Fig. - Alg.	Outro	Total
Ling.	-	5	-	-	1	-	6
Alg.	-	1	-	-	-	-	1
Fig. - Ling.	-	4	1	-	-	-	5
Fig.	-	1	-	-	-	-	1
Fig. - Alg.	-	1	-	-	-	-	1
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	0	12	1	0	1	0	14

Fonte: Autoria própria (2024)

Exercícios contabilizados para o Teorema Fundamental da Semelhança: 9, 29, 30, 31, 32.

No livro 4 os conceitos são apresentados nos seguintes tipos de registros ou representações.

Tabela 19 - Representação dos conceitos no Livro 4 (Sequência 2)

Representação	Teorema de Tales	Teorema Fundamental da Semelhança	Total
Ling.	1	1	2
Alg.	1	1	2
Fig.	1	1	2
Outro	-	-	0
Total	3	3	6

Fonte: Autoria própria (2024)

No livro 4 contam-se 7 exercícios (exercícios 9, 10, 14, 15, 16, 18, 20), dispostos da seguinte forma:

Tabela 20 - Representação dos exercícios no Livro 4 (Sequência 2)

Representação	Ling.	Alg.	Fig. - Ling.	Fig.	Fig. - Alg.	Outro	Total
Ling.	-	1	-	-	-	-	1
Alg.	-	-	-	-	-	-	0
Fig. - Ling.	-	1	-	-	-	-	1
Fig.	-	5	-	-	-	-	5
Fig. - Alg.	-	-	-	-	-	-	0
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	0	7	0	0	0	0	7

Fonte: Autoria própria (2024)

Agrupando as informações dos 4 livros, tem-se:

Tabela 21 - Síntese dos dados das representações dos conceitos (Sequência 2)

Representação	Teorema de Tales	Teorema Fundamental da Semelhança	Total
Ling.	4	4	8
Alg.	4	3	7
Fig.	4	4	8
Outro	-	-	0
Total	12	11	23

Fonte: Autoria própria (2024)

Nos 4 livros contam-se 37 exercícios dispostos da seguinte forma:

Tabela 22 - Síntese dos dados das representações dos exercícios (Sequência 2)

Representação	Ling.	Alg.	Fig. - Ling.	Fig.	Fig. - Alg.	Outro	Total
Ling.	-	6	-	-	1	-	7
Alg.	-	1	-	-	-	-	1
Fig. - Ling.	-	8	1	-	-	1	10
Fig.	-	16	-	-	-	-	16
Fig. - Alg.	-	3	-	-	-	-	3
Outro	-	-	-	-	-	-	0
Total	0	34	1	0	1	1	37

Fonte: Autoria própria (2024)

Pelas tabelas anteriores pode-se perceber que para a apresentação dos conceitos as três formas de representação (Linguístico, Algébrica e Figural) estão presentes. Não são apresentados outros tipos de representações em nenhum dos livros.

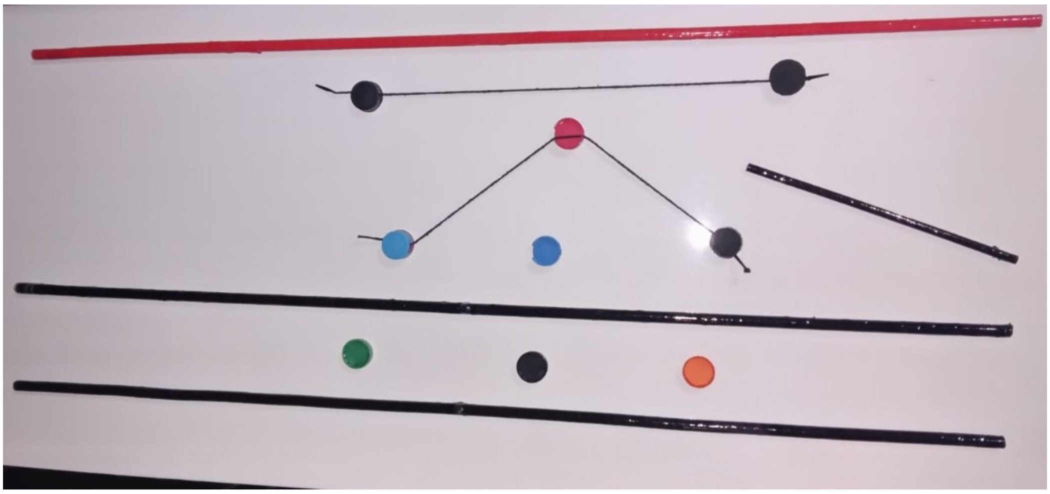
Na seção de exercícios o registro figural tem maior preponderância, seguido de uma representação figural-linguística e do uso do registro linguístico, mas elas ainda são encaminhadas no sentido do uso do registro algébrico, em etapas intermediárias ou no resultado.

Também neste caso, poderia se argumentar sobre a ausência de exercícios que promovam o uso de outros tipos de registros em outros tipos de tratamentos e de conversões.

3.2.2 Materiais didáticos utilizados

Durante toda a sequência será utilizado um material didático de fabricação própria. São tampinhas de garrafa, barbantes e hastes de madeira agregados a imãs, fazendo que com eles possam ser grudados a um quadro/lousa de metal e manipulados conforme a necessidade. Como as peças que constituem o material didático são representações diretas das representações figurais dos objetos matemáticos, ou seja, o ponto e a reta (ou segmento de reta), o material didático se estabelece como uma representação semiótica deles. As peças assumem o papel dos elementos figurais correspondentes e, consequentemente, o papel dos objetos matemáticos correspondentes, estando o material didático sujeito também às regras de operação aplicadas às representações figurais e aos objetos matemáticos. Podendo-se, portanto, utilizar o material didático como alternativa para demonstrações e resolução de problemas sem recorrer necessariamente às representações figurais. Manipulando o material constrói-se as situações, se estabelece as relações e quando necessário com o auxílio do registro linguístico, figural e algébrico se calcula o que é requisitado das questões e problemas.

Figura 57 - Material didático



Fonte: Autoria própria (2024)

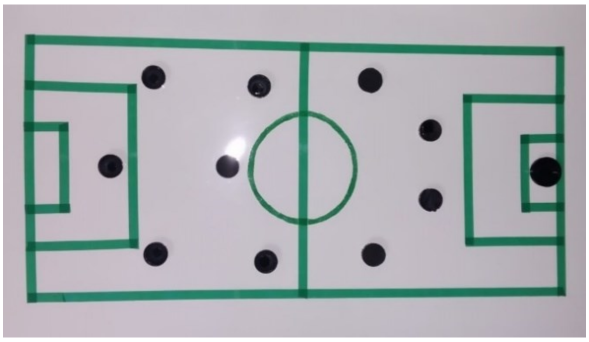
3.2.3 Formação de Ataque (Tópicos da Geometria Plana)

Uma exposição inicial sobre as etapas da atividade seria adequada para orientar os estudantes sobre quais serão os procedimentos necessários para a atividade. A atividade consiste em apresentar para os estudantes algumas configurações das posições dos jogadores de um time de futebol durante uma partida e, a partir dessas configurações, explorar os conceitos matemáticos do Teorema de Tales e do Teorema Fundamental da Semelhança.

1º Momento: "Apresentação guiada pelo professor".

Iniciando a explicação de como os estudantes deverão realizar as atividades o professor deve primeiramente expor aos estudantes a configuração de um esquema tático de um time de futebol. Explicando e contextualizando alguns elementos básicos que envolvem uma partida de futebol. Como por exemplo, a quantidade de jogadores, as linhas e áreas demarcadas no campo, a duração da partida, algumas regras gerais do que não é permitido.

Figura 58 - Formação dos jogadores no campo de futebol representada no Material Didático



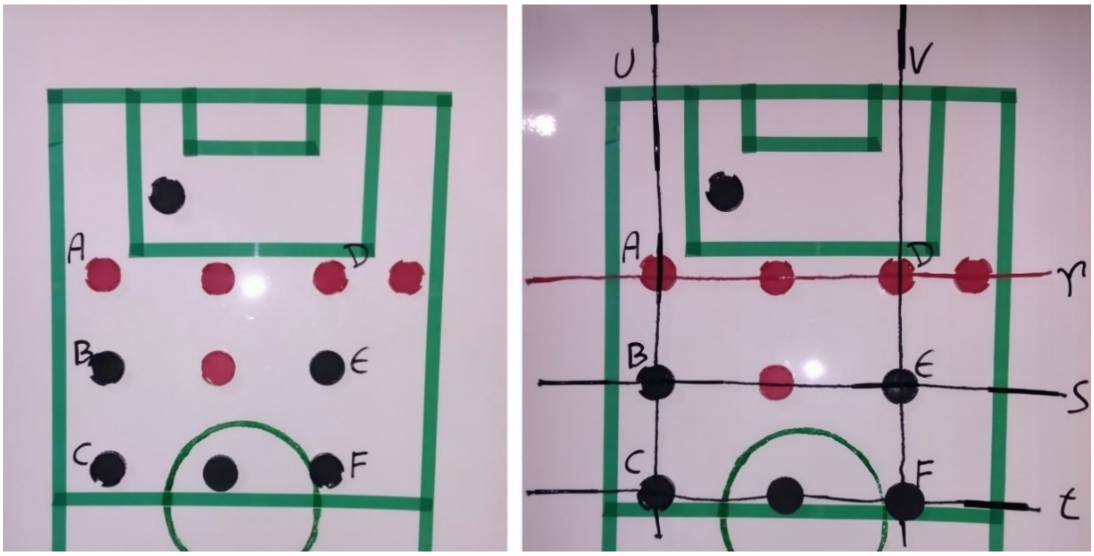
Fonte: Autoria própria (2024)

Figura 59 - Formação de ataque representada no Material Didático

Fonte: Autoria própria (2024)

Ao apresentar a situação é conveniente que o professor manipule o material simulando uma possível movimentação dos diversos jogadores[1]. Em seguida é mostrada a configuração específica do feixe de retas perpendiculares (o caso trivial para o Teorema de Tales).

Figura 60 - Configuração trivial para o Teorema de Tales no Material Didático



Fonte: Autoria própria (2024)

Aqui se prossegue com o contexto de um técnico de um time de futebol tentando descobrir relações e padrões entre as posições dos jogadores, buscando alternativas para as posições em campo deles para assim criar estratégias de ataque.

Observando a posição dos jogadores (pontos, tampinhas) e comparando os lados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, pode-se estabelecer em que casos eles são congruentes e quando suas medidas são iguais. Para que as medidas dos quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ sejam a mesma é necessário que a reta s (do meio) esteja equidistante às outras retas.

Assim, tem-se AB = BC = DE = EF e AC = DF. Consequentemente, também são verdadeiras as relações:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

Aqui deve-se fazer um exemplo com valores associados aos segmentos, mostrando que as relações são válidas. Usa-se uma régua ou trena para medir as

[1] Outras possibilidades muito ilustrativas para apresentar as posições dos jogadores e explorar as configurações das retas são imagens de uma partida de futebol de mesa (“totó”, “pebolim”) e de uma partida real de futebol.

