

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUCAS VASLANV DA SILVA WOLFF

**UM ESTUDO DO DESEMPENHO DE ELEMENTOS FINITOS DA
ELASTICIDADE PLANA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CURITIBA

2019

LUCAS VASLANV DA SILVA WOLFF

**UM ESTUDO DO DESEMPENHO DE ELEMENTOS FINITOS DA
ELASTICIDADE PLANA**

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Wolff, Lucas Vaslanv da Silva

Um estudo do desempenho de elementos finitos da elasticidade plana / Lucas Vaslanv da Silva Wolff.-- 2019.

1 arquivo de texto (139 f.): PDF ; 2,64 MB

Modo de acesso: World Wide Web. Título extraído da tela de título (visualizado em 26 set 2019)

Texto em português com resumo em inglês

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Curitiba, 2019

1. Engenharia civil - Dissertações. 2. Construção civil. 3. Método dos elementos finitos. 4. Elasticidade. 5. Cisalhamento. 6. Deformações e tensões. 7. Cálculo das variações. I. Abdala Filho, João Elias, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, inst. III. Título.

CDD: Ed. 23 -- 624

Biblioteca Ecoville da UTFPR, Câmpus Curitiba
Lucia Ferreira Littiere - CRB 9/1271



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº174

A Dissertação de Mestrado intitulada UM ESTUDO DO DESEMPENHO DE ELEMENTOS FINITOS DA ELASTICIDADE PLANA, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) **Lucas Vaslanv da Silva Wolff**, no dia 22 de agosto de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração Construção Civil, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). João Elias Abdalla Filho - Presidente - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Roberto Dalledone Machado - UFPR

Prof(a). Dr(a). Ivan Moura Belo - UTFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 22 de agosto de 2019.

RESUMO

WOLFF, Lucas Vaslanv da Silva. **Um Estudo Do Desempenho De Elementos Finitos Da Elasticidade Plana**. 2019. 142 f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

Este trabalho faz um estudo do desempenho de elementos finitos retangulares planos da elasticidade. Elementos de quatro, oito e nove nós, formulados usando a formulação isoparamétrica e a formulação segundo a notação *strain gradient* (SGN) são comparados ao serem aplicados na solução de diferentes problemas. A influência de termos espúrios, denominados de cisalhamento parasítico e que são responsáveis pelo erro de modelagem conhecido por travamento por cisalhamento (*shear locking*), é investigada. Para bom desempenho dos elementos, erros de modelagem devem ser evitados. A eliminação de termos espúrios em elementos isoparamétricos é realizada usando-se técnicas de integração numérica reduzida, uniforme ou seletiva, de acordo com o elemento finito empregado. Nos elementos de ordem elevada, neste caso, os elementos de oito e nove nós, essas técnicas funcionam apenas parcialmente. Ao eliminarem termos espúrios, técnicas de integração reduzida também eliminam termos legítimos que compõem a equação de compatibilidade, introduzindo modos espúrios de energia nula, ou seja, um outro erro de modelagem. Termos espúrios em elementos *strain gradient* são precisamente identificados porque a notação é fisicamente interpretável, ou seja, revela os significados físicos dos coeficientes polinomiais. Assim, os termos espúrios podem ser removidos dos polinômios de deformação, tornando os elementos livres de erros de modelagem. Ressalta-se que os termos espúrios são corretamente eliminados, ou seja, sem a introdução de modos espúrios de energia nula. Esses procedimentos são descritos neste trabalho e validados nas análises numéricas apresentadas. Nessas análises numéricas, procura-se também investigar a influência da razão de aspecto dos elementos, da geometria da malha utilizada, e da variação do coeficiente de Poisson na aproximação dos resultados, assim como a convergência com o refino uniforme e não uniforme da malha. As análises mostram a equivalência numérica dos deslocamentos entre a formulação isoparamétrica com integração completa e a notação *strain gradient* com termos espúrios em elementos com quatro, oito e nove nós. Para o elemento isoparamétrico de quatro nós, a integração reduzida uniforme mostra não ser eficaz na solução dos problemas propostos, enquanto a integração reduzida seletiva mostra equivalência nos resultados à notação *strain gradient* sem termos espúrios. Para elementos de ordem mais alta, oito e nove nós, a notação *strain gradient* mostra melhor desempenho que a formulação isoparamétrica quando a razão de aspecto do elemento é próxima de um para problemas com coeficientes de Poisson próximos a zero. Quando se aumenta o coeficiente de Poisson, os resultados da notação *strain gradient* passam a ser melhores também para elementos com razão de aspecto maior que um.

Palavras-chave: *Strain gradient Notation*, Elemento isoparamétrico, Elasticidade plana.

ABSTRACT

WOLFF, Lucas Vaslanv da Silva. **A Study of Finite Element Performance of Plane Elasticity**. 2019. 142 p. Dissertation Master Degree in Civil Engineering - Federal Technology University - Paraná. Curitiba, 2019.

This work makes a study of the performance of rectangular finite elements in plane elasticity. Four-, eight- and nine-node elements formulated using the isoparametric formulation and the *strain gradient* notation (SGN) are compared when applied to the solution of different problems. The influence of spurious terms, called parasitic shear and which are responsible for the modeling error known as shear locking, is investigated. For good performance of the elements, modeling errors should be avoided. The elimination of spurious terms in isoparametric elements is accomplished using numerical techniques reduced, uniform or selective, according to the finite element employed. In the high-order elements, in this case, the eight- and nine-node elements, these techniques function only partially. By eliminating spurious terms, reduced integration techniques also eliminate legitimate terms that make up the equation by introducing null energy spurious modes, that is, another modeling error. Spurious terms in *strain gradient* elements are precisely identified because the *strain gradient* notation is a physically interpretable notation, which reveals the physical meanings of the polynomial coefficients. Thus, the spurious terms can be removed from the deformation polynomials, making the elements free from modeling errors. It is emphasized that spurious terms are correctly eliminated, that is, without the introduction of spurious modes of zero energy. These procedures are described in this work and validated in the numerical features presented. In this numerical analysis, we also investigate the influence of the aspect ratio of the elements, the geometry of the mesh used, and the variation of the Poisson coefficient in the approximation of the results, as well as the convergence with the uniform and non- uniform refining of the mesh. The analysis shows the equivalence between the isoparametric formulation with complete integration and the *Strain gradient* notation with spurious terms in elements with four, eight and nine nodes. For the four-node element, uniform reduced integration was shown to be ineffective in solving the proposed problems, while the selective reduced integration of the isoparametric formulation showed equivalence in the results to *strain gradient* notation with no spurious terms. For higher order elements, eight and nine nodes, *strain gradient* notation showed better performance than the isoparametric formulation when the aspect ratio of the element is close to one, for problems with Poisson coefficient close to zero. When the Poisson coefficient is increased, the results of *strain gradient* notation become better also for elements whose base is more elongated with respect to height too.

Palavras-chave: *Strain gradient* Notation, Isoparametric Element, Plane Elasticity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1–(a) Problema na elasticidade plana. (b) Malha de elementos finitos modelando um problema na elasticidade plana[2].	20
Figura 2– Sólido tridimensional submetido a tensões nas direções ortogonais x, y e z [9].	23
Figura 3– Mapeamento geométrico para um elemento de forma irregular.	30
Figura 4– Elemento de 4 nós no plano [8].	34
Figura 5– (a) Elemento de quatro nós real; (b) Elemento de quatro nós mapeado [16].....	35
Figura 6– Representação do triângulo de Pascal para determinação das equações de um elemento de quatro nós [2].	40
Figura 7– Representação do elemento de nove nós [2].....	41
Figura 8– Representação do triângulo de Pascal para determinação das equações de um elemento de oito nós [8].	44
Figura 9– Representação do desenvolvimento das funções de forma de um elemento de oito nós, a partir dos graus de liberdade em (a) e (b) para (c) [2].....	45
Figura 10– Representação de um elemento de oito nós [17].....	45
Figura 11– Movimentos de um ponto qualquer do sólido [8].....	48
Figura 12– Elemento de quatro nós na notação <i>strain gradient</i> [8]......	50
Figura 13– Elemento de oito nós (a) e nove nós (b) na com seus respectivos termos do triângulo de Pascal [8]......	56
Figura 14– Estrutura do programa PC-FEM	70
Figura 15– Estrutura do PRE_PROFOR	71
Figura 16– Estrutura do PROFOR	72
Figura 17– Estrutura do PROFOR	73
Figura 18– Viga em Balanço utilizada.	74
Figura 19– Viga em Balanço modelada para razão de aspecto $ba = 1$ e seus refinamentos uniformes, e a modelagem para razão de aspecto $ba = 0,1$ e seus refinamentos uniformes.	74
Figura 20– Viga em Balanço utilizada.	75
Figura 21– Viga Curta modelada para diferentes razões de aspectos e seus refinamentos uniformes para os elementos finitos de quatro nós.	75
Figura 22– Viga Curta modelada para diferentes razões de aspectos e seus refinamentos uniformes para os elementos finitos de quatro nós.	76
Figura 23– Modelagem do furo quadrado.	76
Figura 24– Modelagem da viga em balanço com $ba = 1$ e os refinamentos uniformes realizados. .	82

Figura 25– Modelagem da viga em balanço com $ba = 0,5$ e os refinamentos uniformes realizados.	85
Figura 26– Modelagem da viga em balanço com $ba = 0,2$ e os refinamentos uniformes realizados.	88
Figura 27– Modelagem da viga em balanço com $ba = 0,1$ e os refinamentos uniformes realizados.	89

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1– Deslocamento x Posição da malha com 10 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.	82
Gráfico 2– Deslocamento x Posição da malha com 40 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós	83
Gráfico 3– Deslocamento x Posição da malha com 160 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós	84
Gráfico 4– Deslocamento x Posição da malha com cinco elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós	85
Gráfico 5– Deslocamento x Posição da malha com 20 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós	86
Gráfico 6– Deslocamento x Posição da malha com 80 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós	87
Gráfico 7– Deslocamento x Posição da malha com dois elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós	88
Gráfico 8– Deslocamento x Posição da malha com oito elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.	88
Gráfico 9– Deslocamento x Posição da malha com 32 elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós	89
Gráfico 10– Deslocamento x Posição da malha com um elemento com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.	90
Gráfico 11– Deslocamento x Posição da malha com quatro elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.	90
Gráfico 12– Deslocamento x Posição da malha com 16 elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.	90
Gráfico 13– Erro x Quantidade de elementos, para o elemento de quatro nós.	91
Gráfico 14– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4 e SG4.	92
Gráfico 15– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4RI.	92
Gráfico 16– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4SRI e SG4C	93
Gráfico 17– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4SRIP.....	93
Gráfico 18– Erro x Quantidade de elementos, no elemento ISOP4SRIP, e Poisson igual à 0,49.	94

Gráfico 19– Erro x Quantidade de elementos, para coeficientes de Poisson igual à 0, 0,3 e 0,49 para o elemento de quatro nós.	95
Gráfico 20– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha.....	96
Gráfico 21– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=1$	97
Gráfico 22– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=0,5$	97
Gráfico 23– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=0,2$	98
Gráfico 24– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=0,1$	98
Gráfico 25– Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos da malha.	99
Gráfico 26– Tensões de cisalhamento em “x” e “y” pela quantidade de elementos da malha.	100
Gráfico 27– Deslocamento x Posição da malha com 10 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.....	101
Gráfico 28– Deslocamento x Posição da malha com 40 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.....	101
Gráfico 29– Deslocamento x Posição da malha com 160 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.....	102
Gráfico 30– Deslocamento x Posição da malha com cinco elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.....	102
Gráfico 31– Deslocamento x Posição da malha com 20 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.....	103
Gráfico 32– Deslocamento x Posição da malha com 80 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.....	104
Gráfico 33– Erro x Quantidade de elementos, para coeficientes de Poisson igual à 0, 0,3 e 0,49 para o elemento de nove nós.....	105
Gráfico 34– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9 e SG9.	106
Gráfico 35– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9RI.	106
Gráfico 36– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9SRI1.	107

Gráfico 37– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9SRIP1.	107
Gráfico 38– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos SG9C.	107
Gráfico 39– Tensão normal em “x” pela quantidade de elementos da malha.	108
Gráfico 40– Tensão normal em “x” pela quantidade de elementos da malha, sem os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N.	109
Gráfico 41– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=1$	109
Gráfico 42– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,5$	110
Gráfico 43– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,2$	110
Gráfico 44– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,1$	111
Gráfico 45– Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha.	112
Gráfico 46– Tensão normal em “y” pela quantidade de elementos da malha, sem os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N.	112
Gráfico 47 Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=1$	113
Gráfico 48 Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,5$	113
Gráfico 49 Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,2$	114
Gráfico 50 Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,1$	114
Gráfico 51 Tensões de cisalhamento em “x” e “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha.	115
Gráfico 52 Tensões de cisalhamento em “x” e “y” pela quantidade de elementos de nove nós, sem inserção de modos cinemáticos de energia nula.	116
Gráfico 53– Deslocamento x Posição da malha com 10 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	117
Gráfico 54– Deslocamento x Posição da malha com 40 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	117

Gráfico 55– Deslocamento x Posição da malha com cinco elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	118
Gráfico 56– Deslocamento x Posição da malha com 20 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	118
Gráfico 57– Deslocamento x Posição da malha com dois elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	119
Gráfico 58– Deslocamento x Posição da malha com oito elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	119
Gráfico 59– Deslocamento x Posição da malha com 32 elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	120
Gráfico 60– Deslocamento x Posição da malha com um elemento com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	120
Gráfico 61– Deslocamento x Posição da malha com quatro elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.	120
Gráfico 62– Deslocamento x Posição da malha com 16 elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço (Cantilever Beam), para o elemento de oito nós.	121
Gráfico 63– Erro x Quantidade de elementos, para coeficientes de Poisson igual à 0, 0,3 e 0,49 para o elemento de oito nós.	121
Gráfico 64– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de quatro nós.	122
Gráfico 65– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de quatro nós, sem o elemento ISOP4RI.	123
Gráfico 66– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de quatro nós.	124
Gráfico 67– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós.	125
Gráfico 68– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós, com a retirada de ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2, SG9N e ISOP9RI.	125
Gráfico 69– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós.	126
Gráfico 70– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós, sem os elementos ISOP9RI, ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N.	127

Gráfico 71– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para o furo quadrado, modelado com elementos finitos de quatro nós.....	128
Gráfico 72– Tensão normal na direção “x” x Quantidade de elementos, para o furo quadrado, modelado com elementos finitos de quatro nós.....	128
Gráfico 73– Tensão normal na direção “y” x Quantidade de elementos, para o furo quadrado, modelado com elementos finitos de quatro nós.....	129

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
1.1. Objetivo Geral	18
1.2. Objetivos Específicos	18
1.3. Organização do Trabalho.....	19
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1. Método dos Elementos Finitos.	20
2.1.1. Relações constitutivas da mecânica dos sólidos.	21
2.1.2. Formulação do Método dos Elementos Finitos.	26
2.1.3. Elementos Isoparamétricos.	29
2.1.4. Integração reduzida uniforme, reduzida seletiva e reduzida seletiva ponderada.	31
2.1.5. Elemento isoparamétrico de quatro nós no plano.	33
2.1.6. Elemento isoparamétrico de oito e nove nós no plano.	41
2.2. <i>Strain gradient Notation</i>	47
2.2.1. Elemento retangular de quatro nós no plano na notação <i>Strain gradient</i>	49
2.2.2. Elemento retangular de oito nós no plano na notação <i>Strain gradient</i>	56
2.2.3. Elemento retangular de nove nós no plano na notação <i>Strain gradient</i>	61
3. METODOLOGIA	69
3.1. PC-FEM.....	70
3.2. Viga em Balanço (<i>Cantilever Beam</i>).....	73
3.3. Viga curta	74
3.4. Furo quadrado.....	76
3.5. Modo de análise dos resultados	77
4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	80
4.1. Viga em Balanço	81
4.1.1. Elemento de quatro nós.....	81
4.1.2. Elemento de nove nós	100
4.1.3. Elemento de oito nós.....	116
4.2. Viga Curta.	122
4.2.1. Elemento de quatro nós.....	122
4.2.2. Elemento de nove nós.	124
4.3. Furo quadrado.....	127
5. CONCLUSÕES.....	130

5.1.	A <i>Viga em Balanço</i> (Cantilever Beam) modelada com elementos de quatro nós.....	130
5.2.	A Viga em Balanço modelada com elementos de oito e nove nós.....	132
5.3.	A viga curta modelada com elementos de quatro nós.	134
5.4.	A viga curta modelada com elementos de nove nós.....	135
5.5.	O furo quadrado modelado com elementos de quatro nós.	135
6.	REFERÊNCIAS.....	137

1. INTRODUÇÃO

O método de elementos finitos (MEF) é um método numérico-computacional que aproxima soluções de problemas do meio contínuo, esses descritos matematicamente por sistemas de equações diferenciais e um conjunto de condições de contorno. Utilizado em diferentes áreas da Engenharia e da Física-Matemática, o MEF permite a obtenção de soluções de problemas práticos que são intratáveis analiticamente.

Em seu procedimento de análise, o MEF representa o domínio do meio contínuo, muitas vezes de geometria complexa e podendo ser composto por vários materiais, por um modelo matemático dividido em sub-regiões denominadas elementos finitos. O comportamento de um elemento finito típico do modelo, através de sua formulação, pode ser estimado acuradamente. Assim, o comportamento do contínuo também pode ser estimado acuradamente quando modelado por um conjunto de muitos desses elementos finitos [1, 2].

O modelo de elementos finitos é usualmente denominado malha devido ao reticulado que é formado pela associação dos elementos. Diz também que o modelo de elementos finitos é uma discretização porque ele representa com apenas um número finito de graus-de-liberdade o meio contínuo, que é um sistema com um número infinito de graus-de-liberdade. Por esta razão, a solução é sempre aproximada, e uma melhor aproximação é obtida com um maior refino da malha. Na prática, uma sucessão de refinamentos e reanálises do modelo, realizada segundo diretrizes cientificamente estabelecidas, como a reprodutibilidade dos resultados, permite a obtenção de uma solução convergente, ou seja, uma solução suficientemente aproximada da solução matematicamente correta do problema.

Sob uma perspectiva histórica, o Método dos Elementos Finitos surgiu como um método de análise de estruturas e sólidos, derivado do Método da Rigidez Direta [2]. Foi apenas após a construção de uma robusta fundamentação matemática que ficou estabelecido que o método poderia ser aplicado na solução de problemas de valor de contorno de qualquer área da física-matemática. As primeiras aplicações do MEF envolvem a elasticidade plana [3, 4], área esta que este trabalho revisita.

Elementos finitos para a elasticidade plana baseados em campos de deslocamento cujos polinômios são incompletos dentro de uma certa ordem possuem erros de modelagem. Em geral, quadriláteros são formulados com base em polinômios incompletos. Erros de modelagem se manifestam através do enrijecimento artificial ou travamento do modelo, que está associado a deformação por cisalhamento ou distorção angular. Esse erro se denomina travamento por

cisalhamento, que é uma tradução do termo original em inglês, *shear locking*. O fenômeno foi descoberto ainda nos primórdios do MEF quando da formulação de elementos finitos isoparamétricos [5-7] e foi atribuído a presença de termos de cisalhamento parasítico, do original em inglês, *parasitic shear*, também referidos aqui como termos espúrios, presentes na matriz de rigidez. Como a matriz de rigidez de elementos isoparamétricos deve ser integrada numericamente, pesquisadores desenvolveram técnicas de integração numérica de ordem reduzida para resolver o problema de travamento. Essencialmente, essas técnicas têm por objetivo não integrar os termos de cisalhamento parasítico presentes na matriz de rigidez, com isso eliminando o travamento. Contudo, essas técnicas não são universais, ou seja, não funcionam igualmente para diferentes elementos. Por exemplo, a técnica de integração numérica de ordem reduzida uniforme não funciona adequadamente ao ser aplicada no quadrilátero de oito nós, elemento da família serendipity. Ocorre que ao eliminar termos espúrios, elimina também termos de mesma ordem que compõem a equação de compatibilidade da elasticidade plana. Essa eliminação errônea introduz modos espúrios de energia nula, do inglês *spurious zero-energy modes*, ou seja, um outro erro de modelagem devido a eliminação inadvertida de termos corretos presentes na formulação.

Elementos finitos isoparamétricos tornaram-se bastante populares por sua capacidade de adequação geométrica ao domínio e estão presentes nas bibliotecas dos principais programas comerciais de elementos finitos. Com isso, seu uso tornou-se bastante difundido, e é inegável que apresentam bom comportamento quando devidamente formulados, pois muitos projetos de engenharia exitosos foram realizados com base em resultados obtidos com esses elementos. Contudo, outras formulações foram e continuam a ser desenvolvidas em busca de eficiência computacional, muito motivadas em evitar erros de modelagem. Este trabalho utiliza a formulação de elementos finitos baseada na notação *strain gradient* (SGN) [8], que é uma notação fisicamente interpretável que relaciona deslocamentos e deformações explicitamente as quantidades cinemáticas do meio contínuo. Especificamente, os coeficientes dos polinômios são escritos na forma de grandezas físicas que representam o comportamento do meio contínuo.

A notação *strain gradient* permite que as capacidades de modelagem de um elemento finito sejam conhecidas durante o procedimento de formulação, ou seja, *a-priori*. Os modos de deformação que o elemento pode representar são evidenciados logo no início da formulação quando suas expansões polinomiais são escritas. Nesse processo, os termos espúrios responsáveis pelo travamento são também identificados. Como será mostrado neste trabalho, termos espúrios são identificados na expressão de distorção angular de cada elemento. A

eliminação correta do travamento por cisalhamento é realizada quando os termos espúrios são removidos durante o processo de formulação. Assim, a notação *strain gradient* permite que erros de modelagem sejam eliminados de forma correta, ou seja, sem a introdução de modos espúrios de energia nula, e *a-priori*. Essa é uma importante vantagem do procedimento, pois implica em eficiência computacional, uma vez que não há necessidade de se lançar mão de técnicas numéricas para eliminação de termos espúrios durante a análise.

Apesar da notação *strain gradient* ter sido introduzida em meados dos anos oitenta, muitas de suas possíveis aplicações ainda estão em desenvolvimento e sua eficiência continua em validação com o objetivo de que seja estabelecida como uma formulação competitiva. Não se tem muitos dados de comparação da notação *strain gradient* com outras formulações, notadamente a isoparamétrica. Assim, neste trabalho, realiza-se um estudo em que se compara o desempenho da formulação *strain gradient* com a formulação isoparamétrica na análise por elementos finitos de problemas da elasticidade plana usando elementos retangulares lineares e quadráticos.

1.1. Objetivo Geral

- O objetivo deste trabalho é avaliar e comparar o desempenho dos elementos finitos *strain gradient* e isoparamétricos retangulares de quatro, oito e nove nós na análise de problemas da elasticidade plana.

1.2. Objetivos Específicos

- Comparar o desempenho dos elementos finitos retangulares *strain gradient* com o desempenho dos elementos isoparamétricos para diferentes problemas da elasticidade plana.
- Avaliar a influência da razão de aspecto no desempenho dos elementos.
- Avaliar a influência do coeficiente de Poisson no erro associado à modelagem.
- Mostrar a correta eliminação dos termos espúrios nos elementos retangulares de oito e nove nós.

Apesar da formulação isoparamétrica ser bastante difundida, e suas vantagens e desvantagens na modelagem de problemas planos, a notação *strain gradient* ainda não foi explorada de forma comparativa, tanto do ponto de vista conceitual como de resultados, de forma que o estudo e comparação das duas formulações vem a contribuir não só com a

elucidação destas, como também com a identificação de possíveis modificações e oportunidades a serem exploradas.

1.3. Organização do Trabalho

Este capítulo introdutório faz uma conceituação do método dos elementos finitos e uma breve descrição de erros de modelagem e de técnicas de eliminação desses erros associadas a procedimentos de formulação de elementos finitos, e apresenta os objetivos do trabalho. O capítulo 2 faz uma revisão bibliográfica sobre o tema da dissertação e apresenta as formulações isoparamétrica e *strain gradient* dos elementos de quatro, oito e nove nós na elasticidade plana. O capítulo 3 descreve a metodologia empregada para atingir os objetivos propostos, detalhando os procedimentos computacionais e as simulações a ser realizadas. O capítulo 4 apresenta e discute os resultados das análises numérico-computacionais, e finalmente as conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 5.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

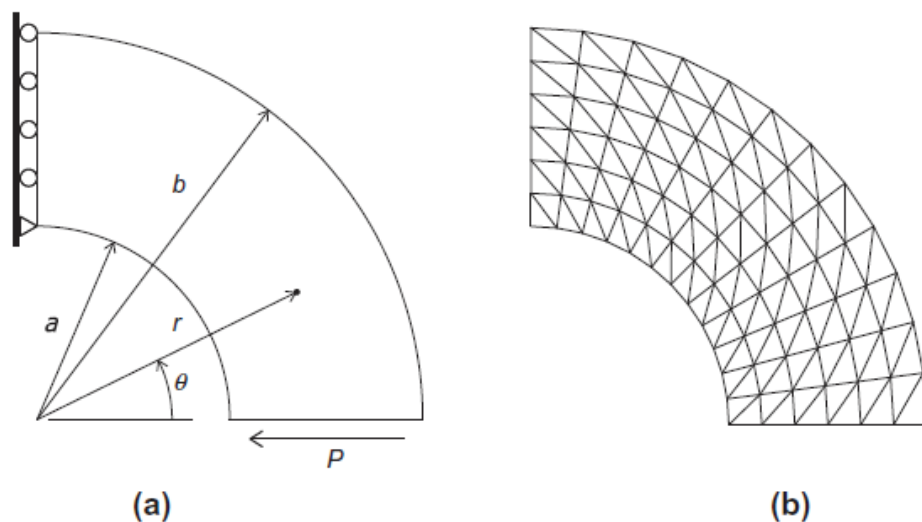
Neste capítulo serão abordados os principais conceitos referentes as formulações isoparamétricas e *strain gradient notation*, embasando as análises e considerações do trabalho acerca do tema estudado.

2.1. Método dos Elementos Finitos.

Teoricamente, um problema do meio contínuo possui um número infinito de graus-de-liberdade e sua solução analítica pode ser de difícil obtenção. O Método dos Elementos Finitos (MEF) aproxima a solução do problema através da subdivisão do seu domínio em elementos discretos, denominados elementos finitos, em um processo chamado de discretização[1, 2]. O modelo resultante possui um número finito de graus-de-liberdade e corresponde a um sistema de equações algébricas que, quando resolvido, fornece uma solução aproximada para o problema.

Um elemento finito possui geometria simples (triângulo ou quadrilátero, por exemplo) e um número finito de graus-de-liberdade. Seu comportamento é facilmente descrito por uma formulação adequada ao problema a ser modelado. A associação de vários elementos finitos forma a malha de elementos finitos que modela o problema e que permite sua solução, como ilustra a figura 1.

Figura 1—(a) Problema na elasticidade plana. (b) Malha de elementos finitos modelando um problema na elasticidade plana[2].



Fonte: ZIENKIEWICZ, 2013.

Por proporcionar uma aproximação prática e eficaz, reduzindo custos de prototipagem com segurança, vários *softwares* são desenvolvidos para a modelagem de problema de

engenharia, sendo necessário o conhecimento do usuário para a correta aplicação do MEF para cada tipo de problema estudado[2].

O estudo contínuo do MEF por engenheiros é necessário, para melhorar a aplicação e agilidade das soluções encontradas independente dos *softwares* disponíveis, para maior acurácia e segurança na engenharia [3].

2.1.1. Relações constitutivas da mecânica dos sólidos.

Para a aplicação do MEF na área de mecânica dos sólidos, deve-se entender relações e formulações devidas entre deformações, rigidez e forças, como as leis de Hooke, as leis de Newton, e as técnicas desenvolvidas por vários físicos e matemáticos tais quais Lagrange, Euler, Bernoulli, Coulomb, Hamilton, Mariotte, Cauchi, Navier, Young, Poisson, Mohr e Castigliano, cujas histórias são relatadas no livro de Timoshenko, em 1953[9].

Como os problemas estudados estão em equilíbrio estático, a energia cinética em um sistema de energia conservativo torna-se nula, tornando a energia potencial constante, e representando o comportamento do sólido através da equação (1) [10]:

$$\Pi = \int_V (U - W) \delta V \quad (1)$$

Onde:

Π :Energia potencial.

U : Energia de deformação.

W : Trabalho realizado pelas forças externas.

V : Domínio do problema.

Segundo a lei de Hooke, que define o comportamento dos sólidos dentro do regime elástico, pode-se concluir a relação entre as deformações específicas e as tensões existentes no corpo, como mostra a equação (2) [11, 12]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{E} (\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)); \\ \varepsilon_j &= \frac{1}{E} (\sigma_j - \nu(\sigma_i + \sigma_k)); \\ \varepsilon_k &= \frac{1}{E} (\sigma_k - \nu(\sigma_i + \sigma_j)) \end{aligned} \quad (2)$$

Onde:

ϵ : Deformação específica linear no corpo.

E: Módulo de elasticidade longitudinal do material.

σ : Tensão aplicada ao corpo.

i, j e k : Direções em que o corpo está submetido a tensões.

ν : Coeficiente de Poisson.

A relação pode ser estendida para tensões de cisalhamento e distorções angulares, como mostra a equação (3):

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}; \gamma_{ik} = \frac{\tau_{ik}}{G}; \gamma_{jk} = \frac{\tau_{jk}}{G} \quad (3)$$

Onde:

γ : Distorção angular.

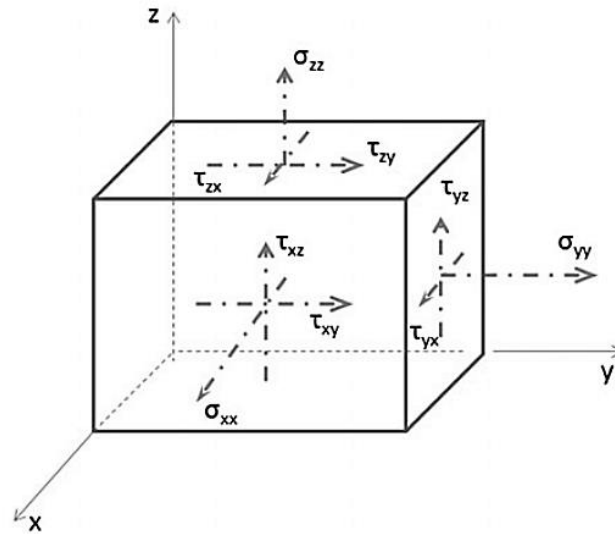
G: Módulo de cisalhamento.

τ : Tensão de cisalhamento.

Porém quando esta relação é colocada no espaço tridimensional com eixo de referência ortogonais “x”, “y” e “z”, como mostra a Figura 2, faz necessário o uso do coeficiente de Poisson (ν), que estabelece a razão entre duas deformações específicas ortogonais entre si, como mostra a equação (4) [13]:

$$\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (4)$$

Figura 2– Sólido tridimensional submetido a tensões nas direções ortogonais x, y e z [9].



Fonte: TIMOSHENKO, 1953.

Isso se faz necessário para representar as influências causadas por tensões aplicadas em direções diferentes no mesmo corpo, culminando na equação (5) para sólidos isotrópicos, os quais o material possui as mesmas propriedades em todas as direções [8]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)); \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)); \gamma_{zy} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zy}}{G}\end{aligned}\quad (5)$$

Escrevendo as equações para cada deformação linear e angular, pode-se determinar a seguinte forma matricial da equação (6) [2]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}\quad (6)$$

Para um corpo de espessura pequena, medida na direção “z”, e submetido a forças externas em direções contidas no plano do elemento, definido pelos eixos ortogonais “x” e “y”, considera-se o apresentado na equação (7) geral para problemas elásticos dentro do plano [2]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \partial V \quad (7)$$

Com a equação (7) é possível determinar a parcela de energia relativa à deformação de acordo com cada grau de liberdade de um elemento finito plano [14].

