UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MICHELI CRISTINA STAROSKY ROLOFF

ATIVIDADES PARA CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM PRODUTO EDUCACIONAL

PONTA GROSSA
2026

versão 11.0 (abr.25)

MICHELI CRISTINA STAROSKY ROLOFF

ATIVIDADES PARA CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM PRODUTO EDUCACIONAL

Activities for Differential and Integral Calculus: an educational product

Produto educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciência e Tecnologia, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Luis Maurício Martins de Resende
Coorientador: Prof. Dr. Christian Joseph Antoine Mercat

PONTA GROSSA

2026

ATIVIDADES PARA CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM PRODUTO EDUCACIONAL

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2025.6301

Autores: *MICHELI CRISTINA STAROSKY ROLOFF,LUIS MAURICIO MARTINS DE RESENDE,CHRISTIAN JOSEPH ANTOINE MERCAT*

Resumo: *Este artigo tem por objetivo apresentar o produto educacional composto por quatro atividades para o ensino de CDI I, as sugestões de implementação, e o feedback de alguns alunos que realizaram tais atividades, tanto no Brasil como na França. O "livro" que compõe o produto educacional "Atividades para Cálculo Diferencial e Integral" aborda quatro atividades e está disponível na plataforma do GeoGebra (geogebra.org). As atividades tratam dos temas: Transformação de Funções; Estudo do Limite por Definição e Limite no Infinito; Funções Contínuas e os Testes das Derivadas 1ª e 2ª; e Somas de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo. Em cada atividade o professor irá encontrar uma sugestão de condução da atividade, contendo orientações para organização da sala e da atividade, os objetivos, conteúdos envolvidos, sequência da atividade, tempo estimado, material e construção no GeoGebra, e as referências bibliográficas. Os alunos brasileiros se mostraram mais receptivos às atividades.*

Palavras-chave: *Produto Educacional,Cálculo Diferencial e Integral,Ensino de Engenharia,Produto educacional,Ensino de engenharia*

ATIVIDADES PARA CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM PRODUTO EDUCACIONAL

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática nos cursos de engenharia e em especial o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) frequentemente está baseado no ensino tradicional, onde o professor apresenta a definição, demonstra alguns teoremas, apresenta a solução de alguns exercícios, e disponibiliza uma extensa lista de exercícios aos alunos. Esta sequência pode ser observada nos livros de cálculo habitualmente adotados nas universidades do país, como Anton, Bivens e Devis (2014), Flemming e Gonçalves, (2006) e Stewart, (2015), entre outros.

Soma-se a este cenário, os altos índices de reprovação principalmente nos dois primeiros anos dos cursos de engenharia. Nesses dois primeiros anos o estudante recém-chegado à universidade precisa cursar disciplinas de matemática, como Cálculo Diferencial e Integral (CDI), Geometria Analítica e Álgebra Linear.

A experiência da primeira autora, enquanto docente de CDI I, remonta a índices de 40% a 50% de reprovação em turmas de calouros. E autores como Bénéteau et al. (2016, 2017), Gruber et al. (2021), Maciejewski et al. (2021), Olson, Cooper e Lougheed (2011), Petrillo (2016) e Reinholz (2015) apontaram índices semelhantes para a disciplina de CDI ou equivalentes.

Uma das possibilidades que se vislumbra como relevantes para a redução dos índices de reprovação, e possivelmente colaborar para a permanência do aluno no curso, está relacionada às estratégias de ensino, em especial as metodologias ativas. Alguns estudos demonstram que metodologias ativas no ensino são capazes de impactar positivamente os índices de aprovação (Bénéteau et al., 2016, 2017; Maciejewski et al., 2021; Olson; Cooper; Lougheed, 2011; Reinholz, 2015; Villalobos et al., 2021) e até mesmo reduzir os índices de desistência (Bénéteau et al., 2016; Reinholz, 2015).

Diante deste cenário, a primeira autora em seu doutoramento, ocupou-se do estudo de diferentes estratégias empregadas no ensino de CDI em cursos de engenharia no Brasil e na França, e os impactos que estas podem causar. E a partir de observações realizadas na *Université Claude Bernard Lyon 1* (Lyon 1), e na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Pato Branco, elaborou quatro atividades, que foram implementadas nas duas instituições, a fim de coletar dados para a pesquisa de doutorado.

Este artigo tem por objetivo apresentar o produto educacional composto por quatro atividades para o ensino de CDI, as sugestões de implementação, resultados e o feedback de alguns alunos que realizaram tais atividades, tanto no Brasil como na França.

2 O PRODUTO EDUCACIONAL

O GeoGebra é amplamente conhecido entre os professores que utilizam algum software no ensino de matemática e reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. O GeoGebra é um software dinâmico de matemático gratuito disponível em versões online e offline. Além disso, o GeoGebra é uma plataforma online que oferece recursos educacionais elaborados pela sua comunidade de usuários. Os recursos disponíveis são dinâmicos e os professores podem adaptá-los a suas necessidades e objetivos. Quando uma atividade é copiada e adaptada por um dos usuários, o(s) autor(es) da atividade permanecem como coautores da nova atividade, garantido assim a citação dos autores.