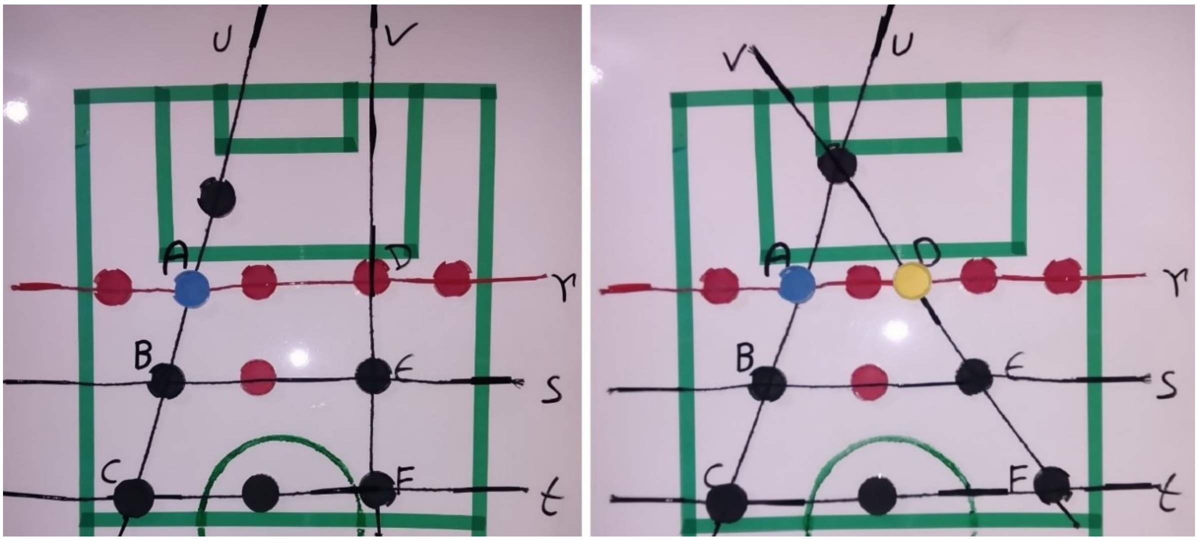
distâncias das tampinhas (pontos) no material didático e escreve-se as medidas no quadro, para em seguida montar as relações e efetuar os cálculos.

2º Momento: “Investigação dos estudantes guiada pelo professor”.

Neste momento, apresenta-se a configuração dos feixes de retas na forma clássica (mais genérica), fazendo-se o questionamento. Caso a posição dos jogadores mude, as distâncias entre eles mudam? As relações entre as distâncias deles também mudam? Essas relações continuam iguais ou viram desigualdades, havendo uma relação menor do que a outra?

Apresenta-se as duas configurações, a primeira configuração com uma reta transversal oblíqua e a outra reta perpendicular aos feixes de retas e a segunda configuração com ambas as retas transversais oblíquas ao feixe de retas.

Figura 61 – Configurações genéricas para o Teorema de Tales no Material Didático



Fonte: Autoria própria (2024)

A partir dos questionamentos os estudantes devem individualmente ou em grupo, através da utilização do material didático e de outros materiais escolares (régua, trena, compasso, giz, pincel marcador, lápis etc.), tentar descobrir qual é a relação entre segmentos (ou as distâncias) dos jogadores nas duas configurações apresentadas.

Os estudantes devem primeiro listar suas hipóteses e tentar mostrar ou demonstrar se são verdadeiras, podendo abandonar as hipóteses e tentar outras possibilidades. Aqui pede-se que os estudantes anotem suas hipóteses e registrem seus raciocínios para chegar na resposta por escrito (no registro ou representação que acharem conveniente).

Como o foco muda para acompanhar a execução da atividade pelos estudantes, esse acompanhamento deve-se basear em verificar os detalhes de como os estudantes estão efetuando e representando os seus raciocínios, quais tipos de registros ou representações estão usando, se existe constância ou variação.

3º Momento: "Apresentação dos resultados".

Os estudantes apresentam suas produções. Listando suas hipóteses, raciocínios, procedimentos, dificuldades, se abandonaram as hipóteses iniciais e começaram a trabalhar com outras, se conseguiram chegar a algum resultado e qual foi ele.

Após as apresentações e uma análise do professor pede-se que os estudantes tentem representar a resolução usando algum outro tipo de registro, ou que produzam uma reescrita do que fizeram substituindo algumas partes de suas resoluções por outros tipos de representações ou registros, como por exemplo, substituir uma sentença linguística por uma figura ou por uma relação algébrica, ou o contrário a fim de deixar o texto mais enxuto e claro.

Novamente, como é impossível prever todas os tipos de representações que os estudantes podem produzir, essa etapa requer uma postura mais maleável do professor para analisar o realmente tem valor de ser adequado e o que é apenas uma manifestação individual do processo de aprendizagem do estudante.

Em sua análise o professor deve buscar responder de que maneira as soluções dos estudantes estão corretas ou incorretas. Dando ênfase na separação entre os raciocínios utilizados e resposta final, esclarecendo se apresentam: raciocínio adequado e resposta adequada, raciocínio adequado, mas resposta inadequada, raciocínio inadequado, mas resposta adequada, raciocínio inadequado e resposta inadequada.

4º Momento: "Revisão: alinhamento com os saberes dos estudantes".

Neste momento deve ser revisado o que foi feito nos momentos anteriores priorizando os esclarecimentos de dúvidas. Deve-se complementar as representações que já foram apresentadas com suas versões mais abstratas, gerais e formais. Deve-se apresentar a demonstração do Teorema de Tales e construir a demonstração do Teorema Fundamental da Semelhança ressaltando o uso do teorema anterior. Como alguns dos livros didáticos apenas mostram, mas não demonstram os teoremas, sugere-se como referência as demonstrações apresentadas nos livros: "Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana" de Osvaldo Dolce e José Nicolau

Pompeo e “Tópicos de Matemática Elementar 2: geometria euclidiana plana” de Antonio Caminha Muniz Neto.

5º Momento: “Construção dos estudantes”.

De modo semelhante à primeira sequência, o último momento deve ser reservado para que os estudantes reproduzam as representações e realizem as operações da maneira mais independente, funcionando como um trabalho ou tarefa de casa.

3.2.4 Comentários

Ao invés de elaborar situações e problemas já com valores hipotéticos associados aos segmentos, se propõem elaborar situações nas quais os valores podem e precisam ser descobertos. Nos livros didáticos o valor da medida dos segmentos, que é fornecida, deve agora ser coletada, deixando mais claro a origem de tal valor. Se aproximando de uma prática mais realista, onde os dados dos fenômenos e situações do mundo devem ser coletados, analisados e somente depois trabalhados com a construção de hipóteses e resultados.

Outra etapa totalmente excluída nos livros didáticos é a configuração “trivial” das retas e do feixe de retas. Na sequência, ela volta a ser incluída no processo de aprendizagem, servindo de base para questões, formulação de hipóteses e o início do processo de investigação. A coleta de dados através da interação com os objetos e da medida das distâncias e dos comprimentos dos segmentos é uma etapa inicial que possibilita suposições e investigações para o avanço de etapas mais complexas.

Um aspecto pouco explorado nos livros didáticos e que poderia ser agregado é o estudo e a prática de construções geométricas. Estimular a prática de construções geométricas para resolver problemas, utilizando o material didático ou não, aumentaria as possibilidades da apresentação de soluções e respostas finais nas representações figurais. Ou ainda, explorar se a construtibilidade das figuras é possível ou não. Isso ajudaria a mudar um pouco o direcionamento dos problemas que são orientados no sentido de uso do registro algébrico.

Ou, de modo totalmente oposto, mas também servindo a ideia da proposta, explorar e construir alguns problemas e desafios que visem somente a utilização do registro algébrico (ou do linguístico, ou do material didático) em todas as etapas de resolução dos problemas, do enunciado até a resposta final.

Aponta-se novamente, que ao explorar novas possibilidades de conversões nas etapas de construção do conhecimento, caminha-se no sentido do proposto pela TRRS, lançando, deste modo, novos olhares sobre os objetos matemáticos e as situações nas quais eles estão inseridos.

3.3 Outras propostas

Devido a algumas limitações, principalmente o escopo deste trabalho, não foram desenvolvidas outras abordagens e o uso de outros materiais didáticos. Pensando em atenuar essa lacuna e instigar a produção de novos trabalhos, apresenta-se a seguir duas dessas abordagens alternativas.

3.3.1 Números Complexos

No contexto da Educação Financeira se estuda diferentes aspectos daquilo que comumente é chamado de “dinheiro”. Moeda, papel moeda, cédulas, commodities, títulos públicos, ações, debêntures, promissórias, capital, receitas, ativos, recursos, aporte financeiro, entre outros, são algumas maneiras de se referir ao “dinheiro”. Embora possa existir essa relação entre todos os termos, no sentido que todos se referem a um recurso financeiro, cada termo é empregado num contexto específico com acepção própria, não podendo ser substituído a esmo. A utilização de uma expressão no lugar da outra pode causar estranheza ou confusão.

Entretanto, a possibilidade de conversão entre os diferentes tipos de “dinheiro” é possível. Um exemplo é a cotação do dólar que é apresentado diariamente nos jornais. Estabelecendo uma relação de conversão, por exemplo, U$1,00 = R$5,00, consegue-se converter os valores de um em outro. Poder-se-ia, assim, utilizar esse contexto de conversão entre diferentes moedas para introdução dos números complexos, vez que existe uma relação entre Números Reais e Números Imaginários ($1 = -i^2$).

O material didático utilizado neste contexto seria uma história ficcional, um conto, com possibilidades de inspirações nos estilos literários de Malba Tahan, Jorge Luis Borges e Maurício de Souza.

Um esqueleto da história seria o seguinte: nomeada “Valor Turismo” a história acompanharia as viagens de um turista brasileiro a diferentes países do mundo, se envolvendo em situações inusitadas ao precisar converter seu dinheiro nas casas de câmbio, com cambistas locais ou com a população local. A história começa com a chegada da personagem a Nova York, que tendo sua bagagem extraviada precisaria de mais dinheiro do que tinha planejado para sua viagem. Ao procurar comprar dólares em uma das diversas casas de câmbio, precisaria lidar com os valores de conversão. Após voar por países diferentes lidando com diferentes moedas nas mais variadas cotações, em seu último voo de volta para o Brasil, o avião apresenta uma pane e faz um pouso forçado em uma região desconhecida, na praia de um país costeiro cercado de ilhas em volta. Em meio ao susto do quase desastre, ela agora precisa arrumar um jeito de voltar para casa. Sem muitas opções, ela terá que aprender a lidar com a cultura deste novo país hospitaleiro, o País do Contra, onde a taxa de conversão é negativa, e cada 1 Real vale -1 Contra.

As etapas seguintes da história poderiam explorar outros tipos de conversões usando as operações fundamentais ou alguma outra operação conveniente, até que se chegue próximo à relação entre números Reais e Imaginários $(1 = (-1)i^2)$. Podendo sempre continuar para outras relações como a dos quatérnios, dos complexos hiperbólicos ou alguma outra completamente nova inspirada pela imaginação. Colocando-se uma possibilidade final de instigar os leitores a criarem moedas e fórmulas de conversão.

As possibilidades podem se adentrar ainda nas operações com números complexos fazendo um paralelo com as situações cotidianas de compra e venda. Por exemplo, comprar um celular novo dando como pagamento um celular antigo e mais uma quantia de dinheiro, ou comprar algo usando dois tipos de moedas ao mesmo tempo. São dois recursos de naturezas diferentes, mas que mesmo assim podem operar em conjunto dentro das relações comerciais, de modo semelhante ao número complexo: um par ordenado com uma unidade real e outra unidade imaginária.

Além da já mencionada fundamentação teórica sobre materiais didáticos, que inclui o uso de histórias, e a TRRS é oportuno mencionar que:

> Há uma outra dimensão do concreto igualmente importante, apesar de bem menos ressaltada: trata-se de seu conteúdo de significações. Uma história bem articulada, referente a um tema em estudo, a despeito de sua natureza verbal, não se tratando de um material concreto em sua dimensão palpável, pode-se revestir-se de um conteúdo de significações, que revele de maneira decisiva a concretude do assunto tratado. Também é possível que um material manipulável tenha natureza arbitrária, sendo desprovido de significações para os que o manipulam, o que pode comprometer a concretude que se pretendia enfocar. (MACHADO, 2011, p. 49).

3.3.2 Geometria Esférica

Dado o contexto atual envolvendo assuntos como explorações espaciais, viagens para outros planetas e terraformar Marte. Se poderia usar desses elementos para elaborar uma sequência cuja proposta pediria aos estudantes que planejem a organização das primeiras bases ou instalações dos seres humanos em Marte.

Ao estabelecer alguns parâmetros para as instalações (tipos, quantidades, distâncias, conexões etc.) poderia se usar algumas dessas configurações para se ensinar conceitos relativos à Geometria Esférica.

