

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

JULIANA CONCEIÇÃO POSSINELLI

**APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA POR MEIO DA OTIMIZAÇÃO
LINEAR: O CORRETO DIMENSIONAMENTO DE EMBALAGENS NA
REDUÇÃO DE CUSTOS.**

CORNÉLIO PROCÓPIO
2017

JULIANA CONCEIÇÃO POSSINELLI

**APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA POR MEIO DA OTIMIZAÇÃO LINEAR: O
CORRETO DIMENSIONAMENTO DE EMBALAGENS NA REDUÇÃO DE CUSTOS.**

Trabalho de Conclusão de Curso de Pós-graduação *stricto sensu* de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para aprimoramento da formação profissional de professores da rede básica, pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e aplicada, ministrado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Glaucia Maria Bressan.

Coorientadora: Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier.

CORNÉLIO PROCÓPIO
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P856 Possinelli, Juliana Conceição

Aprendizagem da geometria por meio da otimização linear : o correto dimensionamento de embalagens na redução de custos / Juliana Conceição Possinelli. – 2017.
78 f. : il. color. ; 31 cm

Orientadora: Gláucia Maria Bressan.

Coorientadora: Elenice Weber Stiegelmeier.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Cornélio Procópio, 2017.

Bibliografia: p. 77-78.

1. Geometria. 2. Embalagens. 3. Desperdício (Economia). 4. Matemática – Dissertações. I. Bressan, Gláucia Maria, orient. II. Stiegelmeier, Elenice Weber. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Título da Dissertação Nº. 003

**“Aprendizagem da Geometria por meio da
Otimização Linear: o Correto Dimensionamento de
Embalagens na Redução de Custos.”**

por

Juliana Conceição Possinelli

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio, às 19h00min do dia 31 de julho de 2017. O trabalho foi _____ pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof^a. Glaucia Maria Bressan, Dra.
(Presidente - UTFPR/CP)

Prof. Roberto Molina de Souza, Dr.
(UTFPR/CP)

Prof. Milton Kist, Dr.
(UFFS/Chapecó)

Visto da coordenação:

Prof^a. Michele Cristina Valentino, Dra.
(Coordenadora do PROFMAT-CP)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR-CP”

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pai criador de todas as coisas, que me encorajou a questionar as realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades.

Aos meus pais, em especial a minha mãe Norma (*in memoriam*) que em vida sempre me incentivou a buscar um futuro de conquistas e aprendizagens.

Ao meu esposo Gustavo Pelegrini Ranucci, meu companheiro de todas as horas, que sempre acreditou no meu potencial, principalmente nos momentos em que eu mesma não acreditava mais.

Aos meus familiares e filhos amados Davi e Luiza, que sofreram com a minha ausência física e psicológica, em virtude da dedicação aos estudos. E que me impulsionaram para conseguir vencer os desafios pelos quais passei.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha querida orientadora Profa. Dra. Glaucia Maria Bressan, pela sabedoria de seus ensinamentos, pela sua postura em saber conduzir este trabalho sempre com dedicação e entusiasmo e também com garra e firmeza nos momentos necessários.

Agradeço a minha coorientadora Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier pelas valiosas orientações que fortaleceram este trabalho.

Aos meus colegas de sala, que se fizeram amigos nesta caminhada e foram essenciais nesta conquista.

A todos os mestres professores do curso pela dedicação e ensinamento.

Agradeço à CAPES pela disponibilidade da bolsa de estudos durante o período do curso.

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

Jacques Bernoulli (1654-1705).

RESUMO

POSSINELLI, Juliana C. **Título do trabalho:** APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA POR MEIO DA OTIMIZAÇÃO LINEAR: O CORRETO DIMENSIONAMENTO DE EMBALAGENS NA REDUÇÃO DE CUSTOS. 2017. 77 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional Profmat - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Este trabalho tem como objetivo estabelecer uma relação entre o estudo da geometria plana e espacial com a teoria da otimização linear, por meio dos teoremas de convexidade, a fim de contribuir para a aprendizagem concreta de conteúdos abordados em sala de aula, com enfoque para os anos finais do Ensino Médio. Para tanto, propõe-se o estudo e a aplicação da otimização linear no processo de corte de embalagens e o estudo da geometria (área e volume) para o dimensionamento dessas embalagens, proporcionando aos alunos uma visão globalizada das possibilidades de aplicação da matemática em diversos ramos do conhecimento, enfatizando a importância destes conhecimentos para o bom dimensionamento de embalagens e com isso contribuir para a redução de custos e desperdício de materiais.

Palavras-chave: Geometria. Otimização Linear. Embalagens. Problema de Corte.

ABSTRACT

POSSINELLI, Juliana C. **GEOMETRY LEARNING THROUGH THE LINEAR OPTIMIZATION: THE CORRECT DIMENSIONING OF PACKAGING IN THE REDUCTION OF COSTS.** 2017. 77 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional Profmat - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

The goal of this work is to determine a relationship between the study of plane and space geometry with the linear optimization theory, through the convexity theorems, in order to contribute to the learning of contents taught in class, with a focus for the final years of High School. For that, the study and application of linear optimization in the cutting process of packaging and the study of geometry (area and volume) for the sizing of these packages are proposed, providing students a global vision of possibilities for mathematics applications in various knowledge areas, emphasizing the importance of such knowledge for the appropriated packaging size and contributing to the costs reduction and materials waste.

Keywords: Geometry. Linear Optimization. Packing. Cutting Problem.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – DIEDRO E ÂNGULO DIÉDRICO.....	21
FIGURA 2 – ELEMENTOS DE UM POLIEDRO.....	21
FIGURA 3 – POLIEDRO CONVEXO.....	22
FIGURA 4 – POLIEDRO NÃO CONVEXO.....	22
FIGURA 5 – POLIEDROS REGULARES.....	23
FIGURA 6 – DIAGONAIS DO CUBO.....	24
FIGURA 7 – PRISMAS.....	25
FIGURA 8 – PARALELEPÍPEDOS P E Q.....	26
FIGURA 9 – PIRÂMIDE.....	26
FIGURA 10 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI.....	28
FIGURA 11 – CILINDRO.....	28
FIGURA 12 – CONE RETO.....	29
FIGURA 13 – CONE OBLÍQUO.....	30
FIGURA 14 – VOLUME DA PIRÂMIDE E CONE.....	31
FIGURA 15 – PASSOS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE PO.....	33
FIGURA 16 – CONJUNTO CONVEXO E NÃO-CONVEXO.....	36
FIGURA 17 – POLÍGONOS ÓTIMOS.....	40
FIGURA 18 – RESTRIÇÕES R1 E R2 DO PROBLEMA.....	50
FIGURA 19 – TODAS AS RESTRIÇÕES DO PROBLEMA.....	50
FIGURA 20 – ESPAÇO SOLUÇÃO.....	51
FIGURA 21 – PONTO ÓTIMO.....	51
FIGURA 22 – VÉRTICE ÓTIMO.....	52
FIGURA 23 – PLANO DE CORTE UNIDIMENSIONAL.....	54
FIGURA 24 – PLANO DE CORTE BIDIMENSIONAL.....	54
FIGURA 25 – PLANO DE CORTE TRIDIMENSIONAL.....	55
FIGURA 26 – EMBALAGEM 1 (E1) E EMBALAGEM(E2).....	58
FIGURA 27 – EMBALAGEM TETRAÉDRICA DA EMPRESA TETRA PACK®....	60
FIGURA 28 – FOTOGRAFIA DA EMBALAGEM PRODUZIDA PELA AUTORA...	61
FIGURA 29 – AS RETAS QUE DETERMINAM UM POLÍGONO QUE CONTÉM A SOLUÇÃO ÓTIMA EM UM DOS SEUS VÉRTICES E O VÉRTICE ÓTIMO.....	67
FIGURA 30 – POLÍGONO QUE DETERMINA O ESPAÇO SOLUÇÃO.....	68
FIGURA 31 – IMAGEM DA PLANILHA DO EXCEL.....	71

FIGURA 32 – BOBINAS E ENVAZE PARA EMBALAGENS LONGA VIDA DE LEITE E SUCO.....	74
FIGURA 33 – BOBINAS DE EMBALAGENS METALIZADOS A SEREM CORTADAS UNIDIMENSIONALMENTE.....	75

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	15
2.1. GEOMETRIA.....	15
2.2. OTIMIZAÇÃO LINEAR	16
3 GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL – IMPORTÂNCIA E BREVE HISTÓRICO. ...	18
3.1 ENSINO DE GEOMETRIA.....	20
3.2 POLIEDROS	21
3.2.1 POLIEDROS REGULARES.....	23
3.2.2 PRIMAS.....	25
3.2.3 PIRÂMIDES	26
3.3 CORPOS REDONDOS.....	28
3.3.1 CILINDRO.....	28
3.3.2 CONE	29
4 PESQUISA OPERACIONAL E OTIMIZAÇÃO LINEAR.	32
4.1 FORMULAÇÃO GERAL DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL).....	34
4.2 TEOREMAS DE CONVEXIDADE.....	35
4.3 MÉTODO SIMPLEX.....	40
4.3.1 FORMA PADRÃO.....	41
4.3.2 ALGORITMO DO MÉTODO SIMPLEX FORMA PADRÃO.....	43
4.3.3 SIMPLEX NA FORMA TABULAR (TABLEAUX SIMPLEX).	44
4.4 RESOLUÇÃO DE UM PPL PELO MÉTODO GRÁFICO.....	48
4.5 PROBLEMAS DE CORTE	53
5 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA E DA OTIMIZAÇÃO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO MÉDIO.....	57
5.1 ATIVIDADE 1: EMBALAGENS DE LEITE LONGA VIDA FORMATO DE PARALELEPÍPEDO.....	57
5.2 ATIVIDADE 2: EMBALAGEM LONGA VIDA FORMATO TETRAÉDRICO	59
5.3 ATIVIDADE 3: APLICANDO O MÉTODO SIMPLEX PARA A SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL) COM DUAS VARIÁVEIS DE DECISÃO.....	63
5.4 ATIVIDADE 4: EXEMPLO DO MÉTODO DA RESOLUÇÃO GRÁFICA.....	66

5.5 ATIVIDADE 5: PROBLEMA DA MISTURA – OTIMIZAÇÃO LINEAR NO <i>SOFTWARE MICROSOFT EXCEL</i>	69
6 APLICAÇÃO DO PROBLEMA DE CORTE.....	72
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
REFERÊNCIAS.....	77

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios dos professores de matemática que estão atuando em sala de aula é fazer com que o aluno relacione o conteúdo que está sendo apresentado com sua aplicação no seu cotidiano. Ou ainda, fazer com que o aluno se interesse pelo conteúdo ministrado e, sobretudo, reconheça que o mesmo é e será importante para sua formação acadêmica e também para sua formação como cidadão participante da sociedade (BRASIL, 1997).

Essa relação entre conceito e aplicação prática nem sempre pode ser demonstrada em todo conteúdo do cronograma da disciplina de matemática, mas é de suma importância que o professor mostre ao aluno que alguns conteúdos são essenciais para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, destacando a importância e a valorização do que está sendo apresentado.

Levando em consideração o exposto acima e atentando-se ao fato de que os alunos estão inseridos em um cenário no qual a tecnologia tem evoluído numa proporção muito grande em um pequeno espaço de tempo – nem sempre acompanhada pela evolução do processo de ensino-aprendizagem nessa fase de mudanças – deve-se estimular a prática do ensino através de novos instrumentos tecnológicos que auxiliem o professor nessa construção do conhecimento ao aluno e, além disso, colocar o discente frente às situações reais, relacionando a matemática com problemas reais.

Segundo Cardia (2014), várias situações do cotidiano obrigam o aluno a utilizar a matemática como ferramenta para solução de seus problemas, no entanto, muitas vezes ele não consegue relacionar que tal situação precisou do conhecimento matemático adquirido para ser resolvida. Por isso, deve-se mostrar a matemática de forma clara e aplicada ao aluno.

De acordo com Parâmetros Curriculares Nacionais PCN`s:

“[...] o ensino da matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal, e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios”. (BRASIL, 1997, p. 31).

Portanto, é necessário fazer uso da contextualização na aprendizagem de matemática, aproximar o cálculo matemático dos problemas reais e das pesquisas, aguçando o interesse do aluno e, buscar novas metodologias e formas de aprendizagem que se adequem à sua realidade.

Atualmente, o ensino de geometria, assim como os demais conteúdos matemáticos, vem de uma crescente desvalorização e falta de interesse por grande parte dos alunos no ensino básico. A geometria, apesar de ser um conteúdo de fácil aplicabilidade, se não for trabalhada com dedicação e apresentada de forma correta ao aluno, seu nível de abstração será igual ou maior em relação aos demais ramos da matemática (DANTE, 2013).

Neste contexto, este trabalho aborda um dos ramos da matemática com grande aplicação e utilização em várias situações rotineiras e cotidianas, a geometria, e o estudo da convexidade por meio da teoria da otimização linear. Esta, por sua vez, é capaz de analisar matematicamente a solução ótima a diversos problemas envolvendo muitos ramos de atuação, sejam eles, financeiros, estatísticos, logísticos, entre outros (ARENALES et al, 2015).

Segundo Vendrame (2014, p. 16), o aluno aprende problemas resolvendo problemas [...] a matemática torna-se mais significativa ao aluno que tem um amplo contato com diversos tipos de problemas matemáticos com certa frequência. Neste caso, o aluno estará mais capacitado e seguro para abordar novos problemas.

A relação entre o estudo da geometria e da otimização linear enfatizará a importância da aprendizagem contextualizada, relacionando alguns problemas do cotidiano de uma empresa com os conteúdos matemáticos da sala de aula.

Diante deste cenário, o objetivo deste trabalho é estabelecer uma relação entre o estudo da geometria plana e espacial com a teoria da Otimização Linear, por meio dos teoremas de convexidade, a fim de contribuir para a aprendizagem de conteúdos de Geometria abordados em sala de aula. Para tanto, propõe-se o estudo e a aplicação da otimização linear no processo de corte de embalagens e o estudo da Geometria (área e volume) para o dimensionamento dessas embalagens.

As contribuições deste trabalho envolvem a diminuição do desperdício de matéria-prima no processo de corte de embalagens de uma empresa, o melhor

aproveitamento do material e da mão-de-obra/tempo disponíveis, por meio do estudo de um processo de otimização; a proposta de atividades a serem aplicadas em sala de aula no ensino básico é proporcionar ao aluno a assimilação de conteúdos de geometria que lhe é apresentado durante sua trajetória escolar, manipulando-os com segurança e facilidade.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 refere-se à Revisão Bibliográfica de autores que abordam os temas Geometria e Otimização Linear; o Capítulo 3 trata de um aporte teórico sobre alguns importantes conceitos da geometria espacial, no intuito de enfatizar a importância de tais conteúdos para os alunos, sobretudo os que estão nos anos finais do ensino básico. O Capítulo 4 descreve os conceitos e métodos da Otimização Linear, bem como os teoremas de convexidade e o Método Simplex. O Capítulo 5 apresenta a proposta de algumas atividades a serem aplicadas com os alunos dos anos finais do ensino médio, envolvendo o estudo da Geometria por meio da Otimização Linear. O capítulo 6 apresenta uma aplicação prática do problema do corte. Por fim, o Capítulo 7 encerra o trabalho com as devidas considerações e aspirações futuras.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem por objetivo fazer referência aos aportes teóricos que fundamentam essa investigação. Dividido em duas seções, a primeira aborda o ensino da geometria e a segunda o conceito e a aplicação da Otimização Linear neste processo de contextualização do ensino.

2.1. GEOMETRIA

Em Cardia (2014) o ensino da Geometria é contextualizado por meio do uso de embalagens na construção do conhecimento e apropriação dos conceitos de área e volume, analisando várias embalagens no formato de sólidos geométricos e sugerindo modificações de embalagens já conhecidas comercialmente. O autor menciona o termo “otimização”, no entanto, a otimização a que se refere trata-se de mudanças nas perspectivas e formatos das embalagens, no intuito de melhorar alguns aspectos, tanto na produção da própria embalagem, sugerindo redução de material, por exemplo, quanto em questões que envolvam o transporte e armazenamento destas embalagens. As atividades propostas tratam da alteração de formato das embalagens, que são projetos desenvolvidos por seus alunos e aplicados em sala de aula, onde eles levam em consideração as melhorias na embalagem, ou até mesmo propostas de mudanças radicais, visando tornar a nova embalagem mais interessante econômica e logisticamente.

Vendrame (2014) aborda a importância do ensino de Geometria plana e espacial, trabalhando com problemas matemáticos vinculados à otimização, no que se refere à maximização e minimização de áreas e volumes. Trata sobre a importância do ensino da Geometria durante a formação do aluno, desde os anos iniciais até os anos finais da educação básica. O autor desenvolveu, em seu trabalho, atividades de investigação e sondagem, trazendo ao aluno questionamentos de comparação entre sólidos de mesma área para verificação de qual o formato é capaz do maior armazenamento com a mesma quantidade de material para confecção, por exemplo, explorando o cálculo de áreas de figuras geométricas planas e volumes de diversos tipos de sólidos geométricos.

Analisando a obra de Dante (2013), disponibilizado para os alunos do estado do Paraná, na rede pública da educação básica, com foco especial no volume 2, direcionado aos alunos do 2º (segundo) ano do Ensino Médio, nota-se que a obra apresenta os conceitos matemáticos e demonstrações de algumas equações, relacionando tais conhecimentos com alguns aportes históricos. Além disso, disponibiliza fotografias e imagens da atualidade, relacionando-as com a geometria plana e espacial. As atividades e exercícios do livro são diversificadas, a maioria mais conceitual e teórica, outras atividades apresentam aplicações práticas relacionadas a situações do cotidiano, contudo a proposta principal é o foco para vestibulares, concursos e para o exame nacional do ensino médio (ENEM).