A plataforma GeoGebra permite organizar os materiais em forma de “atividade”, ou então reunir as atividades em nomeá-las de “livro”. Com o objetivo de divulgar o produto educacional e torná-lo acessível aos professores que lecionam CDI, optamos por elaborar um produto educacional em forma de um “livro” de atividades disponível no site do GeoGebra (geogebra.org).

O livro que compõe o produto educacional “Atividades para Cálculo Diferencial e Integral” pode ser acessado em https://www.geogebra.org/m/x3eaprcv. Ele aborda quatro atividades, a saber: Transformação de Funções; Estudo do Limite por Definição e Limite no Infinito; Funções Contínuas e os Testes das Derivadas 1ª e 2ª; e Somas de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo. As atividades estão organizadas na ordem em que os conteúdos costumam ser abordados na disciplina de CDI e que são apresentados nos livros de cálculo conforme Anton, Bivens e Devis (2014), Flemming e Gonçalves, (2006) e Stewart, (2015).

Em cada atividade o professor encontrará uma sugestão de condução da atividade, contendo orientações para organização da sala e da atividade, os objetivos, conteúdos envolvidos, sequência da atividade, tempo estimado, material e construção no GeoGebra, e as referências bibliográficas.

Em todas as atividades é proposto que os alunos trabalhem em grupos, a fim de desenvolverem habilidades de aprendizagem colaborativa. Sugerimos ao professor organizar a sala de aula previamente, deixando as mesas agrupadas, de modo que todos ainda possam ver o quadro, para o caso de utilização de projeção ou os alunos apresentarem as soluções no quadro.

Como os alunos trabalharão em grupos, também é importante identificar as mesas, numerando os grupos. E se for do interesse do professor registrar ou avaliar a produção escrita dos alunos, sugerimos a criação de um QR code que direcione para o local onde os alunos deverão enviar fotos das atividades. Este local pode ser um drive, um endereço de e-mail, o Moodle da disciplina, o WhatsApp do professor, entre outros.

Sugerimos que os alunos apresentem para a classe a solução dos exercícios. O professor pode aproveitar este momento para enriquecer com discussões e questionamentos. O tempo estimado para todas as atividades é de 2 ou 3 aulas consecutivas de 45 a 60 minutos cada. A seguir passamos a apresentar cada uma das atividades.

2.1 Transformação de Funções

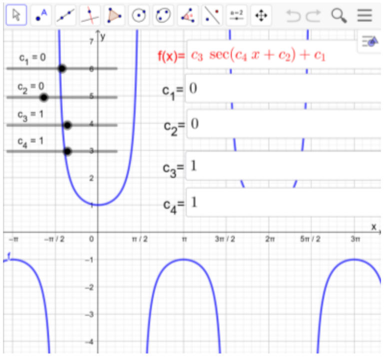
Esta atividade trata das transformações horizontais e verticais, conforme abordado por Stewart (2015), em seu livro de Cálculo. Com o auxílio de construções no GeoGebra o professor pode projetar o comportamento do gráfico para estudar as transformações horizontais e verticais na função secante. Uma tabela a ser completada é fornecida aos alunos, com as orientações e conclusões gerais.

Os objetivos desta atividade são de sintetizar regras de deslocamentos horizontais e verticais em funções a partir de manipulações em construções no GeoGebra; construir gráfico de funções transformadas a partir do gráfico de funções conhecidas; determinar uma função a partir de um gráfico; e desenvolver habilidades de aprendizagem colaborativa.

Os exercícios propostos abordam as funções quadráticas, seno e cosseno, mas o professor pode realizar alterações. Será importante relembrar a função quadrática na forma canônica $y = a(x-h)^2 + k$.

A Figura 1 apresenta a construção no GeoGebra, que pode ser manipulada, e a Figura 2 a tabela a ser preenchida pelos alunos a partir das transformações apresentadas pelo professor.

Figura 1 – Transformações da função secante



Fonte: os autores

Figura 2 – Transformações de funções

Deslocamentos horizontais e verticais

Seja a função $y = f(x)$ e suponha c____.

Operação	Deslocamento
$y = f(x) + c$	Desloque o gráfico de f em c unidades para ____________
$y = f(x) - c$	Desloque o gráfico de f em c unidades para ____________
$y = f(x - c)$	Desloque o gráfico de f em c unidades para ____________
$y = f(x + c)$	Desloque o gráfico de f em c unidades para ____________

Reflexões e expansões verticais e horizontais

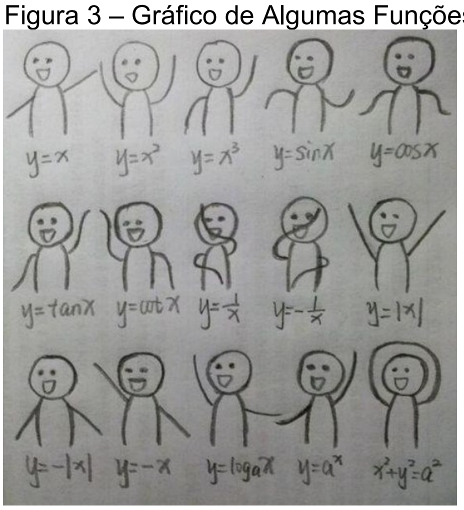
Seja a função $y = f(x)$ e suponha c____.