De modo semelhante ao quadro/lousa de metal da sequência 2, poderia se construir uma esfera de metal com 1 metro de diâmetro para ser utilizada como superfície. A esfera e as peças com imãs e barbantes poderiam ser usadas para auxiliar as representações e nos cálculos juntamente com o pincel marcador. Os conceitos e cálculos tornam-se muito mais evidentes operando-se sobre um modelo manipulável do que recorrendo às representações em duas dimensões dos livros ou a lousa.

Ações como calcular a medida de arcos, realizar a projeção de pontos da esfera em um plano, a transferência de um arco de circunferência para o plano entre outras, tornam-se tão mais fáceis quanto ilustrativas com as peças de ímãs e os barbantes. Talvez num nível semelhante à atividade de se calcular o número π usando-se o desenho de um círculo e um barbante do tamanho do raio (ou diâmetro) sobreposto a sua circunferência.

Embora a confecção da esfera seja relativamente simples, já que é similar a produção de uma panela ou uma tigela de metal (“bowl”), infelizmente não foi possível realizar sua confecção, por falta de recursos e contatos. Na verdade, existem várias superfícies de metal que poderiam ser confeccionadas para imitar as superfícies presentes em diferentes geometrias, mas que por diversas razões acabam também não se concretizando como materiais didáticos. Mesmo assim, espera-se que futuramente elas possam ser construídas por alguém com acesso a mais meios ou recursos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelo fato de o assunto tratado ser bastante abrangente e com muitas ramificações espera-se que os capítulos anteriores tenham, se não cumprido o objetivo, ao menos proporcionado um vislumbre das potencialidades existentes ao se utilizar materiais didáticos manipuláveis à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Além dos desafios existem para qualquer tipo de ensino e aprendizado, e a existência da área de Pedagogia deixa isso muito claro, a Matemática oferece mais alguns desafios com o seus métodos hipotético-dedutivos e sua linguagem própria, que por ser diversa na representação dos objetos matemáticos atraiu a atenção de outras áreas, como a Semiótica, para tentar socorrer às dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem.

Os estudos sobre os signos, além de avançarem de maneira geral no entendimento do processo de aquisição do conhecimento, possibilitaram uma aproximação crítica e produtiva para o processo de representação dos conceitos matemáticos. Desde a importante distinção, nem sempre tão evidente, entre um objeto e uma ideia a ele associada, que resultou, didaticamente, na preocupação de que estudantes não confundam os materiais didáticos pelos conceitos que eles buscam exemplificar. Até, a igualmente importante, distinção entre as diversas representações de um mesmo objeto do pensamento e como elas exigem também uma diversidade de abordagens educacionais, a fim de se correlacionarem apropriadamente com os estágios cognitivos do indivíduo. Os estudos semióticos e suas influências nas áreas da matemática e da educação continuam a ser frutíferos para a abertura de novas frentes de pesquisas científicas, práticas escolares e olhares sobre a vida cotidiana.

Ao buscar estabelecer um ponto de apoio didático, a Teoria de Registros de Representações Semióticas lança um olhar sobre as diferentes representações dos objetos matemáticos, por conseguinte estabelecendo estruturas que relacionam, em termos semióticos, os entes de diferentes sistemas de representação e as possibilidades de conversão entre eles e destacando as possibilidades de tratamentos dentro de um tipo específico de representação (registro). Defendendo, finalmente, que como essas diferentes representações já são dadas (construídas pela atividade humana previamente) a possibilidade de entendimento do conceito/objeto matemático ao qual se referem será mais facilmente alcançado, e possível de se constatar, caso indivíduo consiga transitar entre os diferentes tipos de representações numa ação coordenada.

Por conta dessa abrangência, a TRRS acaba favorecendo a manifestação individual do estudante, que não conseguindo se expressar em um tipo de registro, pode fazê-lo em outro. E a partir de seus conhecimentos prévios aliados a um processo de alfabetização matemática das novas representações, poderia daí em diante realizar conversões entre os dois sistemas de representação.

Não obstante, a TRRS não se aprofunda, talvez por enquanto, no uso da modalidade oral da língua natural, nem em como esse tipo de manifestação poderia interferir ou colaborar para o processo de coordenação e a aquisição do conhecimento. No livro “Na vida dez, na escola zero” de Terezinha Nunes Carraher, Analúcia Dias Schliemann e David William Carraher são relatadas algumas situações envolvendo o uso de matemática por pessoas que tinham vivências com a matemática fora da sala de aula. Esses relatos apresentam alguns indícios de que o desenvolvimento do conhecimento matemático continua ocorrendo naqueles que não completaram a passagem pelo ensino formal. Os indivíduos pesquisados conseguiram se sair melhor nas atividades em que podiam representar e expressar as soluções nos modos que faziam habitualmente em seus trabalhos, do que quando as mesmas atividades eram cobradas na modalidade escrita formal ensinada na escola (registro em língua natural e registro algébrico).

Dado o potencial da TRRS, as pesquisas que vierem a analisar tratamentos e conversões sobre sistemas semióticos compostos por objetos tridimensionais podem gerar muitos frutos. Isso também parece valer para as pesquisas sobre o uso de materiais didáticos manipuláveis que, por adentrarem nas três dimensões, ajudam a desbravar os limites das fronteiras das duas dimensões das modalidades escritas.

Se o uso de um material didático manipulável pode, por vezes, ocasionar confusão, como muitas vezes é argumentado, talvez a alternativa mais adequada não seja abandonar o uso completo de materiais didáticos, mas sim caminhar no sentido oposto, utilizando mais e (mais elaborados) materiais didáticos. Tendo em mente que o objetivo guia sempre é tornar mais claros os conceitos, a maior quantidade e complexidade pode ajudar na justa percepção de que os conceitos e atributos matemáticos não são os materiais didáticos, mas são características compartilhadas por todos os diferentes materiais didáticos.

É no mínimo contraditório aceitar a necessidade de se utilizar diferentes representações em duas dimensões para que haja um melhor entendimento de um dado conceito de matemática, mas, ao mesmo tempo, apenas uma ou nenhuma representação em três dimensões. Uma vez que para fins educativos, na TRRS, o importante não são as representações em si, mas a capacidade do estudante transitar com naturalidade entre elas. Por que seriam necessários muitos exemplos de um tipo, mas não ocorreria o mesmo para outro tipo?

Ademais, mesmo com uma gama de representações, de duas ou três dimensões, não se conversa propriamente com o contexto das vivências das pessoas, sendo razoável investigações teóricas nesse sentido.

Nas construções das Sequências 1 e 2, buscou-se incluir de alguma maneira os aspectos citados anteriormente. Mostrar que situações cotidianas têm relação direta com os conceitos matemáticos que se aprendem na escola e que em certas condições eles são necessários para uma melhor execução de algumas atividades ajuda a expandir a aprendizagem para além do tempo e do ambiente da sala de aula. Com o olhar ampliado, o estudante pode então fazer novas correlações em suas vivências, investigando, experimentando e argumentando como intencionado pela BNCC.

Na mesma medida em que as sequências se aproximavam das referências teóricas, elas se afastaram de alguns aspectos dos livros didáticos analisados, notadamente o encaminhamento direcionado ao uso de representações e registros algébricos. Seria esse encaminhamento intencional? Ou seria apenas uma reprodução cultural, se repetindo historicamente e sendo influenciada inconscientemente pelas produções acadêmicas em matemática? O processo de ensino sem levar em conta todas as repercussões didáticas pode levar ao menosprezo de formas de representação igualmente válidas para a compreensão dos conceitos.

Nesse sentido, também merece atenção que não se pode controlar as representações e registros que serão utilizados pelos estudantes durante as etapas intermediárias da resolução dos exercícios. Do mesmo modo que durante uma aula o professor pode realizar mudanças bruscas nos usos de suas representações, fazendo uso de um rascunho, para elucidar conceitos e resoluções, o estudante pode recorrer a representações inadequadas para a etapa daquele conteúdo.

A liberdade de poder explorar e se manifestar de diferentes formas pode acabar fazendo com que o estudante somente recorra aos seus conhecimentos prévios não explorando novas maneiras de representar e resolver os problemas. Por mais que o exercício seja apresentado num determinado registro e que seja exigido a resposta em outro, nada garante que no caminho entre eles o estudante de fato utilize as representações e os conceitos do modo como foram planejados para aquela etapa. Dois casos clássicos são os estudantes com dificuldade na tabuada/multiplicação recorrem ao uso de adições e com dificuldades em frações recorreram às representações com vírgulas dos números decimais. Podem responder corretamente, realizando toda a construção da resolução corretamente, mas não utilizando as representações e os conceitos que foram propostos a se exercitar.

Fica-se então numa situação de “uma faca de dois gumes”. Gastando-se tempo e energia, demasiadamente, para verificar se os estudantes estão usando os registros, representações e conceitos adequadamente, ao mesmo tempo em que se limita a liberdade de suas manifestações individuais. Ou o inverso. Surgindo o desafio de ponderar qual é o melhor momento para cada atitude.

Retomando as situações relatadas na Justificativa, as dificuldades encontradas durante o processo de ensino e aprendizagem poderiam ser sanadas com a correta adaptação do uso do material didático às propostas curriculares e aos livros didáticos. Ao se direcionar uma atividade para o uso de material didático “relógio de ponteiros”, pode-se contornar a limitação curricular (de que ensinar as horas não é um conteúdo), preencher essa lacuna de conhecimentos gerais e cumprir com os objetivos propostos de ensinar os conteúdos programados. Isso também vale para o caso da balança e das engrenagens.

Alguns conteúdos matemáticos são vistos como inseparáveis de alguns de seus materiais didáticos e por isso são incluídos nos livros didáticos. É o caso dos sólidos geométricos da Geometria Espacial, cujos moldes das dobraduras estão presentes no final de alguns livros. Os sólidos geométricos não são os objetos matemáticos que representam, mas a presença dos sólidos geométricos no ensino de geometria espacial é tão incontestável que eles acabam se confundindo. Levando ao questionamento, se para os outros conteúdos a não utilização de materiais didáticos manipuláveis associados às diferentes representações não é também uma questão de hábito.

Semelhante ao que é feito para os sólidos geométricos e para alguns recursos digitais, se poderia explorar a inclusão de diversos materiais didáticos manipuláveis para outros conteúdos matemáticos vistos como muito abstratos. Além do que se apresentou nas Sequências 1 e 2, os conteúdos envolvendo números complexos, geometrias não-euclidianas, cálculo de probabilidades, trigonometria etc., poderiam se beneficiar do uso dos materiais didáticos manipuláveis e da TRRS.

Em última análise, ao mesmo tempo que se espera que sejam realizadas futuras investigações sobre o que foi exposto neste trabalho, tanto quanto sobre os novos questionamentos que surgiram durante sua elaboração, é preciso também olhar para como o avanço tecnológico está impactando o processo educativo.

Rotineiramente objetos e utensílios, dos mais variados tipos, tornam-se obsoletos, dando lugar a versões atualizadas ou sendo completamente abandonados. Foi o caso dos já mencionados ábacos, relógios de ponteiros e balanças de pratos, que caminham para serem completamente isolados dos círculos sociais, com exceção do ambiente escolar onde são, ou estão se tornando, materiais didáticos manipuláveis ou serão referenciados apenas através de signos. Num futuro próximo talvez seja o caso do dinheiro físico (papel-moeda). No Brasil, por exemplo, já existem alguns projetos de lei (Projeto de Lei 4068/2020, Projeto de Lei Complementar 214/2020) que pretendem acabar com a circulação das cédulas do dinheiro.

Como o avanço tecnológico e a adoção de novos hábitos culturais é inevitável, seria então prudente que as pessoas e os profissionais ligados à área de educação se mobilizassem no sentido de tentar mensurar futuros impactos. Investigando e elaborando alternativas educacionais para o fim do uso de mais um objeto do dia a dia que ainda é utilizado como material didático auxiliar no ensino das quatro operações, dos números racionais, de probabilidades etc. e de suas representações.

Por essas e outras razões, novas investigações sobre a utilização dos materiais didáticos à luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica podem ser essencialmente valiosas em um futuro vindouro.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, T. M. **Matemática interligada:** funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/matematica-interligada-grandezas-sequencias-e-matematica-fina/. Acesso em: 01 jul. 2024.