Uma vez definida a energia interna do sólido, o trabalho realizado pelas forças externas é necessário para a montagem completa da equação de energia potencial do problema, sendo resultado da multiplicação das forças aplicadas a um ponto e os deslocamentos realizados pelo ponto [2].

Pode-se definir pela equação (8) o trabalho realizado pelas forças externas [2]:

$$W = \int_S \phi_i \delta \mu_i dS + \int_V F_i \delta \mu_i dV \quad (8)$$

W = Trabalho realizado pelas forças externas.

$\delta \mu_i$ = Variação do deslocamento associados às forças.

S e V = Domínios de aplicação das forças.

ϕ_i = Forças de superfície.

F_i = Forças de volume.

Estabelecidas as relações constitutivas que são necessárias para a aplicação do método na mecânica dos sólidos, pode-se buscar uma função que descreva a energia potencial associada à um problema em específico, no caso unidimensional, para simplificar a metodologia utilizada, que segue os mesmos conceitos para o estado plano estudado.

O funcional que descreve a energia potencial, no caso unidimensional, pode ser escrito conforme a equação (9) [8]:

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u_x) dx \quad (9)$$

$F(x, u, u_x)$ = funcional que descreve o trabalho realizado pelo corpo.

$u = u(x)$ função que minimiza Π .

Para a minimização ou maximização da função de energia potencial, deve-se atender a equação (10), onde mostra que no ponto de máximo ou mínimo a derivada de primeira ordem da função deve ter valor nulo, e as condições necessárias para resolução do problema através da derivada de segunda ordem [8]:

$$\delta\Pi = 0 \quad (10)$$

$\delta^2 > 0$ para a minimização da função.

$\delta^2 < 0$ para a maximização da função.

$\delta^2 = 0$ deve ser pesquisada uma variação de maior ordem para conclusões.

Considerando que a função solução do funcional $F(x, u, u_x)$ possui variações dentro do domínio, que também podem ser escritas como a amplitude das variações α multiplicadas por uma função associada ao desvio da função solução exata $\eta(x)$, pode-se escrever a função $u(x)$ que soluciona o funcional conforme as equações (11) [8]:

$$u(x) = u(x) + \delta u(x), \text{ ou } u(x) = u(x) + \alpha\eta(x) \quad (11)$$

$\delta u(x)$ = variações em $u(x)$.

Colocando a energia potencial em função da amplitude das variações α , ou seja, $\Pi = \Pi(\alpha)$, pode-se dizer que para a solução exata do funcional F, a variável α deve ser nula para qualquer posição “x”, e é equivalente à variação da energia potencial em relação ao domínio do problema, que também deve ser nula no ponto máximo ou mínimo, podendo ser escrita como: $\delta\Pi = 0 \equiv \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}|_{\alpha=0} = 0$ [8].

Dessa forma, pode-se escrever a equação (12) para a derivada de Π em relação à α , realizando a integração por partes da função $F(x, u, u_x)$, e as demais considerações já descritas [8]:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta u_x} \right] \eta(x) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (12)$$

Sendo desconhecida a função $\eta(x)$, para satisfazer a igualdade pode-se afirmar duas condições que tornam a afirmação verdadeiras para quaisquer valores que $\eta(x)$ assumam, a equação de Euler, mostrada na equação (13), e as condições de contorno naturais, mostradas nas equações (14) [8]:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = 0 \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \Big|_{x=x_1} = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \Big|_{x=x_2} = 0 \quad (14)$$

Quando são conhecidos os valores de $u(x_1)$ e $u(x_2)$, pode-se utilizar as condições de contorno essenciais $\partial u(x)|_{x=x_1} = 0$ e $\partial u(x)|_{x=x_2} = 0$ [8].

Apesar da formulação descrita estar associada a um problema unidimensional, existem tantas equações de Euler quantas são as variáveis fundamentais, tornando esta mesma resolução possível de forma mais extensa para os casos bidimensionais e tridimensionais [8].

A partir do equacionamento variacional, pode-se optar por, a partir de dados conhecidos e suficientes, resolver um dado problema de forma exata e analítica, o que pode trazer uma complexidade muito alta, como se pode realizar uma forma de solução aproximada, mas que satisfaça à acurácia exigida para o problema.

A formulação forte, ou *strong form*, utiliza das equações de Euler e as condições de contorno para obter uma solução exata, porém nem sempre existem ferramentas matemáticas suficientes para determinar as deformações e esforços por integração direta [8].

A formulação fraca, ou *weak form*, utiliza uma função aproximada para solucionar problemas complexos, que não poderiam, ou seriam dificilmente obtidos por integração direta.

O método dos elementos finitos utiliza dos recursos dessa formulação para descrever estruturas contínuas e complexas de forma discreta e mais simples, com a aproximação do comportamento de um sólido com funções polinomiais de fácil tratamento [8].

2.1.2. Formulação do Método dos Elementos Finitos.

A equação da energia potencial pode adquirir formatos difíceis de realizar a integração algébrica, sendo a discretização do problema uma forma de solução aproximada para um problema contínuo complexo [8].

Pode-se escrever a equação da energia potencial como a equação (15) [8]:

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (15)$$

Sendo $u(x)$ a equação que descreve os deslocamentos do corpo, pode-se arbitrar como $u(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x) \cdot u_i$ a aproximação por elementos finitos, sendo $f_i(x)$ as funções de forma, responsáveis por atenderem as condições de contorno, e u_i os deslocamentos nodais, onde pode ser aplicado o método de Rayleigh-Ritz, por exemplo [8].

A função dos deslocamentos $u(x)$ e as funções de forma $f_i(x)$ podem ser escritas nas formas matriciais quando colocadas em função da posição do elemento s , sendo $s = x - (i - 1) \cdot l$, para i sendo o número do elemento e l o tamanho. As formas matriciais são expressas nas equações (16) [15, 16]:

$$f_i(x) = N_i(s); u(s) = \sum_{i=1}^n u_i N_i(s); u(s) = [N]\{d\}_i \quad (16)$$

Para aplicar as deformações na lei de Hooke, faz-se necessária a determinação das deformações específicas, que correspondem à $\varepsilon(x) = \varepsilon(s) = \frac{d}{ds} [N]\{d\}_i = [N']\{d\}_i = [B]\{d\}_i$ [15, 16].

Considerando a formulação matricial para as tensões $[\sigma] = [E]\{\varepsilon\} = [B]\{d\}_i [E]$, e substituindo na equação (7), obtém-se a equação (17) para a energia interna de deformação em forma matricial em função dos elementos finitos [15]:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{d\}_i^t \int_V [B]^t [E] [B] dV \{d\}_i \quad (17)$$

Onde a matriz de rigidez $[K]_i$ é definida como: $[K]_i = \int_V [B]^t [E] [B] dV$ [15, 16].

O trabalho realizado pelas forças externas expresso na equação (8), substituindo os deslocamentos obtidos pelo método dos elementos finitos em forma matricial pode ser expressa pela equação (18) [15, 16]:

$$W = \{d\}_i^t \int_S [N] q(s) dS \quad (18)$$

Pode-se definir a matriz de forças equivalentes nodais $\{r_e\}_i$ como $\{r_e\}_i = \int_S [N] q(s) dS$ [15, 16].

A equação da energia potencial pode ser definida com a substituição das equações (17) e (18) na equação (1), formando a equação (19) [15, 16]:

$$\Pi_{pi} = \frac{1}{2} \{d\}_i^t [K]_i \{d\}_i - \{d\}_i^t \{r_e\}_i \quad (19)$$

Generalizando a obtenção das matrizes $[K]_i$ e $\{r_e\}_i$, pode-se definir assim a equação (20) em forma matricial [15, 16]:

$$\begin{aligned} \Pi_p = \int_V \left[\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^t [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^t [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^t \{\sigma_0\} \right] dV - \int_V \{u\}^t \{F\} dV \\ - \int_S \{u\}^t \{\phi\} dS - \{d\}^t \{P\} \end{aligned} \quad (20)$$

$\{u\}$ = Vetor de deslocamentos do elemento;

$\{\varepsilon\}$ = Vetor de deformações do elemento;

$[E]$ = Matriz de elasticidade do elemento;

$\{\varepsilon_0\}$ = Vetor de deformações iniciais;

$\{\sigma_0\}$ = Vetor de tensões iniciais;

$\{F\}$ = Vetor de forças de volume;

$\{\phi\}$ = Vetor de forças de superfície;

$\{d\}$ = Vetor de deslocamentos nodais;

$\{P\}$ = Vetor de forças externas nodais.

Implementando o método dos elementos finitos, usam-se as equações de forma para descrever os deslocamentos $\{u\}$ como $\{u\} = [N]\{d\}$, e as deformações, por se tratarem da variação das deformações ao longo do corpo, podem ser escritas como $\{\varepsilon\} = [\mathbb{D}]\{u\}$, sendo $[\mathbb{D}]$ a matriz de operadores derivada da deformação em relação ao sentido da deformação do corpo [15, 16].

Ao derivar as funções de forma em relação ao sentido de deformação obtemos a matriz $[B]$, desta forma, ao utilizar as deformações em função das funções de forma e deslocamentos do elemento, obtem-se $\{\varepsilon\} = [\mathbb{D}][N]\{d\} = [B]\{d\}$ [15, 16].

Substituindo as deformações encontradas em função das variações das equações de forma e dos deslocamentos do elemento na equação (20), e o resultado da energia potencial do elemento na equação (15), obtem-se a equação (21) [15, 16]:

$$\begin{aligned}
\Pi_p = & \sum_{i=1}^{n, \text{elementos}} \left(\int_{V_e} \frac{1}{2} \{d\}_i^t [B]^t [E] [B] \{d\}_i dV_e - \int_{V_e} \{d\}_i^t [B]^t [E] \{\varepsilon_0\}_i dV_e \right. \\
& + \int_{V_e} \{d\}_i^t [B]^t \{\sigma_0\}_i dV_e - \int_{V_e} \{d\}_i^t [N]^t \{F\}_i dV \\
& \left. - \int_{S_e} \{d\}_i^t [N]^t \{\phi\}_i dS_e \right) - \{d\}^t \{P\}
\end{aligned} \tag{21}$$

Redefinindo para o plano a matriz $[K]_i$, conforme a equação (22), e a vetor $\{r_e\}_i$ conforme a equação (23), e substituindo na equação (21), obtém-se a equação (24) [15, 16]:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^t [K] \{d\} - \{d\}^t \{R\} \tag{22}$$

$$[K] = \sum_{i=1}^{n, \text{elementos}} [K]_i \tag{23}$$

$$\{R\} = \{P\} + \sum_{i=1}^{n, \text{elementos}} \{r_e\}_i \tag{24}$$

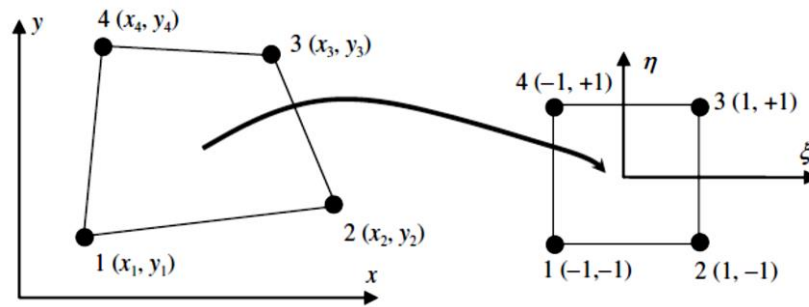
Minimizando a equação da energia potencial em relação aos deslocamentos nodais $\{d\}$, pode-se estabelecer as relações na equação (25) [15, 16]:

$$[K] \{d\} - \{R\} = 0 \tag{25}$$

2.1.3. Elementos Isoparamétricos.

Uma das vantagens da formulação dos elementos isoparamétricos é que mostram um bom comportamento a geometrias diversas com o processo de mapeamento geométrico do elemento original, uniformizando também o domínio de integração para um intervalo unitário, como é ilustrado na figura 3 [15, 16]:

Figura 3– Mapeamento geométrico para um elemento de forma irregular[8].



Fonte: DOW, 1999.

Pode-se escrever as funções de forma para o elemento em função de variáveis com domínio entre -1 e 1, e converter para as coordenadas cartesianas originais conforme as equações (26) [15-17]:

$$x = [N]\{x\}, \quad y = [N]\{y\} \quad (26)$$

Onde $\{x\}$ e $\{y\}$ são as coordenadas dos nós dos elementos e $[N]$ são as funções de forma em relação as coordenadas naturais (ξ, η) .

Como existe uma mudança de variáveis, faz-se necessário o cálculo da matriz Jacobiano para converter as integrais definidas em x e y para ξ e η , como mostra a equação (27) [15-17]:

$$\iint dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det[J] d\xi d\eta \quad (27)$$

Sendo $[J]$ definido como (28):

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Pode-se obter o resultado da integral que compõe a matriz $[K]$ pela substituição dos pontos de quadratura de Gauss e multiplicação dos pesos referentes a estes pontos, resultando na equação (29) [15-17]:

$$[K]_i = \int_V [B]^t [E] [B] \partial V \cong \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} w_i w_j [B]_m^t [E]_m [B]_m \quad (29)$$

Porém a utilização de elementos planos de baixa ordem resulta na absorção de energia de cisalhamento parasítica, distorcendo os resultados e tornando a modelagem insegura [15, 16].

Para o caso de elementos de quatro, oito e nove nós, são necessários métodos de eliminar estes erros, como a integração reduzida uniforme, e a integração reduzida seletiva.

Dentre outros métodos em desenvolvimento para a mitigação de erros e melhor convergência, o estudo e comparação das formulações é necessário não só para averiguar qual possui melhor desempenho, mas também em que situações uma formulação desempenha melhor seu objetivo, retornar uma solução precisa.

2.1.4. Integração reduzida uniforme, reduzida seletiva e reduzida seletiva ponderada.

A técnica de integração por pontos de Gauss permite a obtenção do resultado de uma integral definida em um intervalo de -1 a 1 de uma função polinômial, substituindo as coordenadas de Gauss na função em que se almeja integrar, e multiplicando resultado por um peso, adequado a quantidade de pontos e grau da equação.

Para tal procedimento deve-se substituir as coordenadas dos pontos na função, e os resultados deve ser multiplicados pelos pesos, sendo a solução exata para a integração de polinômios com ordem igual à $(2p - 1)$, sendo p a quantidade de pontos [8].

Para suprimir os termos espúrios, pode-se utilizar uma quadratura de Gauss de grau menor que a necessária para integrar completamente todos os termos do polinômio[18].

Assim, os elementos quadriláteros de quatro nós são integrados com uma quadratura de 1 ponto central ao invés de 2x2, e os elementos de oito e nove nós com uma quadratura 2x2 ao invés de 3x3 quando realizada a integração reduzida uniforme[18].

Isto provoca a supressão, ou redução do valor, referente à termos de maior grau nos polinômios de aproximação, que estão associados a termos espúrios, porém, esta eliminação é feita indiscriminadamente da origem da deformação, o que pode induzir outros erros [8].

Como alternativa a integração reduzida uniforme, podem-se realizar integrações reduzidas seletivas da matriz de rigidez através de duas substituições de pontos de quadratura de Gauss diferentes, considerando a equação da matriz de rigidez (30) [18, 19]:

$$[K]^e = \int_V [B]^t [E]_I^e [B] \partial V^e + \int_V [B]^t [E]_{II}^e [B] \partial V^e = [K]_I^e + [K]_{II}^e \quad (30)$$

Se for utilizada a mesma regra de integração por quadratura de Gauss para toda a equação, o resultado será idêntico a integração da equação completa.

Para eliminar o cisalhamento parasítico, não de forma explícita, mas buscando uma convergência adequada da discretização, é utilizada uma regra de quadratura de Gauss reduzida para a primeira parte da equação, podendo ser usada uma ponderação entre a soma das matrizes de elasticidades como em (31) e (32) [20]:

$$\begin{aligned} [E]^e &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 1-\alpha & \nu-\beta & 0 \\ \nu-\beta & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

$$[E]^e = [E]_I^e + [E]_{II}^e \quad (32)$$

As coordenadas dos pontos de quadratura de Gauss são dadas por $\{-X, X\}, \{X, -X\}, \{X, X\}, \{-X, -X\}$, definidos por (33) [20]:

$$X = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3(1-\alpha)}} \quad (33)$$

O resultado da soma das matrizes de elasticidade será exato para quaisquer valores de α e β , mas utilizando $\alpha = \nu^2$, a soma das matrizes de elasticidade passam a ser (34) [20]:

$$[E]^e = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} \nu^2 & \beta & 0 \\ \beta & \nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & \nu-\beta & 0 \\ \nu-\beta & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

As coordenadas dos pontos de quadratura de Gauss passam a ser $X = \frac{1}{\sqrt{3}}$, e o trabalho é minimizado para $\beta = \nu$ [20].

Ou pode-se separar a matriz de elasticidade sem a ponderação entre os termos, resultando na separação simples da matriz como em (35):

$$\begin{aligned}
[E]^e &= \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{35}$$

Da mesma forma que na equação (32), as partes da matriz de elasticidade são integradas por quadraturas de ordem diferentes, a primeira parcela por uma ordem reduzida, e a segunda por ordem completa[19].

Considerando duas regras de integração diferentes para cada matriz de elasticidade para um material isotrópico, pode-se escrever a obtenção das matrizes de rigidez em (36):

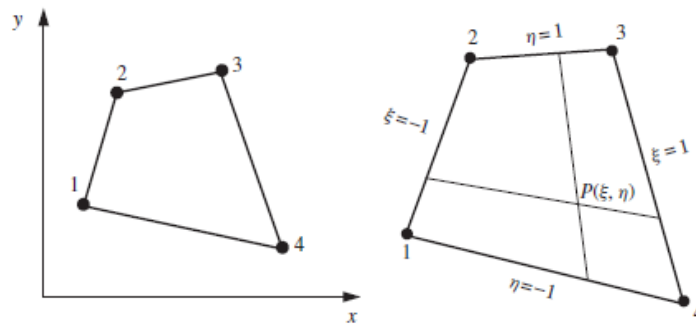
$$[K]_i^e \cong \sum_{i=1}^{p_1-1} \sum_{j=1}^{p_2-1} \det|J| w_i w_j [B]^t [E]_i^e [B] + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \det|J| w_i w_j [B]^t [E]_{II}^e [B] \tag{36}$$

A integração por pontos de quadratura de Gauss é exata para polinômios de ordem $(2p - 1)$, onde p é a quantidade de pontos utilizados na integração, e quando é utilizada uma quadratura para um polinômio de grau maior que esta regra, a integração passa a ser aproximada, suprimindo termos de maior grau, o que é proveitoso quando estes termos são espúrios, caso contrário esse processo insere modos espúrios de energia nula, prejudicando o processo [15, 19].

2.1.5. Elemento isoparamétrico de quatro nós no plano.

Pode-se definir como um elemento plano de quatro nós o elemento mostrado na figura 4 [15-17]:

Figura 4– Elemento de 4 nós no plano [8].



Fonte: DOW, 1999.

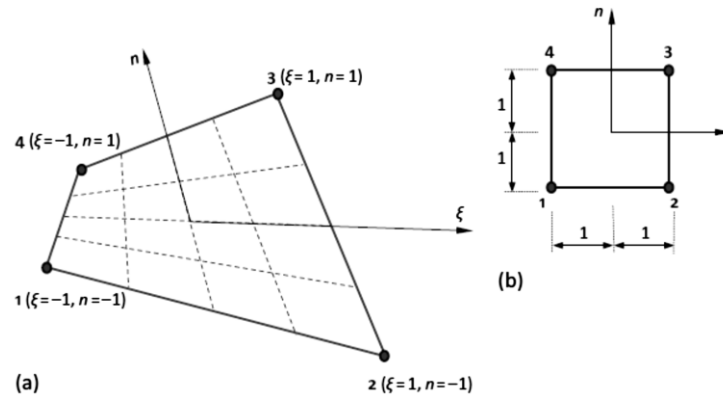
São utilizados polinômios de Lagrange para descrever a geometria e campo de deslocamentos do elemento, de acordo com a quantidade de nós e graus de liberdade, conforme as equações (37) [17]:

$$N_{k,x} = \prod_{\substack{m=1 \\ k \neq m}}^n \frac{x_m - x}{x_m - x_k}; \quad N_{k,y} = \prod_{\substack{m=1 \\ k \neq m}}^n \frac{y_m - y}{y_m - y_k}; \quad N_k = N_{k,x} N_{k,y} \quad (37)$$

A equação é válida quando todas as coordenadas são diferentes, caso contrário, as coordenadas iguais devem ser tratadas como tendo a mesma numeração k .

Como o domínio de integração do elemento deve estar dentro do intervalo $[-1,1]$ para a integração por pontos de Gauss, e com um formato retangular, para não existirem pontos do domínio fora do elemento, é realizado o mapeamento do elemento conforme a figura 5 [15]:

Figura 5– (a) Elemento de quatro nós real; (b) Elemento de quatro nós mapeado [16].



Fonte: Quek, 2014.

Escrevendo as funções de forma como foi apresentado na equação (26), pode-se converter as coordenadas em (ξ, η) para x e y segundo a equação (38) [21]:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{bmatrix} \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}, \quad (38)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{bmatrix} \{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\}$$

Pode-se escrever de forma unificada o vetor $\{x, y\}$ correlacionado com as coordenadas nodais $\{c\} = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4\}^T$ na forma da equação (39) [22]:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} = [N]\{c\} \quad (39)$$

Onde N_1, N_2, N_3, N_4 são as funções de forma $N_k(\xi, \eta)$ obtidas através da aplicação dos polinômios de Lagrange, mostrados na equação (37), sendo expressos pela equação (40) [17]:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}; N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}; N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}; N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \quad (40)$$

De forma análoga, pode-se expressar os deslocamentos $\{u, v\}$ do elemento em questão em função das coordenadas $\{\xi, \eta\}$, definindo como $\{u(\xi, \eta) \ v(\xi, \eta)\}^T$ o vetor deslocamento em função dos deslocamentos nodais conforme a equação (41) [17]:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \quad (41)$$

A deformação específica é a variação da deformação em relação ao tamanho do corpo, ou seja, $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, sendo o vetor deformação específica do elemento $\{\varepsilon\}$ definido como a equação (42) [17]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Ao tentar aplicar a equação (41) na equação (42), percebe-se a necessidade da transformação das derivadas em função da conversão de coordenadas feitas de $\{x, y\}$ para $\{\xi, \eta\}$ através da regra da cadeia, mostrada aplicada ao caso nas equações (43) [17]:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (43)$$

Na forma matricial, pode-se identificar a matriz jacobiano $[J]$, como mostra as equações (44) [17]:

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Da mesma forma, para obter as variações das funções deslocamento em relação ao referencial de $\{x, y\}$ para $\{\xi, \eta\}$, faz-se necessária a aplicação da regra da cadeia como mostra as equações (45) e (46) [17]:

$$\begin{Bmatrix} \partial u / \partial \xi \\ \partial u / \partial \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \end{Bmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{Bmatrix} \partial v / \partial \xi \\ \partial v / \partial \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Tanto na matriz Jacobiana da equação (44), como nas equações (45) e (46), são assumidos os mesmo valores, que são dados pela equação (47) para um elemento plano [17]:

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (47)$$

Sendo:

$$J_{11} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 = \frac{\eta-1}{4} x_1 + \frac{1-\eta}{4} x_2 + \frac{1+\eta}{4} x_3 + \frac{-1-\eta}{4} x_4;$$

$$J_{12} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 = \frac{\eta-1}{4} y_1 + \frac{1-\eta}{4} y_2 + \frac{1+\eta}{4} y_3 + \frac{-1-\eta}{4} y_4;$$

$$J_{21} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 = \frac{\xi-1}{4} x_1 + \frac{-1-\xi}{4} x_2 + \frac{1+\xi}{4} x_3 + \frac{1-\xi}{4} x_4;$$

$$J_{22} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 = \frac{\xi-1}{4} y_1 + \frac{-1-\xi}{4} y_2 + \frac{1+\xi}{4} y_3 + \frac{1-\xi}{4} y_4;$$

Como o objetivo é obter as variações em torno das coordenadas $\{x, y\}$, faz-se necessária inverter a matriz jacobiana definida na equação (47), para através das equações (45) e (46) sejam encontrados os valores almejados dados nas equações (48) [17]:

$$\begin{cases} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \end{cases} = [J]^{-1} \begin{cases} \partial u / \partial \xi \\ \partial u / \partial \eta \end{cases}; \quad \begin{cases} \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{cases} = [J]^{-1} \begin{cases} \partial v / \partial \xi \\ \partial v / \partial \eta \end{cases} \quad (48)$$

Sendo a matriz inversa da matriz Jacobiana igual à equação (49) [17]:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Onde $\det[J] = J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21}$.

Pode-se assim escrever o resultado da correlação entre as derivadas das deformações no eixos $\{x, y\}$ e nos eixos $\{\xi, \eta\}$ na forma matricial da equação (50) [17]:

$$\begin{cases} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{cases} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} & I_{12} \\ 0 & 0 & I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \partial u / \partial \xi \\ \partial u / \partial \eta \\ \partial v / \partial \xi \\ \partial v / \partial \eta \end{cases} \quad (50)$$

Através da equação (41) definida anteriormente, pode-se determinar na forma matricial as derivadas das deformações em relação as coordenadas $\{\xi, \eta\}$ na seguinte equação matricial (51) [17]:

$$\begin{cases} \partial u / \partial \xi \\ \partial u / \partial \eta \\ \partial v / \partial \xi \\ \partial v / \partial \eta \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{cases} \quad (51)$$

Substituindo a equação (51) em (50), e esta na equação (42) já definida, a equação (52) mostra o vetor deformação em função das variações da função de forma, das coordenadas e deslocamentos nodais [17]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} & I_{12} \\ 0 & 0 & I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Para simplificações de expressão, a equação (52) pode ser escrita de forma reduzida como $\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{d\}$, onde a matriz $[B]$ é dada na equação (53) [17]:

$$[B] = [H_1][H_2][H_3] \quad (53)$$

Onde:

$$[H_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[H_2] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} & I_{12} \\ 0 & 0 & I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$

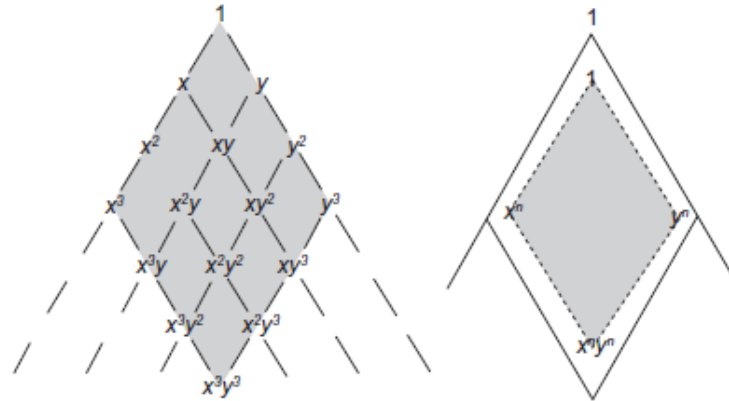
$$[H_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Outros elementos retangulares de mais de quatro nós podem ser definidos pelo mesmo procedimento utilizado para a criação da matriz $[B]$, desde que sejam refeitos os calculos das derivadas das funções de forma e acrescentadas as colunas na matriz $[H_3]$, quantas forem as coordenadas nodais do novo elemento e os deslocamentos nodais $\{d\}$.

Uma vez obtida a matriz $[B]$, pode-se aplicar a equação (36) já apresentada para a obtenção da matriz $[K]$, para assim aplicar a minimização da energia potencial, descrita na equação (25), obtendo os deslocamentos nodais e, por consequencia, a caracterização das equações referentes à deformação do elemento [17].

Para a determinação das funções de deformação e dos deslocamentos nodais, é utilizada o triângulo de Pascal, mostrada na figura 6, para determinar o grau da equação necessária [17]:

Figura 6– Representação do triângulo de Pascal para determinação das equações de um elemento de quatro nós [2].



Fonte: ZIENKIEWICZ, 2013.

As funções de aproximação da deformação são definidas para o elemento de quatro nós como as equações (54) [2, 15-17]:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy; \\ v(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{aligned} \quad (54)$$

Escrevendo as equações (54) em forma matricial obtém-se a equação (55) [2, 15, 17]:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Sendo os coeficientes a_n e b_n sem interpretação física, mas uma vez determinados pela minimização da energia potencial, serão responsáveis por descrever as deformações do elemento.

Substituído as coordenadas nodais do elemento, expressos como $\{c\}$ na equação (39), pode-se encontrar os deslocamentos nodais, expressos como $\{d\}$ na equação (41), na forma matricial da equação (56) [2, 15-17]:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 \cdot y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 \cdot y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 \cdot y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 \cdot y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \{d\} = [\Phi]\{a_{iso}\} \quad (56)$$

Obtem-se assim os coeficientes das funções de aproximação da deformação implementando as definições do elemento isoparamétrico da equação (37) à (56) na equação (25) definida como minimização da energia potencial, pode-se substituir as deformação conhecidas devido à restrições de apoio, e através das forças aplicadas conhecidas, resolver o sistema linear para obter o restante dos deslocamentos e forças desconhecidos [2, 15-17].

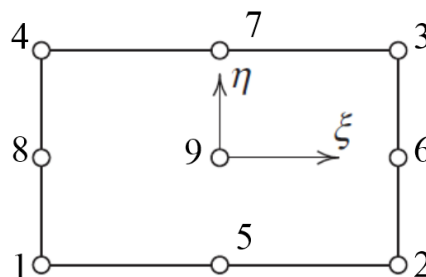
O procedimento para soluções do sistema linear de equação é variado, existindo vários procedimentos possíveis de serem adotados.

2.1.6. Elemento isoparamétrico de oito e nove nós no plano.

Para elementos retangulares de oito e nove nós, devem-se definir novas funções de forma, assim como novas funções de aproximação condizentes ao triangulo de Pascal mostrado na figura 5 [2, 15-17].