Fontes (2015) abordou a temática “Avaliação de Diferentes Metodologias Aplicadas ao Ensino da Geometria”, relatando uma experiência real que desenvolveu com os seus alunos do segundo ano do ensino médio, aplicando a metodologia tradicional do ensino da Geometria em uma sala de aula, e, em seguida, desenvolveu o método denominado “Teoria de *Van Hiele* do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico”. O seu trabalho teve a conclusão baseada na avaliação inicial e na avaliação final, apresentando o desenvolvimento dos alunos nos dois métodos. O modelo de *Van Hiele* foi utilizado para orientar a formação dos alunos e avaliar as suas habilidades, ajudando-os a atingirem um nível mais alto de pensamento geométrico.

2.2. OTIMIZAÇÃO LINEAR

Muitos trabalhos apresentam a importância do uso da Otimização Linear do desenvolvimento de uma situação problema onde o objetivo é maximizar ou minimizar uma função objetivo, a qual representa matematicamente um problema real. Em sua grande maioria, os trabalhos analisados, como Cardoso (2014), são voltados para aplicação dos conceitos da otimização linear no ensino superior, com o intuito de resolver os problemas oriundos da rotina de uma empresa/indústria usando os conceitos e teoremas da programação linear e seus métodos para solucionar diversos problemas relacionados à produção, montagem, cortes e empacotamentos, misturas, transporte, entre outros.

Poldi e Arenales (2009) abordam o problema de corte de estoque multiperíodo, que pertence ao problema de planejamento e programação da

produção. Este, tem um estágio de produção caracterizado pelo corte de peças. Logo, a partir da demanda, é possível antecipar ou não a produção de itens e utilizar objetos em um período que não foram utilizados no anterior. O objetivo do trabalho foi propor um modelo de otimização linear inteira de grande porte, aplicando-se o Método Simplex. Esse modelo multiperíodo pode ser uma ferramenta que fornece ao tomador de decisões uma ampla visão do problema, auxiliando na tomada de decisão. Utilizando o Método Simplex com geração de colunas, foram realizados experimentos computacionais que mostraram ganhos efetivos usando o modelo de corte de estoque multiperíodo, quando comparado com a solução lote-por-lote. Desenvolveram então dois procedimentos de arredondamento da solução do problema multiperíodo, adaptados e baseados nas heurísticas de arredondamento propostas para problemas de corte com único período (POLDI, 2003).

Almeida (2016) aborda os conceitos da Otimização Linear, seus teoremas, métodos de solução e sugere aplicação dos conhecimentos da Otimização Linear na Educação Básica a partir da educação infantil até o último ano do ensino médio. Essa abordagem consiste em implementar na sala de aula, no caso da educação infantil até o final do ensino fundamental, problemas que envolvam tomada de decisão. Nesta fase, o aluno avalia sempre a melhor solução de problemas com níveis de dificuldades condizentes com a faixa etária e o grau de aprendizagem do aluno, abordando a álgebra e a geometria. Já no Ensino Médio, segundo o autor, onde o aluno possui mais conhecimento e discernimento para a manipulação algébrica, é quando são apresentados os problemas de Otimização Linear voltados para a maximização ou minimização de resultados. O autor sugere o desenvolvimento de trabalhos com matrizes e determinantes, soluções de sistemas lineares e abordagens nos conceitos de funções.

Complementando essa linha de pesquisa, Campos (2016) trata a Otimização Linear descrevendo primeiramente o conceito da Otimização, seus teoremas e métodos de solução, como método da solução gráfica, Método Simplex e outros algoritmos computacionais. Aborda ainda problemas clássicos da otimização envolvendo transporte, mistura (ração), dieta e produção. Finalmente, aborda a aplicação de problemas de duas e três variáveis com solução através do método gráfico como sugestão para aplicação em sala de aula para os alunos do Ensino Médio.

3 GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL – IMPORTÂNCIA E BREVE HISTÓRICO

Este capítulo tem por objetivo fazer referência aos aportes teóricos que fundamentam essa investigação, quanto ao ensino da geometria. As demonstrações dos conceitos abordados neste capítulo não pertencem ao escopo deste trabalho, mas podem ser encontradas em Dolce e Pompeo (2005), Iezzi et al (2010), Muniz Neto (2013), entre outras obras do gênero.

A geometria é um dos campos matemáticos que apresenta uma grande possibilidade de conexão com outros conteúdos, como a álgebra e a aritmética. Por ser um conteúdo em que se consegue visualizar e manipular objetos, a aprendizagem ocorre de maneira mais significativa, pois o aluno consegue, através de situações concretas, construir o conhecimento com maior ênfase. Lorenzato (1995) destaca que a geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a matemática possui, pois se interliga com a aritmética e com a álgebra. Assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser classificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. Complementando essa ideia, cita-se os Parâmetros Curriculares Nacionais, ao que se diz respeito ao ensino de geometria:

“Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc.” (BRASIL, 1997, p. 82).

A aprendizagem da geometria é uma consequência da observação do mundo que nos cerca. Os principais conteúdos de geometria estudados até hoje no ensino regular foram determinados há muitos anos pelos matemáticos diante de seus anseios de desvendar o universo que o cercava.

Há mais de 300 anos a.C., Platão, filósofo grego (427-347 a.C.) escreveu na porta de sua academia, que era o local onde transmitia seus ensinamentos aos seus discípulos: ‘Que não entre aqui aquele que ignore a Geometria’. Platão defendia em seus diálogos, o *quadriúvio*, os quatro campos da matemática nos estudos das artes liberais, que compreendia a Aritmética, a Geometria plana, a Geometria espacial

e a Astronomia. Acreditava-se que a busca da compreensão das coisas levava à pureza do conhecimento (DANTE, 2013).

A evolução do conhecimento humano em relação aos fenômenos naturais que o cercam, sempre esteve acompanhada das descobertas e postulados geométricos. Os gregos atingiram seu ápice, e assumiram o desenvolvimento da Geometria assumindo o conceito dedutivo, assim como era feito naquela época, se sobrepondo ao conhecimento empírico. Assim as questões que intrigavam a sociedade como a dimensão do raio do planeta terra, a distância entre a Terra ao Sol, ou entre a Terra à Lua, que já eram estimadas por sábios anteriores, passaram a ter embasamento científico através dos conhecimentos geométricos (DANTE, 2015).

Segundo Dante (2015), com o fim da hegemonia grega, o mundo passou por quase 15 séculos de trevas. E diante da queda de Constantinopla e o início do Renascimento, os textos gregos voltaram à Europa, trazidos pelos refugiados da invasão turca, e desta forma os conhecimentos acerca da Geometria puderam voltar a contribuir para os avanços de outros campos do conhecimento científico. Algumas contribuições da Geometria à ciência ao longo do tempo são descritas a seguir.

Usando triângulos retângulos, semelhanças de triângulos e proporções, o grego Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.) comparou as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.

Eratóstenes (276 a.C. – 196 a.C.) não era grego, mas estudou em Alexandria. Era um sábio versátil e ficou conhecido por sua engenhosa ideia de calcular o raio da Terra, baseado na proporcionalidade entre a medida e comprimento de arcos, nos ângulos correspondentes em paralelas cortadas por transversais e na razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Ainda segundo Dante (2015), O polonês Nicolau Copérnico (1476-1543) retomou as hipóteses heliocêntricas de Aristarco (que na época não evoluíram) e elaborou toda a teoria que se baseava nas órbitas circulares dos planetas em torno do Sol, calculando os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias até o Sol, com base na proporcionalidade de arcos e semelhança de triângulos (parte da trigonometria).

Mais tarde o alemão Johannes Kepler (1571-1630) aperfeiçoou as ideias de Copérnico e afirmou que as órbitas dos planetas são na verdade elípticas e apresentou as três leis conhecidas até hoje como as Leis de Kepler, contendo muita proporcionalidade, cálculo de áreas e elipses.

A geometria estudada atualmente é essencialmente a mesma geometria que serviu de alicerce para que os muitos estudiosos do passado conseguissem desenvolver seus postulados e teorias, para que desvendassem e entendessem os fenômenos naturais que os cercavam, que são os mesmos que cercam a humanidade atual. Tais resultados obtidos por esses sábios da antiguidade foram objetos de muitos estudos e, por esse motivo, até hoje são considerados os maiores matemáticos, astrônomos ou geômetras de suas épocas (DANTE, 2015).

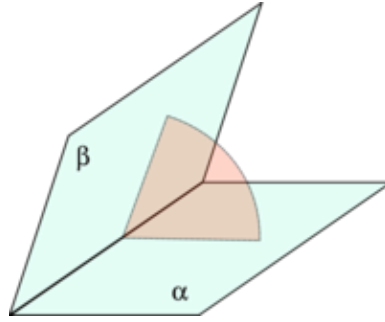
3.1 ENSINO DE GEOMETRIA

O mundo em que vivemos é rodeado de objetos que possuem três dimensões - comprimento, altura e largura – e o ramo da Matemática que estuda esses objetos é a geometria espacial. No caso da geometria plana, quando se estuda as figuras planas em duas dimensões, foge-se um pouco da realidade, pois no exemplo de uma folha de papel A4, quando se diz que essa folha está no formato retangular, e considera-se sua altura e largura, sua espessura está sendo desprezada. A correta representação desta folha seria do tipo de poliedro chamado prisma, com suas três dimensões (CARDIA, 2014).

Inicialmente, o conceito de geometria de posição é pré-fixado desde as séries iniciais com os primeiros postulados e axiomas, conceituado o ponto, a reta, plano e as posições relativas entre eles. Utilizando as próprias folhas de cadernos dos alunos, livros, ou até mesmo as paredes da sala de aula, é possível introduzirmos o conceito de semiplanos, quando “encaixados”, nos trazem a ideia dos diedros, definidos a seguir.

Ângulo diedro ou diedro ou ângulo diédrico, é a reunião de dois semiplanos de mesma origem, não contidos num mesmo plano (DOLCE, O. e POMPEO, J. N 2005, pág. 80), conforme figura 1.

Figura 1 – Diedro e ângulo diédrico.



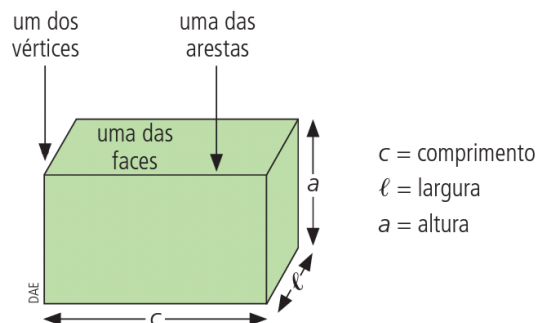
Fonte: WIKIMEDIA.ORG.<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/20/ihedral_angle.png>. Acesso em 13/5/2016.

3.2 POLIEDROS

[...] Uma abordagem usando esses dois conceitos, poliedro e superfície poliédrica (como mencionado), é encontrada em DI PIERRO NETO, et al., p.267. É interessante observar, entretanto, que o uso do termo “sólido geométrico” para significar indistintamente poliedro e superfície poliédrica é bastante comum. Isso ocorre, por exemplo, com o software Poly, onde o termo *solids* (ou sólidos) é utilizado, porém os objetos apresentados pelo software não são sólidos, o que pode ser observado quando exibimos a planificação dos mesmos no plano. [...] (FANTI et al, 2010, p. 731).

O primeiro momento de conflito ou problemática é a identificação dos principais elementos de um poliedro, conforme a figura 2, e o cálculo relacionado a quantidade desses elementos, uma vez que, conforme aumenta-se o número de semiplanos (faces), tem-se que conjecturar uma maneira de descobrir tais resultados.

Figura 2 – Elementos de um poliedro.



Fonte: CARRILHO, L. **Matemática 5º - Sólidos Geométricos**. Poliedros e Não-Poliedros. Obichinhodosaber.com. 11/03/2010. Disponível em: <<http://www.obichinhodosaber.com/2010/03/11/matematica-5%C2%BA-i-solidos-geometricos-2-poliedros-e-nao-poliedros/>>. Acesso em: 13/05/2016.

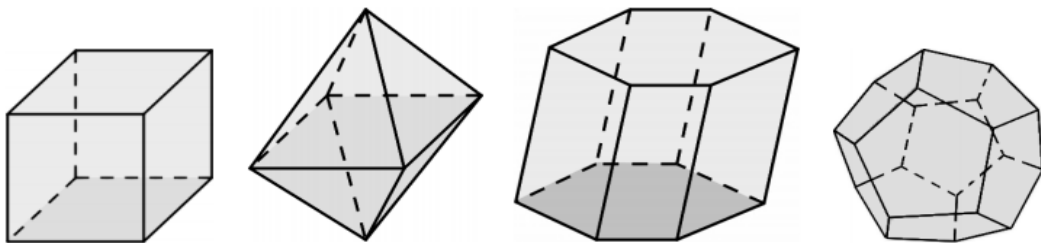
Na classificação dos poliedros, temos os convexos e não convexos:

“Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior deste poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior C é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C . Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos”. [Lima, 1991].

Partindo do pressuposto de que cada face triangular possui três arestas, cada face quadrangular possui quatro arestas e assim sucessivamente, deduz-se que o número de arestas é dado por: $3.F_3 + 4.F_4 + 5.F_5 + \dots + n.F_n$, onde F_3 é o número de faces triangulares, F_4 o número de faces quadrangulares e assim sucessivamente.

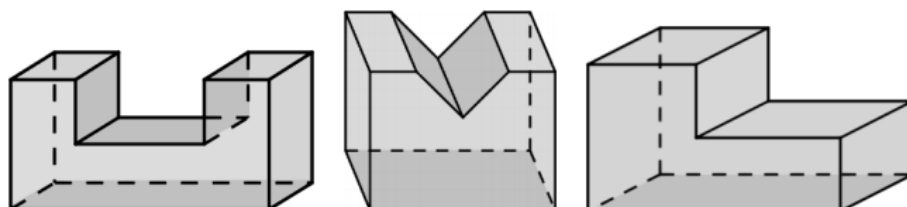
A relação de Euler diz que em todo poliedro convexo, $V+F=A+2$, onde V é o número de vértices, F é o número de faces e A é o número de arestas de cada poliedro, as demonstrações da relação foram adaptadas por Lima (1991). É válido ressaltar que a relação de Euler é válida para poliedros convexos, ilustrados na figura 3, mas, para os poliedros não convexos, ilustrados na figura 4, ela pode ou não ser válida.

Figura 3 – Poliedro convexo.



Fonte: SITE REFORCANDOMATEMATICA.BLOGSPOT.COM.BR. **Geometria espacial métrica.** Disponível em: <<https://reforcandomatematica.blogspot.com.br/2016/06/geometria-espacial-metrica.html>>. Acesso em: 10/11/2016.

Figura 4 - Poliedro não convexo.



Fonte: SITE REFORCANDOMATEMATICA.BLOGSPOT.COM.BR. **Geometria espacial métrica.** Disponível em: <<https://reforcandomatematica.blogspot.com.br/2016/06/geometria-espacial-metrica.html>>. Acesso em: 10/11/2016.

A conclusão apresentada na Relação/Fórmula de Euler, foi uma homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Esta relação foi mostrada em uma carta escrita para seu amigo (também matemático) Christian Goldbach em 1750 (RICHESON, 2008, p.66). É válido ressaltar que um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, contém resultados a partir dos quais se poderia obter a Fórmula de Euler (LIMA, 1991. p. 69).

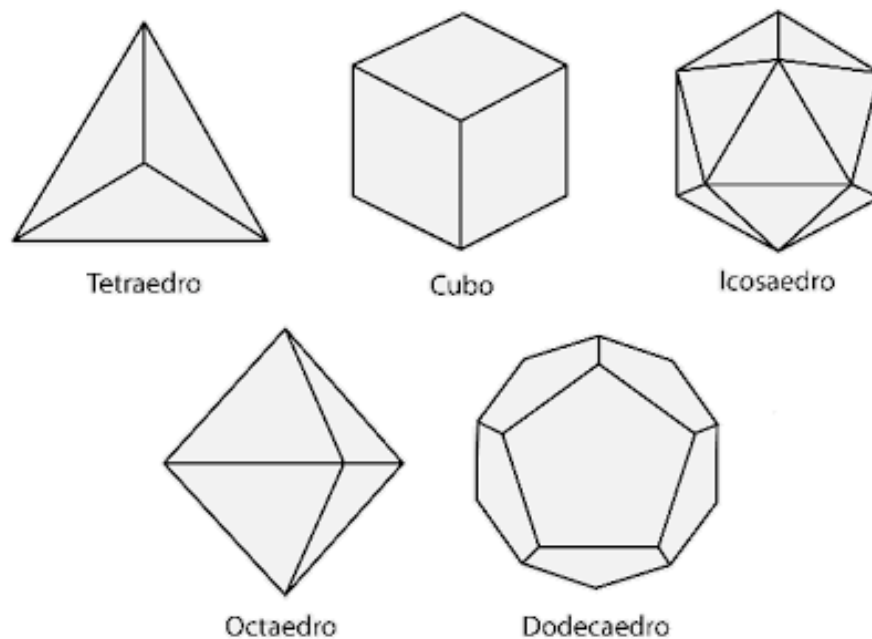
3.2.1 POLIEDROS REGULARES

Uma perfeita definição dos objetos desta seção, é descrita na citação abaixo:

Um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais (mais precisamente, congruentes) e, além disso, em cada vértice do poliedro concorre o mesmo número de arestas. Tais poliedros são conhecidos como poliedros de Platão (LIMA, 1991, p. 69).