ANDRADE, T. M. **Matemática interligada:** trigonometria, fenômenos periódicos e programação. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/matematica-interligada-trigonometria-e-programacao/. Acesso em: 01 jul. 2024.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. S. **Prisma matemática:** conjuntos e funções: ensino médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020. Disponível em: https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/. Acesso em: 01 jul. 2024.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. S. **Prisma matemática:** geometria e trigonometria: ensino médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020. Disponível em: https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/. Acesso em: 01 jul. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 01 jul. 2024.

BOTAS, D.; MOREIRA, D. A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática – Um estudo no 1º Ciclo. **Revista Portuguesa de Educação**, [S. l.], v. 26, n. 1, p. 253–286, 2013. DOI: 10.21814/rpe.3259. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/rpe/article/view/3259. Acesso em: 01 jul. 2024.

DAMM, R. F. Registros de representação. *In*: MACHADO, S. D. A. *et al*. **Educação Matemática:** uma introdução. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002, p. 135-153.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica:** sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tradução de Maria Cristina Bonomi. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

DUARTE, I. N.; FILHO, F. A. F.; ARAUJO, M. G.; OLINEK, V. M.; OLIVEIRA, L. S. **Uma abordagem lúdica no ensino básico:** a utilização da balança para ensinar equações. *In*: ENCONTRO DAS LICENCIATURAS REGIÃO SUL. 3., 2019, Curitiba. **Anais [...]** Curitiba: UFPR-PR, 2019. nº 255. Disponível em: http://www.enlicsul2019.ufpr.br/portal/programacao/. Acesso em: 01 jul. 2024.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FERREIRA, V. **Materiais didáticos manipuláveis e registros de representações:** a compreensão matemática de estudantes. Orientadora: Dra. Leônia Gabardo

Negrelli. 2015. 101 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Curitiba, 2015. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/40498. Acesso em: 01 jul. 2024.

GOOGLE LLC. Google Maps. **Trajetos de ônibus:** UTFPR (Campus Curitiba - Sede Centro - Bloco E), Mercado Municipal de Curitiba, Linha C01 (Rui Barbosa - Terminal Pinhais), Passeio Público, Jardim Botânico e TRE-PR. Curitiba: Google Maps, 2024. Disponível em: https://www.google.com/maps. Acesso em: 01 jul. 2024.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 1:** conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática:** ciência e aplicações: ensino médio, volume 1. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: **______** (Org). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores). p. 3-37.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

NOVAES, G. P. **Introdução à teoria dos conjuntos.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

PAIS, L. C. Transposição didática. *In*: MACHADO, S. D. A. *et al*. **Educação matemática**: uma introdução. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002, p.13-42.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. *In*: **______** (Org). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores). p. 77-92.

SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática:** conjuntos e função afim: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.Disponível em: https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/multiversos-matematica/ Acesso em: 01 jul. 2024.

SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática:** sequências e trigonometria: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.Disponível em: https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/multiversos-matematica/ Acesso em: 01 jul. 2024.

SOUZA, W. **"Sinônimos e antônimos":** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/gramatica/sinonimos-e-antonimos.htm. Acesso em: 01 jul. 2024.

VIANA, G. **"Numerais coletivos":** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/gramatica/numerais-coletivos.htm. Acesso em: 01 jul. 2024.

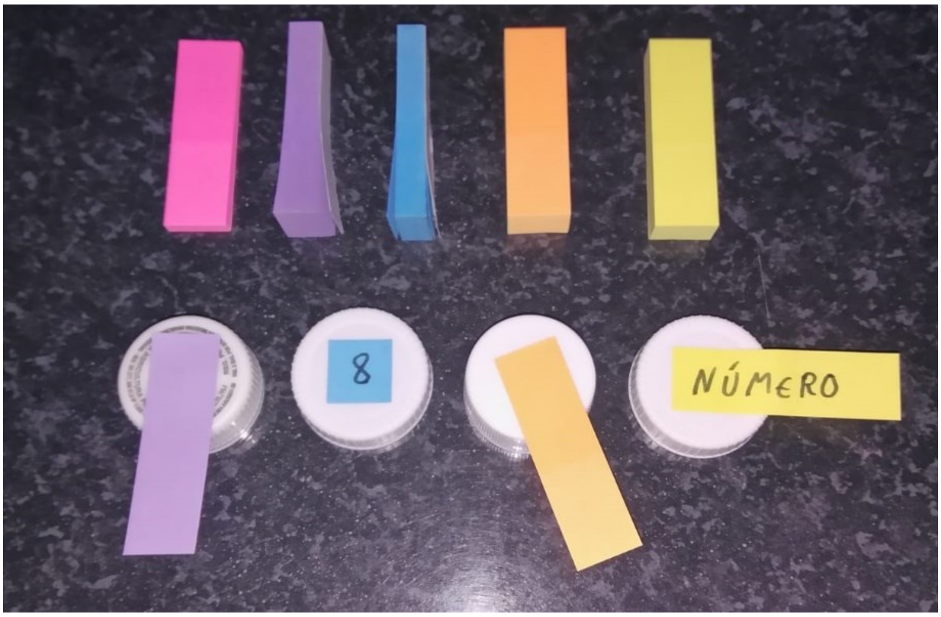
VIANA, G. **"Substantivos coletivos":** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/gramatica/substantivos-coletivos.htm. Acesso em: 01 jul. 2024.

APÊNDICE A - Sequência 1

Os materiais e processos utilizados para composição dos materiais didáticos da Sequência 1 são descritos a seguir.

1. Tampinhas de garrafa e papeis adesivos ("Post-it", Bloco de notas adesivas, Marcadores de páginas adesivos).

Figura 62 - Tampinhas e "Post-it"



Fonte: Autoria própria (2024)

2. Balões de cores diversas e balões "transparentes" de diferentes tamanhos.

Figura 63 - Balões

Fonte: Autoria própria (2024)

3. Caixas de tamanhos diversos.

Foram utilizados três tipos diferentes de dobraduras para as construções das caixas.

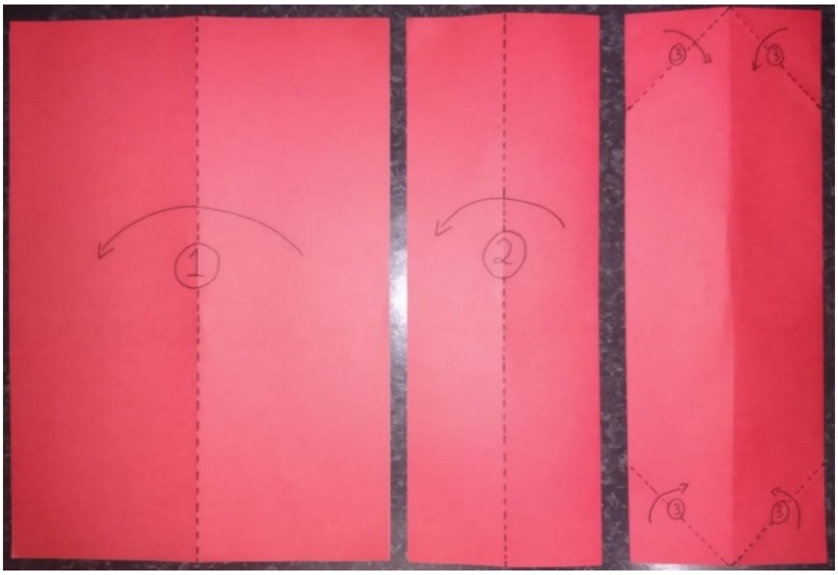
Figura 64 - Caixas feitas por dobraduras

Fonte: Autoria própria (2024)

1º Tipo: “Uma borda dupla”.

Na 1ª e 2ª etapa dobra-se o papel na metade. Na 3ª etapa dobram-se as “orelhas” diagonalmente. Para as “orelhas” do lado esquerdo (da abertura) deve-se dobrar apenas as partes da camada (“folha”) superior.

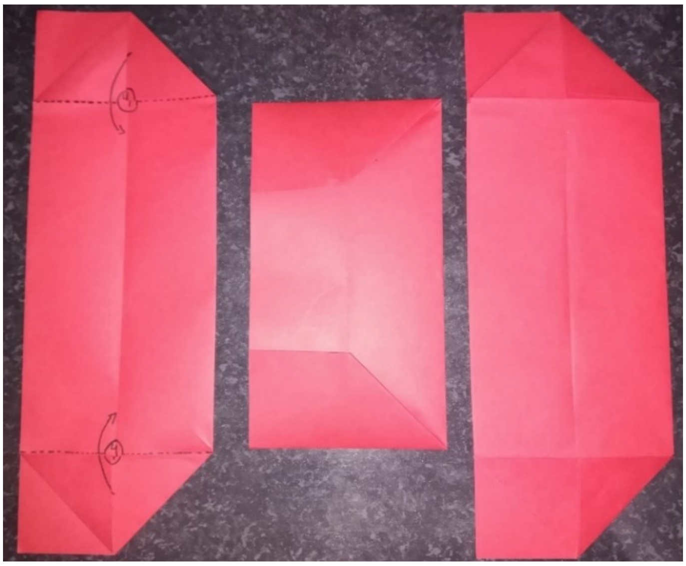
Figura 65 - Etapas 1 a 3



Fonte: Autoria própria (2024)

Na 4ª etapa dobram-se as extremidades em direção ao centro, formando um retângulo. Essa dobra serve apenas para ajudar a marcar o que serão as arestas da caixa. Em seguida deve-se voltar a etapa anterior, com as extremidades abertas.

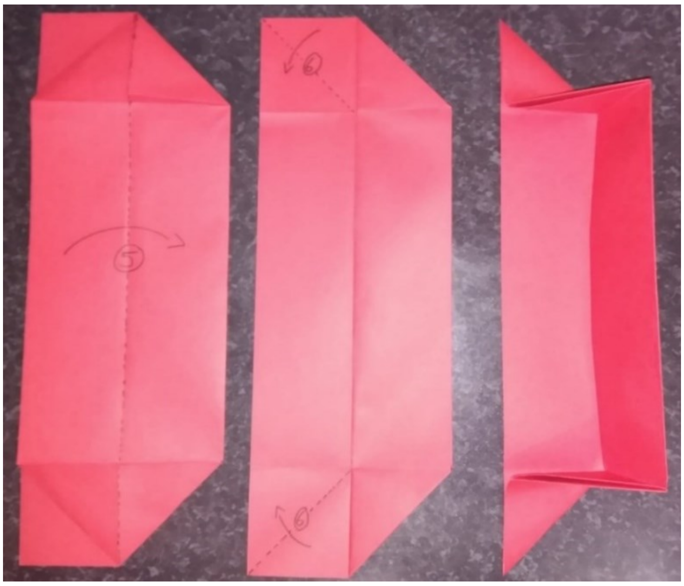
Figura 66 - Etapas 4 a 6



Fonte: Autoria própria (2024)

Na 5ª etapa dobra-se a parte (folha) superior ao meio no sentido horizontal, para a direita. Na 6ª etapa dobram-se as "orelhas" da esquerda que sobraram na parte (folha) inferior. Elas devem ser dobradas na diagonal. Essas apenas servirão para ajudar a fechar as abas externas da caixa. Deve-se voltar a etapa anterior.