Para obter a equação $N_k(\xi, \eta)$ para o elemento de nove nós, como mostra a figura 6, para os nós dos cantos, nós intermediários, e nó central, utilizam-se as interpolações dos polinômio de Lagrange deifnidas em (37), gerando assim as equações de forma de (57) à (59) [16]:

Figura 7– Representação do elemento de nove nós [2]



Fonte: ZIENKIEVICZ, 2013.

$$N_1 = \frac{\xi\eta(\xi-1)(\eta-1)}{4}; N_2 = \frac{\xi\eta(\xi+1)(\eta-1)}{4};$$

$$N_3 = \frac{\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)}{4}; N_4 = \frac{\xi\eta(\xi-1)(\eta+1)}{4}$$
(57)

$$N_5 = \frac{\eta(1-\xi^2)(\eta-1)}{2}; N_6 = \frac{\xi(\xi+1)(1-\eta^2)}{2};$$
(58)

$$N_7 = \frac{\eta(1-\xi^2)(\eta+1)}{2}; N_8 = \frac{\xi(\xi-1)(1-\eta^2)}{2}$$

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$
(59)

Seguindo o mesmo procedimento definido para os elementos retangulares de quatro nós, obtém-se as coordenadas $\{x, y\}$ e as deformações nodais $\{u(\xi, \eta) v(\xi, \eta)\}^T$ de forma similar ao encontrado nas equações (39) e (41), respectivamente, sendo novamente definidas para o elemento de nove nós pelas equações (60) e (61) [17]:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N]\{c\}$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \\ x_7 \\ y_7 \\ x_8 \\ y_8 \\ x_9 \\ y_9 \end{Bmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \\
& = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ u_9 \\ v_9 \end{Bmatrix} \quad (61)
\end{aligned}$$

E os deslocamentos nodais passam a ser obtidos por uma equação composta por mais elementos do triangulo de Pascal mostrado na figura 5, culminando na equação (62), similar a equação (56):

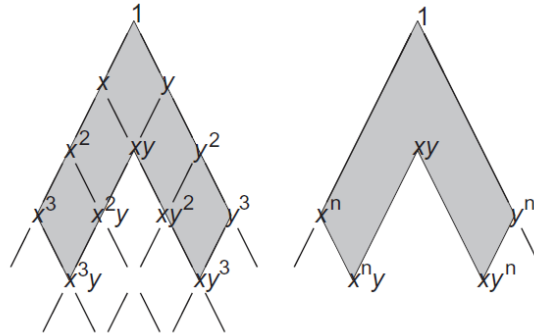
$$\begin{aligned}
& \{d\} \\
& = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & x_2^2y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & x_2^2y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & x_3^2y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & x_3^2y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4^2y_4 & x_4y_4^2 & x_4^2y_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4^2y_4 & x_4y_4^2 & x_4^2y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5^2y_5 & x_5y_5^2 & x_5^2y_5^2 & 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5^2y_5 & x_5y_5^2 & x_5^2y_5^2 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6^2y_6 & x_6y_6^2 & x_6^2y_6^2 & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6^2y_6 & x_6y_6^2 & x_6^2y_6^2 \\ 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7y_7 & y_7^2 & x_7^2y_7 & x_7y_7^2 & x_7^2y_7^2 & 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7y_7 & y_7^2 & x_7^2y_7 & x_7y_7^2 & x_7^2y_7^2 \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8^2 & x_8y_8 & y_8^2 & x_8^2y_8 & x_8y_8^2 & x_8^2y_8^2 & 1 & x_8 & y_8 & x_8^2 & x_8y_8 & y_8^2 & x_8^2y_8 & x_8y_8^2 & x_8^2y_8^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{Bmatrix} \quad (62)
\end{aligned}$$

Aplicando os novos termos no procedimento já descrito para elementos isoparamétricos, é possível a determinação dos deslocamentos relativos ao elemento.

A quantidade de integrações realizadas aumentam consideravelmente, uma vez que para cada uma das nove equações de forma surgiram duas derivadas parciais, na matriz $[H_3]$, e a mesma quantidade para a matriz $[H_2]$, definidas na equação (53) para a matriz $[B]$, que é utilizada duas vezes, uma para cada quadratura de Gauss na integração reduzida seletiva, totalizando 72 integrações de relativa complexidade [15].

Para o elemento de oito nós especificamente, a seleção dos termos conforme o triângulo de Pascal deve seguir a lógica mostrada na figura 8, uma vez que faz-se necessária a exclusão do último termo [2, 8, 16].

Figura 8– Representação do triângulo de Pascal para determinação das equações de um elemento de oito nós [8].

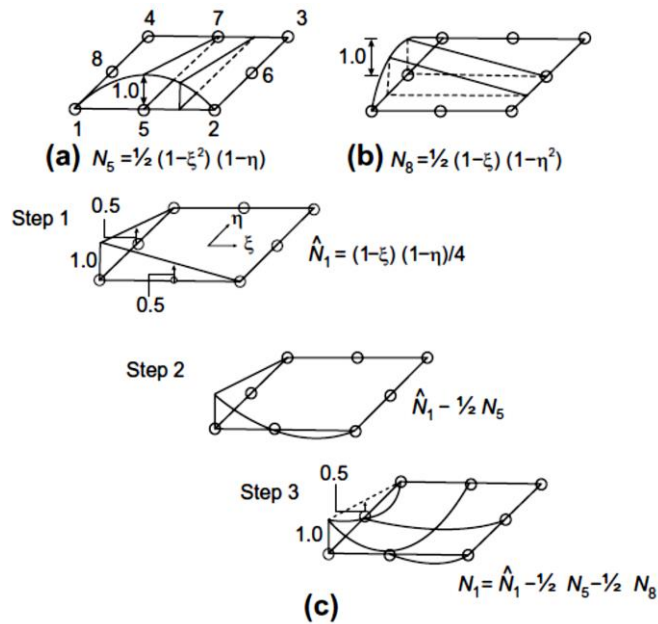


Fonte: DOW, 1999.

É possível observar na figura 8 a supressão dos termos de maior grau do polinômio $(xy)^n$, diminuindo a quantidade de termos da equação em relação ao elemento de nove nós.

Para a construção das funções de forma do elemento de oito nós, da família de elementos Serendipity, pode-se seguir o procedimento descrito na figura 9 para obter uma função que satisfaça os diversos graus de liberdade do elemento:

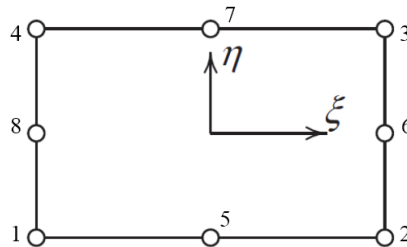
Figura 9– Representação do desenvolvimento das funções de forma de um elemento de oito nós, a partir dos graus de liberdade em (a) e (b) para (c) [2].



Fonte: ZIENKIEWICZ, 2013.

Gera-se assim as equações de forma definidas para o elemento de oito nós, como mostra a figura 10, para os nós dos cantos em (63), e para os nós intermediários em (64):

Figura 10– Representação de um elemento de oito nós [2]



Fonte: ZIENKIEWICZ, 2013.

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)}{4}; N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)}{4}; \quad (63)$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)}{4}; N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)}{4}$$

$$N_5 = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}; N_6 = \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2};$$

$$N_7 = \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}; N_8 = \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2} \quad (64)$$

Seguindo o mesmo procedimento definido para os elementos retangulares de quatro nós, obtem-se as coordenadas $\{x, y\}$ e as deformações nodais $\{u(\xi, \eta) v(\xi, \eta)\}^T$ de forma similar ao encontrado nas equações (39) e (41), respectivamente, sendo novamente definidas para o elemento de oito nós pelas equações (65) e (66):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= [N]\{c\} \\ &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \\ x_7 \\ y_7 \\ x_8 \\ y_8 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} &= [N]\{d\} \\ &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (66)$$

E os deslocamentos nodais $\{d\} = [\Phi] \cdot \{a_{iso}\}$, passam a ser obtidos por uma equação composta por mais elementos do triangulo de Pascal mostrado na figura 8, culminando na equação (67), similar a equação (56):

$$\begin{aligned}
& \{d\} \\
& = \begin{bmatrix}
1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 \\
1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 \\
1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 \\
1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 \\
1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5^2 y_5 & x_5 y_5^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5^2 y_5 & x_5 y_5^2 \\
1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & x_6^2 y_6 & x_6 y_6^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & x_6^2 y_6 & x_6 y_6^2 \\
1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 & x_7^2 y_7 & x_7 y_7^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 & x_7^2 y_7 & x_7 y_7^2 \\
1 & x_8 & y_8 & x_8^2 & x_8 y_8 & y_8^2 & x_8^2 y_8 & x_8 y_8^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 & y_8 & x_8^2 & x_8 y_8 & y_8^2 & x_8^2 y_8 & x_8 y_8^2
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{Bmatrix} \quad (67)
\end{aligned}$$

Aplicando os novos termos no procedimento já descrito para elementos isoparamétricos novamente, é possível a determinação dos esforços relativos ao elemento

Da mesma forma que o elemento de nove nós, a quantidade de integrações realizadas aumentam, uma vez que para cada uma das oito equações de forma surgiram duas derivadas parciais, na matriz $[H_3]$, e a mesma quantidade para a matriz $[H_2]$, definidas na equação (53) para a matriz $[B]$, uma para cada quadratura de Gauss aplicada na integração reduzida seletiva, totalizando 64 integrações de relativa complexidade [15]

2.2. Strain gradient Notation

Uma das principais características, e diferencial da notação *strain gradient*, é que os termos das funções de aproximação do deslocamento possuem interpretação física, permitindo uma análise *a priori*, antes do processamento do elemento, de termos espúrios, que prejudicam a convergência, e em outras notações não possuem fácil identificação [23-26].

Sua formulação pode ser obtida através da expansão de Taylor, mostrada na equação (68), quando se realizam sucessivas integrações por partes do funcional que descreve o comportamento da deformação[27, 28].

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - x_0)^n \quad (68)$$

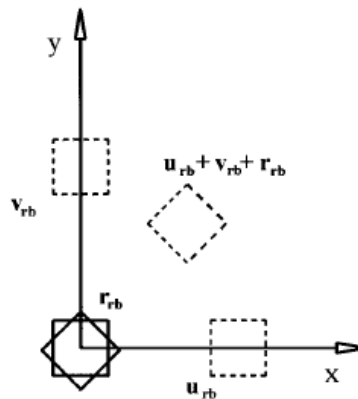
Aplicando a expansão de Taylor para as equações que descrevem os deslocamentos $u(x, y)$ e $v(x, y)$, obtém-se as equações (69) e (70) [27]:

$$u(x, y) = (u_{rb})_0 + \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} y^2 \dots \quad (69)$$

$$v(x, y) = (v_{rb})_0 + \frac{\partial v}{\partial x} x + \frac{\partial v}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y^2 \dots \quad (70)$$

Pode-se definir os movimentos de corpo rígido como os representados na figura 11, sendo as variações entorno de “x” e “y” correlacionadas com as deformações lineares e angulares do sólido estudado, como mostrado na matriz da equação (42).

Figura 11– Movimentos de um ponto qualquer do sólido [8]



Fonte: DOW, 1999.

As variáveis u e v são os deslocamentos de um ponto do elemento finito, assim como r a rotação, sobrescritas pelo índice rb , de *rigid body*, ou movimentos do corpo rígido.

Sendo $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ e $r_{rb} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, pode-se isolar as variações dos deslocamento u e v e substituir nas equações (69) e (70), culminando nas equações (71) e (72) [25, 27]:

$$u(x, y) = (u_{rb})_0 + (\varepsilon_x)_0 x + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - r_{rb} \right)_0 y + \frac{1}{2} (\varepsilon_{x,x})_0 x^2 + (\varepsilon_{x,y})_0 xy + \frac{1}{2} (\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})_0 y^2 \dots \quad (71)$$

$$v(x, y) = (v_{rb})_0 + (\varepsilon_y)_0 y + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + r_{rb} \right)_0 x + \frac{1}{2} (\varepsilon_{y,y})_0 y^2 + (\varepsilon_{y,x})_0 xy + \frac{1}{2} (\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})_0 x^2 \dots \quad (72)$$

Pode-se obter as funções de deformação derivando as equações de deslocamento encontradas conforme a equação matricial (42), resultando nas equações (73) à (75) que descrevem as deformações lineares e angular do sólido no plano [23, 25, 27]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = (\varepsilon_x)_0 + (\varepsilon_{x,y})_0 y \dots \quad (73)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = (\varepsilon_y)_0 + (\varepsilon_{y,x})_0 x \dots \quad (74)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\gamma_{xy})_0 + (\varepsilon_{x,y})_0 x + (\varepsilon_{y,x})_0 y \dots \quad (75)$$

Observa-se o acoplamento de deformações lineares e angulares na equação (75), podendo identificar os termos espúrios de cisalhamento parasítico $(\varepsilon_{x,y})_0$ e $(\varepsilon_{y,x})_0$, que quando eliminados, deixam de provocar erros na modelagem do elemento, permitindo uma convergência mais rápida e segura [8, 29].

Como os elementos espúrios podem ser identificados e eliminados já nas equações de deformações, pode-se chamar de uma correção *a priori*, antes do processamento e obtenção de resultados pertinentes ao problema estudado [8, 24, 29, 30].

Os termos espúrios causam erros de natureza qualitativa e quantitativa, melhorando a modelagem quando eliminados[24, 26, 29].

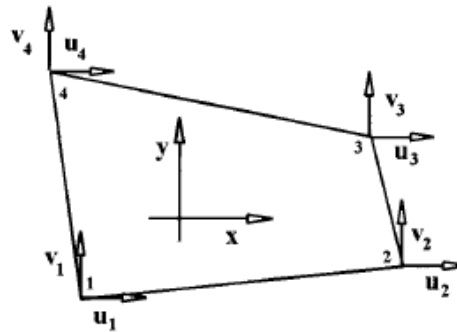
O desenvolvimento da notação *strain gradient* permite a integração direta das equações para a determinação da matriz de rigidez do elemento, sem a utilização do mapeamento da formulação isoparamétrica, nem a integração por pontos de Gauss.

Os diferenciais alcançado pela notação *strain gradient* permitem o desenvolvimento de novos elementos competitivos em termos de precisão e custo computacional[28].

2.2.1. Elemento retangular de quatro nós no plano na notação *Strain gradient*

O elemento retangular de quatro nós na notação *strain gradient* pode ser definido através da figura 12 [8]:

Figura 12– Elemento de quatro nós na notação *strain gradient* [8].



Fonte: DOW, 1999.

Como não há mapeamento de coordenadas, também não há necessidade do cálculo do Jacobiano [8].

Respeitando o triângulo de Pascal, mostrado na figura 6, para o elemento de quatro nós, e a expansão de Taylor, mostrada na equação (68), podem-se definir as equações de aproximação dos deslocamentos na notação *strain gradient* nas equações (76) e (77) [8, 19]:

$$u(x, y) = (u_{rb})_0 + (\varepsilon_x)_0 x + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - r_{rb}\right)_0 y + (\varepsilon_{x,y})_0 xy \quad (76)$$

$$v(x, y) = (v_{rb})_0 + (\varepsilon_y)_0 y + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + r_{rb}\right)_0 x + (\varepsilon_{y,x})_0 xy \quad (77)$$

Ou na forma matricial da equação (78) [8, 30]:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & 0 & y/2 & xy & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & y & x/2 & 0 & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \end{Bmatrix} \quad (78)$$

Substituindo os valores das coordenadas $\{x, y\}$ para cada nó, no intuito de obter os deslocamentos nodais do elemento, obtém-se a equação matricial (79) [8, 25, 30]:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & 0 & \frac{y_1}{2} & x_1 y_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & y_1 & \frac{x_1}{2} & 0 & x_1 y_1 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & \frac{y_2}{2} & x_2 y_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & y_2 & \frac{x_2}{2} & 0 & x_2 y_2 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & 0 & \frac{y_3}{2} & x_3 y_3 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & y_3 & \frac{x_3}{2} & 0 & x_3 y_3 \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & 0 & \frac{y_4}{2} & x_4 y_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & y_4 & \frac{x_4}{2} & 0 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{yx})_0 \end{Bmatrix} \quad (79)$$

$$\{d\} = [\Phi]\{\varepsilon_{est}\}$$

Mostra-se a interpretação física dos coeficientes da função de aproximação do deslocamento do elemento, possibilitando a identificação de elementos acoplados de forma indevida quando as equações (76) e (77) são utilizadas na equação (42), onde as variações das funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ para encontrar as deformações específicas ε_x , ε_y e γ_{xy} podem ser definidas nas equações (80), (81) e (82) [8, 19, 25, 26]:

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_0 + (\varepsilon_{x,y})_0 y \quad (80)$$

$$\varepsilon_y = (\varepsilon_y)_0 + (\varepsilon_{y,x})_0 x \quad (81)$$

$$\gamma_{xy} = (\gamma_{xy})_0 + (\varepsilon_{x,y})_0 x + (\varepsilon_{y,x})_0 y \quad (82)$$

Observa-se na equação (82) o acoplamento incorreto de deformações específicas lineares e angulares, sendo possível a identificação dos termos espúrios e a eliminação *a priori* com a retirada destes termos da equação, como mostrado em (83) [8, 19, 26, 31]:

$$\gamma_{xy} = (\gamma_{xy})_0 \quad (83)$$

Ou na forma matricial sem a eliminação dos termos espúrios em (84) [8, 19, 25]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{yx})_0 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

Realizando a multiplicação matricial afim de deixar apenas as matrizes de variáveis e dos coeficientes fisicamente interpretáveis, obtém-se a equação (85) [8, 19]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{yx})_0 \end{Bmatrix} = [T]\{\varepsilon_{est}\} \quad (85)$$

A matriz $[T]$ apresenta colunas nulas, de forma a causar problemas futuros nas interações com outras matrizes e com operações matriciais, de tal forma que é necessário reescreve-la conforme mostra a equação (86) [8]:

$$[T] = [[T_0] \quad [T_\varepsilon]] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (86)$$

Aplicando a definição de $\{\varepsilon\}$ na notação *Strain gradient* e a lei de Hooke para o estado plano na equação (7), obtém-se a energia de deformação absorvida pelo sólido através da equação (87) [8, 30]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \{\varepsilon_{est}\}^T \left[\int_V [T]^T [E] [T] dV \right] \{\varepsilon_{est}\} \quad (87)$$

Separando a matriz $[T]$ em $[T_0]$ e $[T_\varepsilon]$, observa-se na equação (88) a distribuição dos termos:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \int_V [T_0]^T [E] [T_0] dV & \int_V [T_0]^T [E] [T_\varepsilon] dV \\ \int_V [T_\varepsilon]^T [E] [T_0] dV & \int_V [T_\varepsilon]^T [E] [T_\varepsilon] dV \end{bmatrix} \quad (88)$$

Definindo como \bar{U} a matriz de integrais resultante da interação da matriz $[T]$, apenas o termo \bar{U}_{22} não será nulo, pois como $[T_0]$ é uma matriz apenas com elementos nulos, todos os termos onde a matriz estiver presente em multiplicação se tornarão nulos também [8].

Realizando as operações matriciais, obtém-se a equação (89) para \bar{U} [8]:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{22} &= \int_V \left(\frac{tE}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & x \\ 0 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} dV \\ &= \left(\frac{tE}{1-\nu^2} \right) \int_V \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & y & x\nu \\ \nu & 1 & 0 & y\nu & x \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & x\frac{1-\nu}{2} & y\frac{1-\nu}{2} \\ y & y\nu & x\frac{1-\nu}{2} & y^2 + x^2\frac{1-\nu}{2} & xy\nu + xy\frac{1-\nu}{2} \\ x\nu & x & y\frac{1-\nu}{2} & xy\nu + xy\frac{1-\nu}{2} & x^2 + y^2\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} dV \quad (89) \end{aligned}$$

Sendo t a espessura do elemento.

Os termos $x^2\frac{1-\nu}{2}$, $xy\frac{1-\nu}{2}$ e $y^2\frac{1-\nu}{2}$ representam um acoplamento incorreto entre deformações lineares e a deformação angular, sendo termos espúrios de cisalhamento parasítico, pois quando é realizada a multiplicação matricial $\{\varepsilon_{est}\}^T \bar{U} \{\varepsilon_{est}\}$, estes termos passam a multiplicar as deformações $(\varepsilon_{x,y})_0$ e $(\varepsilon_{y,x})_0$ que são lineares [8].

Também pode-se chegar a conclusão do acoplamento incorreto, ao se eliminar previamente os termos espúrios na matriz da equação (85), que resulta novamente na equação (89), mas sem os termos $x^2\frac{1-\nu}{2}$, $xy\frac{1-\nu}{2}$ e $y^2\frac{1-\nu}{2}$.

Desta forma, os termos espúrios devem ser eliminados, formando a equação (90) [8]:

$$\bar{U}_{22} = \left(\frac{tE}{1-\nu^2} \right) \int_V \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & y & x\nu \\ \nu & 1 & 0 & y\nu & x \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & x\frac{1-\nu}{2} & y\frac{1-\nu}{2} \\ y & y\nu & x\frac{1-\nu}{2} & y^2 & xy\nu \\ x\nu & x & y\frac{1-\nu}{2} & xy\nu & x^2 \end{bmatrix} dV \quad (90)$$

Utiliza-se para estabelecer as integrais de cada termo o Teorema de Green, mostrado na equação (91), que relaciona integrais duplas com integrais de linha, de forma a permitir posteriormente a integração dentro do domínio do elemento através do circuito estabelecido dentro de cada contorno [8].

$$\int_V \mathbf{F} \cdot dV = \oint_V \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) dV = \int_c M dx + \int_c N dy \quad (91)$$

Transformando integrais de área em integrais de linha, soluciona-se possíveis problemas relacionados ao domínio da área de cada parte do elemento, uma vez que será possível a integração dentro do circuito definido pelo elemento independente do formato [8].

Os valores de y em função de x podem ser obtidos através de uma relação linear entre as duas variáveis, uma vez que as arestas do elemento proposto são retas, como mostrado em (92) [8]:

$$y_i = m_i x + b_i \quad (92)$$

Onde $m_i = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$, ou seja, à tangente do ângulo formado entre o eixo horizontal de referência e a aresta do elemento, e $b_i = y_i - m_i x_i$, representando o ponto onde a função interceptaria o eixo vertical de referência [8].

Aplicando o Teorema de Green no elemento \bar{U}_{22} da matriz \bar{U} , obtêm-se as equações de (93) à (98) [8]:

$$I_1 = \int_V dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dV = \int_c -y dx = \sum_n -\frac{mx^2}{2} - bx \Big|_c \quad (93)$$

$$I_2 = \int_V x dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-xy)}{\partial y} \right) dV = \int_c -xy dx = \sum_n -\frac{mx^3}{3} - \frac{bx^2}{2} \Big|_c \quad (94)$$

$$\begin{aligned}
I_3 = \int_V y dV &= \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{1}{2}y^2)}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{1}{2}y^2 dx \\
&= \sum_n -\frac{m^2x^3}{6} - \frac{bmx^2}{2} - \frac{b^2x}{2} \Big|_c
\end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
I_4 = \int_V x^2 dV &= \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^2y)}{\partial y} \right) dV = \int_c -x^2y dx \\
&= \sum_n -\frac{mx^4}{4} - \frac{bx^3}{3} \Big|_c
\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = \int_V xy dV &= \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{1}{2}xy^2)}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{1}{2}xy^2 dx \\
&= \sum_n -\frac{m^2x^4}{8} - \frac{bmx^3}{3} - \frac{b^2x^2}{4} \Big|_c
\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
I_6 = \int_V y^2 dV &= \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{1}{3}y^3)}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{1}{3}y^3 dx \\
&= \sum_n -\frac{m^3x^4}{12} - \frac{bm^2x^3}{3} - \frac{b^2mx^2}{2} - \frac{b^3x}{3} \Big|_c
\end{aligned} \tag{98}$$

Para um elemento de n arestas, pode-se representar a equação em linha resultante da aplicação do Teorema de Green como em (99) [8]:

$$\int_c M dx = \sum_{i=1}^n \int_{ci} M_i dx \tag{99}$$

Onde $M_i = F(x, y_i(x))$ e ci é domínio da equação M_i em x , ou seja, ci vai de x_i à x_j

A partir da definição de $\{d\}$ em (79), pode-se isolar $\{\varepsilon_{est}\}$, como mostra (100):

$$\{\varepsilon_{est}\} = [\Phi]^{-1}\{d\} \tag{100}$$

Resultando na equação (101) para expressar a energia interna de deformação:

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T [\Phi]^{-T} \bar{U} [\Phi]^{-1}\{d\} = \frac{1}{2}\{d\}^T [K]\{d\} \tag{101}$$

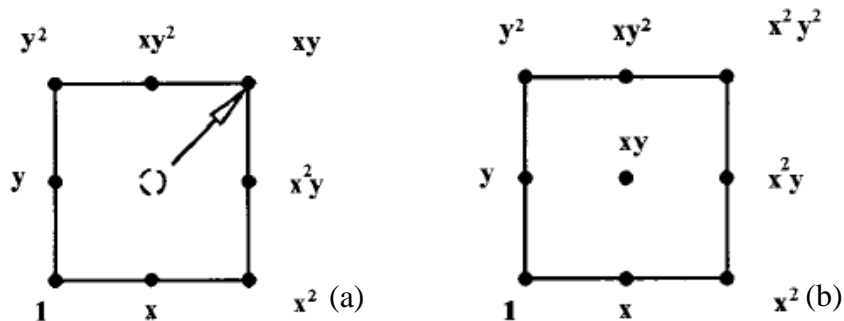
Definidos todos os termos da equação da energia potencial mostrada em (20), pode-se proceder com a minimização da equação da energia potencial como mostrado em (25) e determinar todos os termos ainda não conhecidos de $\{d\}$ para descrever o comportamento do elemento [8].

2.2.2. Elemento retangular de oito nós no plano na notação *Strain gradient*

A definição de elementos com mais nós para um mesmo formato serve para o refino e aproximação do erro associado à uma solução pela forma fraca, usando equações de aproximação de maior grau, proporcionando mais flexibilidade a modelagem de diversos comportamentos. Dessa forma o uso dos elementos de oito e nove nós na análise de elementos finitos torna-se importante para saber se a modelagem é segura e se os erros associados são toleráveis [8].

Podem-se definir como elementos retangulares de oito e nove nós os apresentados na figura 12 [8]:

Figura 13– Elemento de oito nós (a) e nove nós (b) na com seus respectivos termos do triângulo de Pascal [8].



Fonte: DOW, 1999.

Para o elemento de oito nós, definem-se as equações de (102) e (103) de aproximação dos deslocamentos com base no triângulo de Pascal já apresentado na figura 7 [8]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & (u_{rb})_0 + (\varepsilon_x)_0 x + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - r_{rb} \right)_0 y + \frac{1}{2} (\varepsilon_{x,x})_0 x^2 + (\varepsilon_{xy})_0 xy \\
 & + \frac{1}{2} (\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})_0 y^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_{x,xy})_0 x^2 y + \frac{1}{2} (\varepsilon_{x,yy})_0 xy^2
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
v(x, y) = & (v_{rb})_0 + (\varepsilon_y)_0 y + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + r_{rb} \right)_0 x + \frac{1}{2} (\varepsilon_{y,y})_0 y^2 + (\varepsilon_{yx})_0 xy \\
& + \frac{1}{2} (\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})_0 x^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_{y,xx})_0 x^2 y + \frac{1}{2} (\varepsilon_{y,xy})_0 xy^2
\end{aligned} \tag{103}$$

Ou na forma matricial da equação (104) [8]:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & 0 & y/2 & x^2/2 & -y^2/2 & 0 & xy & 0 & y^2/2 & x^2y/2 & xy^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & y & x/2 & 0 & xy/2 & x^2/2 & -x^2/2 & y^2/2 & 0 & 0 & 0 & xy^2/2 & x^2y/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,x})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \\ (\gamma_{xy,x})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,y})_0 \\ (\gamma_{xy,y})_0 \\ (\varepsilon_{x,xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,yy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xx})_0 \end{Bmatrix} \tag{104}$$

De forma similar a equação (79), pode-se obter os deslocamentos nodais substituindo as coordenadas correspondentes, como mostra (105):

$$\{d\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & 0 & y_1/2 & x_1^2/2 & -y_1^2/2 & 0 & x_1y_1 & 0 & y_1^2/2 & x_1^2y_1/2 & x_1y_1^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & y_1 & x_1/2 & 0 & x_1y_1/2 & x_1^2/2 & -x_1^2/2 & y_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_1y_1^2/2 & x_1^2y_1/2 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & y_2/2 & x_2^2/2 & -y_2^2/2 & 0 & x_2y_2 & 0 & y_2^2/2 & x_2^2y_2/2 & x_2y_2^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & y_2 & x_2/2 & 0 & x_2y_2/2 & x_2^2/2 & -x_2^2/2 & y_2^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_2y_2^2/2 & x_2^2y_2/2 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & 0 & y_3/2 & x_3^2/2 & -y_3^2/2 & 0 & x_3y_3 & 0 & y_3^2/2 & x_3^2y_3/2 & x_3y_3^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & y_3 & x_3/2 & 0 & x_3y_3/2 & x_3^2/2 & -x_3^2/2 & y_3^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_3y_3^2/2 & x_3^2y_3/2 \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & 0 & y_4/2 & x_4^2/2 & -y_4^2/2 & 0 & x_4y_4 & 0 & y_4^2/2 & x_4^2y_4/2 & x_4y_4^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & y_4 & x_4/2 & 0 & x_4y_4/2 & x_4^2/2 & -x_4^2/2 & y_4^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_4y_4^2/2 & x_4^2y_4/2 \\ 1 & 0 & -y_5 & x_5 & 0 & y_5/2 & x_5^2/2 & -y_5^2/2 & 0 & x_5y_5 & 0 & y_5^2/2 & x_5^2y_5/2 & x_5y_5^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & 0 & y_5 & x_5/2 & 0 & x_5y_5/2 & x_5^2/2 & -x_5^2/2 & y_5^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_5y_5^2/2 & x_5^2y_5/2 \\ 1 & 0 & -y_6 & x_6 & 0 & y_6/2 & x_6^2/2 & -y_6^2/2 & 0 & x_6y_6 & 0 & y_6^2/2 & x_6^2y_6/2 & x_6y_6^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_6 & 0 & y_6 & x_6/2 & 0 & x_6y_6/2 & x_6^2/2 & -x_6^2/2 & y_6^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_6y_6^2/2 & x_6^2y_6/2 \\ 1 & 0 & -y_7 & x_7 & 0 & y_7/2 & x_7^2/2 & -y_7^2/2 & 0 & x_7y_7 & 0 & y_7^2/2 & x_7^2y_7/2 & x_7y_7^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_7 & 0 & y_7 & x_7/2 & 0 & x_7y_7/2 & x_7^2/2 & -x_7^2/2 & y_7^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_7y_7^2/2 & x_7^2y_7/2 \\ 1 & 0 & -y_8 & x_8 & 0 & y_8/2 & x_8^2/2 & -y_8^2/2 & 0 & x_8y_8 & 0 & y_8^2/2 & x_8^2y_8/2 & x_8y_8^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_8 & 0 & y_8 & x_8/2 & 0 & x_8y_8/2 & x_8^2/2 & -x_8^2/2 & y_8^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_8y_8^2/2 & x_8^2y_8/2 \end{bmatrix} \{\varepsilon_{est}\} \tag{105}$$

Seguindo o mesmo procedimento para os elementos de quatro nós, pode-se determinar as equações que definem a deformação específica no plano na equações (106), (107) e (108):

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_0 + (\varepsilon_{x,x})_0 x + (\varepsilon_{x,y})_0 y + (\varepsilon_{x,xy})_0 xy + \frac{1}{2} (\varepsilon_{x,yy})_0 y^2 \quad (106)$$

$$\varepsilon_y = (\varepsilon_y)_0 + (\varepsilon_{y,y})_0 y + (\varepsilon_{y,x})_0 x + \frac{1}{2} (\varepsilon_{y,xx})_0 x^2 + (\varepsilon_{y,xy})_0 xy \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & (\gamma_{xy})_0 + (\gamma_{xy,y})_0 y + (\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx})_0 xy + (\gamma_{xy,x})_0 x \\ & + \frac{1}{2} [(\varepsilon_{x,xy})_0 x^2 + (\varepsilon_{y,xy})_0 y^2] \end{aligned} \quad (108)$$

Com base na mesma lógica utilizada no elemento de quatro nós, os elementos $(\varepsilon_{x,yy})_0$ e $(\varepsilon_{y,xx})_0$ seriam descartados por não se tratarem de deformações angulares, porém a soma dos elementos resulta em uma deformação angular $(\gamma_{xy,xy})_0$, não se tratando de termos parasíticos, mas sim partes pertencentes a equação, que caso retirados gerariam módulos cinemáticos de energia nula[31].