Sabe-se também, que só existem cinco poliedros regulares. São eles: Tetraedro Regular, Hexaedro Regular, Dodecaedro Regular e Icosaedro Regular, conforme figura 5.

Figura 5 – Poliedros regulares.



Fonte: SITE PROFESSORESSOLIDARIOS.BLOGSPOT.COM.BR. Poliedros e corpos redondos. 10/07/2011. Disponível em: < <http://professoressolidariosmatematica.blogspot.com.br/2011/07/poliedros-e-corpos-redondos.html> >. Acesso em: 13/12/2016.

Na apresentação dos poliedros regulares, não encontramos dificuldade na contagem do número de vértices, faces e arestas nos três primeiros poliedros, cujo número de faces é menor. Já nos dois seguintes, surgem as primeiras dificuldades em relação a essa contagem. A partir deles, define-se o conceito de Diagonal de um poliedro. Novamente, partindo do conceito de Diagonal de um polígono, generaliza-se o cálculo dessas diagonais para finalmente mostrar que para um número menor de faces, é possível usar o processo de contagem, sabendo apenas a definição de diagonal. Para um número maior de faces, uma outra solução deve ser elaborada.

Em toda geometria espacial, a visualização e a interpretação geométrica é o maior objetivo. Logo, essas dificuldades fazem parte do processo de ensino e aprendizagem para o melhor desenvolvimento do conteúdo proposto.

A soma dos ângulos das faces de um poliedro é feita calculando a soma dos ângulos internos de cada polígono que se apresenta em suas faces ou usando a relação:

$$Sf=360^\circ(V-2),$$

onde Sf é a soma dos ângulos das faces e V é o número de vértices do poliedro.

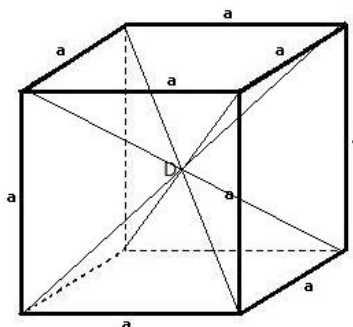
Define-se como diagonal de um poliedro, todo segmento de reta que une dois vértices não situados numa mesma face.

Para este tipo de cálculo, combina-se o número de arestas tomados dois a dois para encontrar todas as possíveis ligações entre dois vértices do poliedro e em seguida exclui-se os segmentos que representam ligações entre vértices da mesma face (arestas e as diagonais das faces), conforme equação a seguir.

$$D = C_{v,2} - A - \sum Df,$$

onde A é o número de arestas e $\sum Df$ é o somatório das diagonais das faces, ilustrado na figura 6.

Figura 6 - Diagonais do cubo



Fonte: autora (2016).

3.2.2 PRIMAS

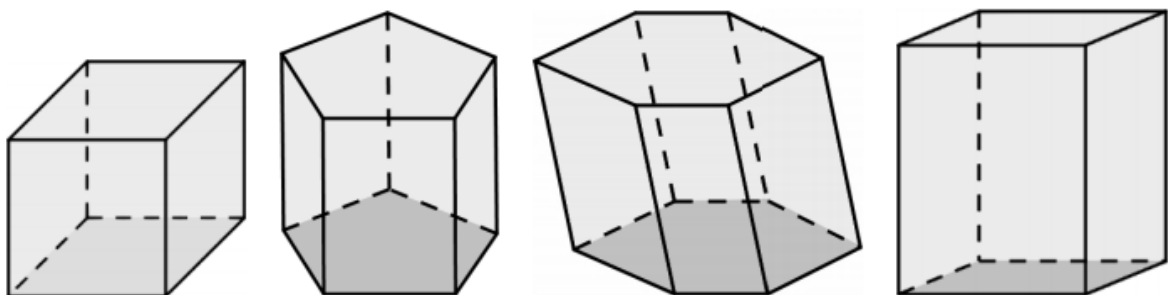
O **prisma** é um sólido geométrico que faz parte dos estudos de geometria espacial, conforme figura 7. É caracterizado por ser um poliedro convexo com duas bases (polígonos iguais) congruentes e paralelas, além das faces planas laterais (paralelogramos) (DANTE, 2013).

Os elementos que compõem um prisma são: base, altura, arestas, vértices e faces laterais. Assim, as **arestas das bases** do prisma são os lados das bases do polígono, enquanto que as **arestas laterais** correspondem aos lados das faces que não pertencem às bases. Ademais, os **vértices** do prisma são os pontos de encontro das arestas e a **altura** é calculada pela distância entre os planos das bases.

Os cálculos da área total do prisma, faz-se pela soma das áreas de todas as suas faces e seu volume calculado pelo produto entre a área da base e sua altura [$V = Ab \cdot h$]. Os prismas podem ser **retos** quando as arestas laterais são perpendiculares às bases, e **oblíquos** quando não são perpendiculares. Assim, em um prisma reto, as faces laterais são regiões retangulares.

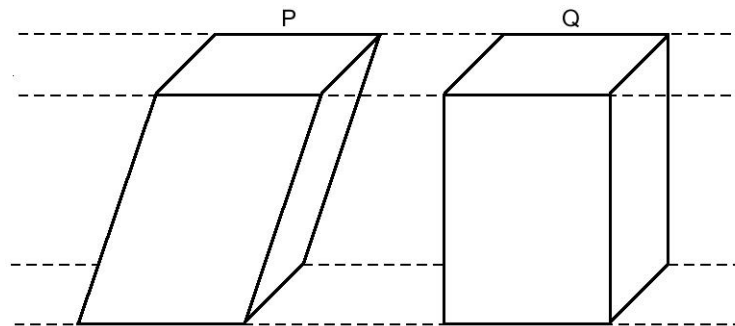
Tem-se um caso particular de prisma, o **paralelepípedo**, conforme a figura 8, que são prismas cuja particularidade é que qualquer uma de suas faces, em forma de paralelogramo, pode ser tomada como base, pois duas faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si. Lembrando que o retângulo é um caso particular de paralelogramo.

Figura 7 – Prismas.



Fonte: SITE REFORCANDOMATEMATICA.BLOGSPOT.COM.BR. **Geometria espacial métrica**. Disponível em: <<https://reforcandomatematica.blogspot.com.br/2016/06/geometria-espacial-metrica.html>>. Acesso em: 09/11/2016.

Figura 8 – paralelepípedos P e Q.



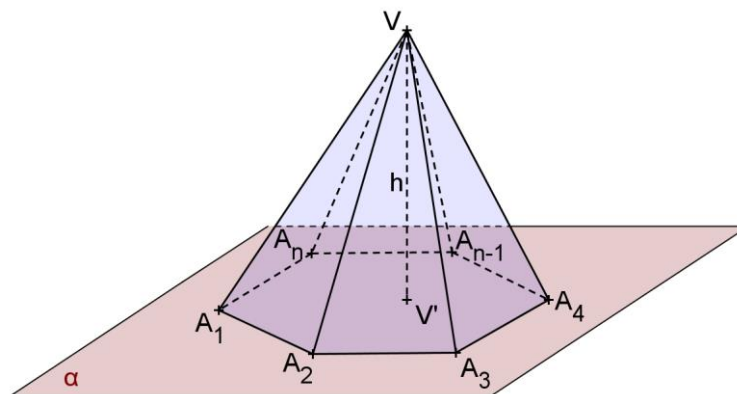
Fonte: SITE UFRGS.BR. **Prisma.** Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo1/conteudo/conteudos15.htm>>. Acesso em 10/11/2016.

3.2.3 PIRÂMIDES

Para a construção de uma pirâmide, considere uma região poligonal, denotada $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$, contida em um plano α e um ponto V exterior ao plano da região poligonal.

Traça-se os segmentos $\overline{VA_1}$, $\overline{VA_2}$, $\overline{VA_3}$, $\overline{VA_4}$, ... $\overline{VA_{n-1}}$, $\overline{VA_n}$. Cada dois vértices consecutivos de $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$ determinam com V uma região triangular. Essas regiões triangulares, juntamente com a região poligonal $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$, determinam um poliedro chamado **pirâmide** de base $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$ e vértice V , conforme figura 9 .

Figura 9 – Pirâmide.



Fonte: COSTA, D.M.B. et al. **Elementos de Geometria**: Geometria plana e espacial. Pág. 157. Curitiba, 2012. Docplayer.com.br. Disponível em: <<http://docplayer.com.br/12112695-Geometria-plana-e-espacial.html>>. Acesso em 10/11/2016.

A região do espaço ocupada pela pirâmide é formada pelos pontos dos segmentos de reta que ligam o vértice V aos pontos da região poligonal (base).

A distância do vértice ao plano da base, que se indica por h , é chamada **altura** da pirâmide. Os segmentos $\overline{VA_1}, \overline{VA_2}, \overline{VA_3}, \overline{VA_4}, \dots, \overline{VA_{n-1}}, \overline{VA_n}$, são chamados **arestas laterais**, e as regiões triangulares $VA_1A_2, VA_2A_3, VA_3A_4, VA_4A_{n-1}, VA_{n-1}A_n$ são chamadas **faces laterais** da pirâmide (DANTE, 2013).

O volume de uma pirâmide qualquer pode ser determinado através de uma relação do cálculo do volume da pirâmide de base triangular com o princípio de Cavalieri. Assim, dada uma pirâmide qualquer, consideramos uma pirâmide triangular que tenha a mesma área da base e a mesma altura de uma pirâmide qualquer.

O volume de uma pirâmide triangular é calculado com a seguinte relação

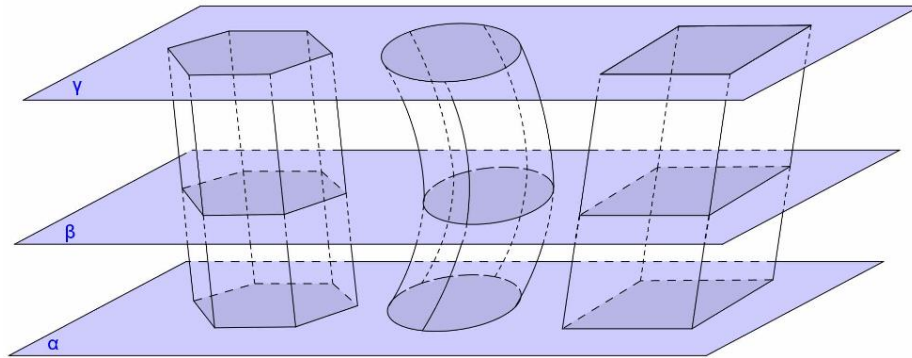
$$V_{PT} = \frac{\text{Área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

Portanto, para o volume de uma pirâmide qualquer, o mesmo cálculo pode ser aplicado.

Segundo Dante (2013), o italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que foi discípulo de Galileu, publicou em 1635 sua *teoria do indivisível*, contendo o que até hoje é conhecido como “princípio de Cavalieri”. Sua teoria, que permitia que se encontrasse rapidamente e com exatidão a área e o volume de muitas figuras geométricas, foi duramente criticada na época. Segundo seus críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada. No entanto, o princípio de Cavalieri viria a ser um dos pilares do que hoje se conhece como cálculo integral, ajudando a definir a noção de integral.

Este princípio diz que dois sólidos que tiverem mesma altura e, sempre que seccionados por um mesmo plano gerarem área iguais, terão o mesmo volume, como pode ser visto na figura 10 a seguir.

Figura 10 – Princípio de Cavalieri.



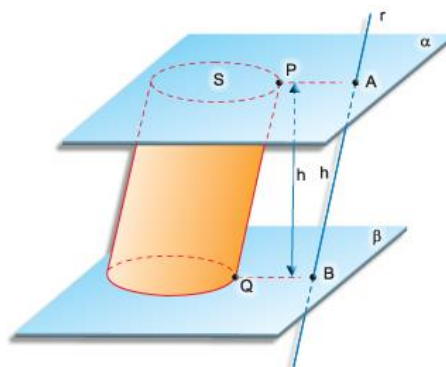
Fonte: COSTA, D.M.B. et al. **Elementos de Geometria**: Geometria plana e espacial. Pág. 154. Curitiba, 2012. Docplayer.com.br. Disponível em: <http://docplayer.com.br/12112695-Geometria-plana-e-espacial.html>>. Acesso em 10/11/2016.

3.3 CORPOS REDONDOS

3.3.1 CILINDRO

Considere dois planos α e β , distintos e paralelos, e um segmento de reta PQ com P pertencente a α e Q pertencente a β . Dado um círculo S de centro O e raio r , contido em α , chamamos cilindro circular (ou simplesmente cilindro) à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruentes ao segmento PQ e que unem um ponto do círculo S a um ponto de β , conforme figura 11. No caso de \overline{PQ} ser perpendicular a α , o cilindro é reto (DANTE, 2013).

Figura 11 – Cilindro.



Fonte: SITE CONTEUDOONLINE.OBJETIVO.BR. Cilindro. Disponível em: <http://conteudoonline.objetivo.br/Conteudo/Index/661?token=5%2F2Yd2%2Bzzv%2F29umTApxi0Q%3D%3D>>. Acesso em 16/12/2016.

Para o cálculo da área da superfície de um cilindro reto faz-se o cálculo da área da superfície lateral (retangular):

$$A = 2\pi rh,$$

mais as superfícies das duas bases:

$$A = \pi r^2.$$

Para o cálculo do volume, também de maneira análoga ao volume de qualquer prisma, pelo princípio de Cavalieri, tem-se

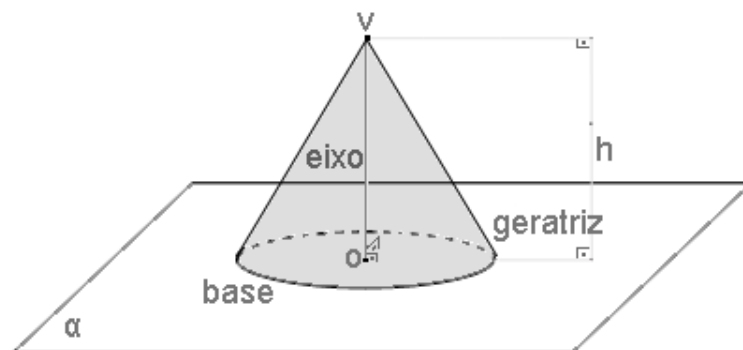
$$V = \pi r^2 h.$$

3.3.2 CONE

Considera-se um plano α , uma região circular R nesse plano e um ponto P não pertencente a α . A reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto de R ao ponto P é um sólido chamado **cone circular** ou simplesmente **cone**. Assim, a superfície do cone é formada por uma parte plana, a região circular, que é a sua base, e uma parte não plana, “curva”, arredondada, que é a sua superfície lateral (DANTE, 2013).

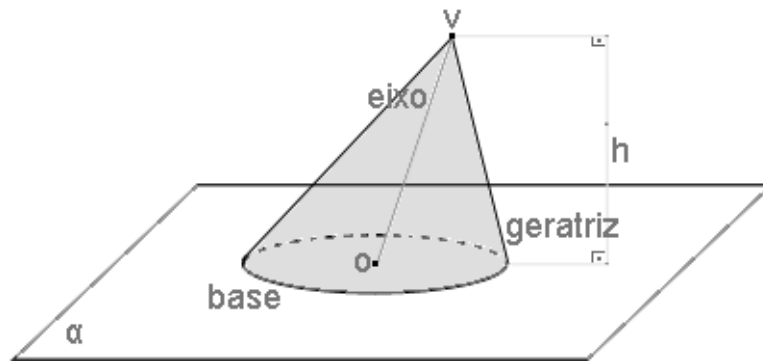
O eixo do cone é o segmento de reta que liga o vértice ao centro da base. Se o eixo é perpendicular à base o cone é **reto**, como na figura 12. Se o eixo é oblíquo à base, o cone é chamado **oblíquo**, ilustrado na figura 13.

Figura 12 – Cone reto.



Fonte: SITE MATEMATICADIDATICA.COM.BR. **Sólidos Geométricos:** Área e volume do cone circular. Disponível em: <<http://www.matematicadidatica.com.br/Solidos-Geometricos-Area-Volume-Cone.aspx>>. Acesso em: 16/12/2016.

Figura 13 – Cone oblíquo.



Fonte: SITE MATEMATICADIDATICA.COM.BR. **Sólidos Geométricos:** rea e volume do cone circular. Disponível em: <<http://www.matematicadidatica.com.br/Solidos-Geometricos-Area-Volume-Cone.aspx>>. Acesso em: 16/12/2016.

Como a área da superfície lateral de um cone circular reto é igual a área de um setor circular cujo raio é a medida da geratriz g e o comprimento do arco é o comprimento da circunferência da base do cone, isto é, $2\pi r$, onde r  a medida do raio da base, tem-se que a área da superfície lateral é dada por

$$A_l = \frac{g \cdot 2\pi r}{2} = \pi r g,$$

em que a geratriz do cone, pode facilmente ser encontrada utilizando o Teorema de Pitágoras, já que o raio e a altura deste cone reto formam entre si um ângulo reto.