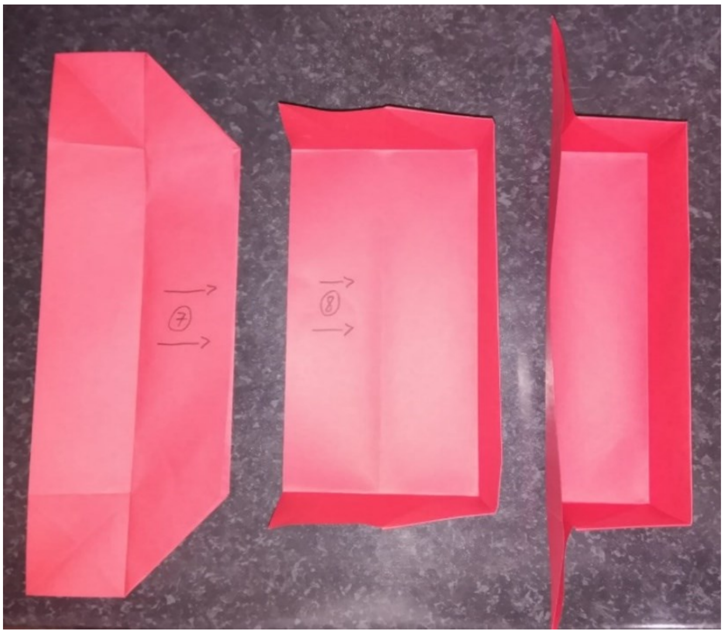
Figura 67 - Etapas 7 a 9



Fonte: Autoria própria (2024)

Na 7ª etapa abre-se a fenda interior do lado direto e ergue-se o que é agora uma das laterais da caixa (uma lateral de borda dupla, pois é feita de duas camadas de folhas). Na 8ª etapa ergue-se o lado esquerda da folha, formando mais uma lateral da caixa, ao mesmo tempo em que se empurra as “orelhas para fora”.

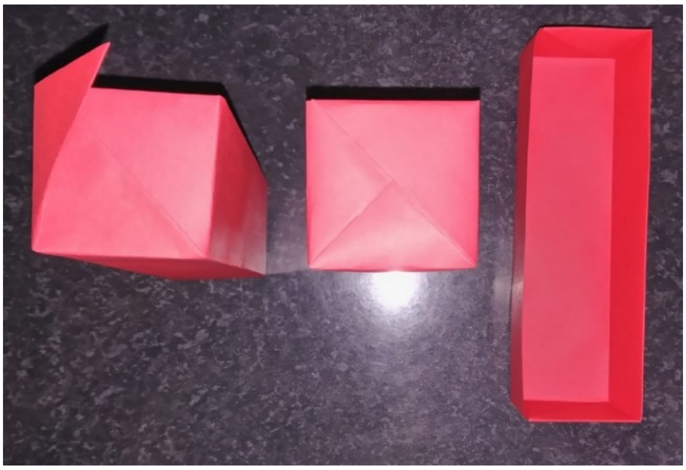
Figura 68 - Etapas 10 a 12



Fonte: Autoria própria (2024)

Na última etapa deve-se dobrar as “orelhas” e colocá-las dentro da fenda que existe na lateral, trazendo estabilidade e finalizando a caixa.

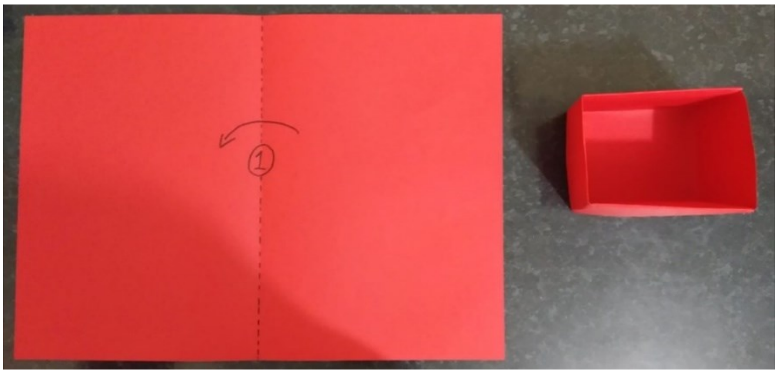
Figura 69 - Etapa final



Fonte: Autoria própria (2024)

A caixa feita possui o comprimento maior do que a altura. Uma caixa alternativa na qual a altura é maior pode ser feita executando os mesmos passos descritos anteriormente, mas começando a partir da folha na horizontal conforme indicado a seguir.

Figura 70 - Caixa alternativa



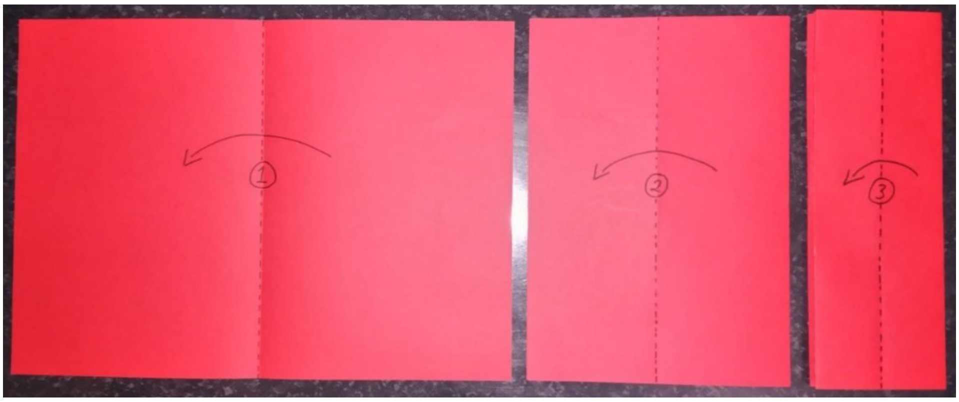
Fonte: Autoria própria (2024)

2º Tipo: "Duas bordas duplas".

As dobraduras anteriores só permitem fazer dois tipos de caixas, com medidas específicas. Para fazer caixas com áreas internas de diferentes tamanhos, deve-se utilizar uma adaptação a partir das etapas de 1 a 5 descritas anteriormente.

Primeiro escolhe-se o tamanho da altura da caixa. A altura é determinada pelo tamanho das dobras laterais. Por ser uma dobra de espessura dupla, a altura será metade do tamanho da dobra lateral. As dobras completas no meio do papel não são necessárias, pode-se marcar levemente as laterais apenas para localizar a metade da folha. A seguir mostra-se a construção de uma caixa cuja folha foi dividida em 8 partes iguais. O começo da dobradura é semelhante ao que já foi descrito anteriormente.

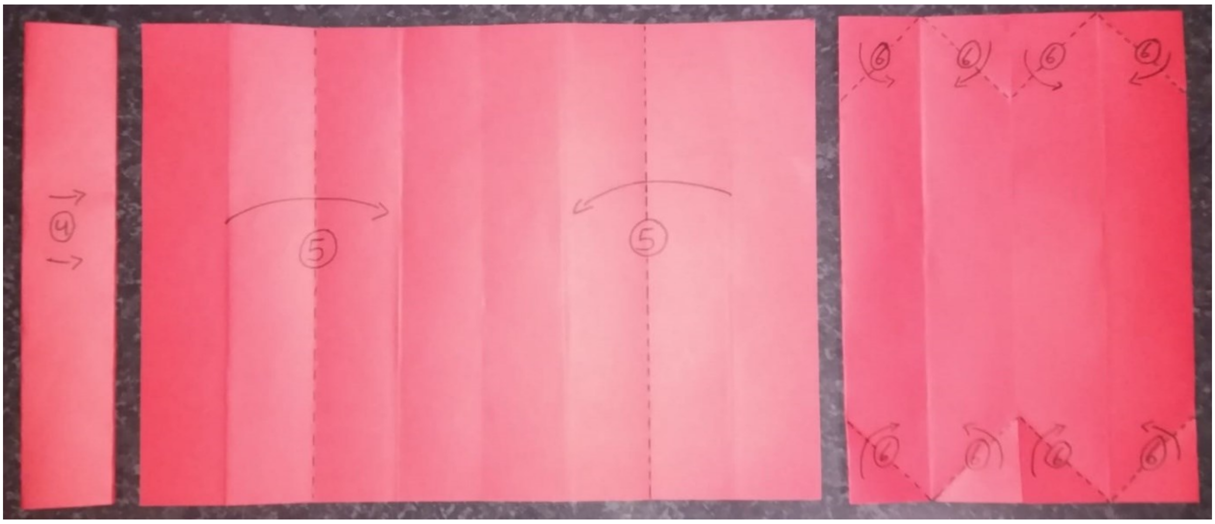
Figura 71 – Etapas 1 a 3



Fonte: Autoria própria (2024)

Na 5ª etapa dobra-se as bordas até o centro. Na 6ª etapa dobra-se as 8 “orelhas” do papel. Para as quatro “orelhas” internas, dobra-se apenas as partes (folhas) superiores. Processo semelhante ao que já foi feito na outra dobradura, mas agora fazendo nas duas bordas do papel ao mesmo tempo.

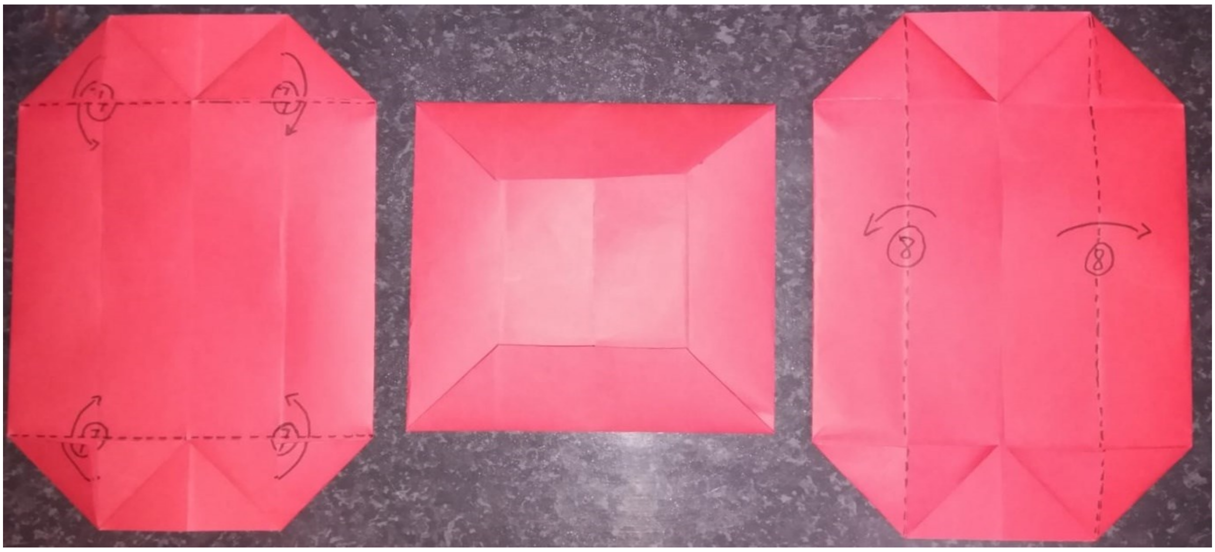
Figura 72 - Etapas 4 a 6



Fonte: Autoria própria (2024)

Nas etapas 7 e 8, marca-se e ajeita-se as futuras laterais da caixa.