Operação	Transformação
$y = c.f(x)$	**Expandir** o gráfico de f **verticalmente** por um fator de c
$y = \left(\frac{1}{c}\right).f(x)$	**Comprima** o gráfico de f _______________ por um fator de c
$y = f(c.x)$	___________ o gráfico de f ____________ por um fator de c
$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$	___________ o gráfico de f ____________ por um fator de c
$y = -f(x)$	**Reflita** o gráfico de f em torno do eixo ______
$y = f(-x)$	**Reflita** o gráfico de f em torno do eixo ______

Fonte: adaptado de Stewart (2015)

Caso os alunos tenham dificuldades em recordar o gráfico de algumas funções, o professor pode fornecer o material da Figura 3.

Figura 3 – Gráfico de Algumas Funções



Fonte: Ciência online (2018)

Já a Figura 4 apresenta uma sugestão de distribuição dos exercícios entre os grupos.

Figura 4 – Alguns exercícios sobre Transformações de Funções

Exercício 1. Desenhe o gráfico das seguintes funções reais, e dê o conjunto imagem e o período

Grupo 1: 1, 5, e 7
Grupo 2: 2, 5 e 7
Grupo 3: 3, 5, e 7
Grupo 4: 4, 6 e 8
Grupo 5: 1, 6 e 8
Grupo 6: 2, 6 e 8

1. $f(x) = \sin(2x)$
2. $f(x) = \sin(x) + 1$
3. $f(x) = 2\cos(x)$
4. $f(x) = \cos(x + \pi)$
5. $f(x) = -\sin(x) + 3$
6. $f(x) = 3\cos(x) - 1$
7. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$
8. $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Fonte: os autores

2.2 Estudo do Limite por Definição e Limite no Infinito

Esta atividade explora a ideia de limite por definição (com épsilon e delta), e o limite no infinito, e foi adaptada a partir da atividade proposta por Trevisan e Mendes (2013). A Figura 5 apresenta o exercício proposto para a atividade.

Figura 5 – Exercício sobre o Estudo do Limite por Definição e Limite no Infinito

Exercício. Um tanque muito grande já contém 5000 litros de água pura. Bombeia-se água salobra, contendo 30g de sal por litro de água, adicionada a este reservatório a uma taxa de 25 L/min.

1. Explique suas expectativas sobre a concentração de sal no tanque ao longo do tempo? E depois de muito tempo?
   a. Quanta água haverá no tanque, em litros, depois de 1 minuto? E depois de 2 minutos? E depois de 3 minutos? E depois de t minutos?
   b. Quanto sal haverá no tanque, em gramas, depois de 1 minuto? E depois de 2 minutos? E depois de 3 minutos? E depois de t minutos?
2. Qual é a concentração de sal no tanque (em g/L) após t minutos? Escreva a função de concentração de acordo com o tempo.
3. Qual é o tempo mínimo necessário para que esta concentração exceda 29,9g/L?
   a. Qual é a melhor maneira de expressar esse tempo (minutos, horas, dias, semanas, meses)?
   b. Que quantidade de sal se encontra no reservatório quando esta concentração ultrapassa 29,9 g/l? Qual é a melhor maneira de expressar essa quantidade (gramas, quilogramas, toneladas)?
   c. Qual a quantidade de água no reservatório no momento em que esta concentração ultrapassa 29,9 g/l? Qual é a melhor maneira de expressar essa quantidade (litros, m³)?
4. Utilizando a fórmula de convergência da função $|f(t) - L| < \varepsilon$ para a situação dada na questão 3,
   a. Qual é o valor de L ?
   b. Qual é o valor de ε ?
5. Desenhe o gráfico de $f(t)$ e da constante $g(t) = L$ em função do tempo t no mesmo plano cartesiano.
6. A hipótese que você formulou na questão 1 foi confirmada? Ou mudou durante a resolução do exercício?

Fonte: adaptado de Trevisan e Mendes (2013)

A partir de um exercício sobre a concentração de sal em um tanque com água, os alunos são convidados a formular conjecturas e hipóteses precisarão ser confirmadas ou refutadas ao longo da resolução do exercício.

Os objetivos desta atividade são: compreender a definição precisa de limite; estudar o limite no infinito; determinar a função que representa a situação problema; operar com os sistemas de medida de tempo, massa e volume; formular hipóteses frente a situação apresentada; e desenvolver habilidades de aprendizagem colaborativa. O professor também pode recomendar o uso do GeoGebra para a construção dos gráficos e explorar o problema.

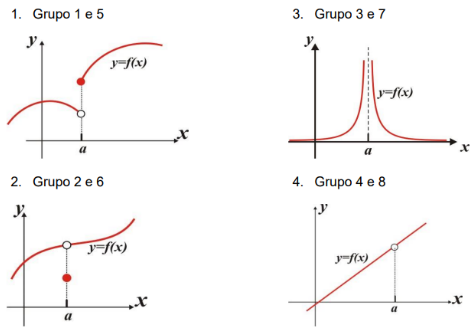
2.3 Funções Contínuas e os Testes das Derivadas 1ª e 2ª

Esta atividade aborda exercícios sobre Continuidade e os critérios a serem atendidos para que uma função seja contínua, além dos Testes das Derivadas 1ª e 2ª.