A rea da base é igual ao produto de π pelo quadrado do seu raio, já que a base é um círculo:

$$A_b = \pi r^2$$

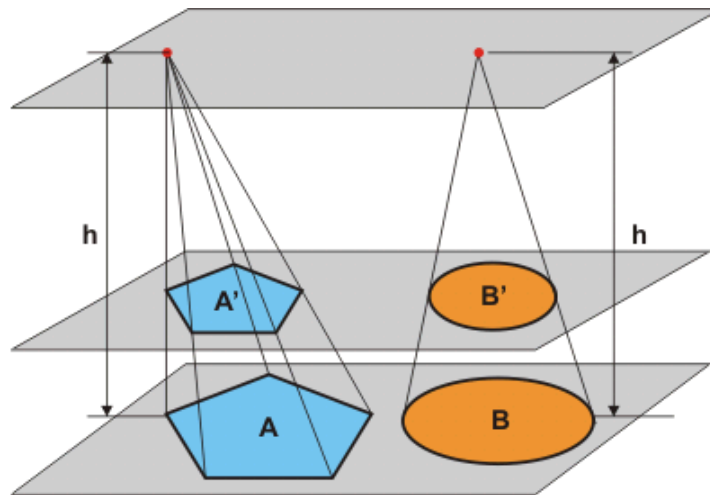
Para o cáculo do **volume**, pelo princípio de Cavalieri pode-se afirmar que um cone e uma pirâmide tero o mesmo volume, se as suas secções paralelas aos planos que as contém, determinarem figuras planas de mesma área, conforme figura 14.

Assim,

$$V_{cone} = \frac{A_b}{3} \cdot h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ou seja, um terço a área da base multiplicada pela sua altura.

Figura 14 – Volume da pirâmide e cone.



Se área A = área B
e área A' = área B'

então o **volume da pirâmide = volume do cone**

Fonte: SITE ALFACONNECTION.PRO.BR. **Cálculo de volumes.** Disponível em:
<http://www.alfaconnection.pro.br/matematica/geometria/principio-de-cavalieri/calculo-de-volumes/>.
Acesso em 16/12/2016.

4 PESQUISA OPERACIONAL E OTIMIZAÇÃO LINEAR.

A Pesquisa Operacional (PO) é uma ciência que consiste no estudo de estratégias por meio do desenvolvimento de métodos científicos e matemáticos envolvendo muitas vezes sistemas complexos, com a finalidade de prever ou comparar estratégias que melhor definirão uma tomada de decisão precisa e que culmine no sucesso desta escolha (CARDOSO, 2011).

Como se conhece atualmente, a Pesquisa Operacional surgiu durante a Segunda Guerra Mundial, tendo como objetivo desenvolver métodos científicos para solucionar problemas relacionados com as ações militares da época, problemas estes complexos de natureza logística, tática e de estratégia militar (CARDOSO, 2011). E então foram desenvolvidos modelos matemáticos que relacionavam os dados e fatos a serem analisados, permitindo assim que pudessem ser estudados e avaliados, para que chegassem a uma conclusão com grande potencial de sucesso, ou ainda, a melhor solução para cada situação, podendo ainda propiciar soluções alternativas que lhes oferecessem o mesmo sucesso esperado (CARDOSO, 2011).

O sucesso das ações desenvolvidas durante a guerra foram tantos, que terminado o período de conflito, esses grupos de cientistas e a sua nova metodologia de abordagem de problemas se transferiram para as empresas que, com o pós-guerra, tiveram um alto desenvolvimento econômico e também se viram confrontadas com problemas de grande complexidade para manterem seus lucros e crescimentos na época.

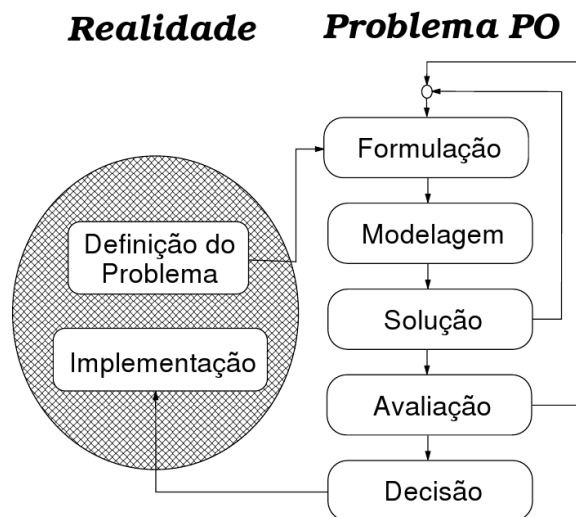
Em 1947, os Estados Unidos implantaram o projeto SCOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*) com o objetivo de apoiar decisões nas operações da força aérea americana, coordenado pelo economista e matemático George Dantzig, que desenvolveu e formalizou o *Método Simplex* para resolver problemas de otimização linear (CARDOSO, 2011).

Outro marco importante para a otimização linear, ocorreu em 1984, com a publicação do *Método de pontos interiores*, o qual também vinha sendo intensamente pesquisado. Esses dois métodos, Simplex e de pontos interiores são, atualmente, as principais ferramentas computacionais para a resolução de problemas de otimização linear (ARENALES, et al. 2007).

Considerando seu caráter multidisciplinar, a Pesquisa Operacional (PO) é aplicada em diversas áreas do conhecimento, como: medicina, finanças, administração, agricultura, planejamento da produção, engenharia, entre outras, devido sua característica de determinar a programação otimizada dos resultados.

A figura 15 ilustra os passos para implementação e resolução de um problema aplicando-se os métodos da PO (CARDOSO, 2011).

Figura 15 – Passos para a implementação de PO.



Fonte: CARDOSO (2011).

O primeiro passo é a identificação do problema a ser estudado, a fase de **formulação** consiste da estruturação dos dados e informações disponíveis, a próxima fase é a construção de um **modelo**, que é uma representação simplificada do sistema, geralmente elaborado pelo conjunto de equações e desigualdades matemáticas que definem a sistemática do problema, a **solução** é alcançada através de um método utilizado ou um algoritmo de solução. A **avaliação** consiste na validação do modelo, e nesta importante fase podem ser realizados ajustes de correção, para então chegarmos a fase final que é a **decisão**, onde ocorre a escolha e operacionalização da solução encontrada (CARDOSO, 2011).

4.1 FORMULAÇÃO GERAL DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)

Segundo Goldbarg (2005), um modelo representa matematicamente o problema que se deseja resolver ou otimizar, definindo-o como “um veículo para uma visão bem estruturada da realidade”.

Um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação real e deve refletir a essência do problema, representando as grandezas envolvidas por variáveis relacionando-as com as restrições inerentes ao não ao problema, formando assim as expressões matemáticas que melhor definirão a decisão a ser tomada para se obter o sucesso esperado (GOLDBARG, 2005).

Exemplos de modelos matemáticos presentes na Pesquisa Operacional são os modelos de Programação Matemática, uma das mais importantes variedades dos modelos quantitativos que apresenta uma grande utilidade na solução exata de problemas de otimização. Os algoritmos e os métodos da Programação Matemática buscam estruturar e solucionar modelos quantitativos que podem ser expressos matematicamente. Os modelos são estruturados logicamente com o objetivo de determinar as melhores condições de funcionamento para os sistemas representados e se reúnem em algumas subáreas como a *Programação Linear*, cujos modelos matemáticos dos problemas abordados envolvem equações que apresentam um comportamento linear.

Segundo Arenales *et al* (2015), na formulação geral do Problema de Programação Linear (PPL) deve-se analisar 3 partes do problema: a *função objetivo* (1), as *restrições* (2) e as condições de não-negatividade (3). Para a função objetivo e para cada uma das restrições consideradas, uma equação linear é descrita, relacionando as *variáveis de decisão* com os coeficientes conhecidos. As variáveis de decisão representam os valores numéricos que se pretende obter após a resolução do problema. Desta forma, um PPL é formulado pelas equações (1) a (3).

$$\text{Min ou Max } c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad (\text{função objetivo}) \quad (1)$$

Sujeito a (restrições):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \quad [= \text{ ou } \geq \text{ ou } \leq, \text{ ou seja, os sinais}] b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \quad [= \text{ ou } \geq \text{ ou } \leq, \text{ ou seja, os sinais}] b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \quad [= \text{ ou } \geq \text{ ou } \leq, \text{ ou seja, os sinais}] \quad b_3 \quad (2)$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \quad [= \text{ ou } \geq \text{ ou } \leq, \text{ ou seja, os sinais}] \quad b_m$$

$$\text{Condições de não-negatividade: } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n. \quad (3)$$

Observando as seguintes notações:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: são as variáveis de decisão. Depois que o problema for resolvido, por algum método de solução, estes valores são determinados.
- $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$: são os coeficientes (números reais) da função objetivos, cujos valores são conhecidos.
- $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$: são as constantes (números reais) de cada uma das restrições, cujos valores são conhecidos.
- a_{ij} : são os coeficientes (números reais) das restrições, cujos valores são conhecidos.

Uma vez determinada a função objetivo (1) que será otimizada (seja ela minimizada ou maximizada), elenca-se a sequência de restrições (2) a serem consideradas para cada problema, que expressam as limitações e condições de possibilidade da realização do problema. Finalmente destaca-se a condição de não negatividade (3), as quais um problema de programação linear deve se sujeitar considerando que o modelo matemático geralmente abrange situações reais, onde os resultados negativos não podem ser implicados no problema ou não fazem parte do contexto analisado (ARENALES. Et al, 2015).

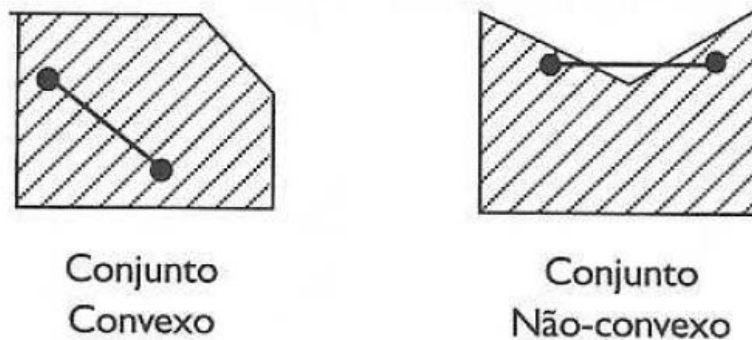
4.2 TEOREMAS DE CONVEXIDADE

Na apresentação dos principais teoremas fundamentais para a solução de problemas de programação linear, é necessário definir o conceito de conjunto convexo. De acordo com Lachtermacher (2009), intuitivamente, um conjunto convexo é um conjunto de pontos em que todos os segmentos de reta que unem dois de seus

pontos são internos ao conjunto, isto é, todos os pontos de cada segmento também pertencem ao conjunto original.

A figura 16 representa graficamente um exemplo de conjuntos convexo e não-convexo.

Figura 16 – Conjunto convexo e não-convexo.



Fonte: LACHTERMACHER (2009).

Ainda de acordo com Lachtermacher (2009), esta representação gráfica é possível quando existirem somente duas variáveis no problema de otimização linear.

A seguir são enunciados alguns teoremas pertinentes ao estudo de Programação Linear. Estes teoremas fornecem o suporte matemático para a resolução dos problemas de programação linear e estabelecem a relação com a Geometria.

Teorema 1 - O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.

Demonstração: Seja C , o conjunto das soluções viáveis, formado pelos pontos x tais que:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Se C é convexo, então, para qualquer conjunto composto por dois pontos distintos x_1, x_2 pertencentes a C , a combinação linear convexa desses pontos também pertence a C , o que equivale a dizer:

$$x_1, x_2 \in C \rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Sejam duas soluções viáveis de C , x_1, x_2 , tais que $x_1 \neq x_2$, então:

$$Ax_1 = b \quad Ax_2 = b$$

e

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

E seja:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Então:

$$\begin{aligned} Ax &= A[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = \\ &= \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \\ &= \alpha b + (1 - \alpha)b = b \end{aligned}$$

E $x \geq 0$, uma vez que:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 1$$



Teorema II - Toda solução compatível básica (solução óbvia) do sistema de equações lineares de um modelo de Programação Linear é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, isto é, do conjunto convexo de soluções.

Demonstração: Toda solução básica viável do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto C .

Seja C o conjunto formado pelos pontos x tais que:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Seja, ainda, uma solução viável qualquer x , de dimensão n , na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as m primeiras:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com todos os componentes } x_i \geq 0.$$

Supõe-se, por absurdo, que x seja um ponto extremo do conjunto convexo C , definido anteriormente. Então x pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto. Chamando de y e z esses dois pontos, temos:

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + (1 - \alpha)z \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

Como y e z pertencem ao conjunto C , as seguintes relações de pertinência são válidas:

$$\begin{aligned} Ay &= b & Az &= b \\ & & e & \\ y &\geq 0 & z &\geq 0 \end{aligned}$$

A relação $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$, colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + (1 - \alpha)z_1 \\ x_2 &= \alpha y_2 + (1 - \alpha)z_2 \\ &\vdots \\ x_m &= \alpha y_m + (1 - \alpha)z_m \\ 0 &= \alpha y_{m+1} + (1 - \alpha)z_{m+1} \\ &\vdots \\ 0 &= \alpha y_n + (1 - \alpha)z_n \end{aligned}$$

Devido às relações $0 \leq \alpha \leq 1$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ as últimas $(n - m)$ relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas em um dos seguintes casos:

1. $0 \leq \alpha \leq 1$ e $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$, para $i = 1, \dots, n - m$.

Neste caso teríamos $x = y = z$, pois tanto y quanto z são soluções básicas do sistema em análise, calculados com as mesmas variáveis básicas.

2. $\alpha = 0$ e $z_{m+i} = 0$, para $i = 1, \dots, n - m$.

Por raciocínio análogo ao caso anterior, deduz-se que $x = z$. Além disso, como $\alpha = 0$, segue que $x = y = z$.

3. $\alpha = 1$ e $y_{m+i} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n - m$.

Por razões análogas, conclui-se que $x = y = z$. ■

Desta forma, demonstra-se que não existem soluções viáveis y e z , distintas das soluções básicas x que satisfaçam a relação $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$. Por contradição com a hipótese inicial, demonstra-se, então, que x é um ponto extremo do conjunto convexo C .

Teorema III - Se uma função objetivo possui um único ponto ótimo finito, então este é um ponto extremo do conjunto convexo de soluções viáveis.

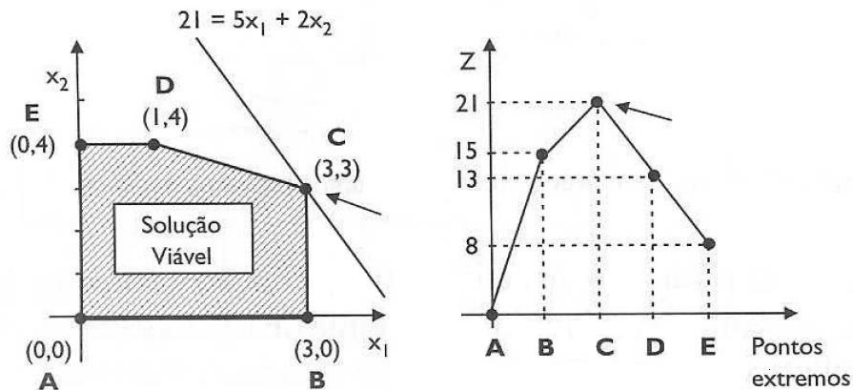
A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2006).

Teorema IV - Se a função objetivo assume o valor ótimo em mais de um ponto do conjunto de soluções viáveis (soluções múltiplas), então ela assume este valor para pelo menos dois pontos extremos do conjunto convexo e para qualquer combinação convexa desses pontos extremos, isto é, todos os pontos do segmento de reta que unem estes dois extremos, ou seja, a aresta do polígono que contem estes extremos.

A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2006).

De acordo com os teoremas supracitados, uma maneira prática de resolver pequenos problemas de duas variáveis é plotar os valores da função objetivo nos pontos extremos do polígono de soluções viáveis, conforme a figura 17.

Figura 17 – Polígonos ótimos.



Fonte: LACHTERMACHER (2009).

No caso de um problema com mais de duas variáveis de decisão, o método Simplex pode ser aplicado, que é uma generalização do método gráfico. O método Simplex é descrito na Seção 4.3.

4.3 MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex é um dos métodos mais importantes dentro das propriedades fundamentais da otimização linear (ARENALES, 2015). Consiste em um procedimento numérico, iterativo, que executa uma sequência de passos repetidamente, até alcançar a melhor solução (a solução ótima), quando esta existir, do problema que será resolvido. Por se tratar de um processo iterativo, é implementável computacionalmente em qualquer linguagem de programação. É capaz de determinar se o problema tem solução ilimitada, se não possui solução ou se possui infinitas soluções.

Existem na atualidade extensões deste método capazes de analisar sistemas com centenas de milhares de variáveis.

4.3.1 FORMA PADRÃO

Para que o método Simplex seja aplicado, uma formulação equivalente de um PPL, chamada de *forma padrão*, é obtida por operações elementares e é muito utilizada para a aplicação dos métodos de resolução. Nesta, todas as restrições são transformadas em igualdades pela inserção de outras variáveis, chamadas *variáveis de folga*. Além disso, todas as variáveis envolvidas x_j e as constantes b_m são também maiores ou iguais a zero. A forma padrão considera que a função objetivo é de minimização e as restrições são todas igualdades.

Logo, um modelo de programação linear pode ser reescrito na forma padrão aplicando-se as seguintes operações elementares:

Operação 1: mudança no critério de otimização – transformação a maximização de uma função $f(x)$ em minimização ou vice-versa.