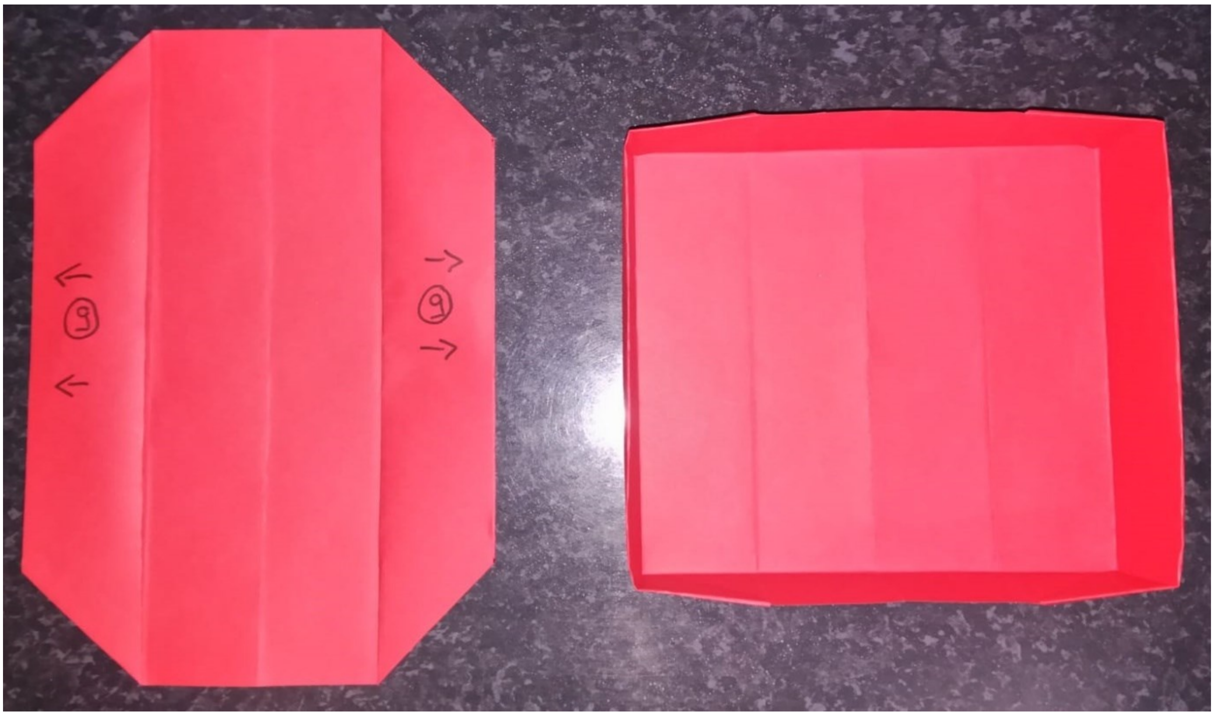
Figura 73 - Etapas 7 e 8



Fonte: Autoria própria (2024)

Na 9ª etapa, abrem-se as fendas de ambos os lados, levantando-se as agora laterais da caixa.

Figura 74 – Etapa final



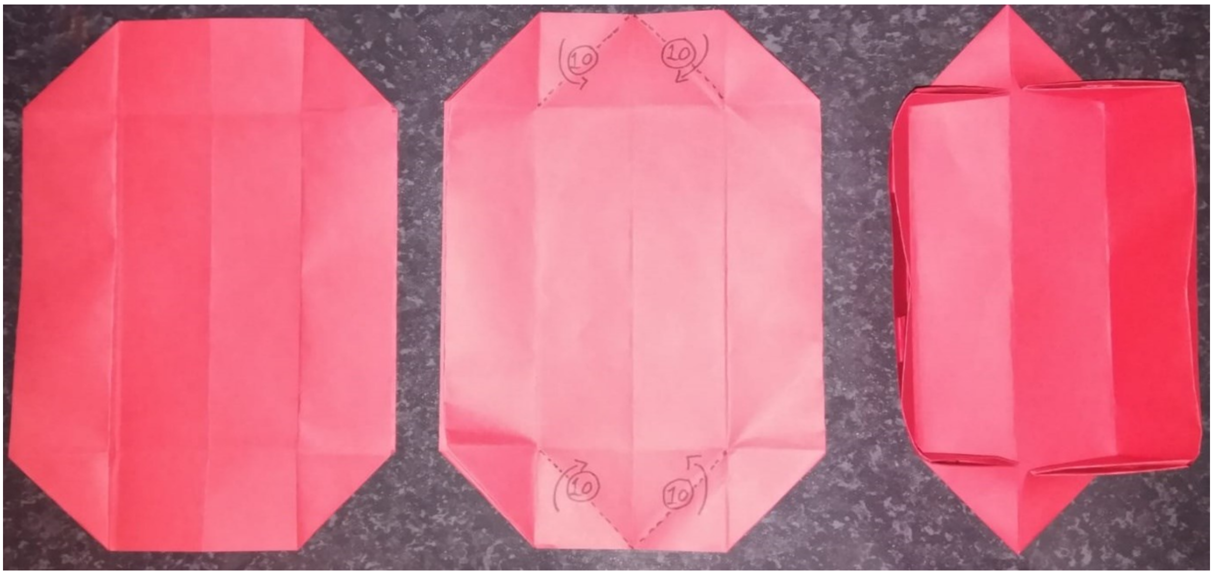
Fonte: Autoria própria (2024)

Como dito anteriormente, essa caixa foi construída a partir de oito partes iguais. Para construir caixas com áreas internas diferentes, modifica-se apenas o tamanho da dobra inicial da borda (futura lateral da caixa) e/ou muda-se a posição inicial da folha, ao invés da posição horizontal ("paisagem") inicia-se na posição vertical ("retrato").

3º Tipo: "Caixa dupla articulada".

A "caixa dupla articulada" é construída continuando a dobradura anterior. Retorna-se à configuração da 9ª etapa e vira-se toda a dobradura ao contrário, a parte do papel que estava em contato com a mesa agora fica virada para cima. Na 10ª etapa dobram-se diagonais internas da aba superior e da aba inferior. Em seguida, retorna-se a etapa anterior.

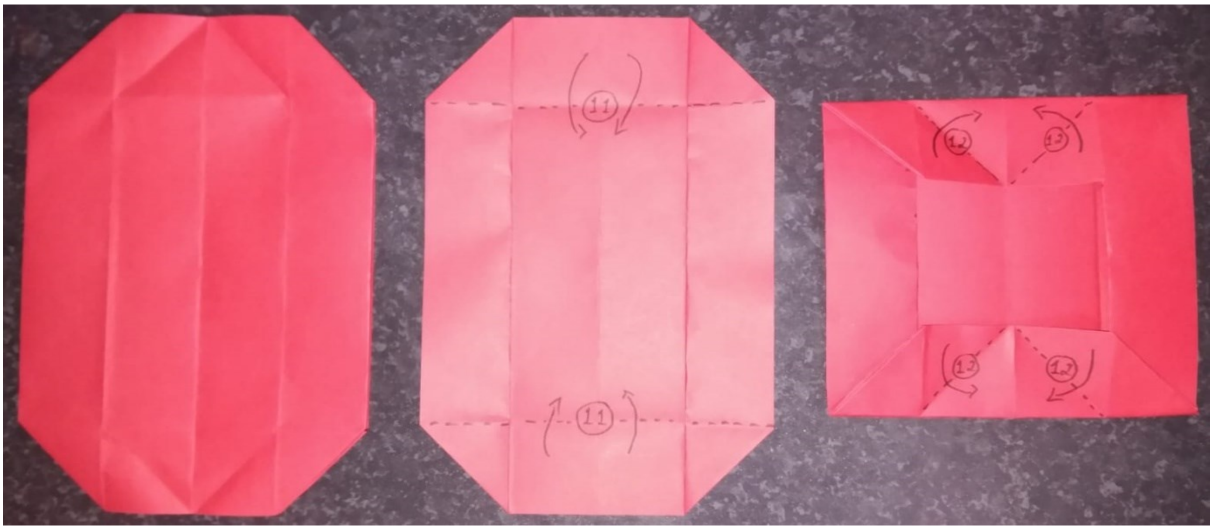
Figura 75 – Etapa 10



Fonte: Autoria própria (2024)

Vira-se novamente toda a dobradura, a parte do papel que estava em contato com a mesa agora fica virada para cima. Na 11ª etapa dobra-se toda a aba superior e toda a aba inferior no sentido do centro, formando um retângulo. Na 12ª etapa utilizam-se as dobras diagonais feitas anteriormente, formando-se triângulos na parte superior e inferior (que apontam para o centro), ao mesmo tempo em que as laterais esquerdas e direitas erguem-se.

Figura 76 - Etapas 11 e 12



Fonte: Autoria própria (2024)

Na 13ª etapa, mantendo-se a configuração anterior, ergue-se o meio da folha da dobradura, isso faz os triângulos da aba superior e da aba inferior partirem ao meio.

Na 14ª etapa abrem-se as fendas da esquerda e da direita, erguendo-se as agora laterais da caixa.

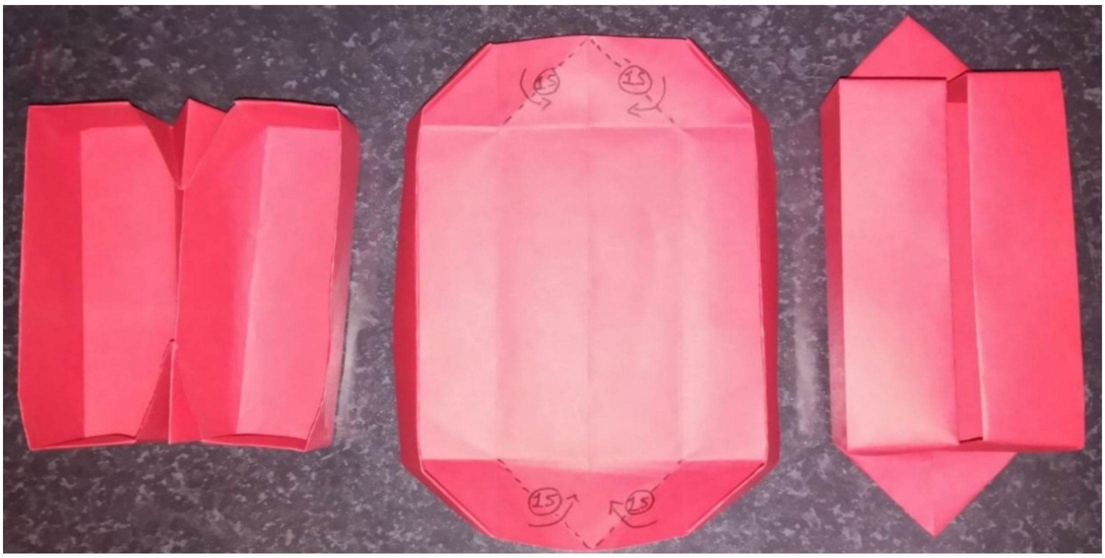
Figura 77 - Etapas 13, 14 e a caixa finalizada

Fonte: Autoria própria (2024)

Essa “caixa dupla articulada” permite uma maior mobilidade devido as dobras (abas) triangulares ficarem acima da articulação da caixa. É possível colocar essas mesmas dobras (abas) triangulares abaixo da articulação da caixa. A caixa terá um pouco menos de mobilidade, mas terá a aparência e manuseio mais teso.

Para isso, se desfaz parte da dobradura, voltando à configuração da etapa 11, mas com as laterais da caixa ainda erguidas/abertas. Numa 15ª etapa, dobram-se as abas superior e inferior nas diagonais, formando os triângulos, mas eles agora apontam para fora da caixa.

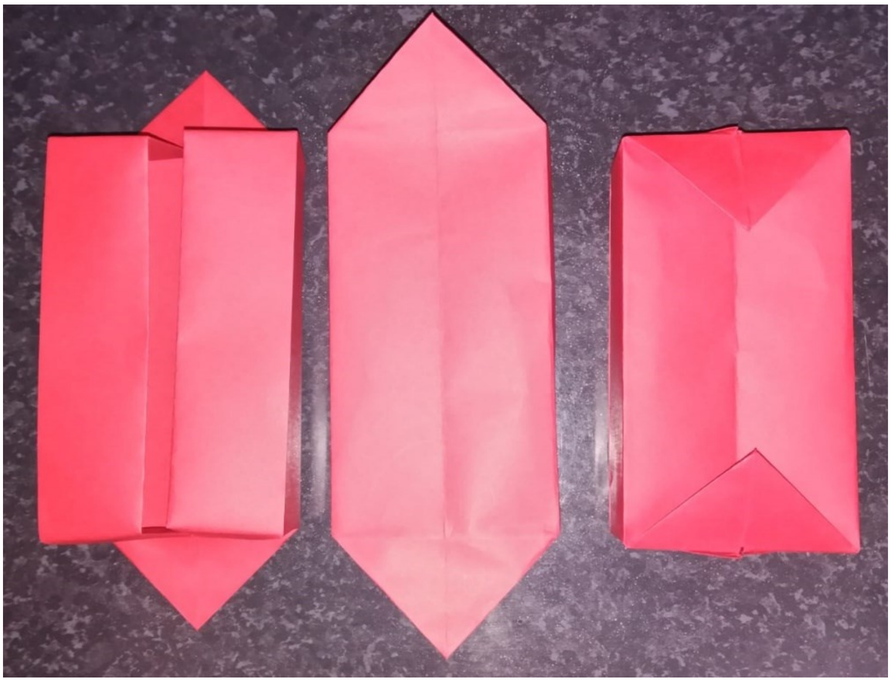
Figura 78 - Etapa 15 - Parte 1



Fonte: Autoria própria (2024)

Mantendo-se a estrutura vira-se a caixa para dobrar as abas triangulares. Ambas devem ser dobradas apontando para o centro.