A atividade contém alguns exercícios adaptados de uma folha de exercícios da *Université Claude Bernard Lyon 1*, na França, alguns exercícios selecionados de livros de Cálculo (Anton; Bivens; Devis, 2014; Flemming; Gonçalves, 2006) e ainda um exercício de criatividade, inspirado no trabalho de Catarino et al. (2019). A Figura 6 traz alguns exercícios desta atividade.

Figura 6 – Alguns Exercícios sobre as Funções Contínuas e os Testes das Derivadas 1ª e 2ª

Exercício 3. Crie um exercício a partir da imagem e dê-o ao próximo grupo a ser resolvido, que o dará ao próximo grupo para corrigir o enunciado e/ou a resolução.



Exercício 4. Todos os grupos.

1. Mostre que existe $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ tal que $\tan(x) + \frac{\pi}{3} = 0$.
2. Mostre que a função $f(x) = 2x^5 + 5x^3 + 3x - 17$ tem somente uma raíz real.

Fonte: adaptado de Anton, Bivens e Devis (2014) e Flemming e Gonçalves (2006)

Os objetivos desta atividade são: verificar a continuidade de funções no seu domínio de definição; determinar o valor de uma constante para que a função seja contínua em um ponto "a"; aplicar a definição de função contínua em um ponto "a"; verificar a aplicação do Teorema do Valor Médio; utilizar de forma adequada os testes das derivadas 1ª e 2ª; esboçar gráficos a partir das derivadas 1ª e 2ª; criar exercícios sobre continuidade de funções a partir de um gráfico; e desenvolver habilidades de aprendizagem colaborativa.

2.4 Somas de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo

Esta atividade explora a ideia das Somas de Riemann e foi adaptada a partir da atividade proposta por Trevisan e Goes (2016), e ainda utiliza uma adaptação de uma atividade do GeoGebra disponibilizada por um dos usuários da plataforma.

Aos alunos é proposto uma sequência de atividades orientadas, como calcular a área entre uma curva e o eixo-x, e no decorrer do exercício chegar à definição de Integral definida a partir das Somas de Riemann. A Figura 7 apresenta essa sequência de exercícios.

Figura 7 – Exercícios sobre Somas de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo

Exercício. Suponha um objeto que se move ao longo de um caminho em linha reta tem sua velocidade em m/s no tempo t em segundos dado por $v(t) = t^2$.

1. Procure uma fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos. Isso será útil para você!
2. Calcule a distância percorrida em $[0, 1]$, utilizando áreas de retângulos, obtenha as somas à esquerda e à direita, dividindo este intervalo em:
   a. 2 partes iguais.
   b. 3 partes iguais.
   c. 4 partes iguais.
   d. n partes iguais.

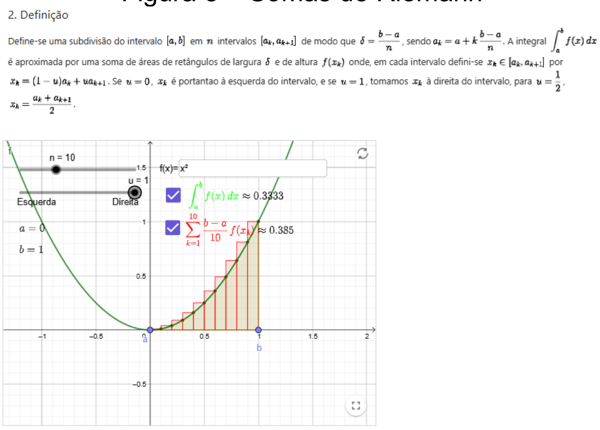
   Faça desenhos para todos os casos. Trabalhe com frações e organize suas soluções de forma a utilizar a fórmula do item 1.
3. O que acontece se você escolher n muito grande? Calcule a soma à esquerda e à direita quando n tende ao infinito.
4. Você pode generalizar uma expressão para a distância percorrida no intervalo de tempo $0 \leq t \leq b$? E para um intervalo de tempo $a \leq t \leq b$?
5. Para esta questão, pense em uma função real f e contínua, em vez da função v dada acima. Se f é positiva e decrescente em $[a, b]$, a soma à esquerda será superior ou inferior à superfície exata abaixo f em $[a, b]$? E a soma à direita, será superior ou inferior à superfície exata abaixo f em $[a, b]$? Explique seu raciocínio.

Fonte: adaptado de Trevisan e Goes (2016)

Os objetivos desta atividade são: calcular as Somas de Riemann à direita e à esquerda; aplicar de maneira adequada a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos; determinar o limite no infinito para as Somas de Riemann; generalizar expressões para a distância percorrida nos intervalos de tempo $0 \leq t \leq b$ e $a \leq t \leq b$; compreender a Integral Definida a partir das Somas de Riemann, ou seja, obter o Teorema Fundamental do Cálculo; conjecturar a respeito das Somas de Riemann, para uma função positiva decrescente em um intervalo $[a, b]$; desenvolver habilidades de aprendizagem colaborativa.

Ao final da atividade sugerimos fornecer aos alunos uma construção no GeoGebra, onde ele poderá fazer manipulações a fim de confirmar ou não as suas hipóteses e resoluções, conforme a Figura 8.