Max $f(x)$ corresponde a Min $(-f(x))$

Min $f(x)$ corresponde a Max $(-f(x))$

Operação 2: transformação de uma variável livre, ou seja, uma variável que assume valores reais (positivos, negativos, racionais, irracionais) em uma variável não negativa (maior ou igual a zero). A variável livre x_n é substituída por duas variáveis auxiliares x_{1n} e x_{2n} , ambas maiores ou iguais a zero, mas a soma das duas é igual à variável original

$$x_n = x_{1n} - x_{2n}$$

Operação 3: transformação das inequações em equações. Para o caso da transformação de restrições de menor ou igual (\leq) em igualdade, somamos uma variável chamada *variável de folga*, capaz de completar a desigualdade, tornando-a igualdade. Por exemplo, seja a restrição representada por:

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq b$, Introduzindo a variável de folga $x_{n+1} \geq 0$, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} = b$$

Para o caso da transformação de restrições de maior ou igual (\geq) em igualdade, subtraímos uma *variável de folga*, tornando-a igualdade. Por exemplo, seja a restrição representada por:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq b$$

Introduzindo a variável de folga $x_{n+1} \geq 0$, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - x_{n+1} = b$$

Assim, conforme for modelado o problema, podemos aplicar as operações elementares para reescrever o modelo na forma padrão e aplicar os métodos de resolução.

Desta forma, se tivermos um problema de maximização com restrições de desigualdade do tipo “menor ou igual”, a qual denominamos de *forma canônica*, este pode ser escrito na forma padrão como:

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + \dots + c_Nx_N + 0_{N+1} + \dots + 0_{N+M}$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N + x_{N+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2N}x_N + x_{N+2} = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{M1}x_1 + \dots + a_{MN}x_N + x_{N+M} = b_M$$

$$x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+M} \geq 0$$

Em que x_1, \dots, x_N são as variáveis de decisão e x_{N+1}, \dots, x_{N+M} são variáveis de folga e Max Z corresponde a Min ($-Z$).

Da mesma forma, um problema de minimização com restrições de desigualdade do tipo “maior ou igual”, a qual também denominamos de *forma canônica*, pode ser escrito na forma padrão como:

$$\text{Minimizar } Z = c_1x_1 + \dots + c_Nx_N + 0_{N+1} + \dots + 0_{N+M}$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N - x_{N+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2N}x_N - x_{N+2} = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{M1}x_1 + \dots + a_{MN}x_N - x_{N+M} = b_M$$

$$x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+M} \geq 0$$

Em que x_1, \dots, x_N são as variáveis de decisão e x_{N+1}, \dots, x_{N+M} são variáveis de folga.

4.3.2 ALGORITMO DO MÉTODO SIMPLEX FORMA PADRÃO

O *algoritmo* do Método Simplex, ou seja, os passos para sua execução a fim de obter a solução (se existir) de um problema de programação linear, é descrito a seguir para resolver problemas de *maximização*.

Passo 1: Introduzir as variáveis de folga, transformando as restrições de desigualdade em igualdades.

Passo 2: Montar um quadro (chamado de *tableaux*) para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na primeira linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada. Como a função objetivo é de maximização, transformá-la em minimização trocando o sinal dos coeficientes.

Passo 3: Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga. As variáveis correspondentes à esta solução inicial devem constituir uma matriz identidade.

Passo 4: Como próxima variável a *entrar* na base, escolher a variável não básica que oferece, na primeira linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.

Passo 5: Para escolher a variável que deve *sair* da base, deve-se realizar o seguinte procedimento:

a) Dividir os elementos da última coluna (constantes) pelos correspondentes elementos *positivos* da coluna da variável que vai entrar na base. Caso não haja elemento algum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria definida como *ilimitada*.

b) O menor quociente resultante desta divisão indica a variável que deverá sair da base.

Passo 6: Do cruzamento entre a coluna da variável a entrar na base com a linha da variável a sair da base, o elemento chamado *pivô* é identificado.

Esta coluna do pivô deve ser transformada em uma coluna básica. Para isso, o pivô deve ser igual a 1 e todos os outros elementos desta coluna devem ser iguais a zero. Para isso, execute o passo 7 (escalonamento).

Passo 7: Escalonamento. Divide todos os elementos da linha do pivô pelo próprio valor do pivô. Assim, tem-se pivô = 1, como esperado. Efetuando *operações elementares* com as linhas da matriz, transforme os outros elementos da coluna do pivô em zeros, de forma a encontrar a nova solução básica.

Passo 8: Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

Para problemas de *minimização* de uma função objetivo $z(\mathbf{x})$, o procedimento é matematicamente análogo à maximização da negativa desta função ($-z(\mathbf{x})$).

Por exemplo:

Minimizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ é equivalente a maximizar $Z' = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n$, com $Z' = -Z$.

Essa é uma das formas de resolver os problemas de minimização utilizando o mesmo algoritmo.

Para resolver diretamente, o critério de *entrada* das variáveis na base deve ser alterado. A variável que entra na base passa a ser aquela que tem o *maior valor positivo* na linha z transformada. Caso todas tenham coeficientes negativos ou nulos, a solução obtida é ótima.

4.3.3 SIMPLEX NA FORMA TABULAR (TABLEAUX SIMPLEX)

A Forma Tabular do Método Simplex é uma maneira de esquematizar os problemas de programação linear para sua resolução. O quadro escrito por esta forma apresenta os coeficientes das variáveis de decisão e de folga em colunas e as restrições e função objetivo em linhas.

Depois de escrever o problema a ser resolvido na forma padrão, um quadro (o tableau) é elaborado com uma coluna para cada variável. Então as *variáveis básicas* são identificadas, ou seja, aquelas variáveis que constituem uma *matriz identidade*; e estas variáveis devem ser posicionadas na coluna referente à *base* do método. De forma geral, as variáveis correspondentes à base são as variáveis de folga. Esta constitui uma solução inicial para o problema. A solução ótima é então buscada, trocando-se as variáveis da base e atualizando a solução.

Seja o problema a seguir, que consiste na maximização do lucro na produção de 4 produtos, sujeito a um conjunto de 3 restrições (forma canônica).

$$\text{Max } L=4x_1+5x_2+9x_3+11x_4$$

$$\text{s.a. } x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 15$$

$$7x_1+5x_2+3x_3+2x_4 \leq 120$$

$$3x_1+5x_2+10x_3+15x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Reescrevendo o sistema na forma padrão, temos:

$$\text{Min } L-4x_1-5x_2-9x_3-11x_4 = 0$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 15$$

$$7x_1+5x_2+3x_3+2x_4+x_6 = 120$$

$$3x_1+5x_2+10x_3+15x_4+x_7 = 100$$

Com x_5, x_6, x_7 variáveis de folga.

Montando o primeiro quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Cte
Base	-	-	-9	-	0	0	0	0
	4	5		11				
x_5	1	1	1	1	1	0	0	15
x_6	7	5	3	2	0	1	0	120
x_7	3	5	10	15	0	0	1	100

Variável que entra na base: x_4 (maior valor negativo em módulo: 11).

Variável que sai da base: x_7 (pois $100/15$ é menor que $15/1$ e $120/2$). Observe que a variável que entra na base ocupa a mesma posição da variável que sai da base.

Pivô = 15. Deve-se escalonar a coluna x_4 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_7 por 15. Obtém-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Cte
Base	-4	-5	-9	-	0	0	0	0
				11				
x_5	1	1	1	1	1	0	0	15
x_6	7	5	3	2	0	1	0	120
x_7	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15	20/3

Agora, as operações elementares são efetuadas entre as linhas com o objetivo de zerar os outros elementos da coluna do pivô. Entende-se por operações elementares multiplicar a linha do pivô pelo número que se pretende zerar com o sinal oposto e somar com a linha que contém este número a ser transformado em zero. Por exemplo: a linha do pivô é a linha correspondente à variável x_7 . O pivô agora é o número 1 (linha x_7 com coluna x_4). Portanto, deve-se zerar todos os elementos da coluna x_4 . Começa pelo número 2, na linha imediatamente acima da linha do pivô (correspondente à variável x_6). Então, multiplica-se a linha do pivô por -2 e soma-se com a linha correspondente à variável x_6 . E assim sucessivamente com os demais elementos da coluna x_4 . O resultado do pivoteamento é:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	cte
Base	-1,8	-4/3	-	0	0	0	11/15	220/3
			5/3					
x_5	0,8	2/3	1/3	0	1	0	-1/15	25/3
x_6	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15	320/3
x_4	1/5	1/3	2/3	1	0	0	7/15	20/3

Esta solução ainda não é a ótima, pois tem-se elementos negativos na linha da base. O procedimento é repetido:

Variável que entra na base: x_1 (maior valor negativo em módulo).

Variável que sai da base: x_5

Pivô = 0,8. Deve-se escalonar a coluna x_1 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_5 por 0,8. Obtém-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Cte
Base	-1,8	-4/3	-5/3	0	0	0	11/15	220/3
x_5	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12	125/12
x_6	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15	320/3
x_4	1/5	1/3	2/3	1	0	0	7/15	20/3

Agora, efetua-se as operações elementares entre as linhas com o objetivo de zerar os outros elementos da coluna do pivô

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Cte
Base	0	1/6	-	0	0	0	11/15	1105/12
			11/12					
x_1	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12	125/12
x_6	0	-	-	0	-	1	5/12	455/12
		7/6	13/12		33/4			
x_4	0	1/6	7/12	1	-1/4	0	1/12	55/12

Esta solução ainda não é a ótima, pois há um elemento negativo na linha da base. O procedimento é repetido:

Variável que entra na base: x_3

Variável que sai da base: x_4

Pivô = 7/12. Deve-se escalonar a coluna x_3 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_4 por 7/12. Obtém-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Cte
Base	0	1/6	-	0	0	0	11/15	1105/12
			11/12					
x_1	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12	125/12
x_6	0	-	-	0	-	1	5/12	455/12
		7/6	13/12		33/4			
x_4	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	55/7

Agora, efetua-se as operações elementares entre as linhas com o objetivo de zerar os outros elementos da coluna do pivô

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Cte
Base	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7	695/7
x_1	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-	50/7
x_6	0	-	0	13/7	-	1	4/7	325/7
x_3	0	6/7	1	12/7	61/7	0	1/7	55/7

Solução ótima é então encontrada, pois não há elementos negativos na base. O lucro máximo é 695/7.

4.4 RESOLUÇÃO DE UM PPL PELO MÉTODO GRÁFICO

A partir da modelagem matemática de um problema de programação linear (PPL), pode-se encontrar a sua solução através da interpretação gráfica da função objetivo e das suas restrições operacionais. Este método pode ser utilizado quando o problema de otimização linear apresenta duas variáveis de decisão, pois neste caso é possível de ser resolvido graficamente com os conhecimentos acerca da otimização linear e dos teoremas de convexidade.

Para resolver um problema graficamente, o primeiro passo é estabelecer os dois eixos que irão representar as variáveis x_1 e x_2 , o passo seguinte seria encontrar o conjunto de soluções viáveis ao sistema representando graficamente as restrições do problema, criando assim a subárea do espaço $x_1 \times x_2$ a qual estará contida a solução ótima.

No caso do método gráfico primeiramente é preciso estabelecer os dois eixos para representar as quantidades de x_1 e x_2 . A seguir, deve-se encontrar o conjunto de soluções viáveis do problema. Para isso, pode-se utilizar a representação gráfica imposta por cada uma das restrições.

Segue exemplo de um PPL a ser desenvolvido graficamente:

Uma empresa fabrica dois tipos de produtos. Na fabricação destes produtos, dois fatores são críticos e merecem relevância, as quantidades de matéria prima e a mão de obra disponível.

Tabela 1 – Matéria prima *versus* disponibilidade de mão de Obra.

	Produto 1	Produto 2	Disponibilidade
Matéria Prima A	70 kg/unidade	70 kg/unidade	4900 kg
Matéria Prima B	90 kg/unidade	50 kg/unidade	4500 kg
Mão de Obra Especializada P1	2 H-h/unidade		80 H-h
Mão de Obra Especializada P2		3 H-h/unidade	180 H-h
Lucro	20 R\$/unidade	60 R\$/unidade	

Fonte: autora (2016).

Dada a grande procura, estima-se que todas as unidades a serem produzidas serão comercializadas. O objetivo desta empresa é obter o maior lucro possível com as vendas das unidades dos produtos 1 e 2.

O modelo de programação linear por ser escrito como:

$MAX M = 20x_1 + 60 x_2$, representa a função objetivo.

As funções abaixo representam restrições do modelo:

$$R_1: 70x_1 + 70 x_2 \leq 4900$$

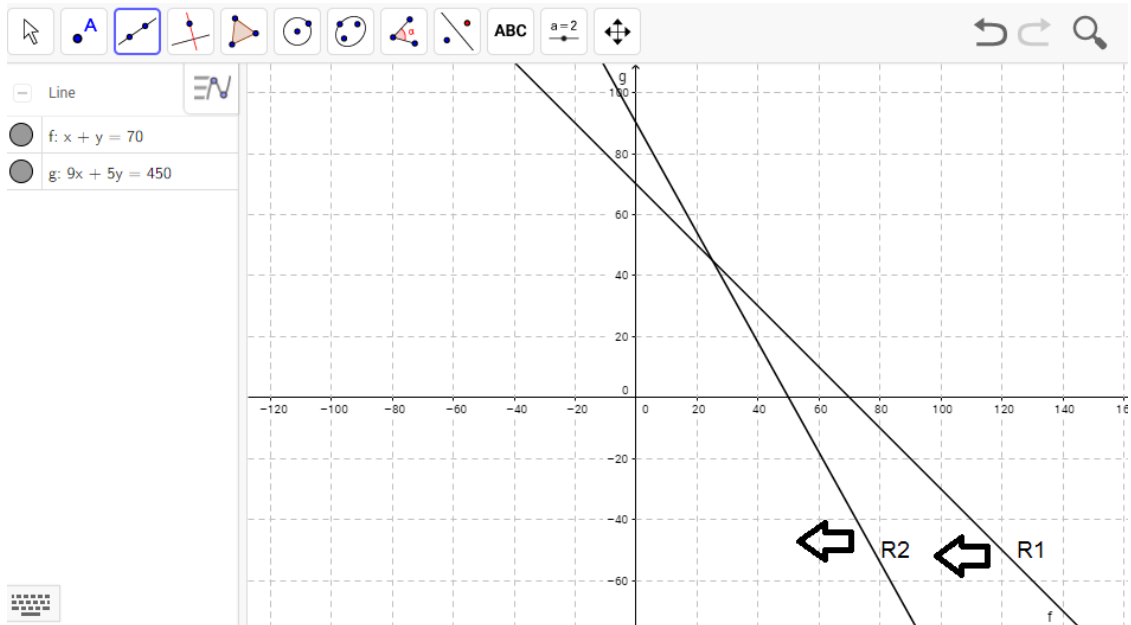
$$R_2: 90x_1 + 50 x_2 \leq 4500$$

$$R_3: 2x_1 \leq 80$$

$$R_4: 3x_2 \leq 180$$

$x_1, x_2 \geq 0$, restrição de não negatividade.

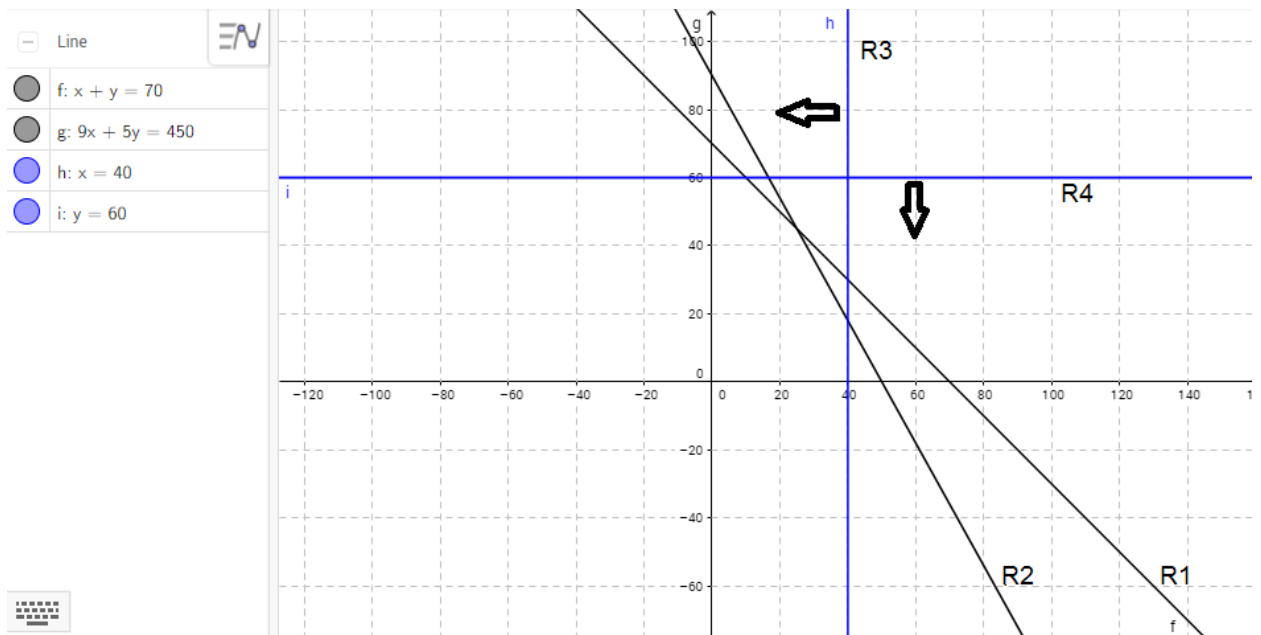
Assim serão representadas as restrições no plano cartesiano definido pelas duas variáveis x_1 e x_2 e observa-se que as equações $70x_1 + 70 x_2 = 4900$ e $90x_1 + 50 x_2 = 4500$ representam as primeiras restrições que na igualdade descrita serão ilustradas com suas respectivas retas determinadas por cada equação, conforme figura 18.