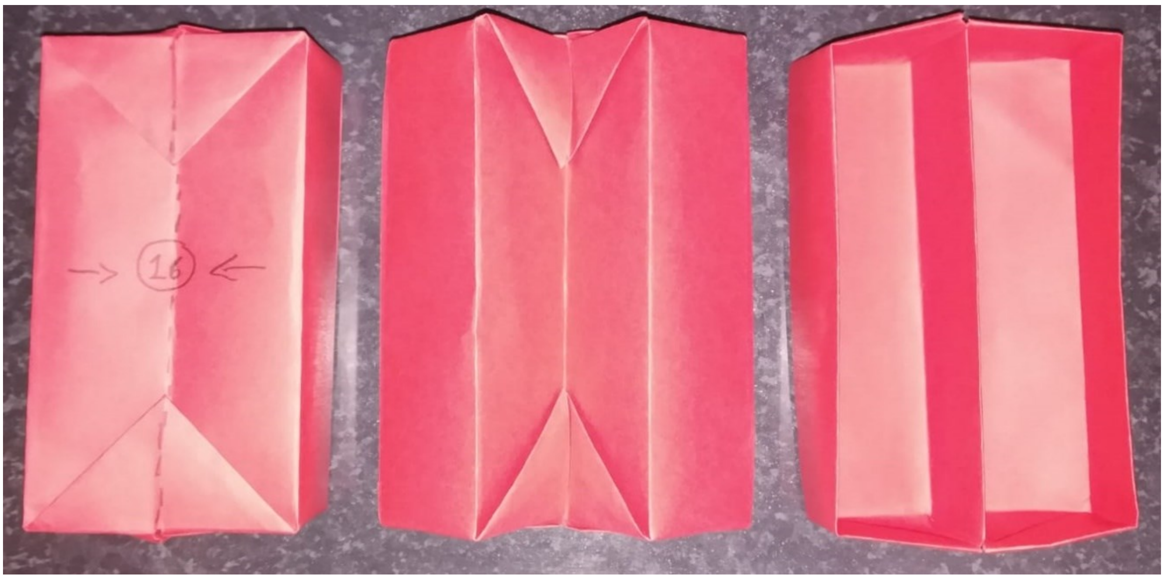
Figura 79 - Etapa 15 - Parte 2



Fonte: Autoria própria (2024)

Por fim, dobra-se no meio, na linha vertical, afundando o centro, partindo os triângulos ao meio. Basta virar toda a caixa e a dobradura está finalizada.

Figura 80 – Etapa 16 e final



Fonte: Autoria própria (2024)

A “caixa dupla articulada”, ajuda na representação da interseção de conjuntos onde dois conjuntos têm elementos em comum. Para conseguir utilizar duas ou mais caixas encaixadas de maneira adequada é prudente fazer as caixas com diferentes tamanhos, uma diferença de meio centímetro na largura da folha inicial já é o suficiente para um encaixe adequado. O encaixe de duas caixas de mesma largura é possível, mas fica extremamente justo, com algumas partes tortas, menos prático e maleável durante o uso.

Figura 81 - Exemplo do encaixe de diferentes tamanhos

Fonte: Autoria própria (2024)

Parece ser possível a construção de caixas para representação da interseção de três ou mais conjuntos, já que apenas deve-se aumentar o número de compartimentos e articulações. Também parece ser possível a construção de diferentes tipos de caixas de bordas circulares ou redondas (com articulações) que seriam mais próximas as representações clássicas dos Diagramas de Venn. Entretanto, essas e outras possibilidades não estão inclusas neste trabalho.

APÊNDICE B - Sequência 2

Os materiais e processos utilizados para composição dos materiais didáticos da Sequência 2 são descritos a seguir.

1. Tampinhas de garrafa, barbantes, placas/folhas EVA e fitas adesivas coloridas.

Com exceção dos barbantes e das tampinhas, os outros itens são opcionais, servirão em alguns casos para melhor fixação e manuseio do material didático.

Figura 82 – Tampinhas, barbantes, EVA, fitas adesivas

Fonte: Autoria própria (2024)

2. Varetas de madeira de diferentes comprimentos e espessuras.

As varetas possuíam espessuras de 8 mm, 10 mm, 12 mm e comprimentos de 1000 mm e 1200 mm, sendo cortadas conforme a necessidade.

Figura 83 - Varetas de madeira

Fonte: Autoria própria (2024)

3. Imãs diversos: blocos, discos e flexíveis (folha imantada).

Foram utilizados imãs de neodímio (blocos e discos), imãs de ferrite (blocos) e folhas imantadas adesivas. Em alguns casos, para realizar a fixação dos imãs (blocos e discos) nas tampinhas e nas varetas foi utilizada uma pistola de cola quente (pela facilidade de manuseio e acesso ao produto). No entanto é recomendado o uso de outros tipos de adesivos menos danosos ou corrosivos, como adesivos a base de resina epóxi. Alguns cuidados no manuseio dos imãs são: evitar colisões (choques mecânicos) e altas temperaturas. Isso evita que os imãs percam seus magnetismos. Por isso deve-se ter cuidado no uso da cola quente e, se possível, recorrer a alternativas.

Figura 84 - Imãs diversos

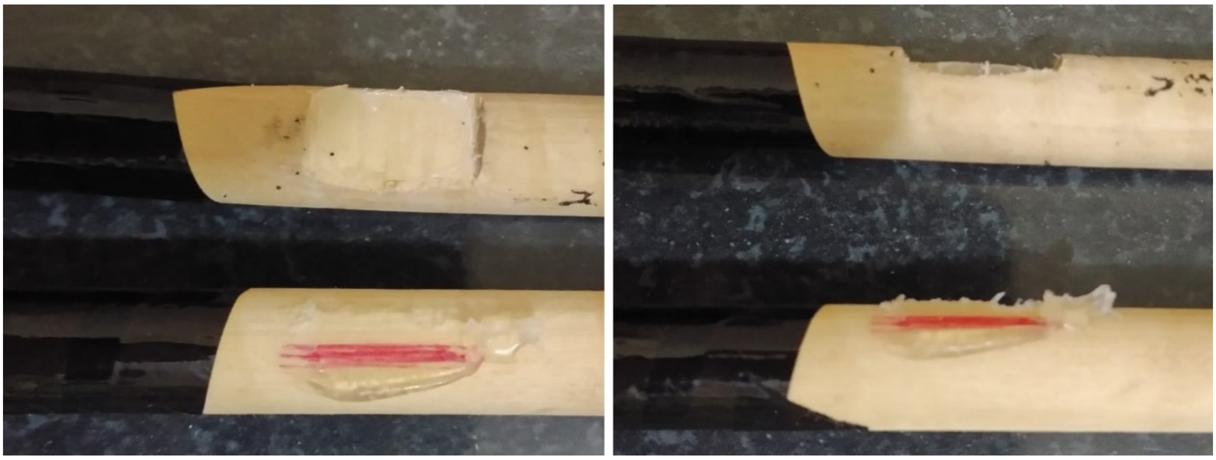
Fonte: Autoria própria (2024)

4. Confecção.

Para confecção das hastes de madeira com imãs, que funcionarão como retas ou segmentos de retas, deve-se primeiro serrar a vareta no tamanho apropriado.

Em seguida, pode-se apenas usar a cola quente para fixação do imã ou, para obter um melhor encaixe e superfície mais lisa, pode-se com a utilização de um estilete (ou plainas e cinzeis para acabamento ou micro retificadores) abrir sulcos nas varetas do tamanho dos imãs que se pretende acoplar.

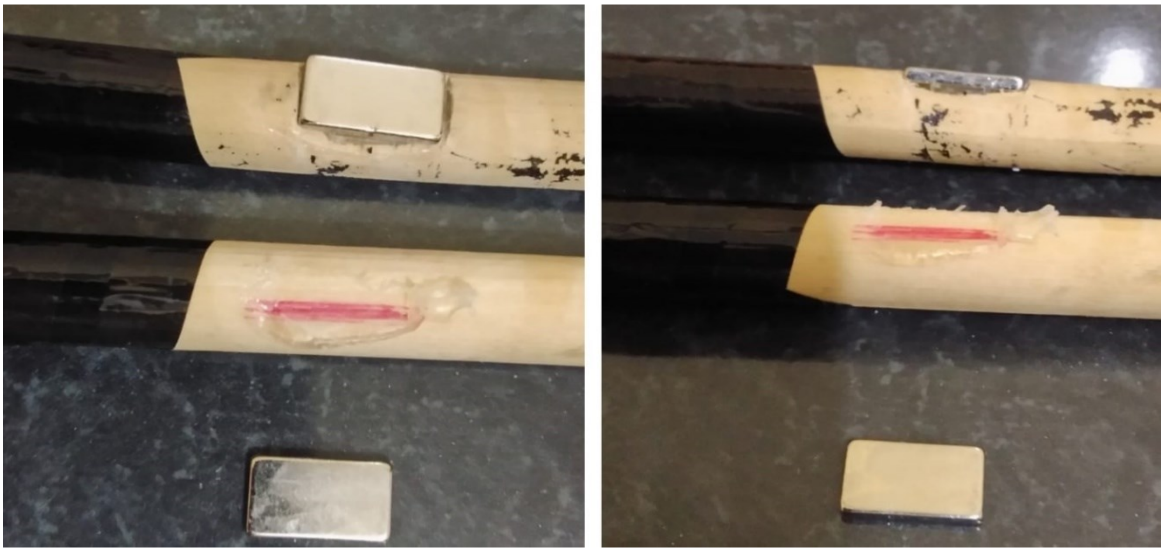
Figura 85 - Varetas com sulcos e cola quente ou somente cola quente



Fonte: Autoria própria (2024)

É importante antes de fixar os imãs definitivamente ou a cada nova vareta, tampinha ou linha(fio) confeccionada verificar como será a atração/repulsão final dos imãs de todo o conjunto, evitando ter que desfazer a colagem. Verifica-se se todos os imãs que estarão na mesma “face” da vareta também estão no mesmo sentido de atração magnético. Deste modo eles não se repelirão e evitará, por exemplo, a situação de três imãs fixados numa vareta, dois deles atraírem a lousa de metal e um deles repelir a lousa de metal, deixando a vareta mal fixada. Verifica-se também se a atração entre as varetas, tampinhas e linhas (fios) ocorrerá do modo planejado.