Figura 8 – Somas de Riemann



Fonte: os autores (2025)

3 RESULTADOS E COMENTÁRIOS DOS ALUNOS

O produto educacional aqui apresentado foi aplicado em turmas de *Travaux Dirigés* (TD) da *Université Claude Bernard Lyon 1* (Lyon 1) durante o ano escolar 2022-2023, e em turmas de CDI na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Pato Branco, no segundo semestre de 2023. O Quadro 1 resume as turmas, professores responsáveis e o número de alunos envolvidos

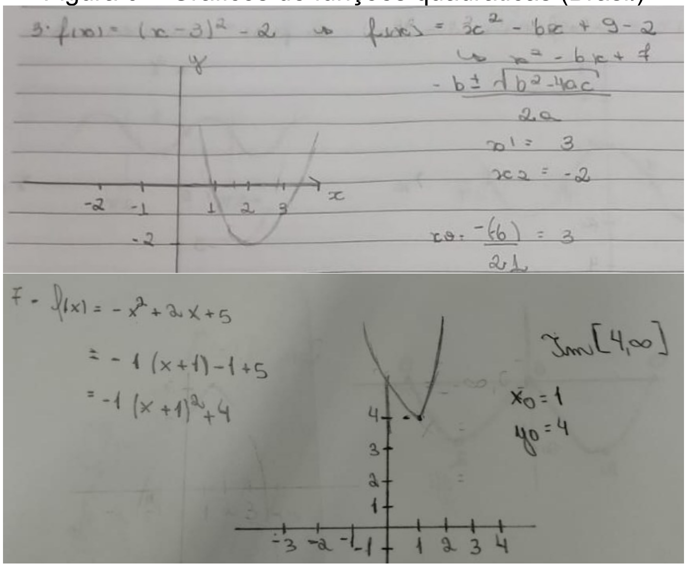
Quadro 1 – Intervenções didáticas

Atividade	Professor	Turma	Número de alunos
Transformação de Funções	E	TD3	18
	I	CDI	21
	K	CDI	18
Estudo do Limite por Definição	F	TD2	21
	I	CDI	18
	K	CDI	18
Funções Contínuas	A	TD1	22
	C	TD3	21
	I	CDI	20
	K	CDI	09
Somas de Riemann	G	TD4	22
	I	CDI	17
	K	CDI	13

Fonte: os autores (2025)

No Brasil nem todos os grupos conseguiram desenvolver todos os exercícios propostos, e apresentaram algumas dificuldades, principalmente algébricas. Na figura a seguir podemos observar algumas dificuldades em relação a função quadrática.

Figura 9 – Gráficos de funções quadráticas (Brasil)

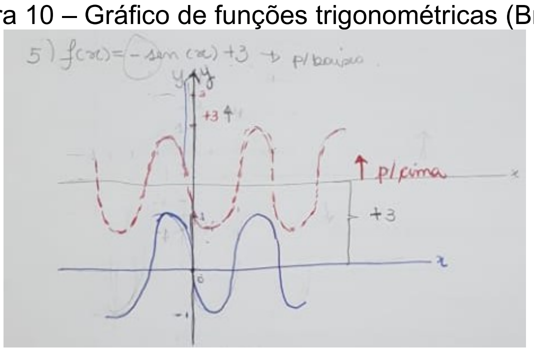


Fonte: os autores (2025)

No item 3 o grupo optou por desenvolver o produto notável e determinar as raízes, porém não foram capazes de calculá-las corretamente. Ainda determinaram x_v (corretamente) mas que é dado na função escrita na forma canônica. No item 7 na tentativa de reescrever a função quadrática na forma canônica o grupo cometeu um erro de sinal, e não observou a concavidade da parábola no momento de construir o gráfico.

A seguir temos a resolução de um grupo que parece ter compreendido as transformações horizontais e verticais, mas no momento da construção dos gráficos ainda apresenta algumas dificuldades com relação ao eixo-y.

Figura 10 – Gráfico de funções trigonométricas (Brasil)

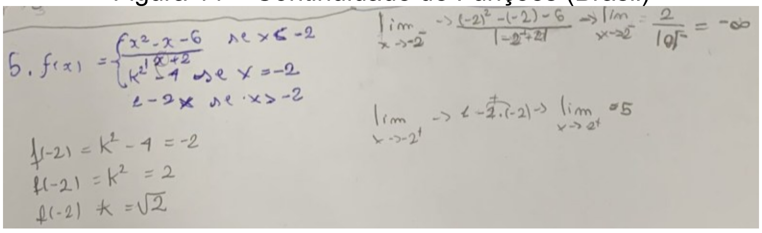


Fonte: os autores (2025)

Para o estudo do Limite por Definição os alunos brasileiros não perceberam inicialmente que a concentração de sal não poderia aumentar infinitamente. No decorrer da atividade os alunos não apresentaram dificuldades, o que os permitiu perceber que a hipótese inicial que haviam formulado não estava correta.

No estudo de Continuidade de Funções os alunos brasileiros desenvolvem cálculos errôneos, realizam simplificações inadequadas, e atribuem igualdades inapropriadas, inviabilizando todo o raciocínio da resolução, a figura a seguir traz um desses exemplos.