Desta forma, se estabelece a equação de compatibilidade (109):

$$(\gamma_{xy,xy})_0 = (\varepsilon_{x,yy})_0 + (\varepsilon_{y,xx})_0 \quad (109)$$

Já para as deformações $(\varepsilon_{x,xy})_0$ e $(\varepsilon_{y,xy})_0$ são termos espúrios que devem ser retirados da equação como mostra (110) [31]:

$$\gamma_{xy} = (\gamma_{xy})_0 + (\gamma_{xy,y})_0 y + (\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx})_0 xy + (\gamma_{xy,x})_0 x \quad (110)$$

Escrevendo de forma matricial as equações de (106) a (108), obtém-se a equação para as deformações com termos espúrios:

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & \frac{1}{2}x^2 & xy & \frac{1}{2}y^2 & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,x})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \\ (\gamma_{xy,x})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,y})_0 \\ (\gamma_{xy,y})_0 \\ (\varepsilon_{x,xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,yy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xx})_0 \end{Bmatrix} \quad (111) \\
&= [T]\{\varepsilon_{est}\}
\end{aligned}$$

Utilizando a equação de compatibilidade (109), pode-se escrever as equações (106), (107) e (110) na forma matricial apresentada em (112):

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & xy & 0 & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,x})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \\ (\gamma_{xy,x})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,y})_0 \\ (\gamma_{xy,y})_0 \\ (\varepsilon_{x,xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,yy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xx})_0 \end{Bmatrix} \quad (112) \\
&= [T]\{\varepsilon_{est}\}
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento do elemento de quatro nós, é realizada a transposição e multiplicação da matriz $[T]$ pela matriz de elasticidade do material, como na equação (87), de forma que a integração resulta no elemento \bar{U}_{22} da matriz \bar{U} , com termos espúrios, como mostra a equação (113):

$$\begin{aligned}
& \bar{U}_{22} \\
& = \begin{bmatrix}
I_1 & I_1\nu & 0 & I_2 & I_2\nu & 0 & I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & \frac{I_6}{2} & I_5\nu & \frac{I_4\nu}{2} \\
I_1\nu & I_1 & 0 & I_2\nu & I_2 & 0 & I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & \frac{I_6\nu}{2} & I_5 & \frac{I_4}{2} \\
0 & 0 & I_1\alpha & 0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_3\alpha & \frac{I_4\alpha}{2} & I_5\alpha & \frac{I_6\alpha}{2} & I_5\alpha \\
I_2 & I_2\nu & 0 & I_4 & I_4\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_8 & \frac{I_9}{2} & I_8\nu & \frac{I_7\nu}{2} \\
I_2\nu & I_2 & 0 & I_4\nu & I_4 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_8\nu & \frac{I_9\nu}{2} & I_8 & \frac{I_7}{2} \\
0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_4\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & \frac{I_7\alpha}{2} & I_8\alpha & \frac{I_9\alpha}{2} & I_8\alpha \\
I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_6 & I_6\nu & 0 & I_9 & \frac{I_{10}}{2} & I_9\nu & \frac{I_8\nu}{2} \\
I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_6\nu & I_6 & 0 & I_9\nu & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9 & \frac{I_8}{2} \\
0 & 0 & I_3\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & 0 & 0 & I_6\alpha & \frac{I_8\alpha}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{10}\alpha}{2} & I_9\alpha \\
I_5 & I_5\nu & \frac{I_4\alpha}{2} & I_8 & I_8\nu & \frac{I_7\alpha}{2} & I_9 & I_9\nu & \frac{I_8\alpha}{2} & \frac{I_{11}\alpha}{4} + I_{13} & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{13}\alpha}{4} + I_{13\nu} & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{12}\nu}{2} \\
\frac{I_6}{2} & \frac{I_6\nu}{2} & I_5\alpha & \frac{I_9}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & I_8\alpha & \frac{I_{10}}{2} & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{15}}{4} + I_{13\alpha} & \frac{I_{14\nu}}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{13\nu}}{4} + I_{13\alpha} \\
I_5\nu & I_5 & \frac{I_6\alpha}{2} & I_8\nu & I_8 & \frac{I_9\alpha}{2} & I_9\nu & I_9 & \frac{I_{10}\alpha}{2} & \frac{I_{13}\alpha}{4} + I_{13\nu} & \frac{I_{14\nu}}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{15}\alpha}{4} + I_{13} & \frac{I_{12}}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} \\
\frac{I_4\nu}{2} & \frac{I_4}{2} & I_5\alpha & \frac{I_7\nu}{2} & \frac{I_7}{2} & I_8\alpha & \frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_8}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{13\nu}}{4} + I_{13\alpha} & \frac{I_{12}}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{11}}{4} + I_{13\alpha}
\end{bmatrix} \quad (113)
\end{aligned}$$

Para a retirada dos termos espúrios, é realizado o procedimento com as equações de deformação corrigidas, gerando o elemento \bar{U}_{22} da matriz \bar{U} como mostra a equação (114):

$$\begin{aligned}
& \bar{U}_{22} = \begin{bmatrix}
I_1 & I_1\nu & 0 & I_2 & I_2\nu & 0 & I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & \frac{I_6}{2} & I_5\nu & \frac{I_4\nu}{2} \\
I_1\nu & I_1 & 0 & I_2\nu & I_2 & 0 & I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & \frac{I_6\nu}{2} & I_5 & \frac{I_4}{2} \\
0 & 0 & I_1\alpha & 0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_3\alpha & 0 & I_5\alpha & 0 & I_5\alpha \\
I_2 & I_2\nu & 0 & I_4 & I_4\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_8 & \frac{I_9}{2} & I_8\nu & \frac{I_7\nu}{2} \\
I_2\nu & I_2 & 0 & I_4\nu & I_4 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_8\nu & \frac{I_9\nu}{2} & I_8 & \frac{I_7}{2} \\
0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_4\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & 0 & I_8\alpha & 0 & I_8\alpha \\
I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_6 & I_6\nu & 0 & I_9 & \frac{I_{10}}{2} & I_9\nu & \frac{I_8\nu}{2} \\
I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_6\nu & I_6 & 0 & I_9\nu & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9 & \frac{I_8}{2} \\
0 & 0 & I_3\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & 0 & 0 & I_6\alpha & 0 & I_9\alpha & 0 & I_9\alpha \\
I_5 & I_5\nu & 0 & I_8 & I_8\nu & 0 & I_9 & I_9\nu & 0 & I_{13} & \frac{I_{14}}{2} & I_{13\nu} & \frac{I_{12}\nu}{2} \\
\frac{I_6}{2} & \frac{I_6\nu}{2} & I_5\alpha & \frac{I_9}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & I_8\alpha & \frac{I_{10}}{2} & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{15}}{4} + I_{13\alpha} & \frac{I_{14\nu}}{2} & \frac{I_{13\nu}}{4} + I_{13\alpha} \\
I_5\nu & I_5 & 0 & I_8\nu & I_8 & 0 & I_9\nu & I_9 & 0 & I_{13\nu} & \frac{I_{14\nu}}{2} & I_{13} & \frac{I_{12}}{2} \\
\frac{I_4\nu}{2} & \frac{I_4}{2} & I_5\alpha & \frac{I_7\nu}{2} & \frac{I_7}{2} & I_8\alpha & \frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_8}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{13\nu}}{4} + I_{13\alpha} & \frac{I_{12}}{2} & \frac{I_{11}}{4} + I_{13\alpha}
\end{bmatrix} \quad (114)
\end{aligned}$$

As três primeiras linhas e três primeiras colunas da matriz \bar{U} foram suprimidas por apresentarem apenas termos nulos, conforme o procedimento descrito na equação (88), sendo apresentado apenas \bar{U}_{22} em (113), com termos espúrios, e (114), sem termos espúrios.

2.2.3. Elemento retangular de nove nós no plano na notação *Strain gradient*.

Para o elemento de nove nós, definem-se as equações de (115) e (116) de aproximação dos deslocamentos, seguindo o mesmo procedimento descrito para os elementos de quatro e oito nós [8]:

$$u(x, y) = (u_{rb})_0 + (\varepsilon_x)_0 x + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - r_{rb}\right)_0 y + \frac{1}{2}(\varepsilon_{x,x})_0 x^2 + (\varepsilon_{x,y})_0 xy + \frac{1}{2}(\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})_0 y^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{x,xy})_0 x^2 y + \frac{1}{2}(\varepsilon_{x,yy})_0 xy^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon_{x,xyy})_0 x^2 y^2 \quad (115)$$

$$v(x, y) = (v_{rb})_0 + (\varepsilon_y)_0 y + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + r_{rb}\right)_0 x + \frac{1}{2}(\varepsilon_{y,y})_0 y^2 + (\varepsilon_{y,x})_0 xy + \frac{1}{2}(\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})_0 x^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{y,xx})_0 x^2 y + \frac{1}{2}(\varepsilon_{y,xy})_0 xy^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon_{y,xyy})_0 x^2 y^2 \quad (116)$$

Ou na forma matricial da equação (117) [8]:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & 0 & y/2 & x^2/2 & -y^2/2 & 0 & xy & 0 & y^2/2 & x^2 y/2 & xy^2/2 & 0 & 0 & x^2 y^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & y & x/2 & 0 & xy/2 & x^2/2 & -x^2/2 & y^2/2 & 0 & 0 & 0 & xy^2/2 & x^2 y/2 & 0 & x^2 y^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,x})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \\ (\gamma_{xy,x})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,y})_0 \\ (\gamma_{xy,y})_0 \\ (\varepsilon_{x,xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,yy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xx})_0 \\ (\varepsilon_{x,xyy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xyy})_0 \end{Bmatrix} \quad (117)$$

De forma similar ao já realizado com o elemento de oito nós, são determinados os deslocamentos em função dos coeficientes das equações de aproximação na forma matricial em (118):

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & 0 & y_1/2 & x_1^2/2 & -y_1^2/2 & 0 & x_1y_1 & 0 & y_1^2/2 & x_1^2y_1/2 & x_1y_1^2/2 & 0 & 0 & x_1^2y_1^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & y_1 & x_1/2 & 0 & x_1y_1/2 & x_1^2/2 & -x_1^2/2 & y_1^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_1y_1^2/2 & x_1^2y_1/2 & 0 & x_1^2y_1^2/4 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & y_2/2 & x_2^2/2 & -y_2^2/2 & 0 & x_2y_2 & 0 & y_2^2/2 & x_2^2y_2/2 & x_2y_2^2/2 & 0 & 0 & x_2^2y_2^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & y_2 & x_2/2 & 0 & x_2y_2/2 & x_2^2/2 & -x_2^2/2 & y_2^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_2y_2^2/2 & x_2^2y_2/2 & 0 & x_2^2y_2^2/4 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & 0 & y_3/2 & x_3^2/2 & -y_3^2/2 & 0 & x_3y_3 & 0 & y_3^2/2 & x_3^2y_3/2 & x_3y_3^2/2 & 0 & 0 & x_3^2y_3^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & y_3 & x_3/2 & 0 & x_3y_3/2 & x_3^2/2 & -x_3^2/2 & y_3^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_3y_3^2/2 & x_3^2y_3/2 & 0 & x_3^2y_3^2/4 \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & 0 & y_4/2 & x_4^2/2 & -y_4^2/2 & 0 & x_4y_4 & 0 & y_4^2/2 & x_4^2y_4/2 & x_4y_4^2/2 & 0 & 0 & x_4^2y_4^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & y_4 & x_4/2 & 0 & x_4y_4/2 & x_4^2/2 & -x_4^2/2 & y_4^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_4y_4^2/2 & x_4^2y_4/2 & 0 & x_4^2y_4^2/4 \\ 1 & 0 & -y_5 & x_5 & 0 & y_5/2 & x_5^2/2 & -y_5^2/2 & 0 & x_5y_5 & 0 & y_5^2/2 & x_5^2y_5/2 & x_5y_5^2/2 & 0 & 0 & x_5^2y_5^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & 0 & y_5 & x_5/2 & 0 & x_5y_5/2 & x_5^2/2 & -x_5^2/2 & y_5^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_5y_5^2/2 & x_5^2y_5/2 & 0 & x_5^2y_5^2/4 \\ 1 & 0 & -y_6 & x_6 & 0 & y_6/2 & x_6^2/2 & -y_6^2/2 & 0 & x_6y_6 & 0 & y_6^2/2 & x_6^2y_6/2 & x_6y_6^2/2 & 0 & 0 & x_6^2y_6^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_6 & 0 & y_6 & x_6/2 & 0 & x_6y_6/2 & x_6^2/2 & -x_6^2/2 & y_6^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_6y_6^2/2 & x_6^2y_6/2 & 0 & x_6^2y_6^2/4 \\ 1 & 0 & -y_7 & x_7 & 0 & y_7/2 & x_7^2/2 & -y_7^2/2 & 0 & x_7y_7 & 0 & y_7^2/2 & x_7^2y_7/2 & x_7y_7^2/2 & 0 & 0 & x_7^2y_7^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_7 & 0 & y_7 & x_7/2 & 0 & x_7y_7/2 & x_7^2/2 & -x_7^2/2 & y_7^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_7y_7^2/2 & x_7^2y_7/2 & 0 & x_7^2y_7^2/4 \\ 1 & 0 & -y_8 & x_8 & 0 & y_8/2 & x_8^2/2 & -y_8^2/2 & 0 & x_8y_8 & 0 & y_8^2/2 & x_8^2y_8/2 & x_8y_8^2/2 & 0 & 0 & x_8^2y_8^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_8 & 0 & y_8 & x_8/2 & 0 & x_8y_8/2 & x_8^2/2 & -x_8^2/2 & y_8^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_8y_8^2/2 & x_8^2y_8/2 & 0 & x_8^2y_8^2/4 \\ 1 & 0 & -y_9 & x_9 & 0 & y_9/2 & x_9^2/2 & -y_9^2/2 & 0 & x_9y_9 & 0 & y_9^2/2 & x_9^2y_9/2 & x_9y_9^2/2 & 0 & 0 & x_9^2y_9^2/4 & 0 \\ 0 & 1 & x_9 & 0 & y_9 & x_9/2 & 0 & x_9y_9/2 & x_9^2/2 & -x_9^2/2 & y_9^2/2 & 0 & 0 & 0 & x_9y_9^2/2 & x_9^2y_9/2 & 0 & x_9^2y_9^2/4 \end{bmatrix} \quad (118)$$

Seguindo o mesmo procedimento para os elementos de quatro e oito nós, pode-se determinar as equações que definem as deformações em (119), (120) e (121):

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_0 + (\varepsilon_{x,x})_0 x + (\varepsilon_{x,y})_0 y + (\varepsilon_{x,xy})_0 xy + \frac{1}{2}(\varepsilon_{x,yy})_0 y^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{x,xyy})_0 xy^2 \quad (119)$$

$$\varepsilon_y = (\varepsilon_y)_0 + (\varepsilon_{y,y})_0 y + (\varepsilon_{y,x})_0 x + \frac{1}{2}(\varepsilon_{y,xx})_0 x^2 + (\varepsilon_{y,xy})_0 xy + \frac{1}{2}(\varepsilon_{y,xyx})_0 x^2 y \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & (\gamma_{xy})_0 + (\gamma_{xy,y})_0 y + (\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx})_0 xy + (\gamma_{xy,x})_0 x + \frac{1}{2}[(\varepsilon_{x,xy})_0 x^2 + (\varepsilon_{y,xy})_0 y^2] \\ & + \frac{1}{2}(\varepsilon_{y,xyy})_0 xy^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{x,xyx})_0 x^2 y \end{aligned} \quad (121)$$

Aplicando a equação de compatibilidade em (109), a equação para as deformações angulares do elemento de nove nós é igual ao de elemento de oito nós sem termos espúrios, mostrada em (110).

Escrevendo de forma matricial as equações de (119) a (121), obtém-se a equação para as deformações com termos espúrios:

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}y^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}xy^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}x^2 & 0 & \frac{1}{2}yx^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & \frac{1}{2}x^2 & xy & \frac{1}{2}y^2 & xy & \frac{1}{2}yx^2 & \frac{1}{2}xy^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,x})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \\ (\gamma_{xy,x})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,y})_0 \\ (\gamma_{xy,y})_0 \\ (\varepsilon_{x,xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,yy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xx})_0 \\ (\varepsilon_{x,xyy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xyx})_0 \end{Bmatrix} \quad (122) \\
&= [T]\{\varepsilon_{est}\}
\end{aligned}$$

Utilizando a equação de compatibilidade (109), pode-se escrever as equações (119), (120) e (110) na forma matricial apresentada em (123):

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}y^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}xy^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & xy & \frac{1}{2}x^2 & 0 & \frac{1}{2}yx^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & xy & 0 & xy & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,x})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \\ (\gamma_{xy,x})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,y})_0 \\ (\gamma_{xy,y})_0 \\ (\varepsilon_{x,xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,yy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xx})_0 \\ (\varepsilon_{x,xyy})_0 \\ (\varepsilon_{y,xyx})_0 \end{Bmatrix} \quad (123) \\
&= [T]\{\varepsilon_{est}\}
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento do elemento de quatro e oito nós, é realizada a transposição e multiplicação da matriz $[T]$ pela matriz de elasticidade do material, como na equação (87), de forma que a integração resulta no elemento \bar{U}_{22} da matriz \bar{U} , com termos espúrios, como mostra a equação (124):

$$\begin{bmatrix}
 I_1 & I_1\nu & 0 & I_2 & I_2\nu & 0 & I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & \frac{I_6}{2} & I_5\nu & \frac{I_4\nu}{2} & \frac{I_9}{2} & \frac{I_8\nu}{2} \\
 I_1\nu & I_1 & 0 & I_2\nu & I_2 & 0 & I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & \frac{I_6\nu}{2} & I_5 & \frac{I_4}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & \frac{I_8}{2} \\
 0 & 0 & I_1\alpha & 0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_3\alpha & \frac{I_4\alpha}{2} & I_5\alpha & \frac{I_6\alpha}{2} & I_5\alpha & \frac{I_8\alpha}{2} & \frac{I_9\alpha}{2} \\
 I_2 & I_2\nu & 0 & I_4 & I_4\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_8 & \frac{I_9}{2} & I_8\nu & \frac{I_7\nu}{2} & \frac{I_{13}}{2} & \frac{I_{12}\nu}{2} \\
 I_2\nu & I_2 & 0 & I_4\nu & I_4 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_8\nu & \frac{I_9\nu}{2} & I_8 & \frac{I_7}{2} & \frac{I_{13}\nu}{2} & \frac{I_{12}}{2} \\
 0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_4\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & \frac{I_7\alpha}{2} & I_8\alpha & \frac{I_9\alpha}{2} & I_8\alpha & \frac{I_{12}\alpha}{2} & \frac{I_{13}\alpha}{2} \\
 I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_6 & I_6\nu & 0 & I_9 & \frac{I_{10}}{2} & I_9\nu & \frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{12}\nu}{2} \\
 I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_6\nu & I_6 & 0 & I_9\nu & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9 & \frac{I_8}{2} & \frac{I_{14}\nu}{2} & \frac{I_{13}}{2} \\
 0 & 0 & I_3\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & 0 & 0 & I_6\alpha & \frac{I_8\alpha}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{10}\alpha}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{13}\alpha}{2} & \frac{I_{14}\alpha}{2} \\
 I_5 & I_5\nu & \frac{I_4\alpha}{2} & I_8 & I_8\nu & \frac{I_7\alpha}{2} & I_9 & I_9\nu & \frac{I_8\alpha}{2} & \frac{I_{11}\alpha}{4} + I_{13} & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{13}\alpha}{4} + I_{13}\nu & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{17}\alpha}{4} + \frac{I_{19}}{2} & \frac{I_{18}\alpha}{4} + \frac{I_{18}\nu}{2} \\
 \frac{I_6}{2} & \frac{I_6\nu}{2} & I_5\alpha & \frac{I_9}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & I_8\alpha & \frac{I_{10}}{2} & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{15}}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{14}\nu}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{13}\nu}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{18}\alpha}{2} + \frac{I_{20}}{4} & \frac{I_{19}\alpha}{2} + \frac{I_{19}\nu}{4} \\
 I_5\nu & I_5 & \frac{I_6\alpha}{2} & I_8\nu & I_8 & \frac{I_9\alpha}{2} & I_9\nu & I_9 & \frac{I_{10}\alpha}{2} & \frac{I_{13}\alpha}{4} + I_{13}\nu & \frac{I_{14}\nu}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{15}\alpha}{4} + I_{13} & \frac{I_{12}}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{19}\alpha}{4} + \frac{I_{19}\nu}{2} & \frac{I_{20}\alpha}{4} + \frac{I_{18}}{2} \\
 \frac{I_4\nu}{2} & \frac{I_4}{2} & I_5\alpha & \frac{I_7\nu}{2} & \frac{I_7}{2} & I_8\alpha & \frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_8}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{12}\alpha}{2} + \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{13}\nu}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{12}}{2} + \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{11}}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{18}\alpha}{2} + \frac{I_{18}\nu}{4} & \frac{I_{17}}{4} + \frac{I_{19}\alpha}{2} \\
 \frac{I_9}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & \frac{I_8\alpha}{2} & \frac{I_{13}}{2} & \frac{I_{13}\nu}{2} & \frac{I_{12}\alpha}{2} & \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{14}\nu}{2} & \frac{I_{13}\alpha}{2} & \frac{I_{17}\alpha}{4} + \frac{I_{19}}{2} & \frac{I_{18}\alpha}{2} + \frac{I_{20}}{2} & \frac{I_{19}\alpha}{4} + \frac{I_{19}\nu}{2} & \frac{I_{18}\alpha}{2} + \frac{I_{18}\nu}{4} & \frac{I_{24}\alpha}{4} + \frac{I_{26}}{4} & \frac{I_{25}\alpha}{4} + \frac{I_{25}\nu}{4} \\
 \frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_8}{2} & \frac{I_9\alpha}{2} & \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{12}}{2} & \frac{I_{13}\alpha}{2} & \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{13}}{2} & \frac{I_{14}\alpha}{2} & \frac{I_{18}\alpha}{4} + \frac{I_{18}\nu}{2} & \frac{I_{19}\alpha}{2} + \frac{I_{19}\nu}{4} & \frac{I_{20}\alpha}{4} + I_{18} & \frac{I_{17}}{4} + \frac{I_{19}\alpha}{2} & \frac{I_{25}\alpha}{4} + \frac{I_{25}\nu}{4} & \frac{I_{26}\alpha}{4} + \frac{I_{24}}{4}
 \end{bmatrix} \quad (124)$$

Para a retirada dos termos espúrios, é realizado o procedimento com as equações de deformação corrigidas, gerando o elemento \bar{U}_{22} da matriz \bar{U} como mostra a equação (125):

$$\begin{bmatrix}
I_1 & I_1\nu & 0 & I_2 & I_2\nu & 0 & I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & \frac{I_6}{2} & I_5\nu & \frac{I_4\nu}{2} & \frac{I_9}{2} & \frac{I_8\nu}{2} \\
I_1\nu & I_1 & 0 & I_2\nu & I_2 & 0 & I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & \frac{I_6\nu}{2} & I_5 & \frac{I_4}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & \frac{I_8}{2} \\
0 & 0 & I_1\alpha & 0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_3\alpha & 0 & I_5\alpha & 0 & I_5\alpha & 0 & 0 \\
I_2 & I_2\nu & 0 & I_4 & I_4\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_8 & \frac{I_9}{2} & I_8\nu & \frac{I_7\nu}{2} & \frac{I_{13}}{2} & \frac{I_{12}\nu}{2} \\
I_2\nu & I_2 & 0 & I_4\nu & I_4 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_8\nu & \frac{I_9\nu}{2} & I_8 & \frac{I_7}{2} & \frac{I_{13}\nu}{2} & \frac{I_{12}}{2} \\
0 & 0 & I_2\alpha & 0 & 0 & I_4\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & 0 & I_8\alpha & 0 & I_8\alpha & 0 & 0 \\
I_3 & I_3\nu & 0 & I_5 & I_5\nu & 0 & I_6 & I_6\nu & 0 & I_9 & \frac{I_{10}}{2} & I_9\nu & \frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{12}\nu}{2} \\
I_3\nu & I_3 & 0 & I_5\nu & I_5 & 0 & I_6\nu & I_6 & 0 & I_9\nu & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9 & \frac{I_8}{2} & \frac{I_{14}\nu}{2} & \frac{I_{13}}{2} \\
0 & 0 & I_3\alpha & 0 & 0 & I_5\alpha & 0 & 0 & I_6\alpha & 0 & I_9\alpha & 0 & I_9\alpha & 0 & 0 \\
I_5 & I_5\nu & 0 & I_8 & I_8\nu & 0 & I_9 & I_9\nu & 0 & I_{13} & \frac{I_{14}}{2} & I_{13}\nu & \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{19}}{2} & \frac{I_{18}\nu}{2} \\
\frac{I_6}{2} & \frac{I_6\nu}{2} & I_5\alpha & \frac{I_9}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & I_8\alpha & \frac{I_{10}}{2} & \frac{I_{10}\nu}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{15}}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{14}\nu}{2} & \frac{I_{13}\nu}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{20}}{4} & \frac{I_{19}\nu}{4} \\
I_5\nu & I_5 & 0 & I_8\nu & I_8 & 0 & I_9\nu & I_9 & 0 & I_{13}\nu & \frac{I_{14}\nu}{2} & I_{13} & \frac{I_{12}}{2} & \frac{I_{19}\nu}{2} & \frac{I_{18}}{2} \\
\frac{I_4\nu}{2} & \frac{I_4}{2} & I_5\alpha & \frac{I_7\nu}{2} & \frac{I_7}{2} & I_8\alpha & \frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_8}{2} & I_9\alpha & \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{13}\nu}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{12}}{2} & \frac{I_{11}}{4} + I_{13}\alpha & \frac{I_{18}\nu}{4} & \frac{I_{17}}{4} \\
\frac{I_9}{2} & \frac{I_9\nu}{2} & 0 & \frac{I_{13}}{2} & \frac{I_{13}\nu}{2} & 0 & \frac{I_{14}}{2} & \frac{I_{14}\nu}{2} & 0 & \frac{I_{19}}{2} & \frac{I_{20}}{4} & \frac{I_{19}\nu}{2} & \frac{I_{18}\nu}{4} & \frac{I_{26}}{4} & \frac{I_{25}\nu}{4} \\
\frac{I_8\nu}{2} & \frac{I_8}{2} & 0 & \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{12}}{2} & 0 & \frac{I_{12}\nu}{2} & \frac{I_{13}}{2} & 0 & \frac{I_{18}\nu}{2} & \frac{I_{19}\nu}{4} & \frac{I_{18}}{2} & \frac{I_{17}}{4} & \frac{I_{25}\nu}{4} & \frac{I_{24}}{4}
\end{bmatrix} \quad (125)$$

As três primeiras linhas e três primeiras colunas da matriz \bar{U} foram suprimidas por apresentarem apenas termos nulos, conforme o procedimento descrito na equação (88), sendo apresentado apenas \bar{U}_{22} em (124), com termos espúrios, e (125), sem termos espúrios.

Uma vez obtida a matriz \bar{U} , e já tendo sido definida a matriz $[\phi]$, é possível ser determinada a matriz de rigidez $[K]$, conforme a equação (101).

A integração da matriz \bar{U} é realizada diretamente através do teorema de Green, já mostrado no desenvolvimento das integrais das equações do elemento de quatro nós em (93) até (98), e as integrais seguintes, conforme o aumento dos graus da equação segundo o triângulo de Pascal mostrado na figura 7, são mostradas de (126) à (147):

$$I_7 = \int_V x^3 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^3 y)}{\partial y} \right) dV = \int_c -x^3 y dx = \sum_n -\frac{mx^5}{5} - \frac{bx^4}{4} \Big|_c \quad (126)$$

$$I_8 = \int_V x^2 y dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^2 y^2}{2})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^2 y^2}{2} dx = \sum_n -\frac{m^2 x^5}{10} - \frac{bmx^4}{4} - \frac{b^2 x^3}{6} \Big|_c \quad (127)$$

$$\begin{aligned}
I_9 &= \int_V xy^2 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{xy^3}{3})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{xy^3}{3} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^3 x^5}{15} - \frac{bm^2 x^4}{4} - \frac{b^2 mx^3}{3} - \frac{b^3 x^2}{6} \Big|_c
\end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \int_V y^3 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{y^4}{4})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{y^4}{4} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^4 x^5}{20} - \frac{bm^3 x^4}{4} - \frac{b^2 m^2 x^3}{2} - \frac{b^3 m x^2}{2} - \frac{b^4 x}{4} \Big|_c
\end{aligned} \tag{129}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_V x^4 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^4 y)}{\partial y} \right) dV = \int_c -x^4 y dx = \sum_n -\frac{mx^6}{6} - \frac{bx^5}{5} \Big|_c
\end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_V x^3 y dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^3 y^2}{2})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^3 y^2}{2} dx = \sum_n -\frac{m^2 x^6}{12} - \frac{bmx^5}{5} - \frac{b^2 x^4}{8} \Big|_c
\end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \int_V x^2 y^2 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^2 y^3}{3})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^2 y^3}{3} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^3 x^6}{18} - \frac{bm^2 x^5}{5} - \frac{b^2 m x^4}{4} - \frac{b^3 x^3}{9} \Big|_c
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
I_{14} &= \int_V x y^3 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{xy^4}{4})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{xy^4}{4} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^4 x^6}{24} - \frac{bm^3 x^5}{5} - \frac{3b^2 m^2 x^4}{8} - \frac{b^3 m x^3}{3} - \frac{b^4 x^2}{8} \Big|_c
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
I_{15} &= \int_V y^4 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{y^5}{5})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{y^5}{5} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^5 x^6}{30} - \frac{bm^4 x^5}{5} - \frac{b^2 m^3 x^4}{2} - \frac{2b^3 m^2 x^3}{3} - \frac{b^4 m x^2}{2} - \frac{b^5 x}{5} \Big|_c
\end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
I_{16} &= \int_V x^5 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^5 y)}{\partial y} \right) dV = \int_c -x^5 y dx = \sum_n -\frac{mx^7}{7} - \frac{bx^6}{6} \Big|_c
\end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
I_{17} &= \int_V x^4 y dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^4 y^2}{2})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^4 y^2}{2} dx = \sum_n -\frac{m^2 x^7}{14} - \frac{bmx^6}{6} - \frac{b^2 x^5}{10} \Big|_c
\end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
I_{18} &= \int_V x^3 y^2 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^3 y^3}{3})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^3 y^3}{3} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^3 x^7}{21} - \frac{bm^2 x^6}{6} - \frac{b^2 m x^5}{5} - \frac{b^3 x^4}{12} \Big|_c
\end{aligned} \tag{137}$$

$$\begin{aligned}
I_{19} &= \int_V x^2 y^3 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^2 y^4}{4})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^2 y^4}{4} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^4 x^7}{28} - \frac{bm^3 x^6}{6} - \frac{3b^2 m^2 x^5}{10} - \frac{b^3 m x^4}{4} - \frac{b^4 x^3}{12} \Big|_c
\end{aligned} \tag{138}$$

$$\begin{aligned}
I_{20} &= \int_V x y^4 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{xy^5}{5})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{xy^5}{5} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^5 x^7}{35} - \frac{bm^4 x^6}{6} - \frac{5b^2 m^3 x^5}{2} - \frac{b^3 m^2 x^4}{2} - \frac{b^4 m x^3}{3} - \frac{b^5 x^2}{10} \Big|_c
\end{aligned} \tag{139}$$

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \int_V y^5 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{y^6}{6})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{y^6}{6} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^6 x^7}{42} - \frac{bm^5 x^6}{6} - \frac{b^2 m^4 x^5}{2} - \frac{5b^3 m^3 x^4}{6} - \frac{5b^4 m^2 x^3}{6} - \frac{b^5 m x^2}{2} \\
&\quad - \frac{b^6 x}{6} \Big|_c
\end{aligned} \tag{140}$$

$$I_{22} = \int_V x^6 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^6 y)}{\partial y} \right) dV = \int_c -x^6 y dx = \sum_n -\frac{mx^8}{8} - \frac{bx^7}{7} \Big|_c \tag{141}$$

$$I_{23} = \int_V x^5 y dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^5 y^2}{2})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^5 y^2}{2} dx = \sum_n -\frac{m^2 x^8}{16} - \frac{bmx^7}{7} - \frac{b^2 x^6}{12} \Big|_c \tag{142}$$

$$\begin{aligned}
I_{24} &= \int_V x^4 y^2 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^4 y^3}{3})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^4 y^3}{3} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^3 x^8}{24} - \frac{bm^2 x^7}{7} - \frac{b^2 m x^6}{6} - \frac{b^3 x^5}{15} \Big|_c
\end{aligned} \tag{143}$$

$$\begin{aligned}
I_{25} &= \int_V x^3 y^3 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^3 y^4}{4})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^3 y^4}{4} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^4 x^8}{32} - \frac{bm^3 x^7}{7} - \frac{b^2 m^2 x^6}{4} - \frac{b^3 m x^5}{5} - \frac{b^4 x^4}{16} \Big|_c
\end{aligned} \tag{144}$$

$$\begin{aligned}
I_{26} &= \int_V x^2 y^4 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{x^2 y^5}{5})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{x^2 y^5}{5} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^5 x^8}{40} - \frac{bm^4 x^7}{7} - \frac{b^2 m^3 x^6}{6} - \frac{5b^3 m^2 x^5}{2} - \frac{b^4 m x^4}{4} - \frac{b^5 x^3}{15} \Big|_c
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
I_{27} &= \int_V xy^5 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{xy^6}{6})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{xy^6}{6} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^6 x^8}{48} - \frac{bm^5 x^7}{7} - \frac{12b^2 m^4 x^6}{5} - \frac{3b^3 m^3 x^5}{2} - \frac{8b^4 m^2 x^4}{5} - \frac{b^5 m x^3}{3} \\
&\quad - \frac{b^6 x^2}{12} \Big|_c
\end{aligned} \tag{146}$$

$$\begin{aligned}
I_{28} &= \int_V y^6 dV = \oint_V \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{y^7}{7})}{\partial y} \right) dV = \int_c -\frac{y^7}{7} dx \\
&= \sum_n -\frac{m^7 x^8}{56} - \frac{bm^6 x^7}{7} - \frac{b^2 m^5 x^6}{2} - b^3 m^4 x^5 - \frac{5b^4 m^3 x^4}{4} - b^5 m^2 x^3 \\
&\quad - \frac{b^6 m x^2}{2} - \frac{b^7 x}{7} \Big|_c
\end{aligned} \tag{147}$$

Aplicando as coordenadas nodais nos resultados das integrações, de forma a percorrer o circuito, ponto a ponto, do contorno do elemento, é possível realizar a integração de forma direta, possibilitando a programação das integrais já resolvidas para a obtenção da matriz \bar{U} , como etapa para a matriz de rigidez $[K]$.