Figura 18 – Restrições R_1 e R_2 do problema.

Fonte: autora (2016).

Incluindo no gráfico as restrições R_3 e R_4 , sendo que ambas na igualdade determinam um reta, a primeira $R_3: 2x_1 = 80$, uma reta perpendicular em relação ao eixo x_1 , e a segunda $R_4: 3x_2 = 180$ uma reta paralela ao eixo x_1 . Conforme figura 19.

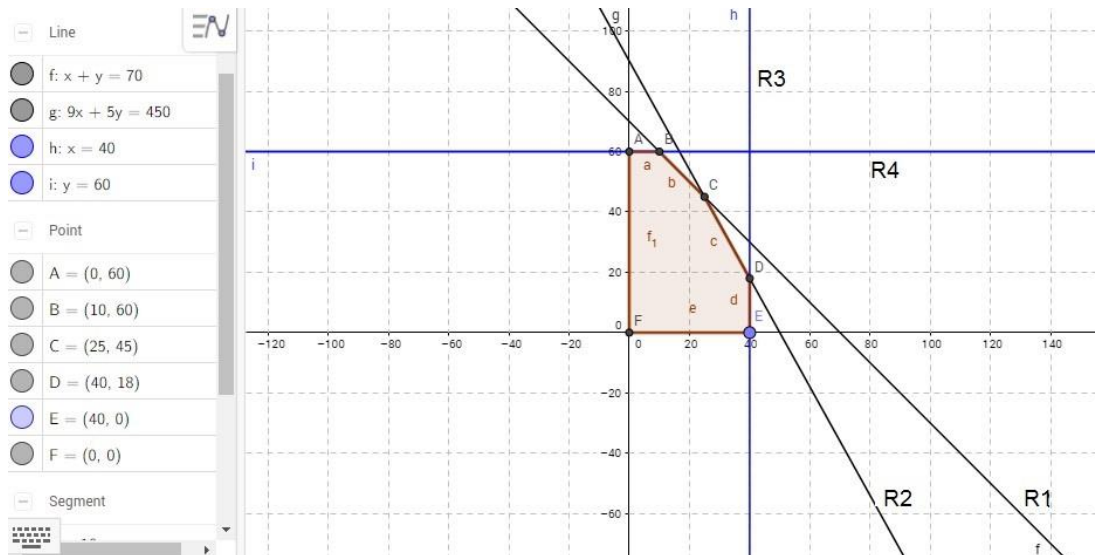
Figura 19 – Todas as restrições do problema.



Fonte: autora (2016).

Depois de todas as restrições traçadas, fica determinado o Espaço Solução, como na figura 20, que é o conjunto de todos os candidatos a serem ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que obedecem a todas as restrições do modelo.

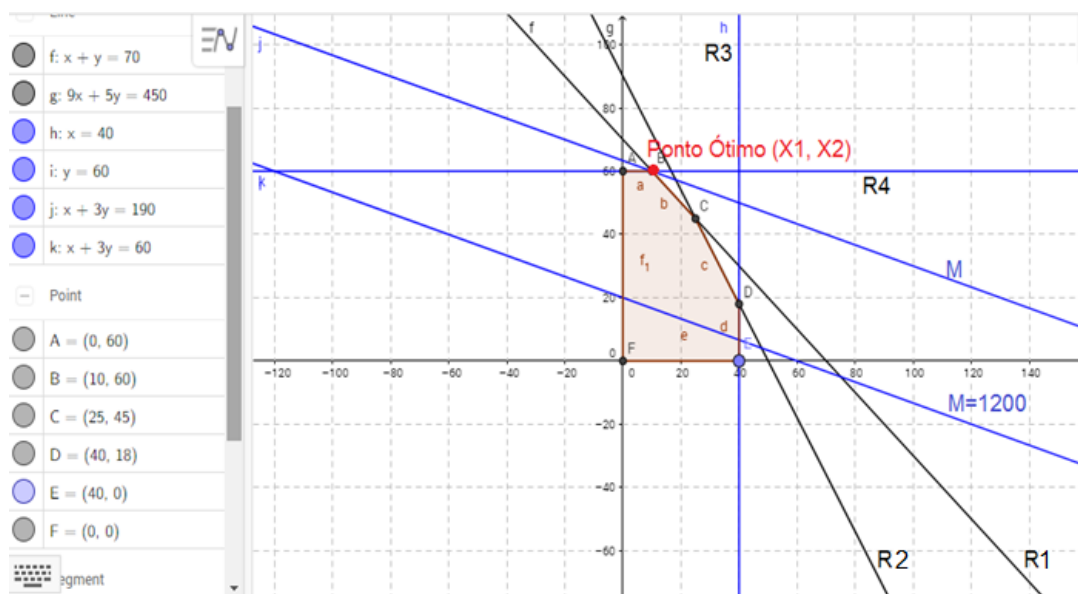
Figura 20 – Espaço Solução.



Fonte: autora (2016).

Inserindo a função objetivo no plano, observa-se que esta função determina um conjunto de retas, todas paralelas entre si, onde cada reta determina um valor diferente para o resultado da função M, conforme figura 21.

Figura 21 – Ponto ótimo.

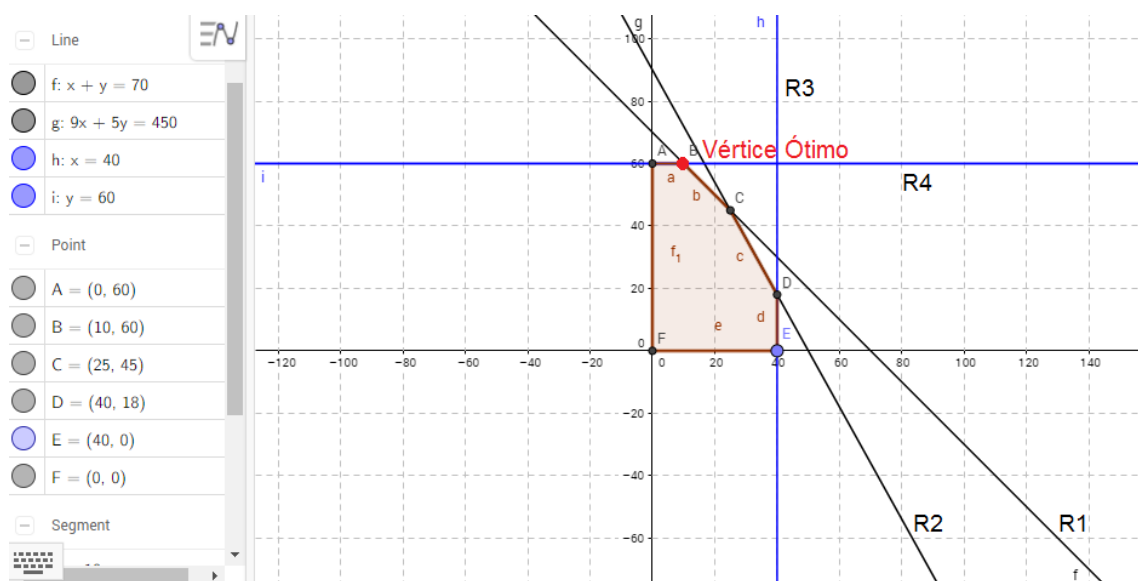


Fonte: autora (2016).

Neste caso, tomou-se os pontos (60,0) e (0,20) convenientemente, Obteve-se $M=1200$. Tomando novos pontos (120,0) e (0,40), resulta em $M=2400$. Observando que os valores das coordenadas respeitam sempre a mesma razão entre si, logo são paralelas por este motivo.

Para obter o ponto ótimo traça-se a paralela mais alta possível que coincida com o vértice mais elevado do polígono, respeitando a inclinação da reta determinada pela função objetivo M .

Figura 22 - Vértice ótimo.



Fonte: autora (2016).

O ponto ótimo ter sido um dos vértices do polígono solução não é mera coincidência. O ponto ótimo sempre será um dos vértices do polígono determinado pelo espaço solução de acordo com os teoremas de convexidade apresentados anteriormente neste trabalho, conforme pode-se observar na figura 22 anteriormente apresentada.

O Vértice ótimo encontrado é originário da interseção das retas R_1 e R_4 que representam as restrições de produção na igualdade e que a função objetivo deve passar também por este ponto, vértice do polígono da região factível. Desta forma a solução do problema é a solução do sistema linear:

$$R_1: 70x_1 + 70x_2 = 4900$$

$$R_4: 3x_2 = 180$$

Calculando as coordenadas deste ponto, através do método da substituição, sabendo que $x_2 = 60$, Substituindo em R_1 , tem-se:

$$70x_1 + 70.60 = 4900$$

$$70x_1 + 4200 = 4900$$

$$70x_1 = 4900 - 4200$$

$$70x_1 = 700$$

$$x_1 = 10$$

Tem-se então a solução ótima do problema, assim as coordenadas do vértice ótimo são $(x_1, x_2) = (10, 60)$.

Como $M = 20x_1 + 60x_2$, o maior lucro será de R\$ 3800,00.

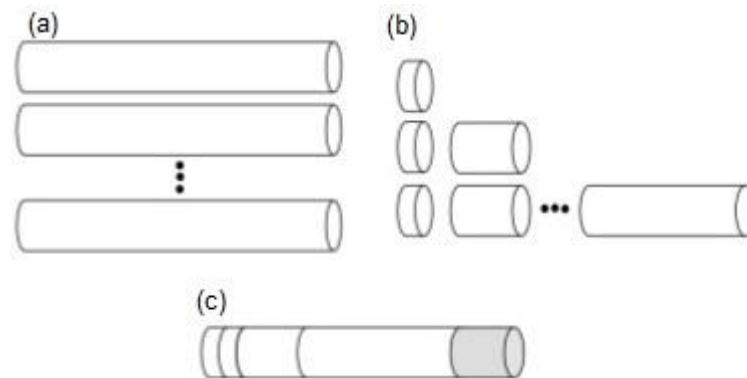
4.5 PROBLEMAS DE CORTE

A busca por competitividade e maior lucratividade por parte das empresas presentes no cenário econômico brasileiro e mundial, impulsionam os estudos acerca das estratégias de cortes no intuito de redução de custos, evitando o desperdício tanto de material, quanto de mão-de-obra.

De acordo com Arenales (2015), várias indústrias, tais como as do ramo moveleiro, metalúrgico, de produção de plástico, vidro, papel, etc., aplicam estratégias de otimização no corte dos objetos a serem comercializados ou fabricados, tal estratégia consiste em cortar os objetos para a produção dos itens nas quantidades solicitadas, enfatizando a perda mínima de material.

Um problema de corte é dito *unidimensional* quando apenas uma dimensão é relevante no processo de cortagem. Como casos típicos de problemas de cortes unidimensionais podemos citar o corte de materiais como papel, tecido, plástico e aço para serem utilizados nos mais diversos setores. Suponha que um objeto (barra, bobina, etc.) deva ser cortado ao longo de seu comprimento para a produção de itens de comprimentos especificados, conforme a figura 23.

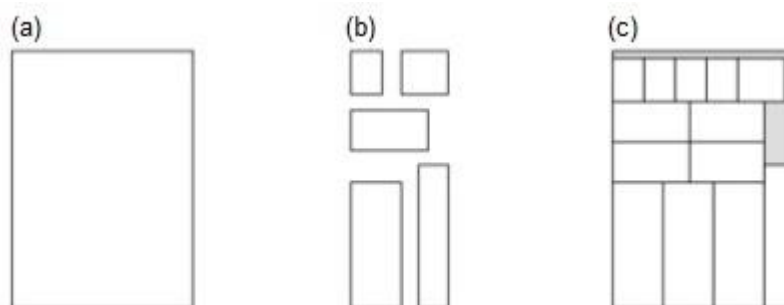
Figura 23 – Plano de corte unidimensional.



Fonte: GAMPERT, G. **Problemas de corte**. Slideshare.net. Disponível em <<https://pt.slideshare.net/MrGiba/problema-de-corte-bidimensional>>. Acesso em 15/03/2017.

Um problema é dito *bidimensional* quando duas dimensões (comprimento e largura) são relevantes na obtenção da solução (enquanto a espessura é constante). As dificuldades aumentam bastante para se gerar arranjos sem que ocorra sobreposição de itens nos planos de corte. A figura 24, a seguir, exemplifica uma representação de problemas de corte em duas dimensões. Considerando os problemas bidimensionais podemos citar alguns já bastante utilizados, como o corte de placas de madeira na indústria de móveis, placas de papéis para embalagens dobradas, chapas de aço, placas de vidro, entre outros. (ARENALES, et al. 2015).

Figura 24 – Plano de corte bidimensional.

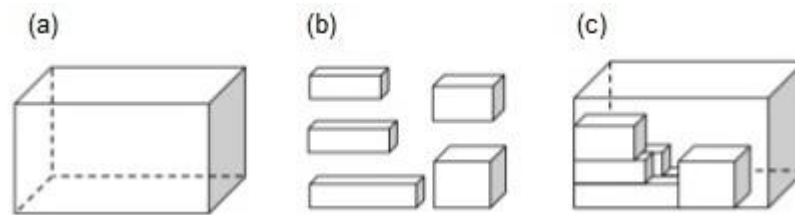


Fonte: GAMPERT, G. **Problemas de corte**. Slideshare.net. Disponível em <<https://pt.slideshare.net/MrGiba/problema-de-corte-bidimensional>>. Acesso em 15/03/2017.

Quando o problema apresenta três dimensões (comprimento, largura e altura) é chamado problema *tridimensional*. Teoricamente, trata-se de arranjar itens

espaciais, sem sobrepô-los, dentro de objetos maiores. Podemos citar como exemplos de problemas tridimensionais os problemas de carregamento de contêineres, como exemplificado na figura 25, cortes em indústrias de colchões, entre outros. (ARENALES, et al. 2015).

Figura 25 – Plano de corte tridimensional.



Fonte: GAMPERT, G. **Problemas de corte**. Slideshare.net. Disponível em <<https://pt.slideshare.net/MrGiba/problema-de-corte-bidimensional>>. Acesso em 15/03/2017.

De acordo com Arenales et al (2015), em um problema unidimensional, deseja-se cortar barras disponíveis de um tamanho padronizado L para a produção de m tipos de itens, com tamanhos l_1, l_2, \dots, l_m , em quantidades variadas b_1, b_2, \dots, b_m , respectivamente, ou seja, deve-se produzir a quantidade b_i da peça de comprimento l_i . Muitos padrões de cortes distintos podem ser determinados. Um vetor $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ representa um padrão de corte unidimensional se, e somente se, o sistema (1) é satisfeito.

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_m a_m \leq L \quad (1)$$

$$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_m \geq 0 \text{ e inteiros}$$

Suponha que existam n padrões de corte, ou seja, n soluções possíveis para o sistema. Uma vez definido os padrões, o problema consiste em determinar quantas barras devem ser cortadas de acordo com cada padrão, de modo que a demanda de cada item seja atendida, utilizando-se o menor número possível de barras. Define-se a variável x_j como o número de barras cortadas conforme o padrão de corte j . O problema do corte pode então ser formulado como nas equações (2) (ARENALES, 2015).

$$\text{Min } x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ (função objetivo)}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ainda de acordo com Arenales et al (2015), como as variáveis deste modelo representam o número de barras a serem cortadas, devem ser necessariamente inteiras. Na prática, esta condição dificulta a resolução do modelo. Desta forma, suponha que a demanda b_i seja dada em unidade de peso. Desta forma pode ser feita uma mudança de variável, em que y_i denota a quantidade (peso) cortada conforme o padrão de corte j , obtendo-se um modelo equivalente conforme as equações (3) e (4).

$$Min y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n \text{ (função objetivo)} \tag{3}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
 (l_1/L)a_{11}y_1 + (l_1/L)a_{12}y_2 + \cdots + (l_1/L)a_{1n}y_n &= b_1 \\
 (l_2/L)a_{21}y_1 + (l_2/L)a_{22}y_2 + \cdots + (l_2/L)a_{2n}y_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 (l_m/L)a_{m1}y_1 + (l_m/L)a_{m2}y_2 + \cdots + (l_m/L)a_{mn}y_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{4}$$

Em que $y_j \geq 0$ significa a quantidade (em uma unidade de peso) de material que deve ser cortada no padrão j .

Desta forma, desde que o Problema de Corte possa ser formulado matematicamente como um problema de programação linear, os teoremas de convexidade são válidos para sua região de soluções e a solução ótima pode ser obtida, se houver, pelos métodos descritos neste capítulo.

5 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA E DA OTIMIZAÇÃO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO MÉDIO

A necessidade de trazer situações de aprendizagem que envolvam dados reais e concretos é essencial no cenário da educação básica atual. Quanto mais o aluno se envolver com a proposta de aprendizagem, maior sucesso ele alcançará.

Com base nessas afirmativas, são propostas algumas atividades para aplicação em sala de aula com alunos dos anos finais do Ensino Médio, envolvendo os conceitos de geometria e otimização, desenvolvidos nesse trabalho. Essas atividades abordam, primeiramente, os conceitos mais diversos de geometria plana e espacial. Nas atividades envolvendo a otimização linear, é apresentada a oportunidade de abordar os conteúdos de geometria novamente, relacionando-as com as soluções ótimas que são determinadas pelos teoremas de convexidade. Além disso, pode-se ainda vincular tal atividade com os conteúdos de geometria analítica, quando tratar-se do método da resolução gráfica.