Figura 11 – Continuidade de Funções (Brasil)

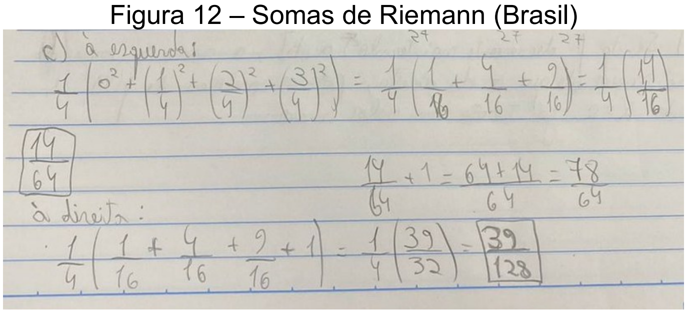


Fonte: os autores (2025)

Já nos exercícios de criatividade os alunos da turma K se limitaram a perguntar se a função era contínua ou não, enquanto na turma I temos grupos que foram capazes de criar um enunciado com funções definidas por partes.

Percebemos que os alunos brasileiros têm muitas dificuldades algébricas, o que interfere na aplicação das propriedades para o cálculo de muitos limites. No estudo das Somas de Riemann um dos grupos percebeu que a diferença entre a Soma à Esquerda e a Soma à Direita seria de apenas um retângulo, conforme a figura a seguir.

Figura 12 – Somas de Riemann (Brasil)



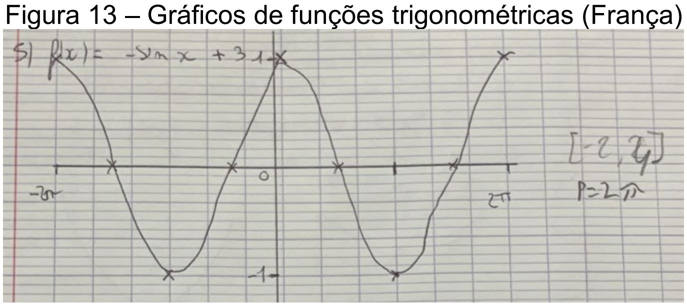
Fonte: os autores (2025)

Mas a estratégia de adicionar apenas um retângulo a Soma à Esquerda para obter a Soma à Direita não se mostrou algo prático, pois o grupo encontrou barreiras algébricas no momento da resolução.

Quando questionados sobre uma função decrescente qual seria o comportamento das Somas à Esquerda e à Direita, os grupos compreenderam a situação, sendo capazes de explicar com as suas próprias palavras.

Na França o número de grupos que não conseguiram concluir as atividades foi menor que no Brasil, e as dificuldades apresentadas pelos alunos franceses também foram menores. Nas funções trigonométricas verificamos poucos equívocos, um deles na figura 13, onde o grupo não compreendeu as transformações no gráfico nem as implicações no conjunto imagem, que sequer está de acordo com o gráfico construído.

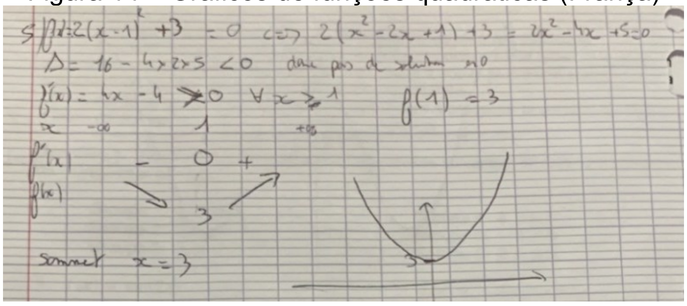
Figura 13 – Gráficos de funções trigonométricas (França)



Fonte: os autores (2025)

A figura 14 traz uma das resoluções de funções quadráticas.

Figura 14 – Gráficos de funções quadráticas (França)



Fonte: os autores (2025)

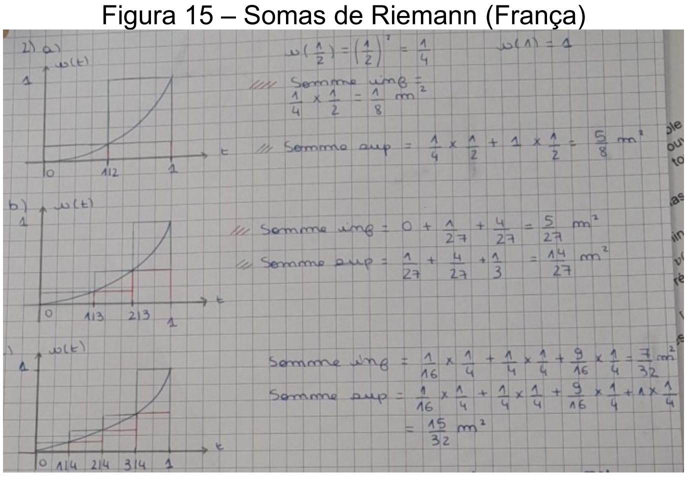
O grupo optou por desenvolver o produto notável para chegar à função quadrática na forma do trinômio, e tentou determinar as raízes, porém não conseguiu desenvolver corretamente o exercício, e não utilizou as transformações horizontais e verticais. Outro grupo optou por calcular delta e determinar as raízes, apesar de alguns equívocos no arredondamento das raízes, construíram um gráfico adequado à questão. E ainda outro grupo utilizou o método de completar os quadrados para resolver o exercício.