Observa-se que o nó central do elemento de nove nós não participa do circuito que define a área de integração do elemento, não sendo aplicado nas integrais, nem nos coeficientes m e b , das equações lineares que correlacionam as variáveis y e x .

É de fundamental importância o entendimento de todos os conceitos apresentados neste capítulo, pois estão explanadas as principais características das formulações estudadas, e comparadas por meio da metodologia de pesquisa aplicada.

Com todos os conceitos necessários para compreensão explicados, o referencial teórico possibilita o entendimento da metodologia a ser apresentada, assim como as futuras discussões realizadas com os dados obtidos no trabalho, que serão interligados aos fundamentos de cada formulação.

3. METODOLOGIA

Neste capítulo são explanados os meios propostos para obtenção dos objetivos do trabalho, caracterizando a pesquisa, enumerando recursos e expondo os procedimentos de ensaios necessários para que os dados sejam alcançados e analisados com clareza.

Para o alcance dos objetivos deste trabalho, são realizadas simulações de diferentes elementos planos na notação *strain gradient* e na formulação isoparamétrica, para mostrar as equivalências e diferenças entre as duas formulações para elementos retangulares com elementos de quatro, oito e nove nós.

As mesmas simulações são repetidas com elementos isoparamétricos resolvidos com integração completa por pontos de Gauss, a integração reduzida uniforme e a integração reduzida seletiva, que já são comercialmente difundidos e já é conhecidos os desempenhos, mas o intuito da realização será a comparação com os resultados mostrados pelos elementos na notação *strain gradient*.

A pesquisa apresenta uma abordagem teórica e experimental, da notação *strain gradient* e formulação isoparamétrica, objetivando a comparação dos elementos finitos através de simulações computacionais.

Para a utilização do Método dos Elementos Finitos é utilizada a linguagem FORTRAN para programação, na plataforma de programação livre *CodeBlocks*, a partir do código do programa PC-FEM

Os resultados são apresentados no formato de gráficos, realizando a comparação do desempenho dos elementos em um problema onde são conhecidas as resoluções analíticas exatas, para identificar o erro aproximado de cada elemento nas diferentes notações.

Para problemas em que não são conhecidas as soluções exatas, é realizada a análise de convergência das soluções obtidas.

Na programação é realizada a medição das diferenças de tempos para a resolução de cada um dos testes, de forma a estimar o custo computacional para a solução e seus refinamentos de malha para cada uma das notações, e variações quanto a correção de erros

As deformações obtidas, e as deformações exatas do problema, são plotados em gráficos com a finalidade de comparar visualmente a convergência para a resposta certa em cada refino do problema

É possível entender qual método está obtendo uma resposta mais próxima comparando a distância entre as curvas de deformação do método e a curva real.

Também são plotados em gráficos o erro associado à cada um dos métodos em comparação com a resposta exata já conhecida.

As tensões associadas aos problemas simulados são analisadas para se conhecer os ganhos entre a utilização de um ou outro elemento finito em sua utilização como um todo, pois a notação que obter a convergência mais próxima do deslocamento pode não ter o mesmo desempenho para tensões.

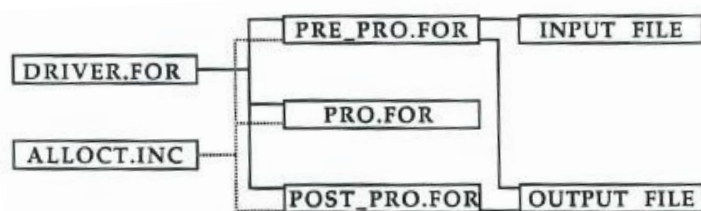
3.1. PC-FEM

O PC-FEM é um programa em linguagem FORTRAN já preparado para o cálculo de elementos isoparamétricos retangulares de quatro e nove nós, com integração completa da matriz de rigidez.

O programa possui limitações relacionadas a quantidade de elementos finitos, no máximo 200, e número de nós, no máximo 500, limitando também a modelagens dos testes feitos, cujas malhas não podem ultrapassar estes valores.

A estrutura do programa é modular, como mostra a figura 13, permitindo o acréscimo de partes e novas funções, desde que seguindo as mesmas declarações de variáveis.

Figura 14– Estrutura do programa PC-FEM



Fonte: Manual PC-FEM.

Em DRIVERFOR são chamadas as sub-rotinas que compõem o PRE_PROFOR, PROFOR, e POST_PROFOR, e em ALLOCTINC são declaradas as dimensões, tipos de caracteres e alocada a memória para que seja possível usar os dados gerados em uma sub-rotina nas próximas da sequência de processamento.

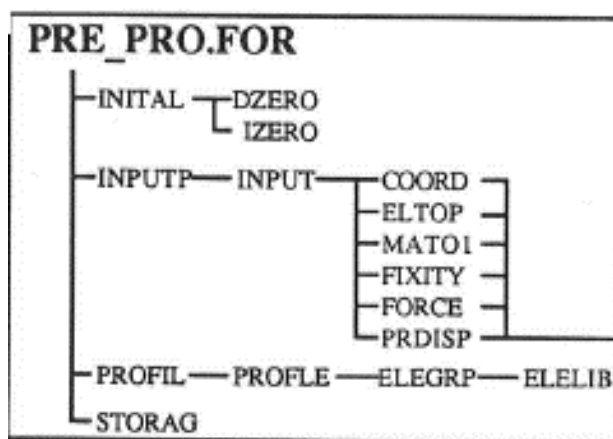
Em PRE_PROFOR é realizada a leitura dos dados e geração dos pontos declarados dentro de um incremento no arquivo de entrada de dados, o INPUT FILE apresentado na figura

13 Já nesta etapa inicia-se a escrita do OUTPUT FILE, a saída de dados, com a repetição dos dados de entrada para conferir se os dados foram lidos de forma adequada.

Existe uma tabulação a ser seguida na entrada de dados, que caso seja inadequada, pode ser lida de forma diferente do esperado, e com a repetição dos dados de entrada pelo programa, pode-se conferir se houve algum erro nesta etapa.

Também é atribuído o valor zero a todos os termos dos vetores e matrizes componentes do processo, de forma a não serem atribuídos valores aleatórios em alguns casos, como está representado na figura 14:

Figura 15– Estrutura do PRE_PROFOR



Fonte: Manual PC-FEM.

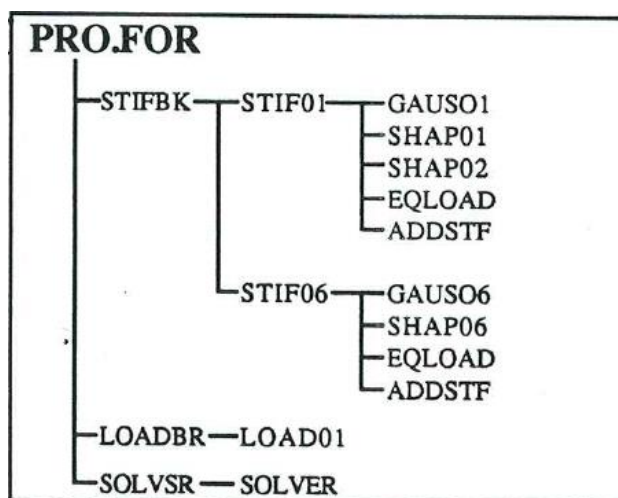
Em INITIAL é feita a atribuição do valor zero a todas as variáveis reais e inteiras alocadas em ALLOCTINC, em INPUTP é realizada a leitura de todos os dados inseridos sobre o problema.

Nas sub-rotinas seguintes, PROFIL, PROFLE, ELEGRP e ELELIB é feita a conferência dos dados inseridos, de forma a retornar eventuais erros na entrada de dados e é atribuído variáveis referentes ao tipo de elemento escolhido na simulação.

Na sub-rotina STORAG é verificado se a memória requerida para solucionar a entrada de dados não excede os limites catalogados no programa e também faz a alocação de memória dos dados lidos para serem acessados pelas próximas sub-rotinas.

A geração das matrizes de rigidez e o solver fazem parte do PROFOR, como mostra a figura 15, onde são utilizadas as informações lidas em PRE_PROFOR para realizar os cálculos da matriz de rigidez de cada elemento inserido para que o solver, que utiliza o método de redução de Crout, possa determinar os deslocamentos do problema.

Figura 16– Estrutura do PROFOR



Fonte: Manual PC-FEM.

Em PROFOR são feitas as modificações mais importantes para que o programa PC_FEM possa solucionar problemas utilizando a notação *strain gradient* e a formulação isoparamétrica com integração reduzida e integração reduzida seletiva, assim como o elemento de oito nós, que não faz parte da programação original.

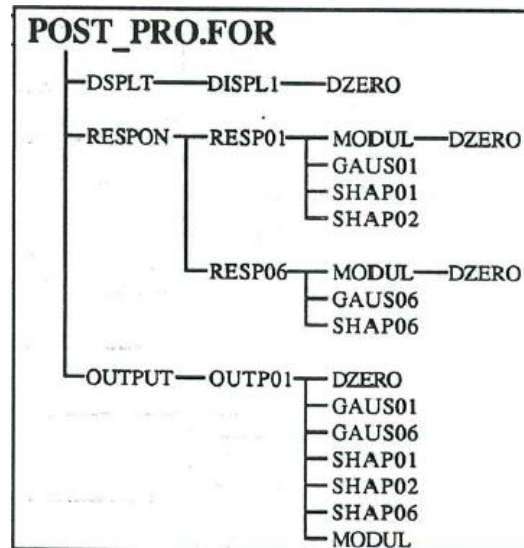
Foram criadas as sub-rotinas para os elementos na notação *strain gradient* STIF02, para o elemento de quatros nós, STIF05, para oito nós, e SITF07 para nove nós, retornando as matrizes de rigidez para serem computados os deslocamentos prescritos nas cargas do sistema linear de equações, através da sub-rotina EQLOAD, e através da sub-rotina ADDSTF, acrescida a matriz individual do elemento à matriz da malha inserida no programa.

Para o elemento de oito nós na formulação isoparamétrica, foi criada a sub-rotina SHAP03, responsável por computar as funções de forma e as derivadas, mas o restante permanece igual para o cálculo do elemento de quatro nós, onde é usada a sub-rotina SHAP01, e para o elemento de nove nós, onde usa-se a SHAP02.

Para realizar a integração reduzida, e a integração reduzida seletiva, como apresentado no referencial teórico, foi criada a repetição do processo de cálculo e formação da matriz de rigidez dentro da sub-rotina STIF01, de forma a ser calculada duas matrizes de rigidez, cada uma com uma quadratura de Gauss diferente, e sua matriz de elasticidade condizente, para que ao final elas sejam somadas, e matriz final tenha o mesmo destino do cálculo das outras.

Em POST_POSFOR, é realizado os pós processamentos, onde são conhecidos os deslocamentos determinados no solver, e são realizados os procedimentos para que sejam encontradas as saídas de dados, como mostra a figura 17.

Figura 17– Estrutura do PROFOR



Fonte: Autor.

Em RESPON são calculadas as deformações e tensões nos pontos, que originalmente seriam usados posteriormente em OUTPUT para o cálculo das forças nos pontos e escritos na saída de dados.

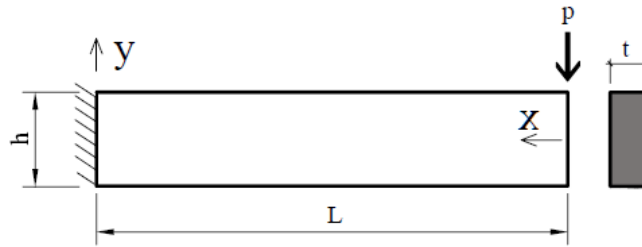
O programa foi modificado para continuar calculando as tensões e deformações, com a sub-rotina RESP01 para os elementos isoparamétricos, com e sem integração reduzida, e para os elementos em notação *strain gradient*, RESP02 para o elemento de quatro nós, RESP05 para oito nós e RESP07 para o elemento de nove nós.

Mas agora as tensões e deformações não são mais necessárias para o cálculo em OUTPUT, pois foi criada a alocação de memória para todas as matrizes de rigidez, determinadas em STIFBK, e são novamente utilizadas para determinação as forças nos nós diretamente com a multiplicação da matriz de rigidez e os deslocamentos.

3.2. Viga em Balanço (*Cantilever Beam*)

Para determinar o nível de eficiência da notação *strain gradient*, um dos problemas estudados é a Viga em Balanço, mostrada na figura 17, com determinação do deslocamento exato em qualquer ponto “x”, e das tensões normais e cisalhamento, ao longo da viga por Timoshenko e Goodier (1951), conforme as equações (148) a (151):

Figura 18– Viga em Balanço utilizada.



Fonte: Autor.

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{P(h/2)^2}{2IG}(l-x) \quad (148)$$

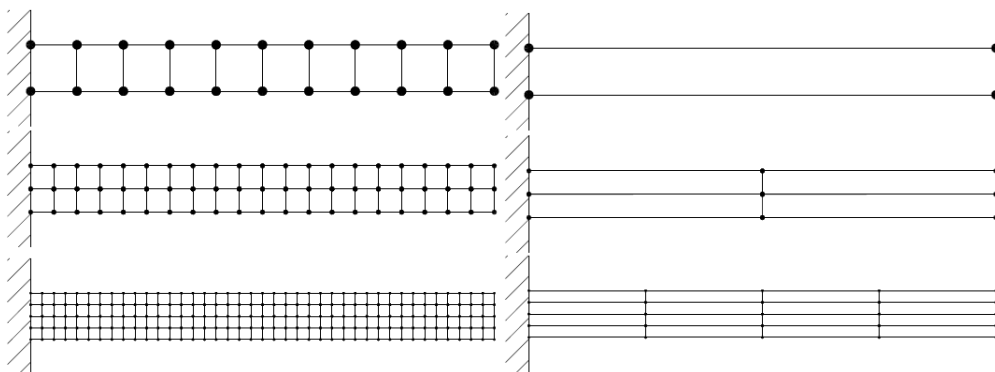
$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I} \quad (149)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (150)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1P}{2I} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \quad (151)$$

Para o estudo deste problema, é realizada a modelagem da malha com várias proporções entre os lados dos elementos, e o posterior refino da malha, mantendo está proporção, para avaliar a influência do *locking* numérico e a convergência esperada com o refino de malha como mostra a figura 19:

Figura 19– Viga em Balanço modelada para razão de aspecto $b/a = 1$ e seus refinamentos uniformes, e a modelagem para razão de aspecto $b/a = 0,1$ e seus refinamentos uniformes.

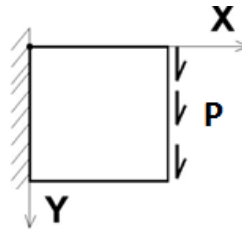


Fonte: Autor

3.3. Viga curta

Para avaliar o comportamento das notações sob a ótica de problemas envolvendo cisalhamento acentuado, faz-se a modelagem do problema de uma viga curta, com mesmo comprimento e altura como mostra a figura 20:

Figura 20– Viga em Balanço utilizada.



Fonte: Autor.

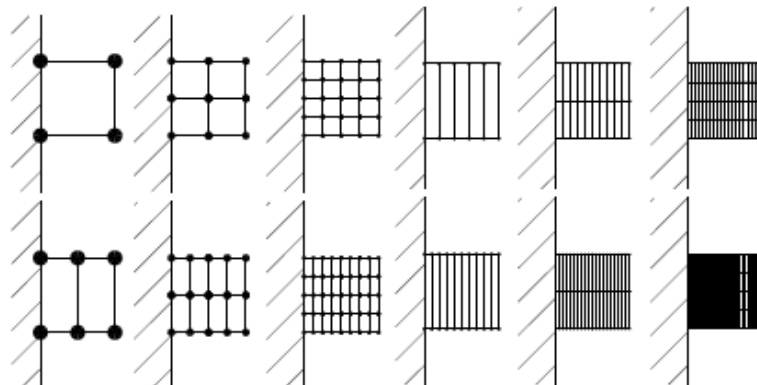
A viga curta é modelada com elementos finitos de quatro e nove nós, avaliando a influência da razão de aspecto nos resultados.

Para a simulação da viga curta, é fixado um coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, um vão $L = 2uc$, altura $h = 2uc$, e espessura $t = 0,3uc$, e módulo de elasticidade $E = 1000000uf/uc^2$.

Para fins de resumo do trabalho, não foram realizadas as variações de coeficiente de Poisson, pois o comportamento da convergência é o mesmo mostrado da Viga em Balanço, assim como as comparações para os elementos de oito nós, que apresentam similaridades de resultado com o elemento de nove nós.

A primeira simulação é realizada com elementos de proporção $b/a = 1$, resultando em um elemento, e cada refino de malha dividiu cada elemento em outros quatro, resultando em malhas com quatro e 16 elementos finitos. Após três refinamentos, a razão de aspecto é variada, aumentando a altura do elemento em relação à base, tornando as próximas relações estudadas $b/a = 2$, com refinamentos para oito e 32 elementos, $b/a = 5$, com refino de 20 e 80 elementos, e $b/a = 10$, com refinamentos de 40 e 160 elementos. Os três refinamentos para cada proporção estudada com elementos finitos são feitos para elementos de quatro e nove nós, como mostra a figura 21:

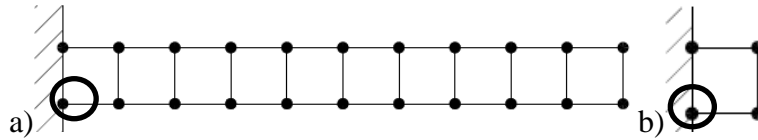
Figura 21– Viga Curta modelada para diferentes razões de aspectos e seus refinamentos uniformes para os elementos finitos de quatro nós.



Fonte: Autor.

Para serem analisadas as tensões, tanto da viga em balanço como da viga curta, serão obtidos os valores referentes ao primeiro ponto de Gauss do primeiro elemento de cada malha, mais próximo do canto inferior junto ao engaste do balanço das vigas, conforme figura 22:

Figura 22– Ponto de análise das tensões para a viga em balanço e a viga curta.

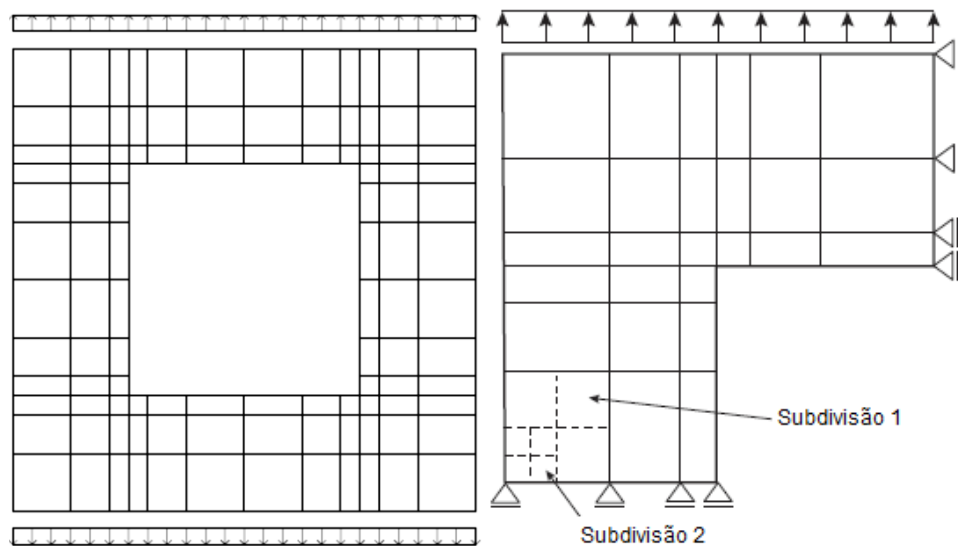


Fonte: Autor

3.4. Furo quadrado.

O problema de chapa com furo quadrado avalia a concentração de tensões obtidas no vértice do furo e a convergência da resposta de cada modelagem, como mostra a figura 23:

Figura 23– Modelagem do furo quadrado.



Fonte: Autor.

A modelagem é realizada com um material com $E=1000000\text{uf/uc}^2$, $\text{Poisson}=0,3$, e espessura de uma unidade de comprimento, sendo aplicada uma carga de 100uf/uc na aresta superior, como mostra a figura 20, e o menor elemento quadrado com uma unidade de comprimento de lado, o segundo com duas e o maior com três.

O refino das malhas é uniforme, tornando cada elemento finito em outros quatro, feito até o limite estabelecido para malhas no PC-FEM.

Para obter um mínimo de três malhas, uma malha simulada com o elemento menor com duas unidades de comprimento e o maior com quatro também foi simulada, porém sua

geometria concentra menos elementos envolta da aresta do furo. Isso foi necessário pois o refino utilizando mais elementos, resultado da segunda subdivisão descrita na figura 22, gera uma quantidade de elementos e nós que ultrapassa a capacidade do PC-FEM.

3.5. Modo de análise dos resultados

A partir das simulações, e comparação dos resultados, é possível analisar e concluir sobre o desempenho dos elementos em forma gráfica, constatando se há ou não redução do erro com o refino de malha, e como as propriedades dos materiais e dos problemas simulados interferem no desempenho de cada elemento.

Para a identificação dos elementos nos gráficos, foi adotada a nomenclatura que identifica o tipo, quantidade de nós, tipo de integração para os elementos isoparamétricos, ou se com elementos espúrios, sem elementos espúrios, ou com a introdução intencional de modos cinemáticos de energia nula na notação *strain gradient*.

A introdução intencional de modos cinemáticos de energia nula está sendo proposta para a comparação de resultados dos elementos de oito e nove nós na notação *strain gradient*, pois o comportamento da formulação isoparamétrica já é conhecido.

A notação utilizada para os elementos de quatro nós segue o quadro 1:

Quadro 1 – legenda para análise dos gráficos dos elementos de quatro nós.

ISOP4	Elemento isoparamétrico de quatro nós com integração completa
ISOP4RI	Elemento isoparamétrico de quatro nós com integração reduzida uniforme
ISOP4SRI	Elemento isoparamétrico de quatro nós com integração reduzida seletiva
ISOP4SRIP	Elemento isoparamétrico de quatro nós com integração reduzida seletiva ponderada
SG4	Elemento <i>Strain gradient</i> de quatro nós com termos espúrios
SG4C	Elemento <i>Strain gradient</i> de quatro nós sem termos espúrios

Fonte: Autor.

A notação utilizada para os elementos de oito nós segue o que se observa no quadro 2:

Quadro 2 – legenda para análise dos gráficos dos elementos de oito nós.

ISOP8	Elemento isoparamétrico de oito nós com integração completa
ISOP8RI	Elemento isoparamétrico de oito nós com integração reduzida uniforme
ISOP8SRI1	Elemento isoparamétrico de oito nós com integração reduzida seletiva com um grau a menos que a integração completa para equação de deformação angular
ISOP8SRI2	Elemento isoparamétrico de oito nós com integração reduzida seletiva com dois graus a menos que a integração completa para equação de deformação angular (inserção de modos cinemáticos de energia nula)
ISOP8SRIP1	Elemento isoparamétrico de oito nós com integração reduzida seletiva ponderada com um grau a menos que a integração completa para equação de deformação angular
ISOP8SRIP2	Elemento isoparamétrico de oito nós com integração reduzida seletiva ponderada com dois graus a menos que a integração completa para equação de deformação angular (inserção de modos cinemáticos de energia nula)
SG8	Elemento <i>Strain gradient</i> de oito nós com termos espúrios
SG8C	Elemento <i>Strain gradient</i> de oito nós sem termos espúrios
SG8N	Elemento <i>Strain gradient</i> de oito nós sem termos espúrios (inserção de modos cinemáticos de energia nula)

Fonte: Autor.

A notação utilizada para os elementos de nove nós segue o que se observa no quadro 3:

Quadro 3 – legenda para análise dos gráficos dos elementos de nove nós.

ISOP9	Elemento isoparamétrico de nove nós com integração completa
ISOP9RI	Elemento isoparamétrico de nove nós com integração reduzida uniforme
ISOP9SRI1	Elemento isoparamétrico de nove nós com integração reduzida seletiva com um grau a menos que a integração completa para equação de deformação angular

ISOP9SRI2	Elemento isoparamétrico de nove nós com integração reduzida seletiva com dois graus a menos que a integração completa para equação de deformação angular
ISOP9SRIP1	Elemento isoparamétrico de nove nós com integração reduzida seletiva ponderada com um grau a menos que a integração completa para equação de deformação angular
ISOP9SRIP2	Elemento isoparamétrico de nove nós com integração reduzida seletiva ponderada com dois graus a menos que a integração completa para equação de deformação angular
SG9	Elemento <i>Strain gradient</i> de nove nós com termos espúrios
SG9C	Elemento <i>Strain gradient</i> de nove nós sem termos espúrios
SG9N	Elemento <i>Strain gradient</i> de nove nós sem termos espúrios e inserção proposital de modos espúrios de energia nula

Fonte: Autor.

Após a análise de dados será realizada a conclusão, compilando os efeitos do estudo no estado da arte.

Na análise de dados serão descritos os resultados obtidos a partir do aplicado na metodologia, gerando fundamentos suficientes para as afirmações feitas na conclusão.

4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os dados e análises realizadas na presente pesquisa, descrevendo os resultados obtidos de forma a proporcionar as correlações com o referencial teórico.

Observam-se diferenças nas duas formulações às quais foram explanadas previamente para melhorar a compreensão da análise de dados.

A notação *Strain gradient* apresenta como principal diferencial a retirada de termos espúrios antes do processamento de dados, assim como a integração completa da matriz de rigidez, sem a necessidade do uso de pontos de Gauss para integração como na formulação isoparamétrica.

Já o elemento isoparamétrico apresenta uma formulação adequada para elementos com distorções geométricas, uma vez que, com o mapeamento das coordenadas, torna-se possível estabelecer um mesmo domínio de integração definido para todos os elementos, e permitem o uso dos pontos de Gauss para a integração.

Os termos espúrios são facilmente identificados e removidos na notação *Strain gradient*, para os elementos de oito e nove nós, porém na formulação isoparamétrica não é possível remove-los sem induzir outro erro.

A equação para os elementos de nove e oito nós, seguindo a progressão do triangulo de Pascal já citado, atingem equações de quarto grau, sendo que a quadratura de Gauss de 3x3 integra exatamente esta equação, incluindo os termos espúrios, claramente identificados acompanhando os elementos x^2 e y^2 , no elemento de oito e nove nós, e os elementos x^2y e xy^2 no elemento de nove nós na notação *Strain gradient*, porém de difícil identificação explícita na formulação isoparamétrica.

Caso seja utilizada uma quadratura de 2x2 pontos, os elementos maiores que grau 3 seriam desprezados, porém ainda existem termos espúrios de segundo grau que continuam sendo integrados no elemento, não solucionando o problema.

Utilizando uma quadratura de 1 ponto, todos os termos espúrios são retirados, porém também é suprimido o elemento xy , que não é um termo espúrio, inserindo assim modos espúrios de energia nula [31, 32].

Pode-se observar que para os elemento de oito e nove nós na formulação isoparamétrica, ao eliminar um erro causado pelo cisalhamento parasítico, causa o erro de modo espúrio de

energia nula, enquanto para a notação *Strain gradient* é possível suprimir *a priori* apenas os termos espúrios, sem causar mais erros [2, 31].

Outro ponto importante a ser salientado, e que motivou a escolha da análise das tensões dos elementos nos pontos de Gauss, mesmo para os elementos *Strain Gradient* que não usam esta forma de integração, é que a notação *Strain Gradient* permita a fácil obtenção das tensões em qualquer ponto inserido no elemento, enquanto para a formulação isoparamétrica são necessárias técnicas para realizar a projeção dos resultados para um determinado ponto do elemento.

Como existem várias formas de projeção dos resultados obtidos para tensões nos pontos de Gauss, e não faz parte da discussão proposta qual seria mais adequado para obter as tensões nas coordenadas nodais dos elementos, foi optado por obter as tensões nos pontos de Gauss para os elementos *Strain Gradient*, que permitem obter as tensões diretamente em qualquer ponto do elemento.