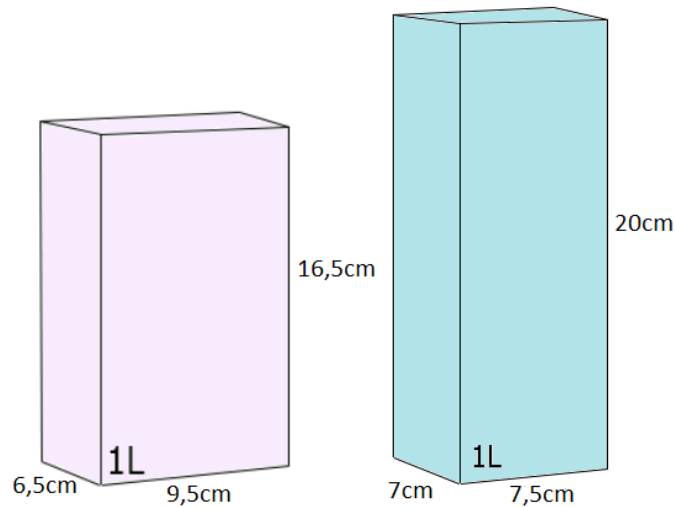
As atividades propostas são descritas nas seções que seguem.

5.1 ATIVIDADE 1: EMBALAGENS DE LEITE LONGA VIDA FORMATO DE PARALELEPÍPEDO.

Uma empresa de laticínio disponibiliza dois tipos de embalagens para acondicionar seu produto, conforme a figura 26 a seguir, cujas caixas apresentam dimensões de embalagens reais atualmente comercializadas.

1º questionamento: a área em cm^2 que as duas embalagens apresentam, sendo que quanto maior a quantidade de papel utilizado maior será o custo da embalagem para a empresa. Desta forma, determine qual embalagem gera mais despesa para a empresa. Calculando as áreas das laterais das caixas:

Figura 26 – Embalagem 1 (E1) e embalagem 2 (E2).



Fonte: autora (2016).

Como todas as áreas laterais são retangulares tem-se:

$$A = b \cdot h, \text{ ou seja, base } \times \text{ altura}$$

- Área das laterais E1 = $2 \cdot (6,5 \times 16,5) + 2 \cdot (9,5 \times 16,5) + 2 \cdot (6,5 \times 9,5) = 651,5 \text{ cm}^2$
- Área das laterais E2 = $2 \cdot (7 \times 20) + 2 \cdot (7,5 \times 20) + 2 \cdot (7,5 \times 7) = 685 \text{ cm}^2$

A embalagem 2 (E2) necessita de maior área de papel para sua confecção em relação a embalagem 1 (E1).

2º questionamento: Calculando os volumes, as duas embalagens apresentadas na Figura 26 possuem capacidade para acondicionar 1 litro de leite?

Como ambas embalagens são paralelepípedos, utiliza-se a equação a seguir para o cálculo de seus respectivos volumes:

$$V = (Ab \cdot h) = \text{Área da base } (b \cdot h) \times \text{altura do paralelepípedo } (h)$$

Volume da embalagem 1 (E1):

$$V = Ab \cdot h = (9,5 \times 6,5) \times 16,5 = 1018,87 \text{ cm}^3$$

Volume da embalagem 2 (E2):

$$V = Ab \cdot h = (7,5 \times 7) \times 20 = 1050 \text{ cm}^3$$

Fazendo a conversão das unidades de medidas temos:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ ml} = 1 \text{ litro}$$

Desta forma conclui-se que ambas as embalagens possuem capacidade de armazenamento de 1 litro conforme verificado.

Matemática utilizada nesta atividade:

- Área do retângulo
- Área do total do paralelepípedo
- Definição de volume e capacidade
- Volume do paralelepípedo
- Conversão entre unidades de medida

Objetivo: Comparar os volumes e áreas das duas embalagens e verificar qual a embalagem com maior custo para a empresa.

Conclusão: As duas embalagens podem acondicionar 1 litro de leite, e a embalagem dois tem um custo mais elevado que a embalagem 1 por utilizar mais papel.

5.2 ATIVIDADE 2: EMBALAGEM LONGA VIDA FORMATO TETRAÉDRICO

Introdução histórica da atividade - de grande importância didática e pedagógica para aguçar a curiosidade dos alunos e desta forma fomentar o interesse pelo conteúdo apresentado: A Primeira Guerra Mundial foi o ponto de partida da origem da embalagem individual, que surgiu pela necessidade de distribuir produtos aos exércitos em pequenos pacotes, Tetra Pak (2016).

Na Europa, nesse interim, mais especificamente na Suécia no início da década de 40, com o quase pós-guerra, nascia a ideia das embalagens cartonadas.

Segundo o site da empresa Tetra Pak® (2017), o trabalho de desenvolvimento de embalagens cartonadas teve início em 1943 com a elaboração do projeto de uma embalagem de leite que exigia o mínimo de material e oferecesse máxima limpeza e higiene no consumo, assim no ano de 1951 era inaugurada na Suécia a empresa Tetra Pak® com sua embalagem cartonada, revestida de plástico e mais tarde de alumínio, desenvolvida pelo Dr. Ruben Rausing.

As primeiras embalagens tinham formato de um tetraedro conforme a figura 27 a seguir, daí o sugestivo nome dado para a empresa. Era triangular e o primeiro produto industrializado a ser embalado foi o creme de leite, em seguida, o leite.

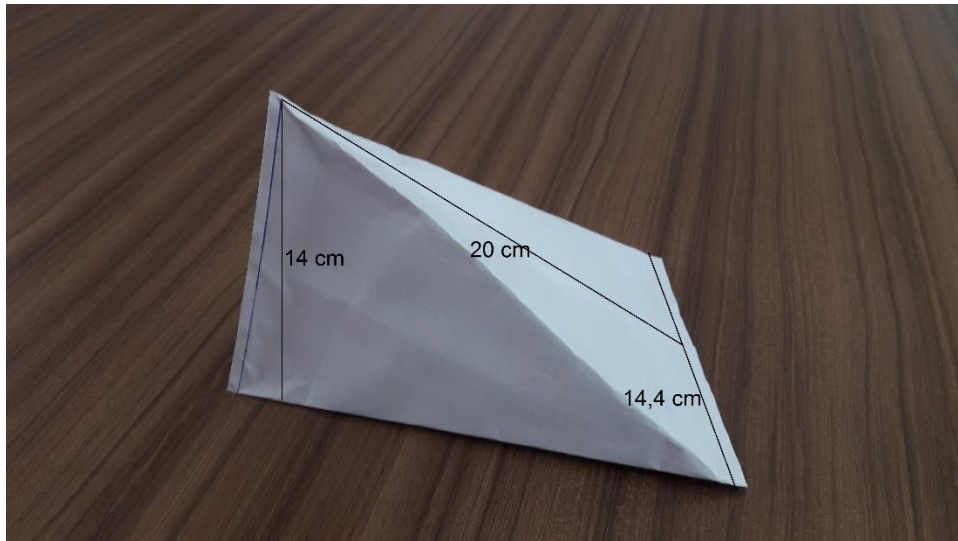
Dinâmica da montagem da embalagem tetraédrica: disponibilizando uma folha de papel sulfite A4 com medidas padronizadas em 29,7 cm por 21 cm e utilizando o mesmo sistema de fechamento da embalagem criada pela empresa Tetra Pak®, mais precisamente por seu fundador Sr. Ruben Rausing, conforme a figura 27, cria-se um tetraedro com todas as faces triangulares medindo 14,5 cm de comprimento da base do triângulo por 20 cm de altura do triângulo da face, além da altura do tetraedro de 14 cm, que pode ser visualizada na figura 28.

Figura 27 – Embalagem tetraédrica da empresa Tetra Pack®



Fonte: SITE TETRAPAK.COM.BR. Desenvolvimento gráfico. Disponível em: <<http://desenvolvimentografico.com.br/embalagens/6>>. Acesso em 17/11/2016.

Figura 28 – Fotografia da embalagem produzida pela autora.



Fonte: autora (2016).

1º questionamento: Qual a área da folha de papel utilizada na produção do tetraedro construído na figura 28, considerando a perda de 1 cm utilizado para a colagem da embalagem?

$$\text{Área da Folha de papel} = 28,5 \times 20 = 570 \text{ cm}^2$$

2º questionamento: Qual o volume deste tetraedro?

Utiliza-se a fórmula do volume da pirâmide, considerando que o tetraedro é uma pirâmide de base triangular. Assim tem-se:

$$V = \frac{\text{Área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

e

$$V = \frac{\left(\frac{14,4 \cdot 20}{2}\right) \cdot 14}{3} = 672 \text{ cm}^3$$

Fazendo a conversão das unidades de medidas tem-se que:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ ml} = 1 \text{ litro}$$

Assim, $672 \text{ cm}^3 = 672 \text{ ml}$ de capacidade.

No laboratório de informática, esses dados serão inseridos numa planilha de dados, usando o *software* Excel, para projetar as medidas da embalagem que contem 1 litro de capacidade de armazenamento.

MEDIDAS DA EMBALAGEM	
Base do triângulo (base)	14,4
Altura do triângulo (base)	20
Altura do tetraedro	14
Fórmula do Volume	672

Usando na célula do volume a seguinte fórmula $=(((K20*K21)/2)*k22)/3)$, em que K20, K21 e K22, são as respectivas medidas do tetraedro aplicadas na fórmula da pirâmide de base triangular.

Agora na mesma planilha deve-se encontrar um fator de proporcionalidade para aumentar todas as medidas da caixa tetraédrica na mesma proporção, para a realização desta atividade foram realizados testes aleatórios alterando o valor das constantes de proporcionalidade até alcançar as medidas de uma embalagem cujo volume tenha capacidade de armazenamento de 1 litro.

MEDIDAS DA EMBALAGEM		Nova medida
Base do triângulo (base)	14,4	16,56
Altura do triângulo (base)	20	23
Altura do tetraedro	14	16,1
Fórmula do Volume	672	1022,028

Constante
1,15

A fórmula utilizada na célula das novas medidas é $=K20*\$N\20 , ou seja, multiplicou-se todas as medidas desenvolvidas no sólido de papel pela constante 1,15, originando um aumento de 15% em todas as medidas do tetraedro.

Agora verifica-se que a nova área de papel utilizada para produzir esta embalagem será desenvolvida utilizando as novas medidas, comprimento igual $16,56 \times 2 = 33,12$ cm pela altura de 23 cm, o que resultará em:

$$\text{Área da nova folha de papel} = 33,12 \times 23 = 761,76 \text{ cm}^2.$$

Análises pós atividade 1 e 2: Trazer para sala de aula questionamentos para que os alunos desenvolvam a capacidade de análise de situações diversas como:

- Qual a embalagem utiliza a menor quantidade de papel em sua fabricação?
- Qual embalagem é a mais viável para o envase de produtos, considerando outros fatores como: custo de produção, transporte e facilidade de manuseio?

Essa análise de situações e tomada de decisão são as precursoras da Otimização Linear.

5.3 ATIVIDADE 3: APLICANDO O MÉTODO SIMPLEX PARA A SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL) COM DUAS VARIÁVEIS DE DECISÃO.

Considere o seguinte problema (LINS e CALÔBA, 2006): Uma manufatura produz mesas e bancos, sendo capaz de vender toda a sua produção no período. O único recurso restrito é a mão de obra, cuja produtividade, juntamente com os lucros, são dados na tabela a seguir.

Tabela 2 – Problema Manufatura de mesas e bancos.

	Homens hora por unidade produzida		
Produto	Lucro unitário	Montagem	Acabamento
Mesas	R\$20	3	4
Bancos	R\$24	6	2
Homens/h		60	32

Fonte: LINS E CALÔBA (2006).

As variáveis de decisão são as quantidades de mesas e bancos a serem produzidos, x_1 e x_2 . A função objetivo é $\text{Max } 20x_1 + 24x_2$.

As restrições são homens hora disponíveis nos departamentos de montagem e acabamento:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 60 \text{ restrição de montagem}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 32 \text{ restrição de acabamento}$$

Escrevendo o problema na forma padrão, tem-se

$$\text{min} = -20x_1 - 24x_2$$

$$\text{s.a. } 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 60$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 32$$

Com $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ e sendo x_3 e x_4 variáveis de folga.

Montou-se o primeiro quadro com os coeficientes das variáveis:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Cte
Base	-	-	0	0	0
	20	24			
x_3	3	6	1	0	60
x_4	4	2	0	1	32

Variável que entra na base: x_2 (maior valor negativo em módulo: 24).

Variável que sai da base: x_3 (pois $60/6$ é menor que $32/2$).

Pivô = 6. Deve-se escalonar a coluna x_2 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_3 por 6. Obtém-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-	-	0	0	0
	20	24			
x_3	1/2	1	1/6	0	10
x_4	4	2	0	1	32

Deve-se zerar os outros elementos da coluna do pivô, ou seja, -24 e 2. Para isso, multiplica-se a linha do pivô por 24 e soma-se com a linha correspondente à

função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -2 e soma-se com a linha da variável x_4 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-8	0	4	0	240
x_2	1/2	1	1/6	0	10
x_4	3	0	-	1	12
			1/3		

Como ainda há elementos negativos na linha referente à função objetivo, essa ainda não é a solução ótima. Logo,

Variável que entra na base: x_1

Variável que sai da base: x_4

Pivô = 3. Deve-se escalonar a coluna x_1 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_4 por 3. Obtém-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Cte
Base	-8	0	4	0	240
x_2	1/2	1	1/6	0	10
x_4	1	0	-	1/3	4
			1/9		

Deve-se zerar os outros elementos da coluna do pivô, ou seja, -8 e 1/2. Para isso, multiplica-se a linha do pivô por 8 e soma-se com a linha correspondente à função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -1/2 e soma-se com a linha da variável x_2 . Tem-se o seguinte quadro:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Cte
Base	0	0	28/9	8/3	272
x_2	0	1	2/9	-1/6	8
x_1	1	0	-1/9	1/3	4

Como não há nenhum coeficiente negativo na linha da função objetivo, a solução ótima foi alcançada. Portanto, o lucro máximo é de R\$272, produzindo-se para isso, 4 mesas e 8 bancos.

5.4 ATIVIDADE 4: EXEMPLO DO MÉTODO DA RESOLUÇÃO GRÁFICA.

Utilizando o mesmo problema de programação linear resolvido na Seção (5.3) aplicando-se o método simplex, podemos resolvê-lo graficamente (Lins e Calôba, 2006), formulando-o como a seguir.

As variáveis de decisão são as quantidades de mesas e bancos a serem produzidos, x_1 e x_2 . A função objetivo é $\text{Max } 20x_1 + 24x_2$.

As restrições do problema são homens/hora disponíveis nos departamentos de montagem e acabamento:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 60, \text{ restrição de montagem;}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 32, \text{ restrição de acabamento.}$$

Representando as restrições na igualdade temos as seguintes funções:

$$\text{Max: } 20x_1 + 24x_2$$

$$3x_1 + 6x_2 = 60$$

$$4x_1 + 2x_2 = 32$$

Com $x_1, x_2 \geq 0$, restrição de não negatividade.

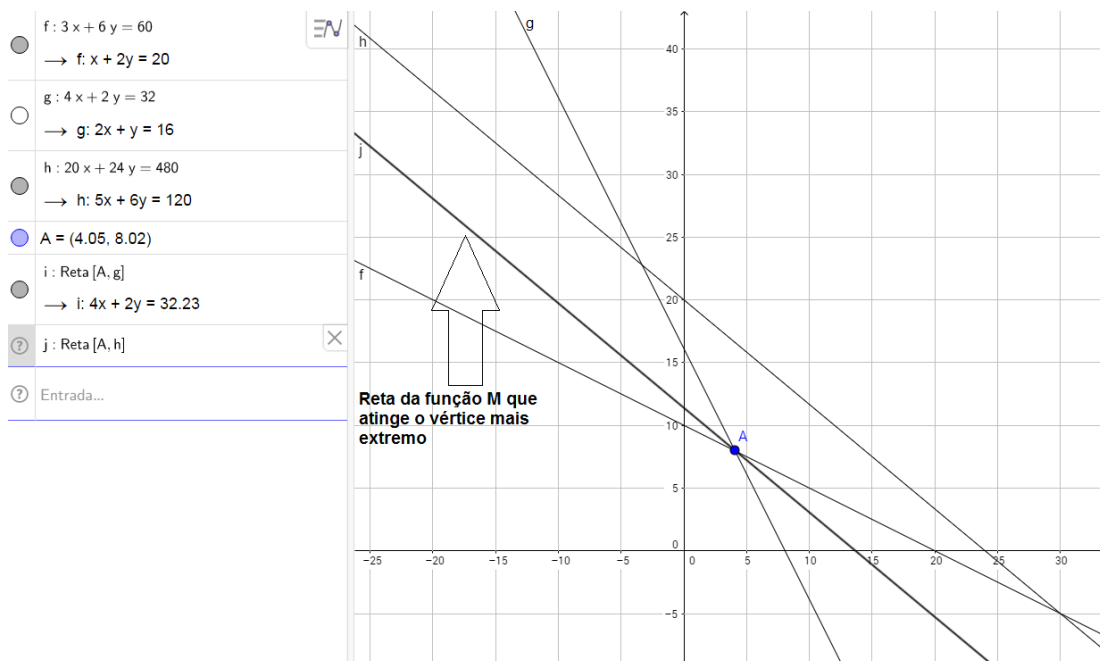
Assim serão representadas as restrições no plano cartesiano definido pelas duas variáveis x_1 e x_2 . Onde o polígono que contém a solução ótima estará no primeiro quadrante em observação às restrições de não negatividade.

Observa-se que as equações $3x_1 + 6x_2 = 60$ e $4x_1 + 2x_2 = 32$ representam as restrições do problema, que na igualdade descrita serão ilustradas com suas respectivas retas determinadas por cada equação, conforme figura 29.