No estudo do Limite por Definição os alunos franceses não demonstraram dificuldades. Compreenderam rapidamente que a concentração de sal que entra no tanque é constante, e mesmo havendo água doce no tanque, a concentração de sal no tenderá a um limite com o passar do tempo. Os alunos fizeram anotações organizadas e demostraram domínio do conteúdo.

Na atividade de Continuidade de Funções participaram as turmas TD1 e TD3. Os alunos franceses não tiveram dificuldade em realizar os exercícios, mas não conseguiram concluir todas as atividades. No TD3 todos os alunos participaram, interagindo ativamente.

Para o estudo das Somas de Riemann em um dos grupos os integrantes não interagiram entre si. Um dos grupos não conseguiu concluir a atividade, pois destinou muito tempo às discussões iniciais. Na figura abaixo, temos a organização nas anotações e cálculos, incluindo gráficos.

Figura 15 – Somas de Riemann (França)



Fonte: os autores (2025)

Após as intervenções didáticas os alunos responderam a um questionário, e os alunos puderam expressar a sua opinião deixando algum comentário. Apenas 18 alunos brasileiros deixaram algum comentário, e 21 dos alunos franceses.

Entre os alunos brasileiros, 13 comentários foram positivos, como: “me fez questionar o exercício várias vezes e entender melhor”; “muito bom trabalhar em grupo”; “bem melhor para entendimentos sentados em grupos e tirar dúvidas com colegas e a professora”; “eu me atrapalho bastante para resolver os exercícios, mas considero bem interessantes trabalhos em grupo” e “aula muito produtiva”. Apenas 4 alunos expressaram a sua insatisfação ou dificuldade, como: “pelo que eu percebi, não consigo trabalhar em grupo” e “não fui muito bem, problemas difíceis”. E um aluno apontou uma conclusão pessoal, afirmando “preciso estudar mais funções”.

O aluno que relatou “não fui muito bem, problemas difíceis” deixou este comentário após a intervenção didática Continuidade de Funções, que de fato tinha um caráter mais abstrato, em comparação com as intervenções didáticas anteriores, e exigia o domínio do conteúdo e alguns teoremas. O aluno que concluiu “preciso estudar mais funções” também deixou este comentário após a intervenção didática Continuidade de Funções.

Os alunos franceses estão mais divididos, são 10 comentários positivos e 11 comentários de insatisfação. Entre os comentários positivos temos: “Isso nos permitiu seguir em frente, obrigado”; “o trabalho em grupo é divertido” e “Estou satisfeita, mas eu acho que os alunos não estão acostumados a trabalhar em grupo, por isso não foi agradável, mas basicamente eu prefiro trabalhar em grupo”. Já os comentários de insatisfação são: “Eu queria me concentrar mais nos exercícios que fizemos em casa”; “Eu prefiro trabalhar com o professor que explica e corrige no quadro”; “Isso vai devagar” e “eu não gosto de trabalhar em grupo”.

Os comentários negativos dos alunos franceses deixam claro a preferência em seguir o planejamento da disciplina, com atividades individualizadas, em que possam confiar nas soluções apresentadas pelos professores, e até mesmo em um comentário positivo e aluno alerta que os colegas não estão habituados com o trabalho em grupo. Estes comentários vêm de encontro com os resultados encontrados quanto a satisfação com as intervenções didáticas ocorridas na França.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando as fotos das resoluções das atividades percebemos que seria necessário um pouco mais de tempo para o desenvolvimento das atividades, devido o número elevado de grupos que não concluíram todos os exercícios. Na França as intervenções didáticas tiveram duração de 90 minutos e no Brasil de 100 minutos, 10 ou 15 minutos suplementares seriam importantes.

Os alunos franceses demonstraram organização nos registros, domínio algébrico, rigor matemático, e aplicação dos teoremas. Também foram capazes de criar mais exercícios de criatividade, para além do clássico: a função é contínua em a? Em alguns momentos observamos alguns equívocos com sinais, mas em número muito inferior ao observado no Brasil.

Acreditamos que as fragilidades observadas entre os alunos brasileiros se devem ao fato de serem turmas de alunos repetentes em Cálculo. E o nível matemático elevado dos alunos franceses pelo fato de serem alunos que buscam por vagas nas melhores escolas de engenharia do país.

Acreditamos que os comentários negativos por parte dos alunos franceses, refletem a preocupação destes em seguir o cronograma rígido da disciplina e pelo fato de não estarem habituados ao trabalho em grupo, pois esta atividade não pode ser notada nas observações. Assim como os comentários negativos deixados por 11 de 21 participantes: “Eu prefiro trabalhar com o professor que explica e corrige no quadro”, “Isso vai devagar” e “eu não gosto de trabalhar em grupo”.

Estes resultados não nos surpreendem, uma vez que o curso preparatório é muito competitivo, pois os alunos estão buscando uma vaga em das 154 grandes escolas de engenharia. O curso tem uma ementa extensa e um cronograma rígido, então uma atividade extra, pode parecer de fato ir mais devagar, e atrapalhar o andamento do curso. E como relatado por Bénéteau et al. (2016), Bonwell e Eison (1991) e Murphy, Chang e Suaray (2016), os alunos podem apresentar resistência a uma metodologia diferente da usualmente aplicada.