4.1. Viga em Balanço

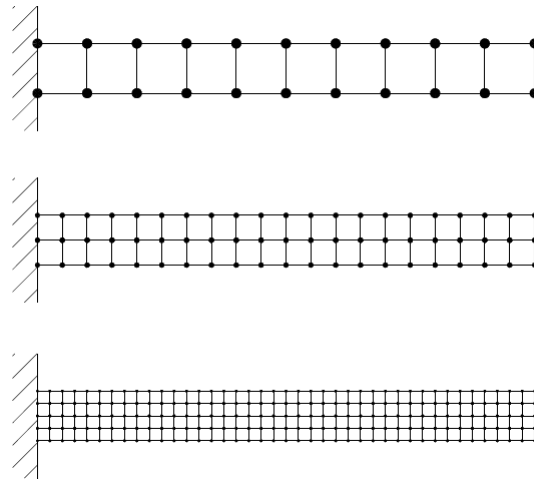
Para a simulação da Viga em Balanço, é feita a variação do coeficiente de Poisson para que sejam comparadas as influências no que diz respeito aos termos espúrios devido à cisalhamento parasítico.

Para um Poisson $\nu = 0,3$, um vão $L = 20uc$, altura $h = 2uc$, e espessura $t = 0,3uc$, módulo de elasticidade $E = 1000000uf/uc^2$, aplicando-se a equação (148), obtém-se para a extremidade do balanço uma deformação vertical igual à $(v) = 0,04039uc$.

4.1.1. Elemento de quatro nós

A primeira simulação foi realizada com elementos de proporção $b/a = 1$, resultando em dez elementos, e cada refino de malha dividiu cada elemento em outros quatro como mostra a figura 24:

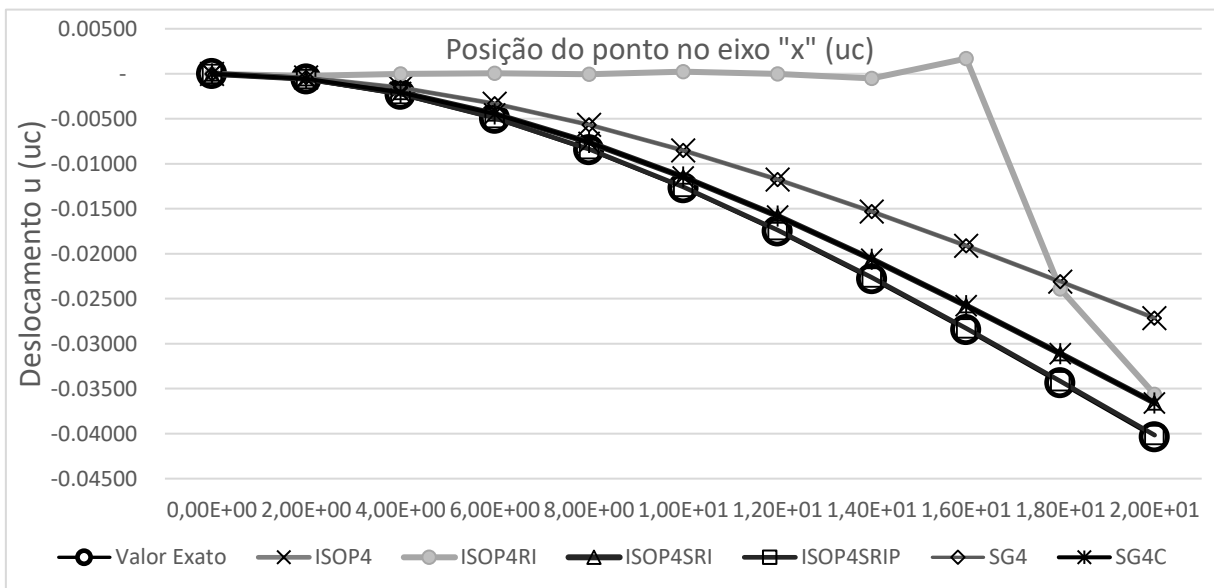
Figura 24– Modelagem da viga em balanço com $b/a = 1$ e os refinamentos uniformes realizados.



Fonte: Autor.

A primeira malha para um elemento de quatro nós resultou no gráfico 1:

Gráfico 1– Deslocamento x Posição da malha com 10 elementos com relação $b/a=1$ da *Viga em Balanço*, para o elemento de quatro nós.



Fonte: Autor.

Como é possível observar, a integração reduzida uniforme, usada no elemento ISOP4RI, resultou em deslocamentos absurdos em relação à solução exata, não sendo apropriado para esta aplicação.

Os resultados obtidos com os elementos ISOP4 e SG4 são idênticos, e mostram uma aproximação ainda grosseira em relação ao resultado analítico exato. Porém, o fato do elemento de quatro nós com termos espúrios na notação *Strain gradient* possuir o mesmo resultado da

formulação isoparamétrica com integração completa, valida a formulação desenvolvida e confirma o resultado esperado de que a inclusão de elementos espúrios na formulação da notação *Strain gradient* iguala a integração completa da formulação isoparamétrica.

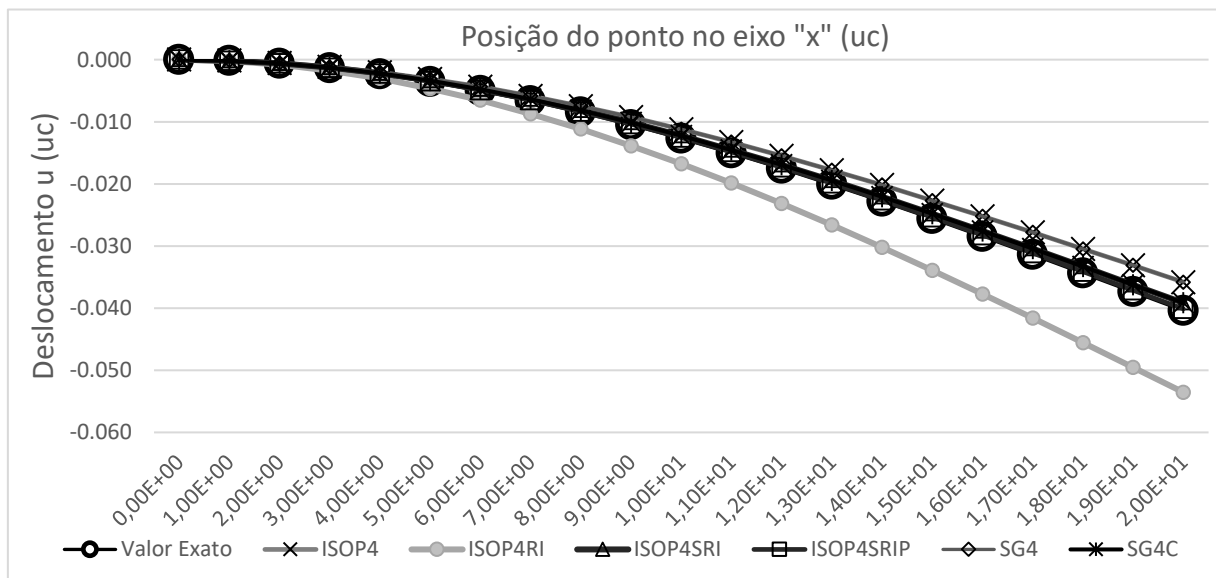
Os resultados obtidos com os elementos SG4C, ISOP4SRI são idênticos, e mostram uma melhor aproximação. Este comportamento mostra a equivalência entre a supressão *a priori* dos termos espúrios na notação *Strain gradient*, e na integração reduzida seletiva e reduzida seletiva ponderada, onde os termos de maior grau na equação de deformação angular não são integrados pela quadratura reduzida, o que seria equivalente a suprimir os termos espúrios identificados *a priori* em SG4C.

O resultado do elemento ISOP4SRIP foi o melhor alcançado.

O custo computacional reduz consideravelmente com o uso da notação *Strain gradient*, considerando que a quantidade de processos envolvidos para a eliminação dos termos espúrios na formulação isoparamétrica consiste no cálculo de duas matrizes de rigidez, cada uma com uma quadratura de Gauss, e a soma destas, enquanto para a eliminação de termos espúrios em SG4C bastou a supressão de termos no cálculo das matrizes de integrais.

Para o primeiro refino da malha, com 40 elementos, mantendo a proporção $b/a = 1$, os resultados foram compilados no gráfico 2:

Gráfico 2– Deslocamento x Posição da malha com 40 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós



Fonte: Autor.

Ao observar o comportamento do elemento ISOP4RI, nota-se uma melhora no desempenho, que agora acompanha a forma de deslocamento do resultado analítico da viga, mas continuando muito ruim em relação aos demais, sendo necessários 40 elementos para obter alcançado com a notação paramétrica com integração completa e com a notação *Strain gradient* com termos espúrios com 10 elementos.

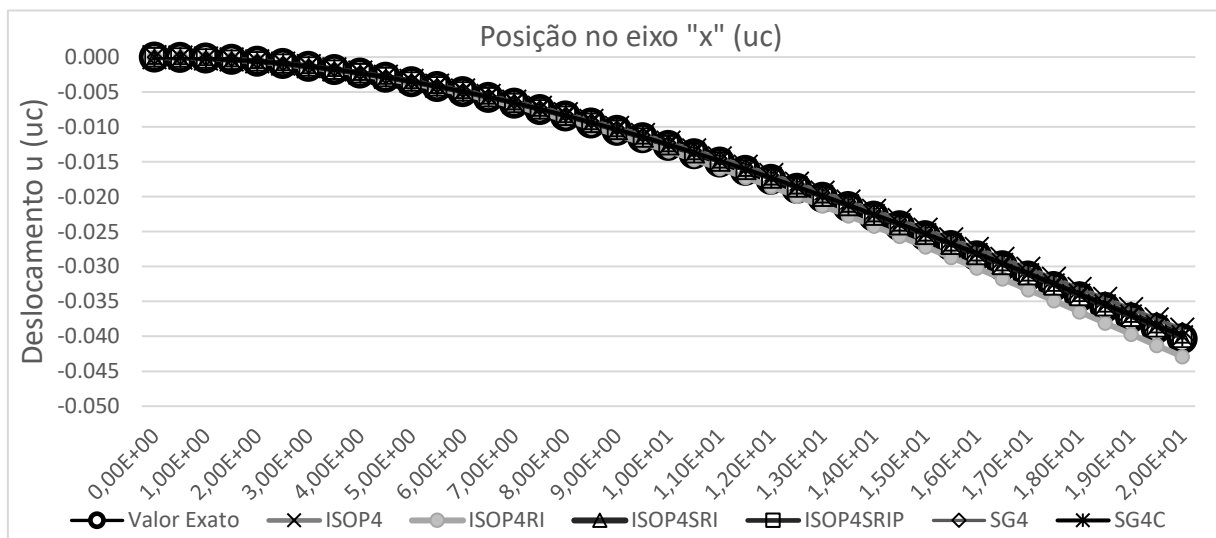
Para os elementos ISOP4 e SG4, houve uma melhora na aproximação ao resultado exato, porém ainda grosseiro para proporcionar uma análise estrutural segura.

Para os elementos ISOP4SRI e SG4C, os resultados mostram melhora na aproximação e boa convergência em relação ao resultado exato.

O elemento ISOP4SRIP apresentou o melhor resultado.

Para o segundo refino da malha, com 160 elementos, mantendo a proporção $b/a = 1$, os resultados foram compilados no gráfico 3:

Gráfico 3– Deslocamento x Posição da malha com 160 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós



Fonte: Autor.

A integração reduzida uniforme, no elemento ISOP4RI, mostra um erro ainda muito superior em relação aos demais elementos, tendo alcançado 6,247% de erro com 160 elementos, e deslocamentos maiores do que a solução exata.

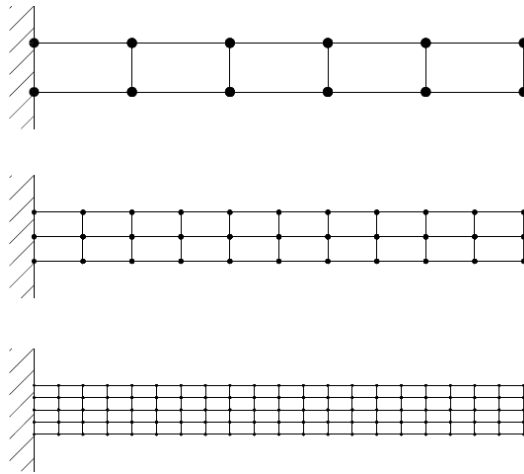
Os elementos SG4 e ISOP4 reduziram o erro para 3,412% com o último refino de malha, porém ainda existe uma variação entre os resultados para cada refino muito alta para estabelecer que o resultado esteja convergindo adequadamente.

Para os elementos ISOP4SRI e SG4C o erro alcançado foi de 1,099% em relação à solução exata, e a pouca variação entre os resultados mostra uma convergência mais rápida para a solução em relação aos demais elementos.

O elemento ISOP4SRIP continua apresentando um melhor resultado.

Alterando a relação entre b/a para 0,5, a primeira simulação é feita com cinco elementos, cuja base é duas vezes maior que a altura, e os demais refinamentos permanecem subdividindo cada elemento por outros quatro, para manter a relação b/a , como mostra a figura 25:

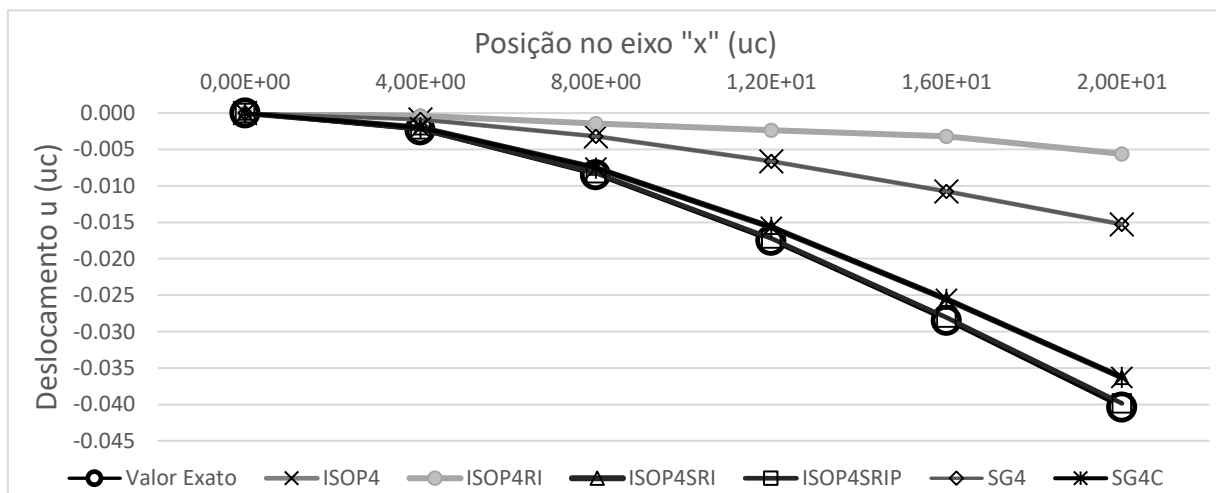
Figura 25– Modelagem da viga em balanço com $b/a = 0,5$ e os refinamentos uniformes realizados.



Fonte: Autor.

O gráfico resultante das simulações mostra o seguinte comportamento:

Gráfico 4– Deslocamento x Posição da malha com cinco elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós



Fonte: Autor.

Seguindo os mesmos padrões observados para uma relação $b/a = 1$, para a nova relação $b/a = 0,5$ os comportamentos se mantêm similares.

A integração reduzida uniforme, feita em ISOP4RI, fornece um resultado inapropriado, em termos de acurácia e comportamento, não se mostrando eficaz nesta aplicação.

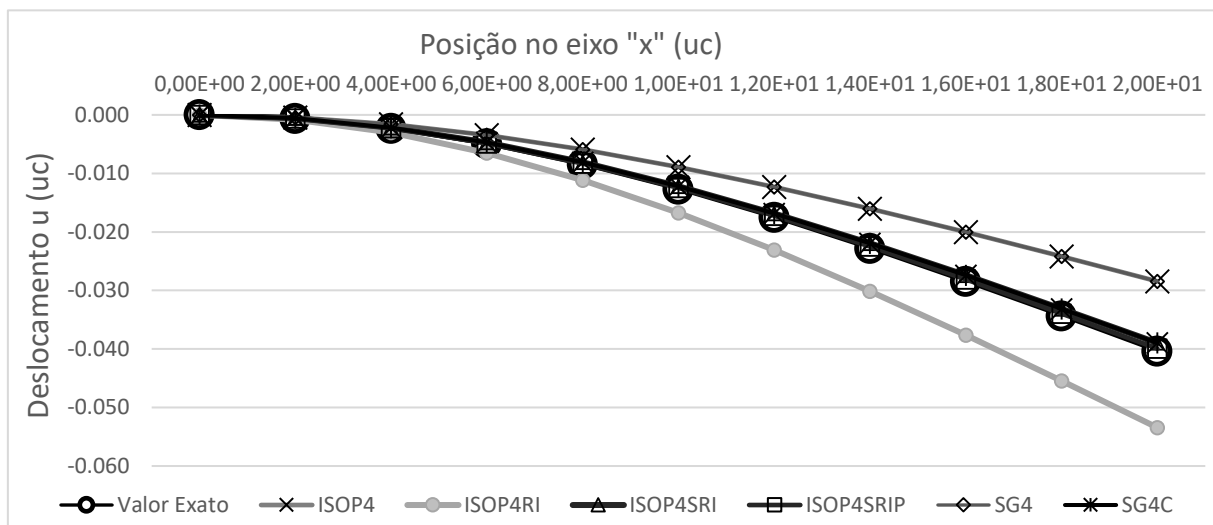
Para os elementos ISOP4 e SG4, o comportamento é similar ao da resposta analítica, mas o erro é bastante alto em relação as outras notações, alcançando 62,181% no maior deslocamento.

Os elementos ISOP4SRI e SG4C, os resultados foram melhores tanto em relação ao comportamento, e em relação à precisão obteve um erro de 10,136%.

O melhor resultado foi para o elemento ISOP4SRIP, com erro de 1,312%.

Realizando o primeiro refino, alcançando 20 elementos, obtém-se o gráfico 5:

Gráfico 5– Deslocamento x Posição da malha com 20 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós



Fonte: Autor.

O elemento ISOP4RI passa a apresentar um comportamento similar ao da solução exata, porém seus deslocamentos são maiores e o erro de 32,280%.

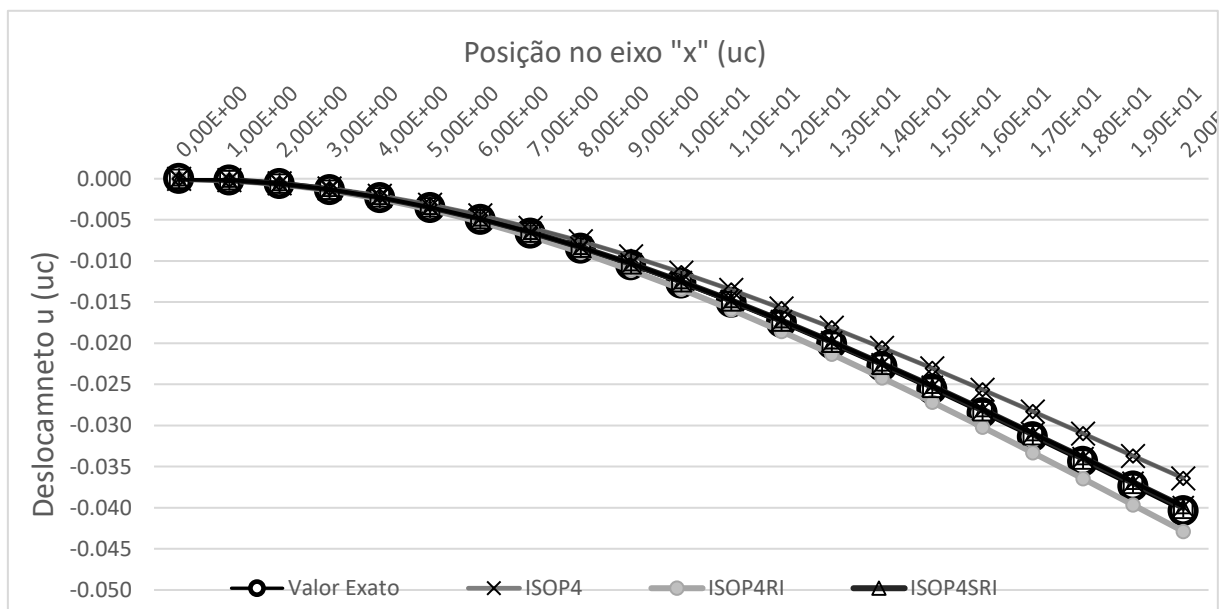
A integração completa do elemento isoparamétrico, ISOP4, e a notação *Strain gradient* com termos espúrios, SG4, alcançaram um erro de 29,574% no maior deslocamento. Observa-se que apesar de uma quantidade de elementos maior, a redução do erro em relação a primeira malha de elementos com relação $b/a = 1$ não é substancial, com uma diferença de apenas 3,192%.

Para os elementos sem termos espúrios, ISOP4SRI e SG4C, o erro em relação a solução exata na posição de maior deslocamento é de 3,516%. Observa-se que em relação a primeira malha de elementos com relação $b/a = 1$, a redução do erro é de 5,944%, utilizando o dobro de elementos, mas com relação $b/a = 0,5$.

O elemento ISOP4SRIP, seguindo o mesmo comportamento dos experimentos anteriores, mostrou o menor erro, com 0,681%, e uma redução de 0,112% em relação a malha com 10 elementos e relação $b/a = 1$.

Para o terceiro refino, obtém-se o gráfico 6:

Gráfico 6– Deslocamento x Posição da malha com 80 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós



Fonte: Autor.

Pode-se observar que o elemento ISOP4RI apresenta deslocamentos maiores que os da solução exata, com um erro de 6,160%.

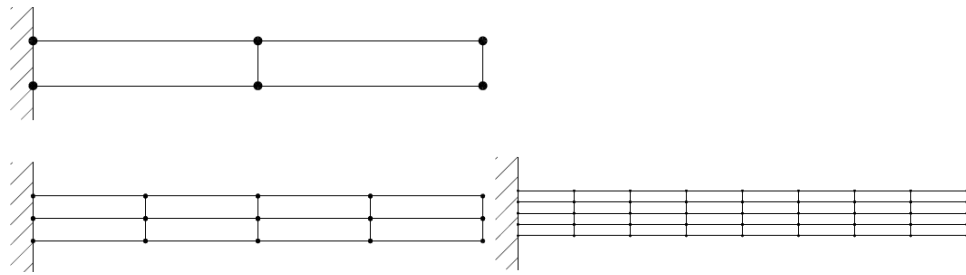
Para os elementos com os termos espúrios SG4 e ISOP4, o erro foi de 9,846%, maior que o do elemento ISOP4RI, porém com deslocamentos menores que a solução analítica.

Os elementos ISOP4SRI e SG4C alcançaram um erro de 1,302%.

O elemento ISOP4SRIP mostrou um erro de 0,681%.

Para a comparação da influência da relação b/a dos elementos, assim como a acurácia entre eles, a relação entre o menor e maior lado foi reduzida para 0,2, ou seja, o maior lado é cinco vezes o valor do menor, como mostra a figura 26:

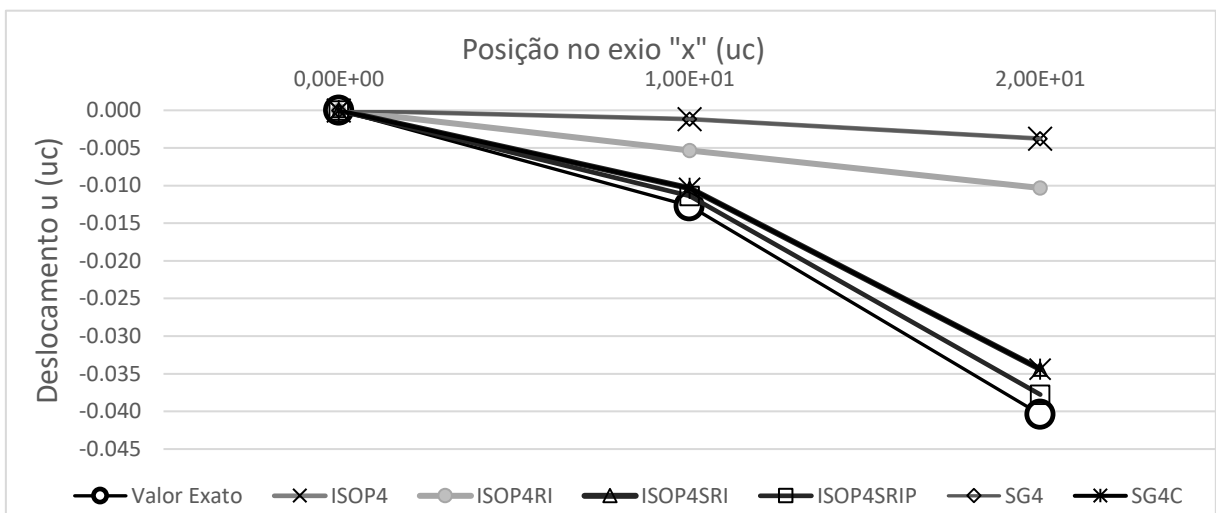
Figura 26– Modelagem da viga em balanço com $b/a = 0,2$ e os refinamentos uniformes realizados.



Fonte: Autor.

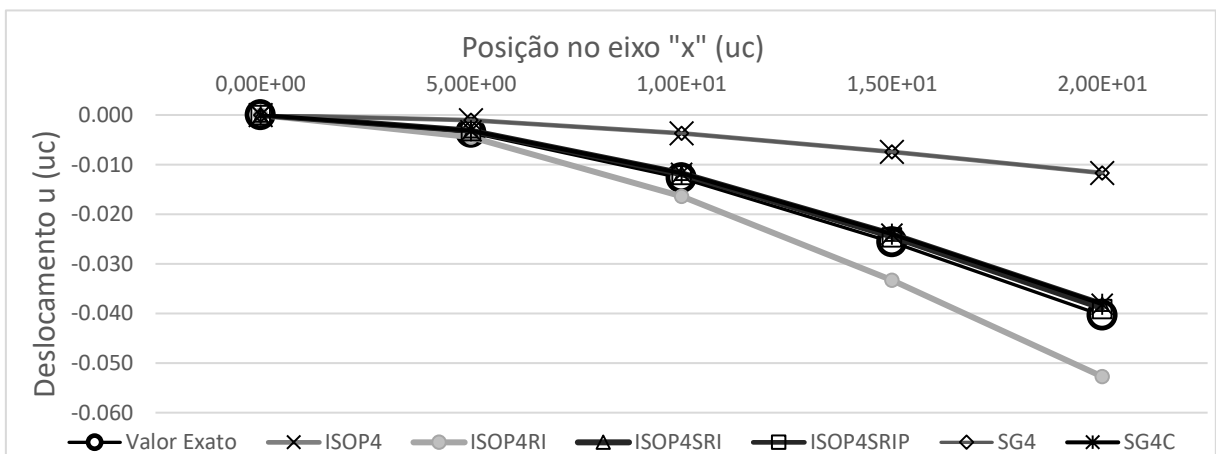
Os resultados obtidos são mostrados nos gráficos 7 a 9:

Gráfico 7– Deslocamento x Posição da malha com dois elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós



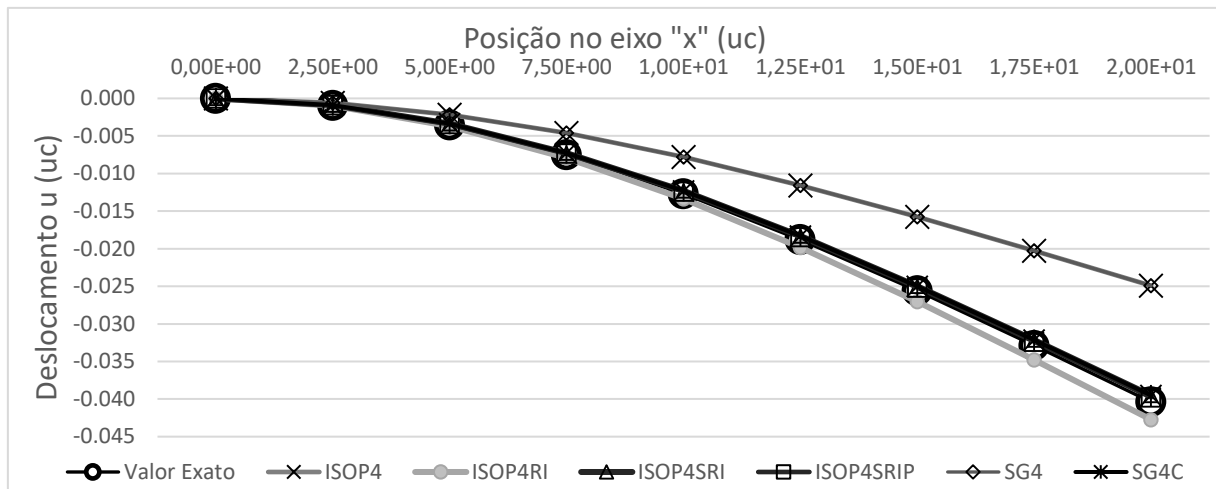
Fonte: Autor.

Gráfico 8– Deslocamento x Posição da malha com oito elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.



Fonte: Autor.

Gráfico 9– Deslocamento x Posição da malha com 32 elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós

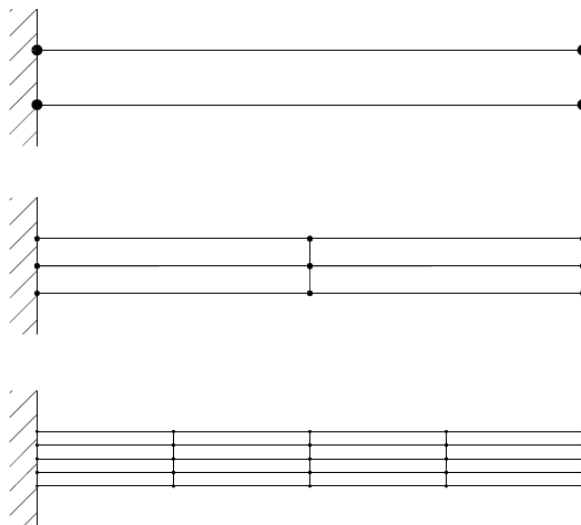


Fonte: Autor.

O comportamento dos elementos de quatro nós estudados se repete, mantendo a redução dos erros com os refinamentos, e os melhores resultados atribuídos aos elementos ISOP4SRI, SG4C e ISOP4SRIP. Porém o comportamento do elemento ISOP4RI em relação aos elementos ISOP4 e SG4 apresenta uma modificação com o alongamento do elemento, pois, apesar de retornar deslocamentos maiores que o exato, a proximidade com a solução analítica é maior que os elementos com os termos espúrios.

Para a menor relação b/a utilizada, igual a 0,1, com a maior dimensão do elemento dez vezes a menor dimensão, como mostra a figura 27:

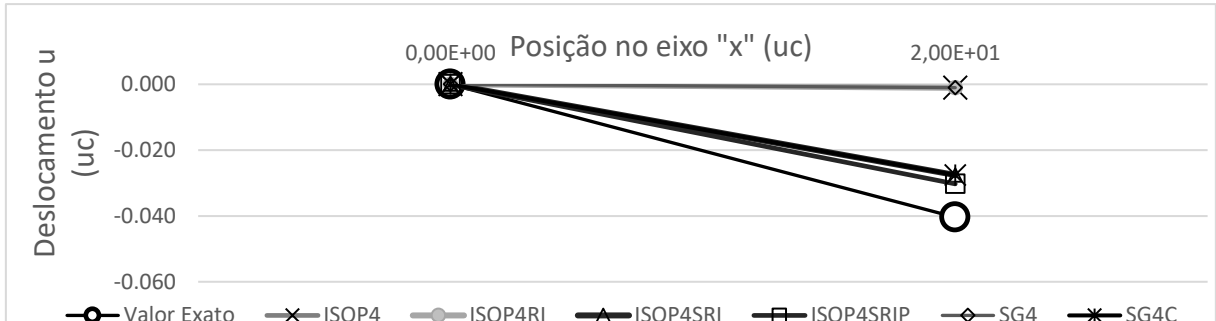
Figura 27– Modelagem da viga em balanço com $b/a = 0,1$ e os refinamentos uniformes realizados.