Neste caso, tomou-se os pontos (24,0) e (0,20) convenientemente, Obteve-se $M = 480$. Para obter o ponto ótimo traça-se a paralela mais alta ou mais baixa possível que coincida com o vértice mais extremo do polígono, respeitando a inclinação da reta determinada pela função objetivo M .

O ponto ótimo ter sido um dos vértices do polígono solução não é mera coincidência. O ponto ótimo sempre será um dos vértices do polígono determinado pelo espaço solução de acordo com os teoremas de convexidade apresentados anteriormente neste trabalho no capítulo IV. As retas que representam as restrições na igualdade, juntamente com a reta paralela a função M (função objetivo) determinam o ponto ótimo A , conforme figura 30.

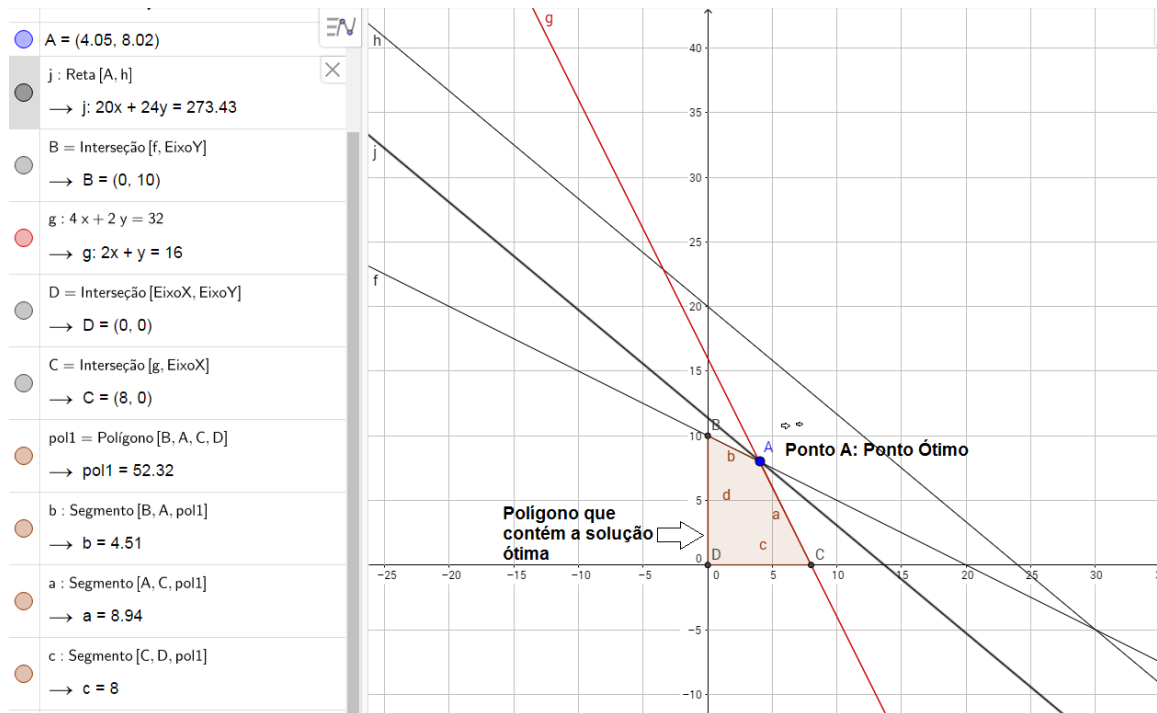
Figura 29 – As retas que determinam o polígono que contém a solução ótima em um dos seus vértices e o vértice ótimo.



Fonte: autora (2017).

O Vértice ótimo encontrado, conforme a figura 30 a seguir, é originário da intersecção das retas f e g que representam as restrições na igualdade. Além deste vértice conter a reta paralela à reta da função M .

Figura 30 – Polígono que determina o espaço solução.



Fonte: autora (2017).

Calculando as coordenadas deste ponto A, tendo as equações $f: 3x_1 + 6x_2 = 60$ e $g: 4x_1 + 2x_2 = 32$, resolve-se o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 60 \\ 4x_1 + 2x_2 = 32 \end{cases}$$

Concluindo que o ponto A (ótimo), possui coordenadas $x_1 = 4$ e $x_2 = 8$.

Logo, para a obtenção do lucro máximo devem ser fabricados 4 mesas e 8 bancos.

Substituindo na função lucro $M=20x_1 + 24x_2$, temos que o lucro máximo será de R\$ 272,00.

Esta atividade é uma ótima oportunidade para explorar a geometria através do *software* matemático Geogebra que possui acesso livre aos interessados e que além do *software*, possui uma versão no formato de aplicativo para celulares.

5.5 ATIVIDADE 5: PROBLEMA DA MISTURA – OTIMIZAÇÃO LINEAR NO SOFTWARE MICROSOFT EXCEL.

Dentre as ferramentas disponíveis para a agilidade dos cálculos das iterações do Método Simplex, as planilhas eletrônicas são recomendadas pois, além da facilidade de utilização, estão geralmente presentes na maioria dos computadores de uso geral. No Brasil, o Excel é a mais popularmente conhecida.

A ferramenta utilizada para execução do Método Simplex no Excel é chamada de “Solver”. Se esta opção não estiver prontamente disponível, basta instalar por meio da ferramenta “suplementos”. Antes de ativar o Solver, deve-se inserir as fórmulas correspondentes nas respectivas células, conforme descrito na Atividade 5.

O Solver executa o método Primal-Simplex e, em virtude da preparação da planilha para execução das iterações e obtenção da solução, o Excel é recomendado para problemas de pequeno porte, com poucas variáveis de decisão.

O problema a ser resolvido utilizando a ferramenta “Solver” do Excel foi retirado de Lachtermacher (2009).

PROBLEMA: Uma padaria produz dois tipos de produtos: pão (P1) e massa de pizza (P2). Quatro diferentes matérias primas são utilizadas para a fabricação destes produtos: farinha (M1), fermento (M2), ovos (M3) e manteiga (M4), em que temos em estoque, respectivamente, 60 unidades, 38 unidades, 18 unidades e 55 unidades. Para produzir 1 kg de pão são necessárias 1 unidade de farinha, 2 unidades de fermento e 3 unidades de manteiga. E para produzir 1 kg de massa de pizza são necessárias 3 unidades de farinha, 1 unidade de ovo e 1 unidade de manteiga.

O pão e massa de pizza são, respectivamente, pelos valores de R\$ 22/Kg e R\$20/Kg. Deseja-se determinar a quantidade de cada produto a ser fabricada que maximize o valor das vendas e respeite as restrições de estoque.

Matéria prima	Produto		Estoque
	P_1	P_2	
Farinha	1	3	60
Fermento	2	0	30
Ovos	0	1	18
Manteiga	3	1	55
Preço (R\$/kg)	22	20	

Neste caso, o que deve ser decidido? Definindo as denominadas Variáveis de decisão temos: x_1 = quantidade produzida de pão em quilogramas e x_2 = quantidade produzida de pizza em quilogramas.

Tem-se o Modelo Matemático:

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = 22x_1 + 20x_2$$

com as seguintes restrições do problema:

$$1x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 0x_2 \leq 30$$

$$0x_1 + 1x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 55$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

A figura 31 a seguir exemplifica o formato da planilha do Excel para aplicação do SOLVER.

Figura 31 – Imagem da planilha do Excel.

	A	B	C	D	E
1		PÃO	PIZZA		
2		22	20		
3	RESULTADO ÓTIMO	13,125	15,625	(em Kg produzidos)	
4					
5		PÃO	PIZZA	ESTOQUE DISPONÍVEL	ESTOQUE UTILIZADO
6	FARINHA	1	3	60	60
7	FERMENTO	2	0	30	26,25
8	OVOS	0	1	18	15,625
9	MANTEIGA	3	1	55	55
10					
11	RESULTADO (em R\$)	601,25			

Fonte: autora (2017).

Fórmulas utilizadas em cada célula são:

$$B12: =B2*B3+C2*C3$$

$$E6: =B6*\$B\$3+C6*\$C\$3$$

$$E7: =B7*\$B\$3+C7*\$C\$3$$

$$E8: =B8*\$B\$3+C8*\$C\$3$$

$$E9: =B9*\$B\$3+C9*\$C\$3$$

Utilizando o programa Excel, clicar no menu “Dados”, e em seguida na ferramenta “solver”. Preencher as janelas necessárias e, no final, clicar em “Resolver”.

Resultados: Devem ser produzidos 13,125 Kg de massa de pão e 15,625 Kg de massa de pizza para a empresa obter a receita máxima de R\$ 601,25 reais.

6 APLICAÇÃO DO PROBLEMA DE CORTE

Neste Capítulo será apresentada uma simulação do problema do corte unidimensional em uma indústria de embalagens de papel para produtos diversos. As características do pedido e quantidades solicitadas estão exemplificadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Especificações do produto e quantidade pedida.

DEMANDA	LARGURA (CM)	COMPRIMENTO (CM)
Tipo 1	7	3000
Tipo 2	9	5000
Tipo 3	10	6000
Tipo 4	12	8000

Fonte: autora (2017).

Esta indústria possui seus padrões de cortes específicos que se enquadram com a realidade de produção da empresa, sendo assim os padrões de cortes são pré-definidos, conforme a Tabela 4. E os cortes serão realizados considerando a largura da embalagem.

Tabela 4 – Padrões de Cortes pré-definidos.

PADRÕES DE CORTE												
	ROLO 20 CM						ROLO 30 CM					
LARGURA	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂
7 CM	2	0	1	0	0	1	0	4	0	0	1	1
9 CM	0	2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
10 CM	0	0	0	2	1	1	3	0	2	0	1	1
12 CM	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	0
PERDA (CM)	6	2	1	0	1	3	0	2	1	6	1	4

Fonte: autora (2017).

Desta forma a Função Objetivo deste problema é minimizar as perdas na largura, quanto aos tamanhos de embalagens solicitadas em relação aos dois tipos de rolos de papel disponíveis nesta indústria, com 20 cm e 30 cm de largura total.

A Função Objetivo é descrita por:

Minimizar perdas = $6x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 3x_6 + 0x_7 + 2x_8 + 1x_9 + 6x_{10} + 1x_{11} + 4x_{12}$.

Respeitando as restrições das especificidades do pedido. Tem-se:

$$2x_1 + x_3 + x_6 + 4x_8 + 1x_{11} + x_{12} \geq 3000$$

$$2x_2 + 1x_5 + 1x_9 + x_{12} \geq 5000$$

$$2x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 3x_7 + 2x_9 + 1x_{11} + x_{12} \geq 6000$$

$$1x_3 + 2x_{10} + 1x_{11} \geq 8000$$

Aplicando as restrições e a função objetivo no *software* LINDO, o qual utiliza o método simplex para a solução do problema proposto obteve-se o resultado descrito a seguir.

O LINDO (*Linear, Interactive and Discrete Optimizer*) é um *software* desenvolvido pela *Lindo Systems Inc.* de Chicago, Illinois, EUA, para a resolução de modelos de programação linear, quadrática ou inteira. Uma versão educacional pode ser obtida gratuitamente, na página da *Lindo Systems*: <http://www.lindo.com>.

Para inserir os dados, basta descrever o modelo conforme segue:

```
min 6x1+2x2+x3+0x4+x5+3x6+0x7+2x8+x9+6x10+x11+4x12
st
2x1+x3+x6+4x8+x11+x12>=3000
2x2+x5+x9+x12>=5000
2x4+x5+x6+3x7+2x9+x11+x12>=6000
x3+2x10+x11>=8000
end
```

Para executar o método Simplex, basta usar a opção “solver”, presente na barra de ferramentas.

RESULTADO: Perda Mínima de 13000 cm, quando são executadas 2500 vezes o Padrão de corte x_2 , 8000 vezes o padrão de corte x_3 e 2000 vezes o padrão de corte x_7 . Executando 6 iterações do método simplex. Ressaltando que se trata do corte unidimensional onde foi considerado somente a largura dos pedidos nos padrões de cortes apresentados na Tabela 4.

Tabela 5 – Padrões de cortes executados em destaque.

PADRÕES DE CORTE												
	ROLO 20 CM						ROLO 30 CM					
LARGURA	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂
7 CM	2	0	1	0	0	1	0	4	0	0	1	1
9 CM	0	2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
10 CM	0	0	0	2	1	1	3	0	2	0	1	1
12 CM	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	0
PERDA	6	2	1	0	1	3	0	2	1	6	1	4

Fonte: autora (2017).

Menor perda quando executado $2500 X x_2$, $8000 X x_3$ e $2000 X x_7$.

Caso a empresa apresente impossibilidade da execução prática destes padrões selecionados, existe a alternativa de acrescentar limitantes nas restrições, forçando que outros padrões menos rentáveis sejam executados. No entanto, fazendo isso assume-se o risco de maiores perdas, mas se for necessidade da empresa, quanto a possibilidade de produção, a empresa deve selecionar os padrões que lhes serão mais convenientes. As figuras 32 e 33 ilustram exemplos de cortes unidimensionais destinados às indústrias de embalagens.

Figura 32 – Bobinas de envaze para embalagens longa vida de leite e suco.



Fonte: SITE TETRAPAK.COM. Embalagens. Disponível em: <<http://productxplorer.tetrapak.com/pt-br/equipment/tetra-pakr-multi-shrink-30-speed>>. Acesso em 10/02/2017.

Figura 33 – Bobinas de embalagens metalizadas a serem cortadas unidimensionalmente.



Fonte: SITE TETRAPAK.COM. Embalagens. Disponível em: < <http://productexplorer.tetrapak.com/pt-br/equipment/tetra-pakr-multi-shrink-30-speed>>. Acesso em 10/02/2017.

Os problemas de corte podem ser trabalhados com os alunos dos anos finais do ensino médio tanto com no intuito de modelar os conteúdos do currículo básico numa atividade de aplicação diversificada, tanto como apresentação do trabalho que é desenvolvido para que os alunos conheçam a dimensão da quantidade de aplicações que os conteúdos matemáticos estão inseridos para facilitar e até mesmo resolver problemas mais básicos do cotidiano.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a geometria de forma mais contextualizada e oportunizar aos alunos uma aprendizagem concreta e condizendo com as situações reais do cotidiano em que estão inseridos, através de atividades dirigidas ao ensino de geometria nos anos finais do Ensino Médio juntamente com a Otimização Linear.

A geometria é um dos campos da Matemática que apresenta uma grande possibilidade de conexão com outros conteúdos, como a álgebra, a aritmética e a programação matemática, por meio da teoria da convexidade que define a região de soluções (ARENALES, 2015). Por ser um conteúdo em que se consegue visualizar e manipular objetos, a aprendizagem ocorre de maneira mais significativa por meio do conhecimento de situações concretas.

O estudo dos processos de otimização, além de contribuir para o aprendizado da geometria, proporcionam o planejamento dos processos de produção no sentido de minimizar o desperdício de matéria-prima no processo de corte. A decisão sobre a disposição das peças, embalagens ou objetos a serem cortados em uma placa maior garantem a otimização do processo de produção. Conseqüentemente, minimiza os custos globais de produção e o desperdício de material, o que também contribui para a redução do impacto ambiental, uma vez que o descarte de papéis, metais, plásticos e outros tipos de material é reduzido.

No ensino médio, problemas de otimização com duas variáveis podem ser apresentados, assim como o problema de aplicação abordado na atividade 4 do capítulo 5 deste trabalho. Por meio da aplicação do método gráfico para obtenção da região de soluções de um problema de otimização proposto, o aluno tem conhecimento de situações reais, visualiza a região de possíveis soluções e a determina, quando esta existir. Encontrando a solução, o aprendizado da geometria é construído, tornando-o mais sólido e agregando conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. I. **Otimização Linear como ferramenta metodológica**. 2016. 186 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2016.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora Campus, 2015.
- AZAMBUJA, F. Z. **Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 3, p. 15-17, 1983.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997.
- CARDIA, L. S. **Uma abordagem do ensino de geometria espacial**. 2014. 98 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014.
- CARDOSO, A. **Fundamentos da Pesquisa Operacional – UNIFAL-MG**. 2011. Disponível em: <http://www.unifal-mg.edu.br/matematica/files/file/po.pdf>. Acesso em 28 de dezembro de 2016.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações – Ensino Médio. Vol II**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria espacial, posição e métrica**. 6 ed. São Paulo: Atual, 2005.
- FANTI, E. L. C.; KODAMA, H. M. Y.; NECCHI, M. A. **Explorando Poliedros no Ensino Médio com o Software Poly In**: Livro Eletrônico dos Núcleos de Ensino da Unesp – Projetos realizados em 2007. São Paulo; Ed. Cultura Acadêmica, UNESP, 2010.
- FONTES, L. F. A. **Avaliação de diferentes metodologias aplicadas ao ensino da Geometria**. 2015. 74 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2015.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: Ciência e Aplicações**. Vol. 2 – Ensino Médio. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria** – Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), 1991.

LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M. **Programação Linear**: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, número 04, p. 03-13, 1995. Edição especial.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Coleção PROFMAT. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), 2013.

POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. **O Problema de Corte de Estoque Unidimensional Multiperíodo**. Pesquisa Operacional: vol.30, no.1, p. 153-174, 2009.

POLDI, K. C. **Algumas Extensões do Problema de Corte de Estoque**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo: ICMC - USP, 2003.

TETRA PAK. **História da Tetra Pak**: Nossa História desde 1940 até os dias de hoje. Disponível em <<http://www.tetrapak.com/br/about/history>>. Acesso em 15 de fev. 2017.

VENDRAME, G. V. C. **Área da superfície e volume de prismas e cilindros**. 2014. 96 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2014.