Por outro lado, os alunos brasileiros nos pareceram mais receptivos às atividades em grupo, o que nos incentiva a propor este produto didático aos professores de CDI.

Um material elaborado por Lealdino Filho (2018) disponível em http://bit.ly/FunctionHero também é voltado para exercícios de funções e envolve a criatividade dos alunos, pode vir a complementar este material.

Os livros de cálculo tradicionalmente utilizados no ensino de CDI apresentam número reduzido de exercícios contextualizados ou atividades com o emprego de tecnologias e outras metodologias de ensino que não a tradicional.

Esperamos que este produto didático possa colaborar para melhorias no ensino de CDI, em direção a um ensino mais centrado no aluno, como recomendam as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (Brasil, 2019), e como ressalta Albalawi (2018), que destaca a importância da aprendizagem centrada no aluno, de modo que os estes estejam efetivamente envolvidos no processo de aprendizagem, e assumindo responsabilidades, o que os tornam aprendizes ao longo da vida.

Como perspectivas futuras, a continuação deste trabalho permitirá a ampliação do produto educacional com a elaboração de novas atividades. Esperamos também contribuições e discussões com outros professores de CDI que permitirão ampliar a oferta e a diversidade das atividades.

REFERÊNCIAS

ALBALAWI, A. S. The Effect of Using Flipped Classroom in Teaching Calculus on Students' Achievements at University of Tabuk. **International Journal of Research in Education and Science**, v. 4, n. 1, p. 198–207, 24 jan. 2018.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DEVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1

BÉNÉTEAU, Catherine *et al.* Peer-Led Guided Inquiry in Calculus at University of South Florida. **Journal of STEM Education: Innovations and Research**, v. 17, n. 2, p. 5–13, 2016.

BÉNÉTEAU, Catherine *et al.* POGIL in the Calculus Classroom. **PRIMUS**, v. 27, n. 6, p. 579–597, 2017.

BONWELL, Charles C.; EISON, James A. **Active Learning: Creating Excitement in the Classroom**. Washington, DC: ASHE-ERIC Higher Education Reports, 1991.

BRASIL. Resolução CNE/CES No. 2 de 24 de Abril de 2019. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**. DOU No. 80, 26 de Abril de 2019, Seção 1, Pág. 43-44, Brasília, 2019.

CIÊNCIA ONLINE. Disponível em: http://www.ciencia-online.net/2014/03/as-funcoes-matematicasgraficascomo.html?m=1. Acesso em: 14 jan 2018.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

GRUBER, Sean *et al.* Active Learning in an Undergraduate Precalculus Course: Insights from a Course Redesign. **PRIMUS**, v. 31, n. 3–5, p. 358–370, 28 maio 2021.

LEALDINO FILHO, Pedro. **Didactic Situations for the Development of Creative Mathematical Thinking**: A study on Functions and Algorithms. 2018. Tese (Doutorado) Education. Université de Lyon, 2018. Disponível em: https://theses.hal.science/tel-02146538. Acesso em: 20 jun. 2025.

MACIEJEWSKI, Wes *et al.* Change Comes from Without: Lessons Learned in a Chaotic Year. **PRIMUS**, v. 31, n. 3–5, p. 504–516, 28 maio 2021.

MURPHY, Julia; CHANG, Jen-Mei; SUARAY, Kagba. Student performance and attitudes in a collaborative and flipped linear algebra course. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 47, n. 5, p. 653–673, 3 jul. 2016.

OLSON, Jo Clay; COOPER, Sandy; LOUGHEED, Tom. Influences of Teaching Approaches and Class Size on Undergraduate Mathematical Learning. **PRIMUS**, v. 21, n. 8, p. 732–751, nov. 2011.

PETRILLO, Joseph. On flipping first-semester calculus: a case study. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 47, n. 4, p. 573–582, 18 maio 2016.

REINHOLZ, Daniel L. Peer-Assisted Reflection: A Design-Based Intervention for Improving Success in Calculus. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 1, n. 2, p. 234–267, 20 jul. 2015.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2015. v. 1

VILLALOBOS, Cristina *et al.* Coordinating STEM Core Courses for Student Success. **PRIMUS**, v. 31, n. 3–5, p. 316–329, 28 maio 2021.

ACTIVITIES FOR DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS: AN EDUCATIONAL PRODUCT

Abstract: *This article aims to present the educational product composed of four activities for teaching CDI I, implementation suggestions, and feedback from some students who have performed such activities in both Brazil and France. The "book" that makes up the educational product "Activities for Differential and Integral Calculus" addresses four activities and is available on the GeoGebra platform (geogebra.org). The activities deal with the following topics: Transformation of Functions; Study of the Limit by Definition and Limit in the Infinite; Continuous Functions and the Tests of the Derivatives 1a and 2a; and Riemann Sums and the Fundamental Theorem of Calculus. In each activity the teacher will find a suggestion for conducting the activity, containing guidelines for organizing the room and the activity, the objectives, contents involved, sequence of the activity, estimated time, material, and construction in GeoGebra, and the bibliographical references. Brazilian students were more receptive to the activities.*

Keywords: *Educational Product, Differential and Integral Calculus, Engineering Teaching.*