Fonte: Autor.

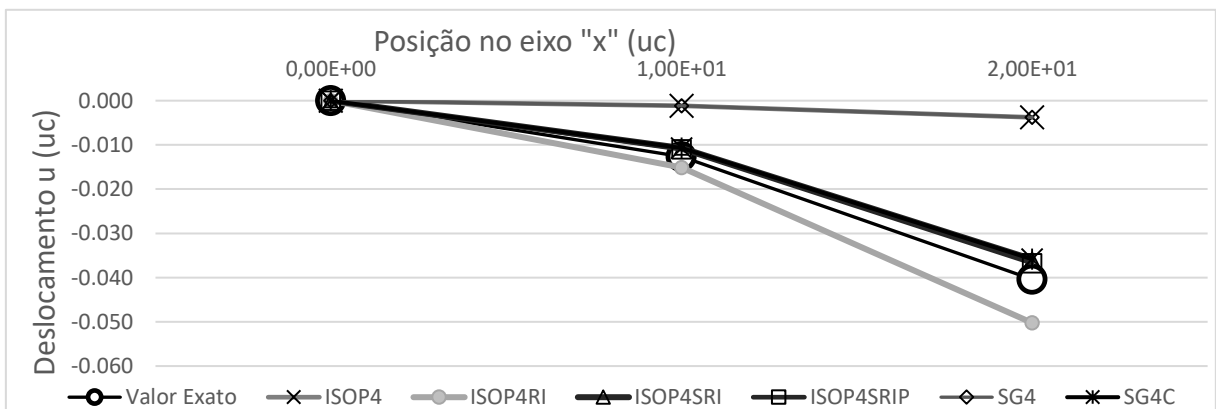
Os resultados são mostrados nos gráficos 10 a 12:

Gráfico 10– Deslocamento x Posição da malha com um elemento com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.



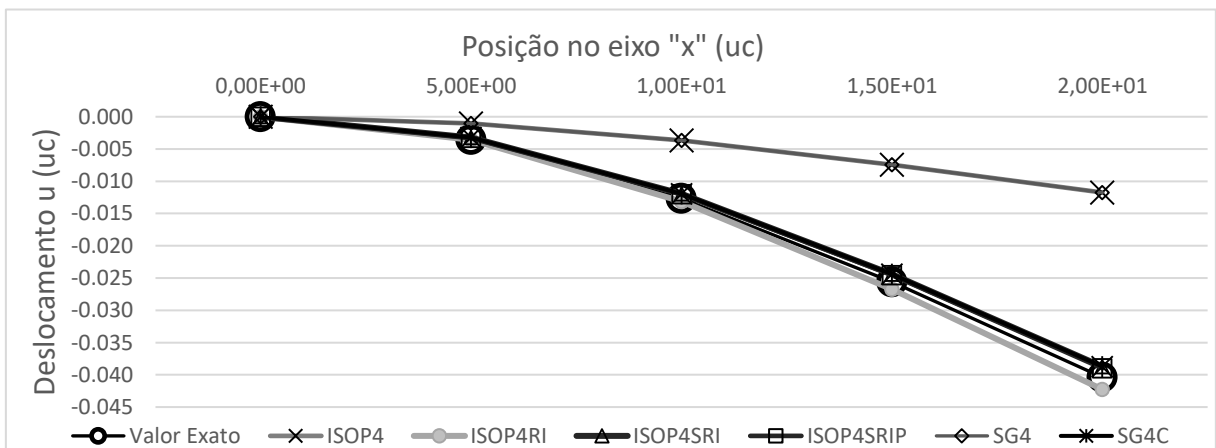
Fonte: Autor.

Gráfico 11– Deslocamento x Posição da malha com quatro elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.



Fonte: Autor.

Gráfico 12– Deslocamento x Posição da malha com 16 elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de quatro nós.

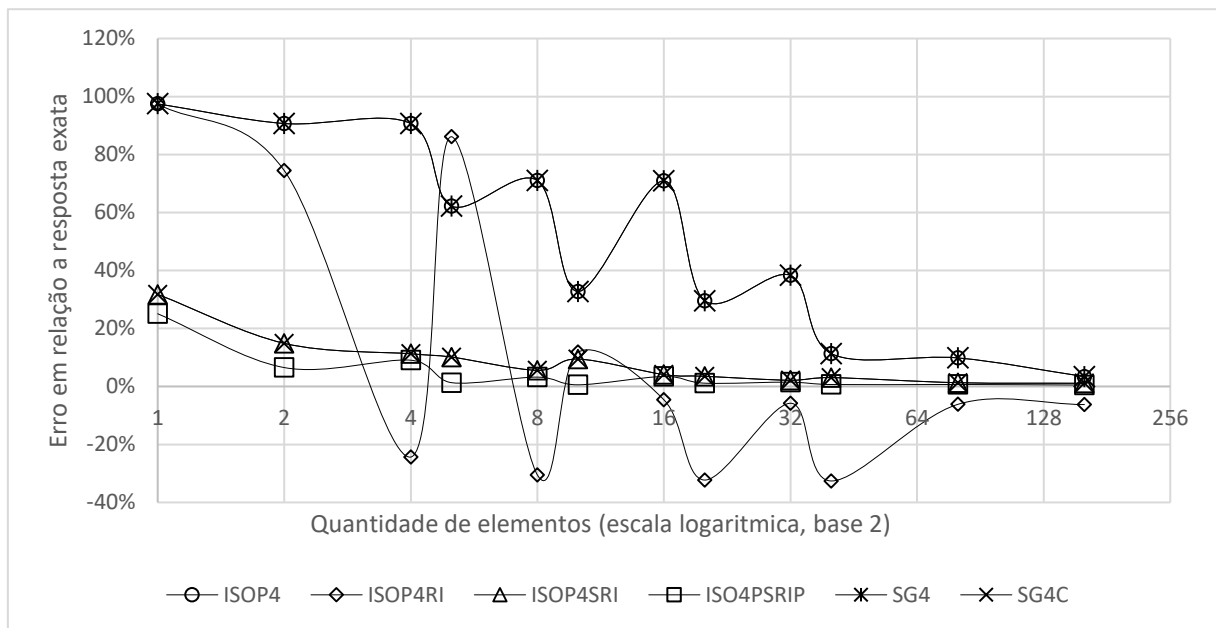


Fonte: Autor.

Os elementos com proporção $b/a = 0,1$ apresentaram o mesmo comportamento dos demais, melhorando a aproximação com o refino, porém pode-se notar que os elementos ISOP4 e SG4 passaram a retornar erros maiores que o elemento ISOP4RI. Os elementos ISOP4SRI, ISOP4SRIP e SG4C mantiveram-se como melhores aproximações em todas as simulações.

Comparando os erros obtidos com os diferentes refinamentos de malhas, de todas as proporções de elementos, obtém-se o gráfico 13:

Gráfico 13– Erro x Quantidade de elementos, para o elemento de quatro nós.



Fonte: Autor.

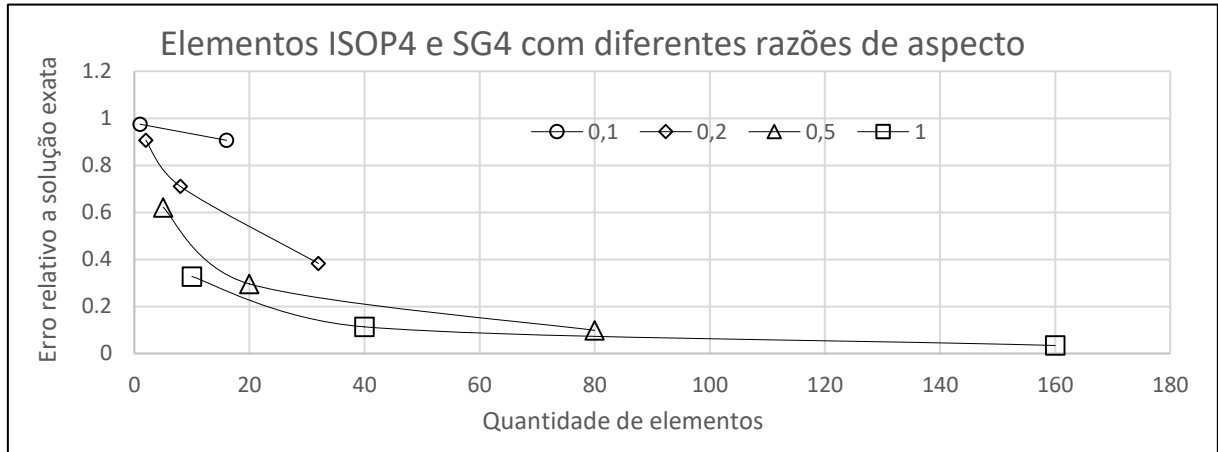
Observa-se que para o elemento ISOP4RI existe uma variação grande para modelagens com poucos elementos, e nos casos onde o erro é menor que zero, seriam os casos onde os deslocamentos foram maiores que o resultado analítico exato.

Para os elementos ISOP4 e SG4, existe uma variação do resultado em relação a mudança de proporção entre as dimensões dos elementos, e o resultado tende a convergir com o aumento da quantidade de elementos.

Os elementos ISOP4SRI, ISOP4SRIP e SG4C tem pequena variação em relação a mudança das relações b/a , e apresentam os menores erros, com uma convergência mais rápida em relação aos demais elementos, mostrando-se menos sensíveis à razão de aspecto neste problema.

Para analisar a variação do erro em decorrência das mudanças da relação b/a , o gráfico 14 mostra os erros dos elementos ISOP4 e SG4 com o agrupamento das proporções entre as dimensões:

Gráfico 14– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4 e SG4.

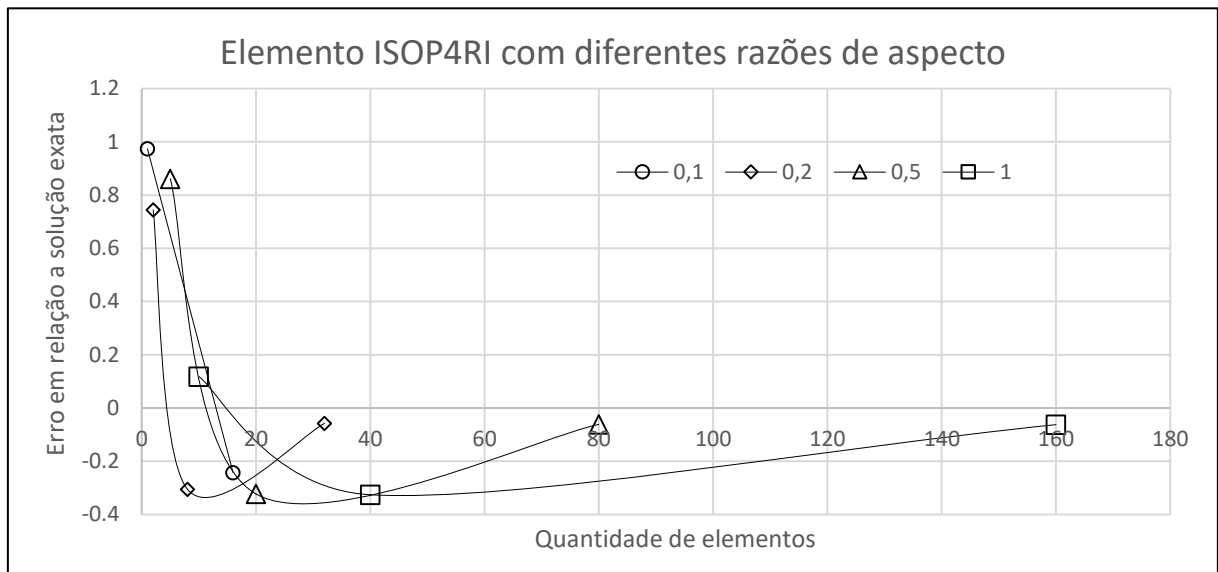


Fonte: Autor.

Observa-se que o erro não tem redução significativa, ou até aumenta, mesmo que usando uma quantidade maior de elementos, quando a relação b/a reduz.

Para o elemento ISOP4RI, o gráfico 15 mostra a relação entre a quantidade de elementos e a relação b/a :

Gráfico 15– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4RI.



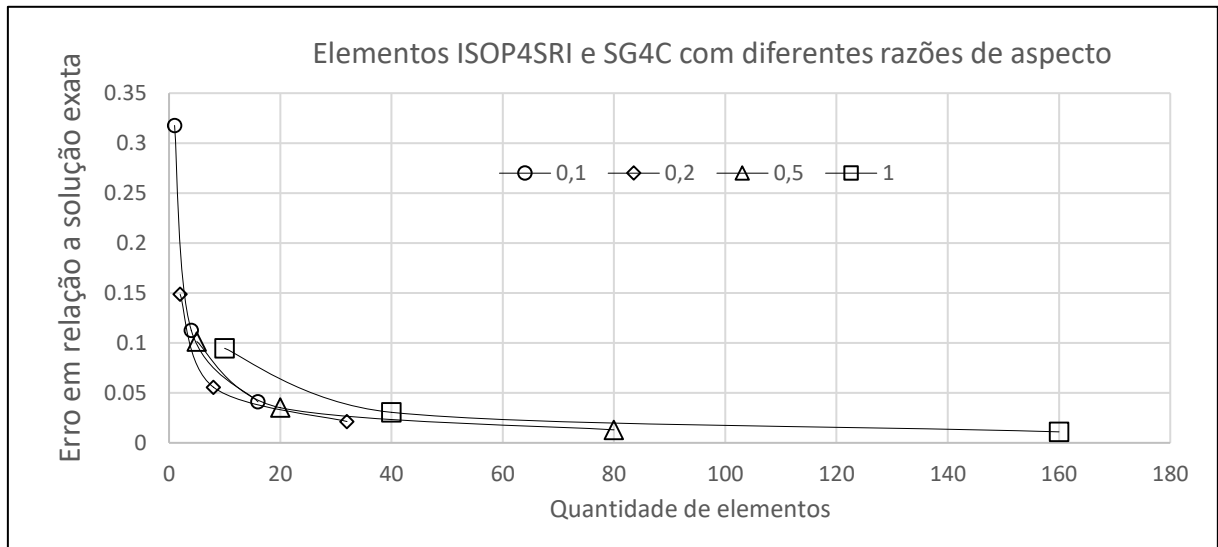
Fonte: Autor.

O gráfico 15 mostra que há uma grande variação do erro com o refino, apesar da convergência para uma resposta, porém está seria muito mais lenta que nos outros, com exceção

de quando a relação b/a é reduzida, como é possível observar na comparação entre os gráficos 14 e 15, onde o elemento ISOP4 e SG4 mostram um erro maior que o elemento ISOP4RI.

Para analisar a interferência entre a proporção entre as dimensões dos elementos ISOP4SRI e SG4C, os dados dos erros são compilados no gráfico 16:

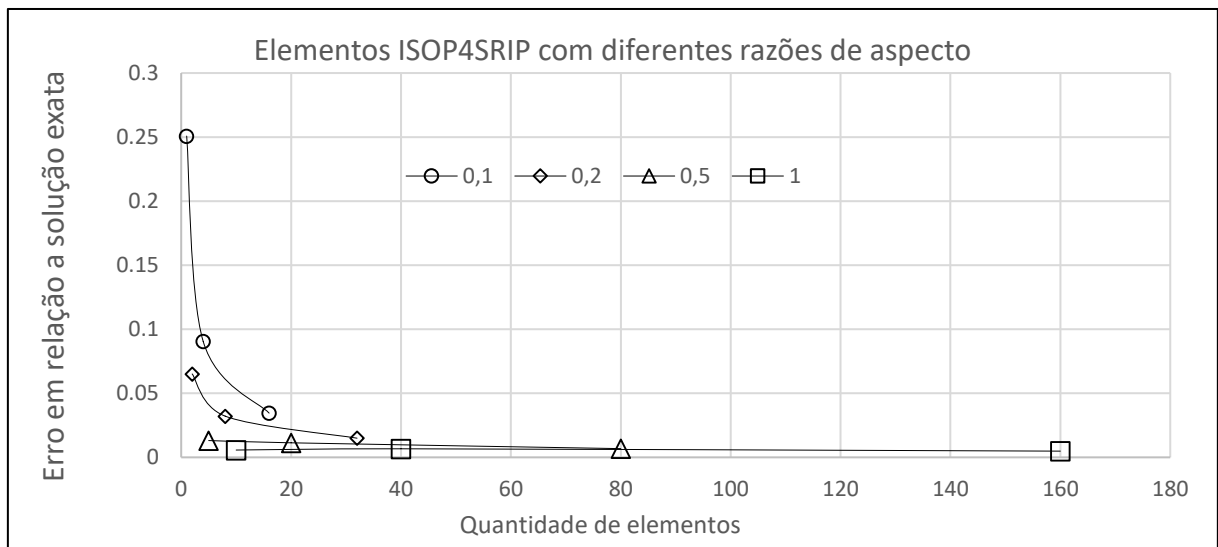
Gráfico 16– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4SRI e SG4C



Fonte: Autor.

O elemento ISOP4SRIP mostra o mesmo comportamento dos demais, apresentando resultados melhores de aproximação, como mostra o gráfico 17:

Gráfico 17– Erro x Quantidade de elementos, para os elementos ISOP4SRIP



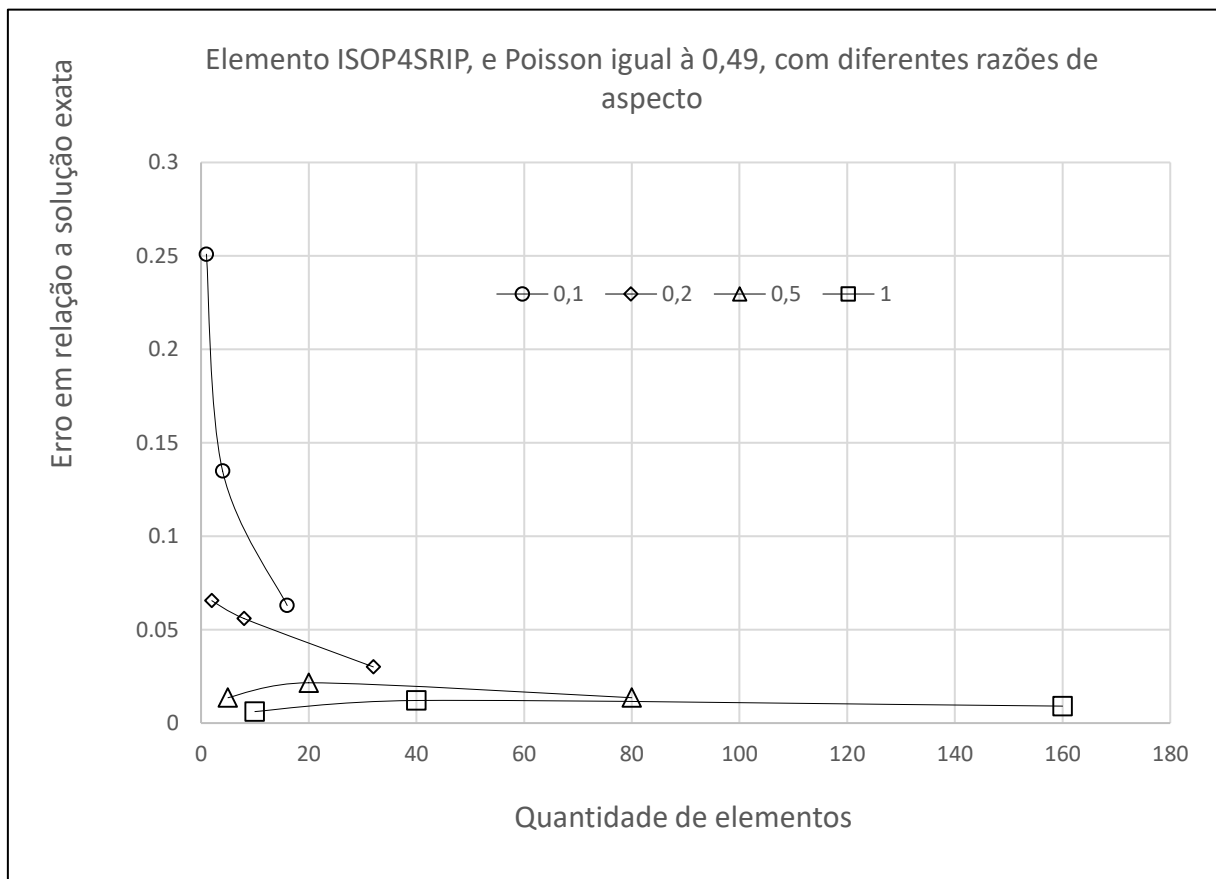
Fonte: Autor.

Observa-se que mesmo para o maior alongamento do elemento estudado, o erro é bastante inferior em relação ao demais elementos

Mas a interferência da relação b/a se mantém, proporcionando erros maiores, e uma convergência menor quando reduzida, mesmo com uma quantidade de elementos maior

O comportamento dos gráficos 14 a 17, mantem-se com o aumento do coeficiente de Poisson, apesar do aumento do erro em todos os elementos, com exceção do elemento ISOP4SRIP, cujo comportamento teve redução na eficiência como mostra a comparação dos gráficos 17 e 18:

Gráfico 18– Erro x Quantidade de elementos, no elemento ISOP4SRIP, e Poisson igual à 0,49.

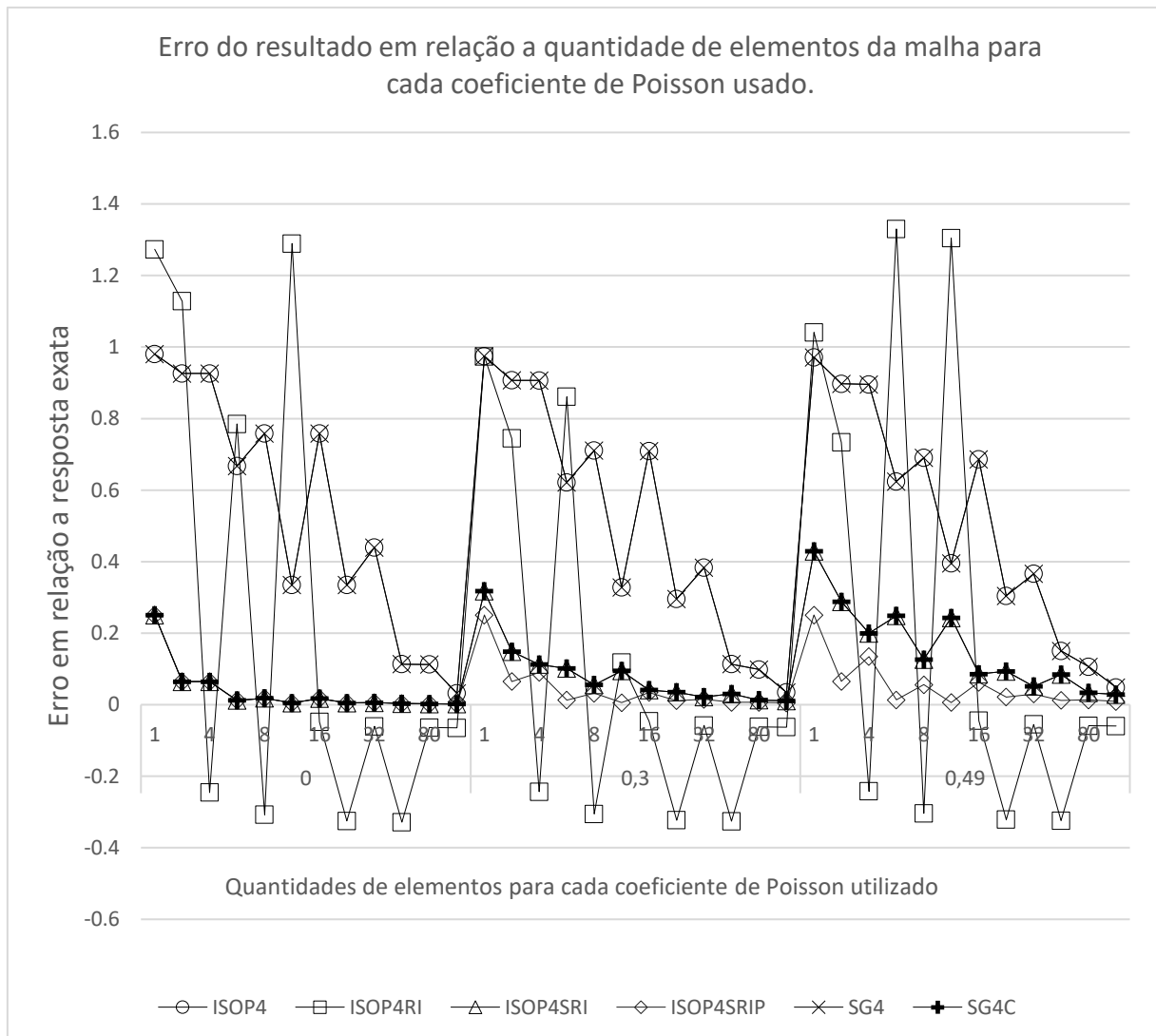


Fonte: Autor.

Apesar do formato continuar similar ao gráfico 16, os valores dos erros são superiores no gráfico 18, e observa-se que a perda de eficiência com a diminuição da relação b/a se mantém.

Realizando a variação do coeficiente de Poisson, de 0 para 0,3 e 0,49, pode-se observar no gráfico 19 os diferentes erros obtidos no ponto de maior deslocamento, com a quantidade de elementos em cada malha:

Gráfico 19– Erro x Quantidade de elementos, para coeficientes de Poisson igual à 0, 0,3 e 0,49 para o elemento de quatro nós.



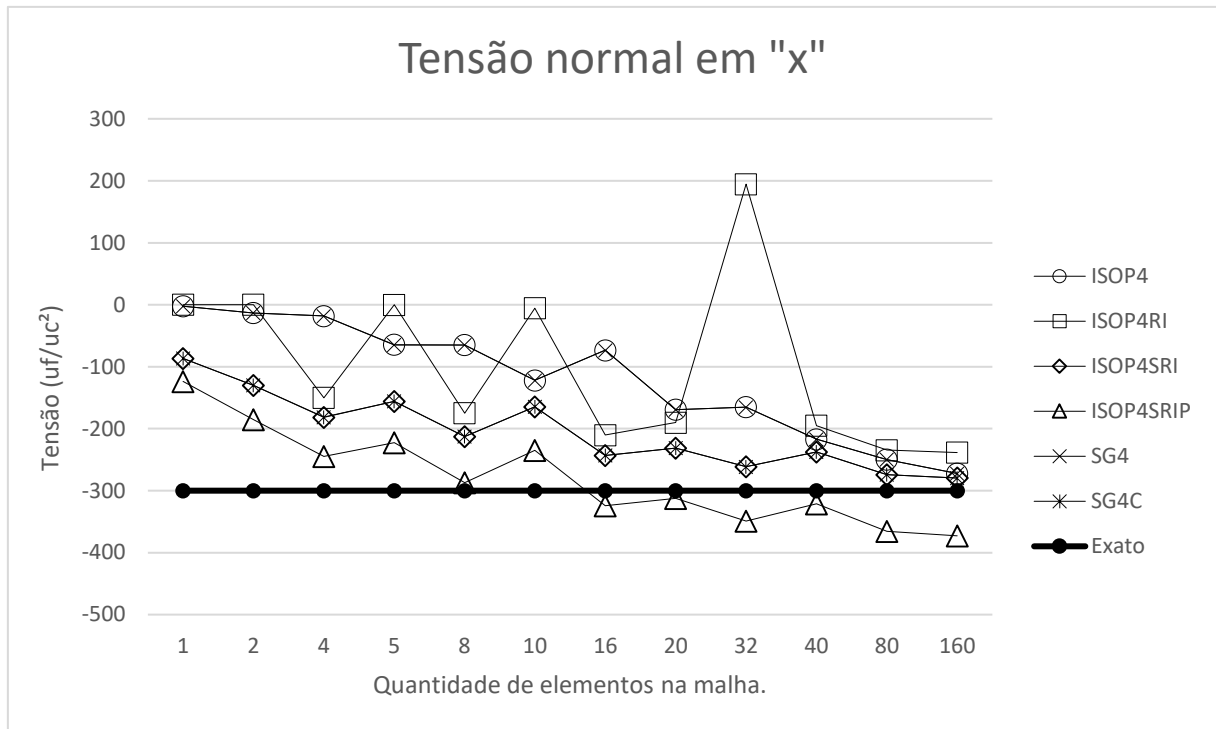
Fonte: Autor.

O comportamento geral dos elementos foi o aumento do erro com o aumento do coeficiente do Poisson, e também o aumento da influência exercida pela relação b/a , sendo os melhores resultados atribuídos aos elementos ISOP4SRI, SG4C e ISOP4SRIP.

O elemento ISOP4SRIP mostrou a menor variação com relação ao aumento do coeficiente de Poisson, e também mostrou a melhor aproximação da solução exata para a viga em balanço.

Para a análise das tensões na direção “x” obtidas no procedimento, foi escolhido o primeiro ponto do primeiro elemento, comum a todos as malhas, e ponto de maior concentração de tensões normais, mostrando no gráfico 20 a relação entre tensões e quantidade de elementos:

Gráfico 20– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha



Fonte: Autor.

As convergências mais próximas da solução exata foram alcançadas pelos elementos ISOP4SRI e SG4C que, assim como nos deslocamentos, deram resultados numericamente iguais para as tensões normais.

O elemento ISOP4RI não obteve um comportamento interessante para a modelagem do problema.

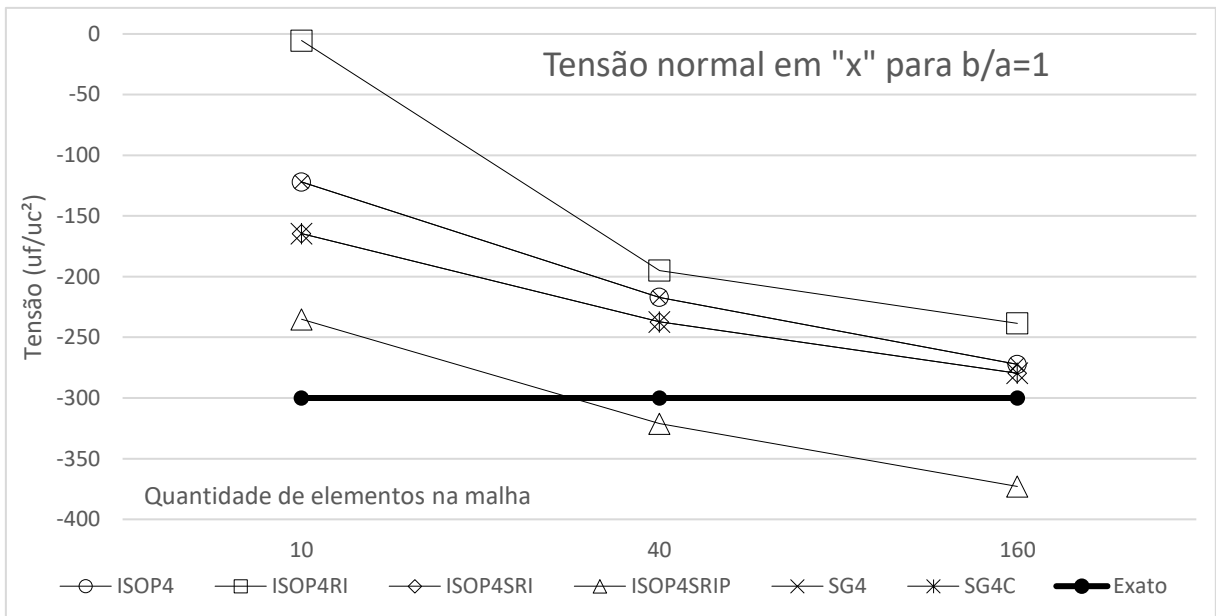
O elemento ISOP4SRIP não obteve uma convergência satisfatória para análise da tensão normal em “x”, pois continuou crescendo além do resultado exato esperado.