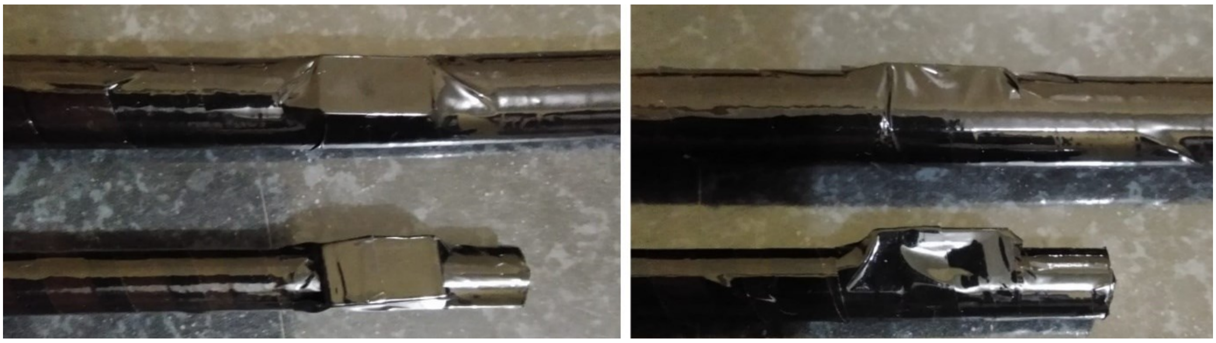
Figura 86 - Imãs encaixado no sulco



Fonte: Autoria própria (2024)

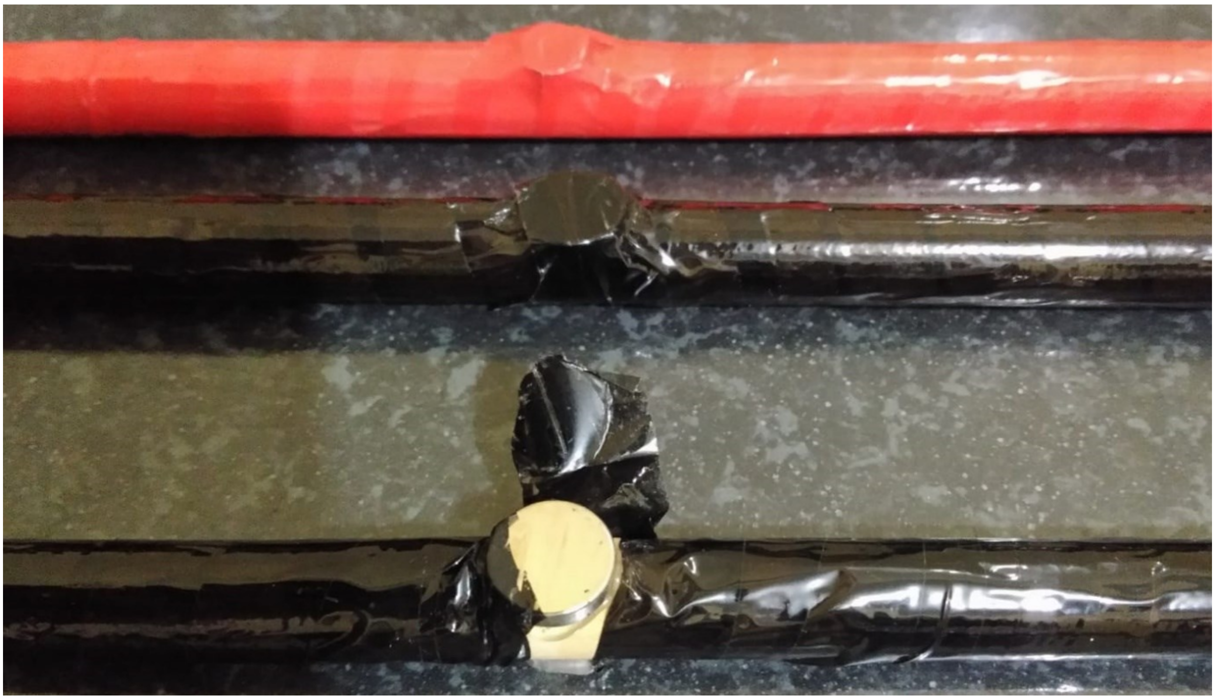
Caso seja conveniente para melhor fixação ou apenas por questão estética, pode-se envolver a vareta com uma fita adesiva colorida.

Figura 87 - Varetas com os imãs envoltos em fita adesiva preta



Fonte: Autoria própria (2024)

Figura 88 - Varetas com os imãs envoltos em fita adesiva 1



Fonte: Autoria própria (2024)

Figura 89 - Varetas com os imãs envoltos em fita adesiva 2

Fonte: Autoria própria (2024)

Para confecção das tampinhas com imãs que funcionarão como pontos, deve-se primeiro escolher se o imã deve ficar solto ou fixo.

O imã deve ficar solto caso tenha-se a intenção de utilizar os dois lados da tampinha. Podendo ser lados com cores diferentes ou iguais. Um lado pode ser a tampinha original e o outro um pedaço de outra tampinha ou um recorte de EVA para um arrasto mais suave e para evitar a possibilidade (pouco provável) de riscos na lousa de metal.

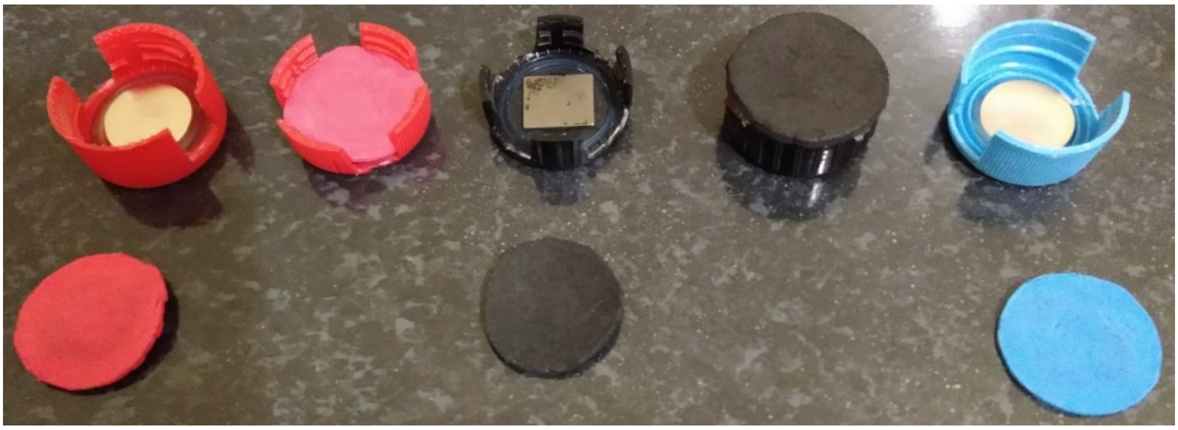
Caso não se tenha a intenção de utilizar os dois lados pode-se, após fixar o imã na tampinha com cola quente, colocar (ou colar) um recorte de EVA cobrindo o imã, para proteção e por estética.

Figura 90 - Tampinhas 1

Fonte: Autoria própria (2024)

Em qualquer um dos casos (imãs soltos ou fixados) é recomendado, mas não obrigatório, o corte das laterais das tampinhas, para que assim elas possam ser utilizadas em conjunto com as hastes de madeira e as linhas (fios). O tamanho e a quantidade destas aberturas é o que aumentará as possibilidades de uso das tampinhas, por exemplo, para representação de ângulos, linhas poligonais.

Figura 91 - Tampinhas 2



Fonte: Autoria própria (2024)

Para confecção das linhas (fios) com imãs que funcionarão como retas ou segmentos de retas, deve-se primeiro escolher se será um fio solto ou agregado a uma tampinha com imã, em um empilhamento colado (tampinha, fio, imã, EVA). Os processos e as possibilidades são semelhantes ao que já foi descrito.

Algumas considerações devem ser feitas antes e durante o processo de confecção da linha (fio).

O tamanho do fio não precisa ser decidido de antemão, desde que o fio inicial seja comprido pode-se cortá-lo à conforme, enrolá-lo ao redor das tampinhas ou escondê-lo dentro das tampinhas.

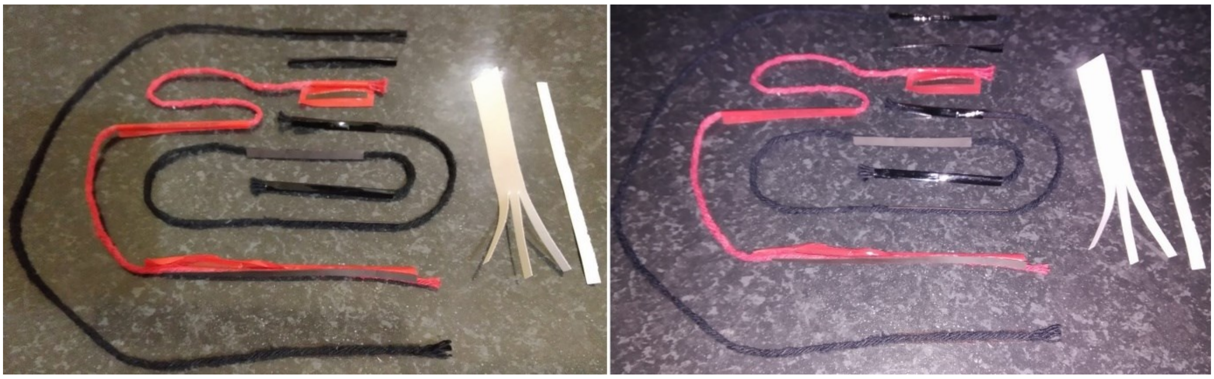
A espessura do fio pode impactar na fixação dos imãs (tiras adesivas da folha imantada). Quando menor a espessura do fio, mais difícil será para colar as tiras da folha imantada. Também haverá dificuldade para se ajustar a fixação (entre fio e tiras imantadas) utilizando as fitas adesivas, caso elas sejam necessárias.

Quanto maior a espessura do fio, maior a carga de peso que as tiras imantadas terão que suportar. Quanto maior o comprimento das tiras imantadas, maior a possibilidade delas se descolarem do fio durante o manuseio.

Ao se utilizar a fita adesiva para tentar manter os dois juntos (fio e tiras imantadas) corre-se o risco de a fita atrapalhar na atração do imã e do peso total dos três superar a força de atração magnética.

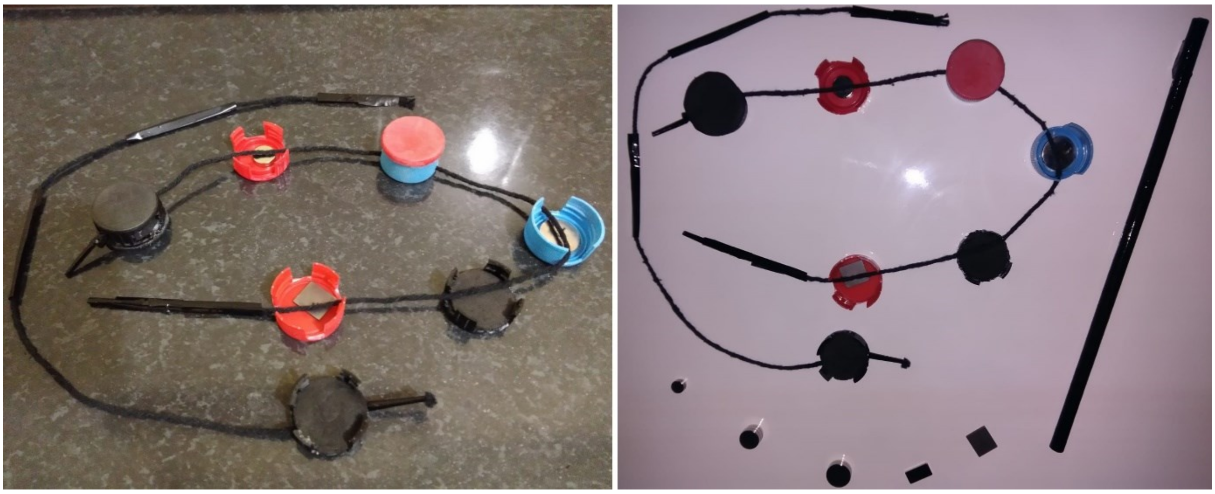
Assim, deve-se buscar um equilíbrio entre a espessura do fio, a espessura das tiras imantadas, a quantidade de tiras imantadas, o comprimento das tiras imantadas e a quantidade de fita adesiva para melhor ajustar a fixação (entre fio e as tiras).

Figura 92 - Fios e tiras da folha imantada



Fonte: Autoria própria (2024)

Figura 93 - Tampinhas, fios e hastes com imãs numa mesa (esq.) e numa lousa de metal (dir.)



Fonte: Autoria própria (2024)

Outras possibilidades que não são exploradas neste trabalho. O uso de impressora 3D, que possibilitaria a impressão de peças personalizadas. Elas seriam mais precisas no encaixe dos imãs e a impressão de diferentes tipos de peças aumentaria as possibilidades dos objetos matemáticos representáveis, para as Geometrias Euclidianas (Plana e Espacial) como para outras Geometrias.

O uso de outros tipos de imãs, peças magnéticas ou ligas metálicas, como por exemplo o ferrofluido. Talvez uma mistura de ferrofluido com alguma cola ou resina, possibilitaria linha/fios magnetizados mais “limpos/lisos”, versáteis e práticos.