Os elementos ISOP4 e SG4 possuem comportamentos e convergências iguais, apresentando resultados numéricos iguais, devido a integração com termos espúrios pelas duas formulações.

Como pode-se observar no gráfico 20, existe a influência da razão de aspecto na convergência das tensões, sendo melhor elucidada nos gráficos 21 a 24.

O gráfico 21 mostra a convergência dos resultados mostrados no gráfico 20, isolando os elementos cuja razão de aspecto é igual à um, ou seja, são elementos cuja base e altura são iguais:

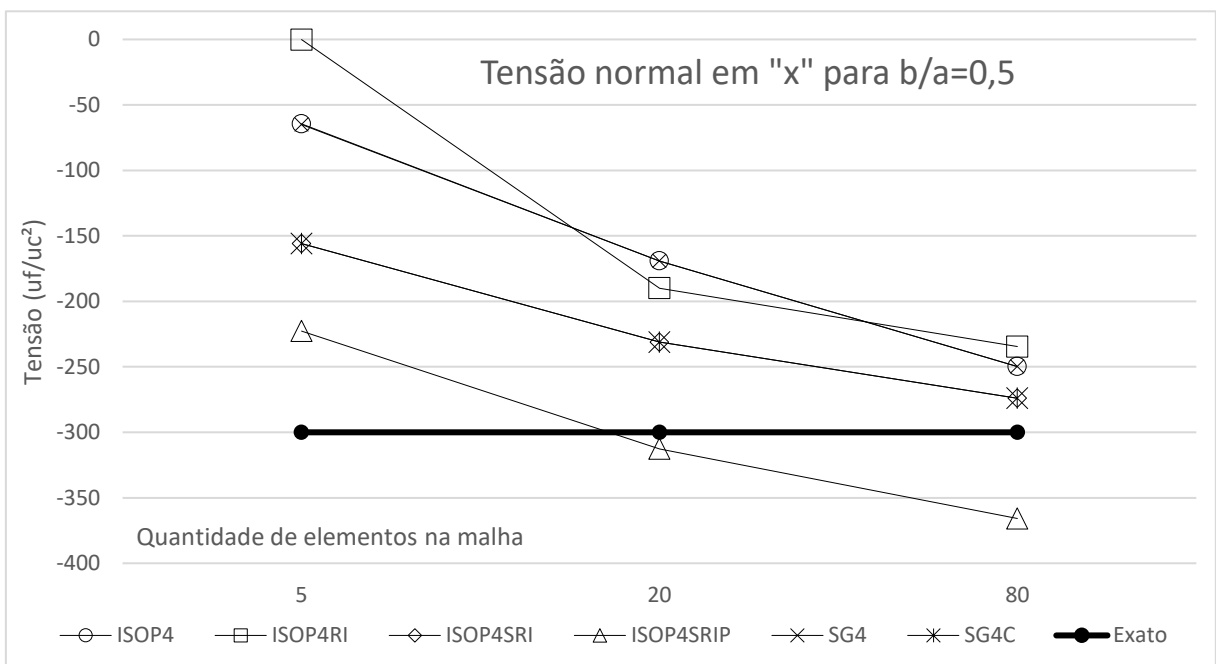
Gráfico 21– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=1$.



Fonte: Autor.

Da mesma forma, o gráfico 22 mostra a convergência dos resultados mostrados no gráfico 20, isolando os elementos cuja razão de aspecto é igual à 0,5, ou seja, são elementos cuja base é igual ao dobro da altura:

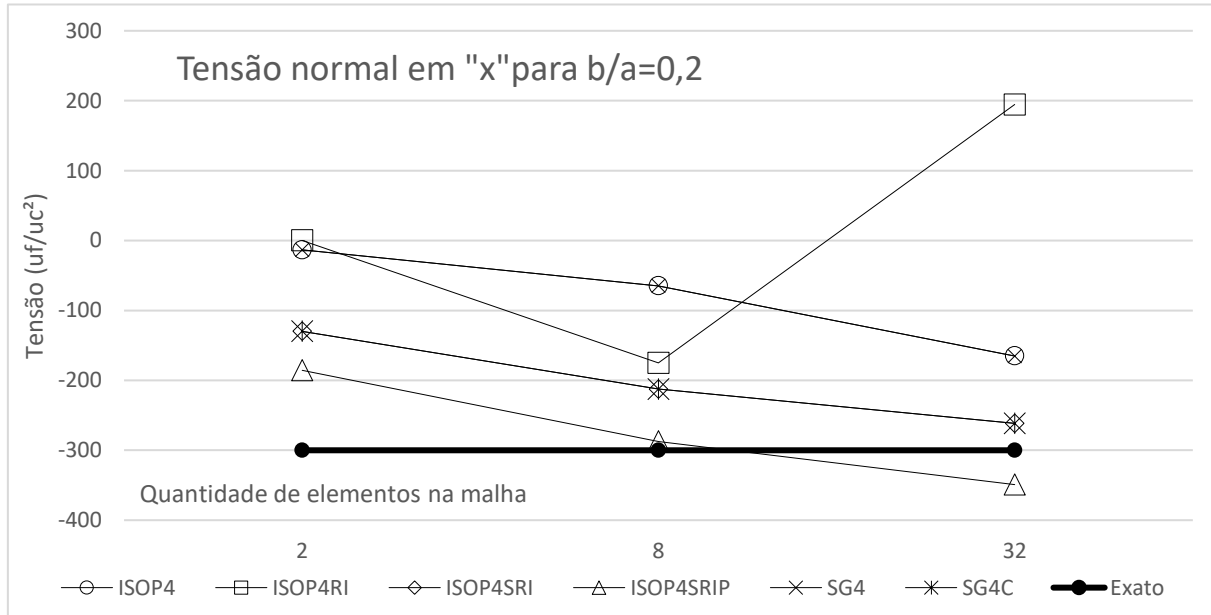
Gráfico 22– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=0,5$.



Fonte: Autor.

Seguindo o que foi contemplado nos gráficos 21 e 22, o gráfico 23 mostra a convergência dos resultados da tensão normal em “x” isolando os elementos cuja razão de aspecto é igual à 0,2, ou seja, são elementos cuja base é igual ao quádruplo da altura:

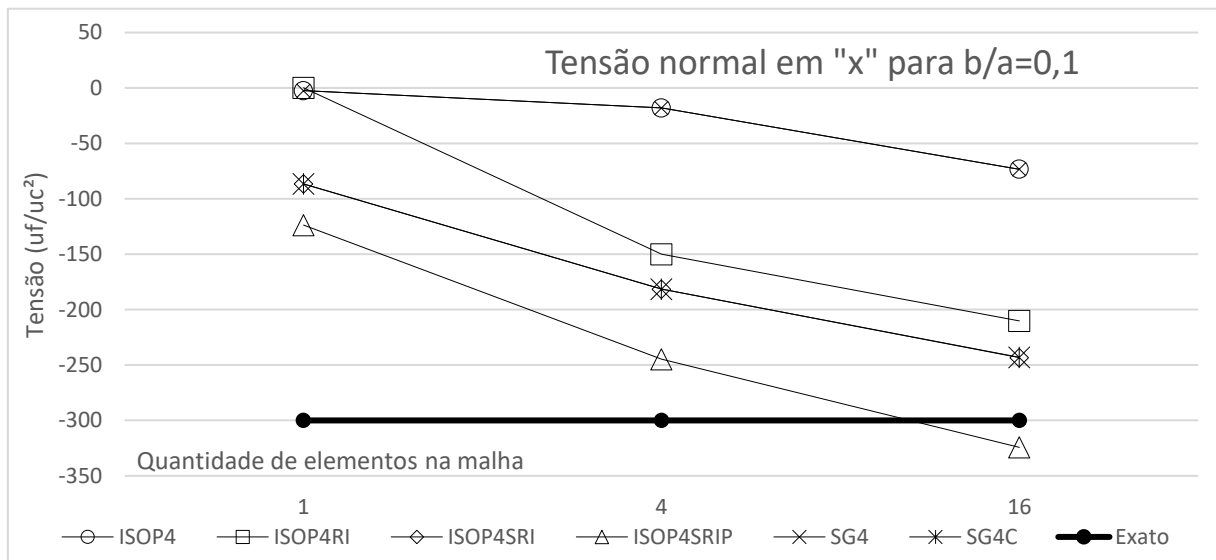
Gráfico 23– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=0,2$.



Fonte: Autor.

Por fim, o gráfico 24 apresenta os resultados referentes aos elementos cuja base é dez vezes maior que a altura:

Gráfico 24– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos da malha, para elementos com $b/a=0,1$.



Fonte: Autor.

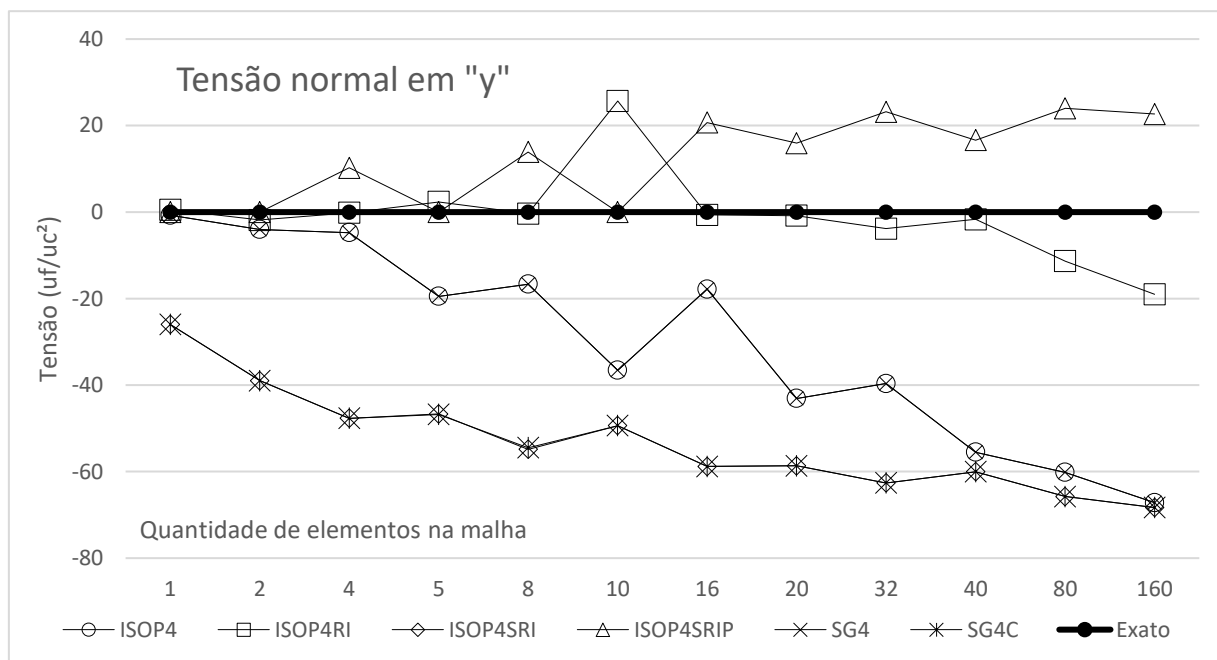
Analisando o apresentado nos gráficos 20 a 24, pode-se observar que a razão de aspecto afeta na convergência da solução, pois existe a piora de desempenho com o aumento da base em relação à altura dos elementos.

Ao ser realizado o refinamento uniforme, como é feito nos gráficos 21 a 24, que mantém a razão de aspecto dos elementos com o refinamento da malha, pode-se observar uma convergência mais uniforme do que no gráfico 20, que reúne todos os elementos independentes de sua razão.

A mesma análise realizada para as tensões normais em “x” é realizada nas tensões na direção “y”, com os gráficos 25 a 30.

O gráfico 25 mostra no eixo vertical as tensões na direção “y” pelas quantidades de elementos de cada malha utilizada na modelagem do mesmo primeiro ponto do primeiro elemento:

Gráfico 25– Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos da malha.

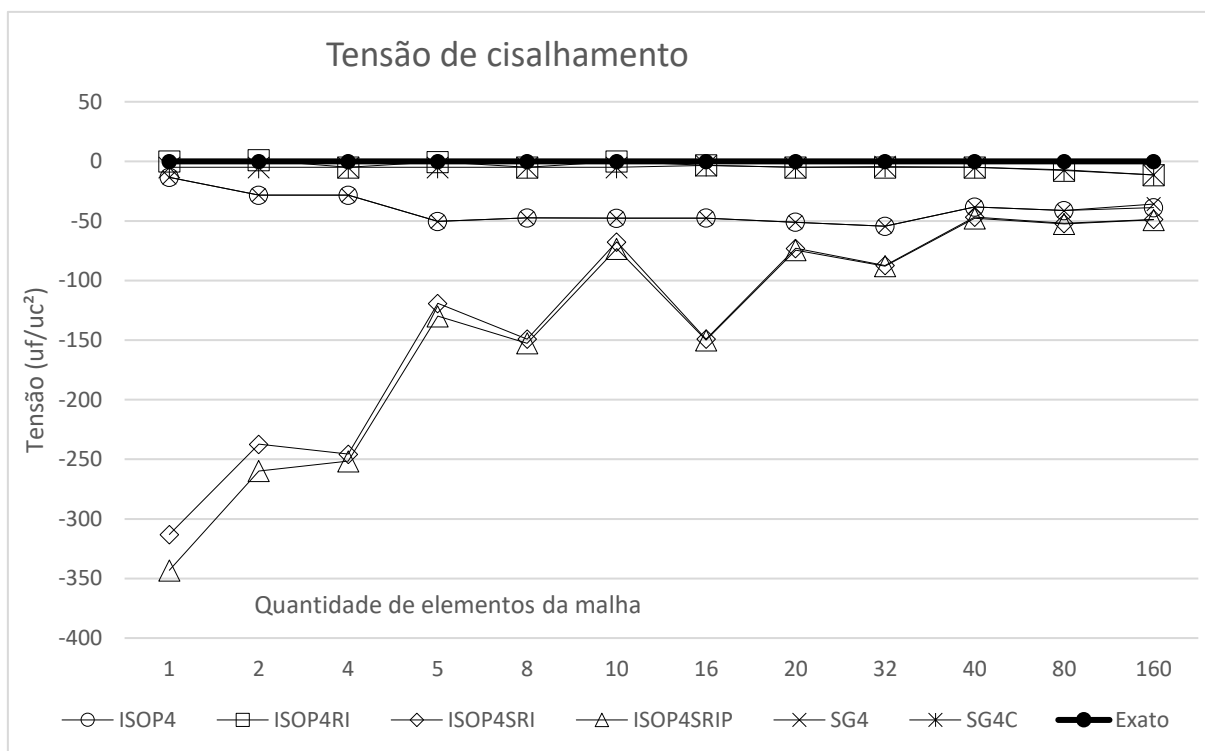


Fonte: Autor.

Pode-se observar que a convergência é mais rápida, e sofre menos interferência da razão de aspecto para os elementos que possuem correção na formulação isoparamétrica e na notação *strain gradient*.

Para as tensões de cisalhamento no plano formado por “x” e “y”, são mostrados os resultados da modelagem para cada quantidade de elementos da malha no gráfico 26:

Gráfico 26– Tensões de cisalhamento em “x” e “y” pela quantidade de elementos da malha.



Fonte: Autor

Ao analisar o gráfico 26, o elemento SG4C mostra a melhor aproximação do resultado analítico esperado, com pouca variação mesmo com um refino não uniforme da malha, diferente dos demais resultados, que resultaram idênticos aos do elemento ISOP4SRI, que convergiu para mesma resposta, porém mostrando interferência da razão de aspecto.

O elemento ISOP4RI mostra uma boa aproximação apenas para este uso, sendo inviável para qualquer outra análise de forma satisfatória para este elemento.

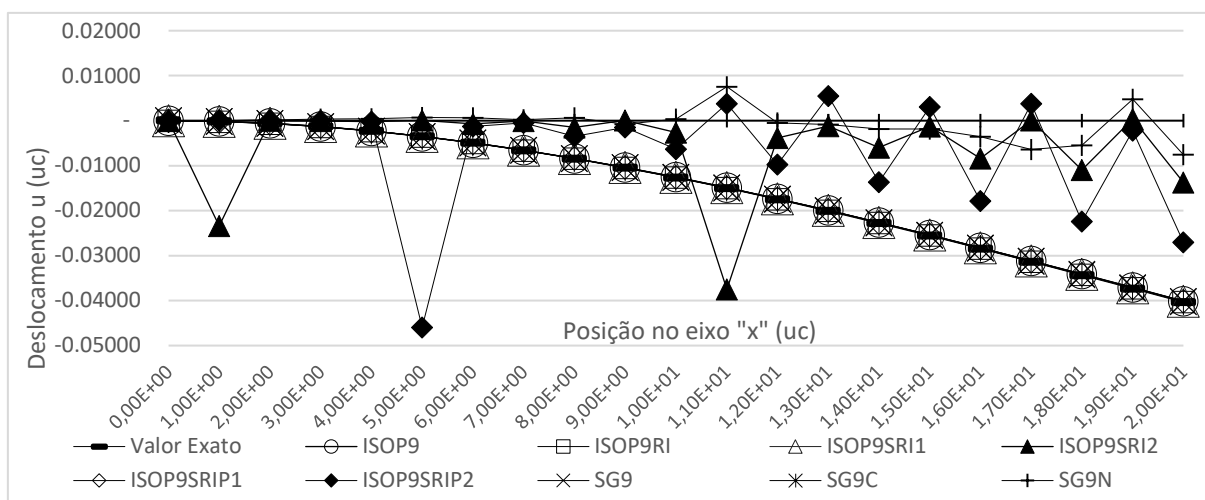
Já para os demais elementos a razão de aspecto influi na convergência, assim como não mostram uma aproximação tão boa quanto a obtida com o elemento SG4C.

4.1.2. Elemento de nove nós

Assim como feito com o elemento de quatro nós, a mesma Viga em Balanço foi modelada, com coeficiente de Poisson igual à zero, 0,3 e 0,49, com as relações b/a iguais à um, 0,5, 0,2 e 0,1, com todos os elementos convencionados. Os gráficos relacionados à deformação vertical por posição mostrados na sequência são relacionados a Viga em Balanço com Poisson igual à 0,3.

Para as modelagens com relação $b/a = 1$, obtém-se o gráfico 27:

Gráfico 27– Deslocamento x Posição da malha com 10 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.



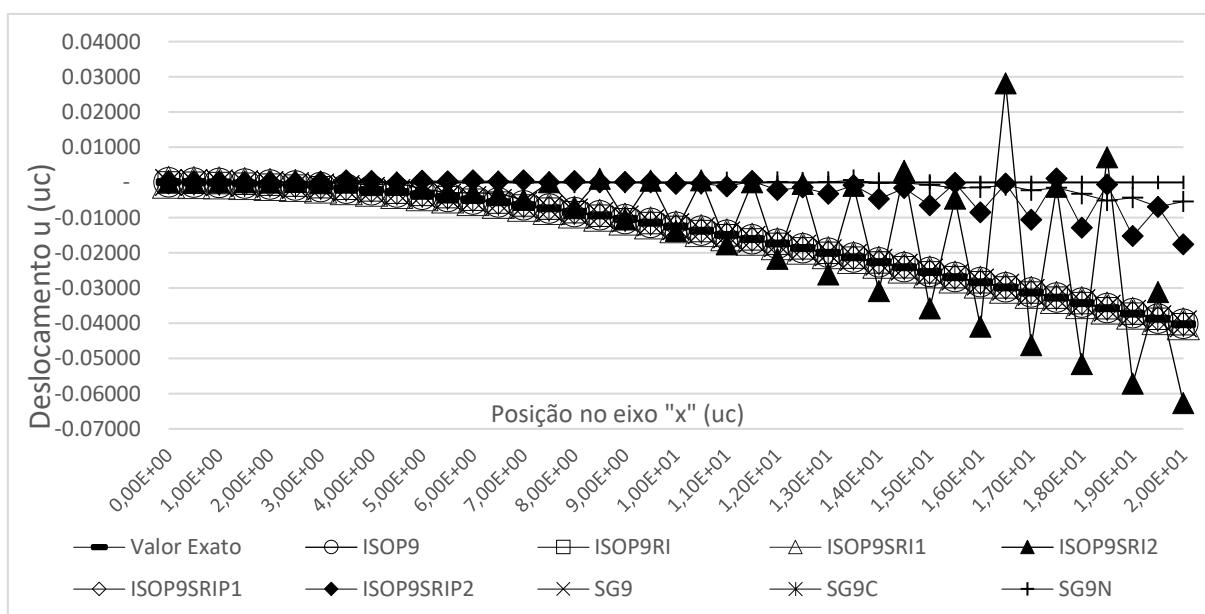
Fonte: Autor.

Observa-se que para os elementos de nove nós, para a primeira malha, obtém-se uma aproximação do resultado exato para os deslocamentos da viga para os elementos ISOP9, ISOP9RI, ISOP9SRI1, ISOP9SRIP1, SG9 e SG9C.

Para os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N os resultados não foram condizentes ao comportamento esperado para o deslocamento da viga.

Realizando o refino da malha, o resultado pode ser observado no gráfico 28:

Gráfico 28– Deslocamento x Posição da malha com 40 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.

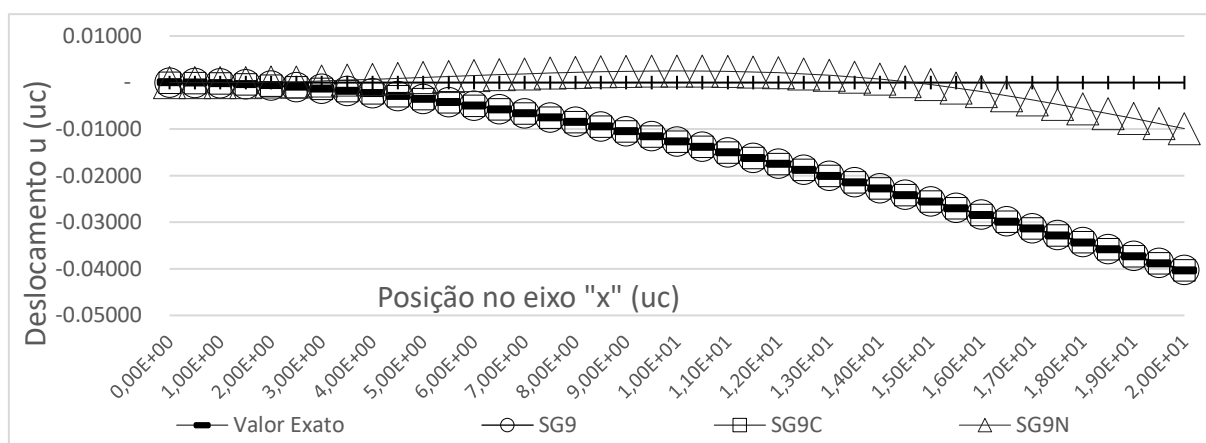


Fonte: Autor.

Para os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N, os resultados continuam possuindo uma variação no comportamento maior que os demais, que melhorar de aproximação com o refino e já tinham desde a primeira malha um comportamento condizente.

O segundo refino foi realizado apenas para os elementos na notação *Strain gradient*, mostrado no gráfico 29, uma vez que a simulação para os elementos isoparamétricos excedeu a memória do computador para o mesmo problema.

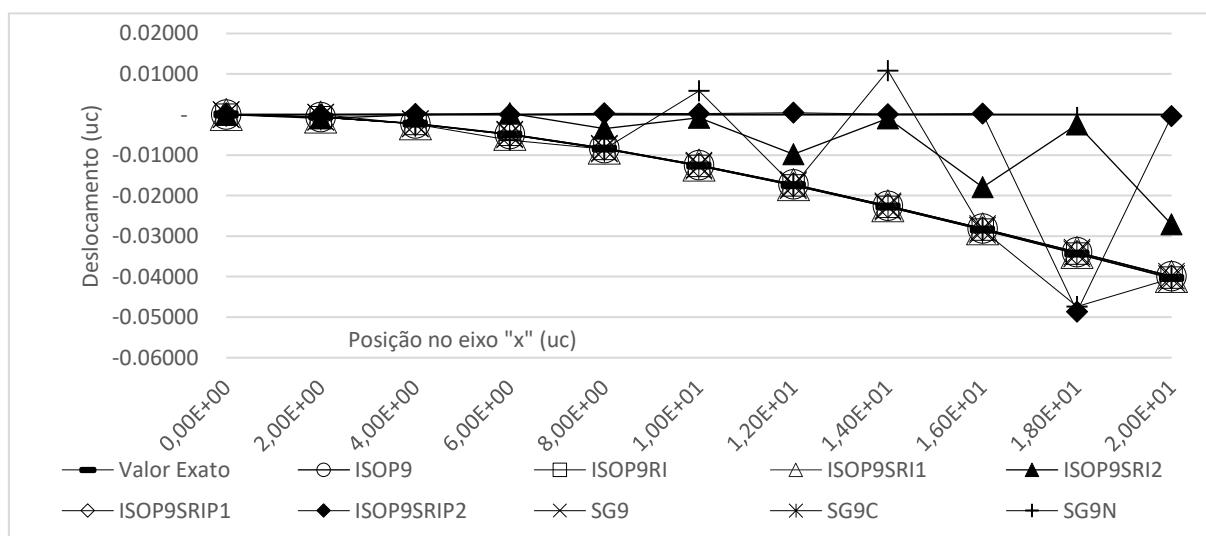
Gráfico 29– Deslocamento x Posição da malha com 160 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.



Fonte: Autor.

Variando a relação b/a para 0,5, a malha para resolução da viga fica com 5 elementos, cujo desempenho é mostrado no gráfico 30:

Gráfico 30– Deslocamento x Posição da malha com cinco elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós



Fonte: Autor.

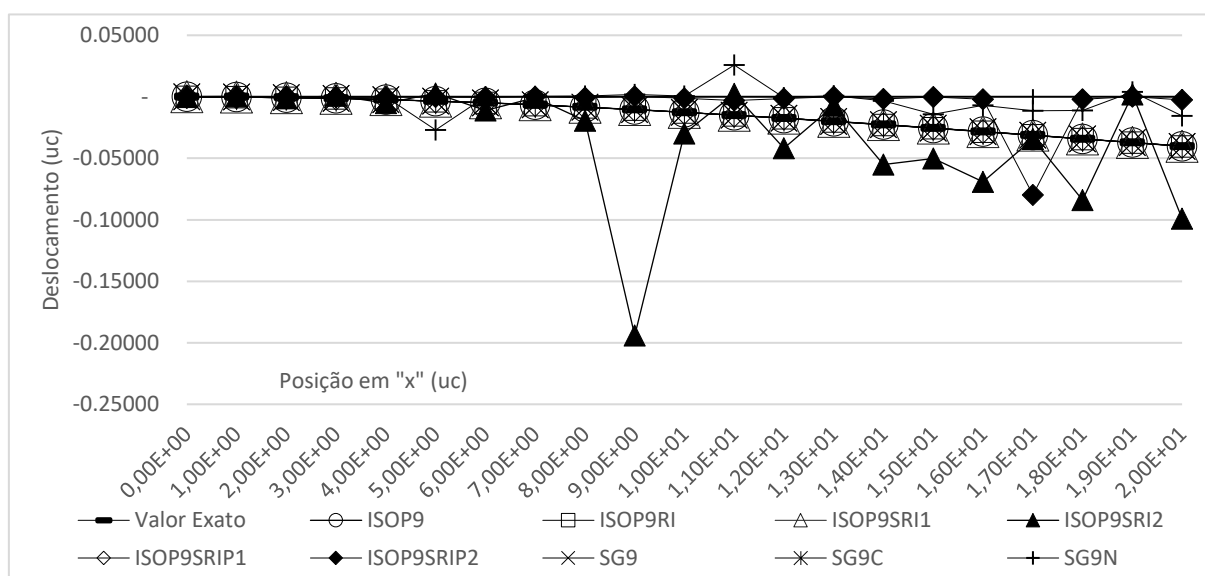
Com a redução da relação b/a , o desempenho dos elementos foi reduzido, como já esperado.

Os elementos ISOP9, ISOP9RI, ISOP9SRI1, ISOP9SRIP1, SG9 e SG9C demonstraram comportamento condizente ao da resposta analítica, tendo diferenças de aproximação entre si

Para os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N, o comportamento continua não sendo adequado para o problema em questão.

Realizando o refino da malha, o gráfico 31 é obtido como resultado da simulação:

Gráfico 31– Deslocamento x Posição da malha com 20 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.



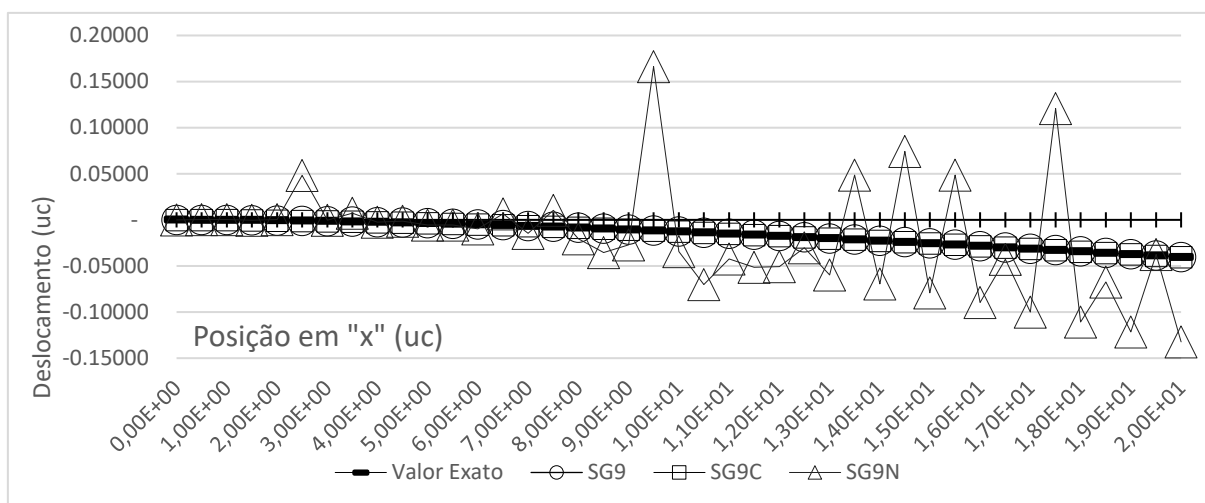
Fonte: Autor.

Os elementos ISOP9, ISOP9RI, ISOP9SRI1, ISOP9SRIP1, SG9 e SG9C apresentam como na primeira malha, um comportamento adequado à resolução analítica do deslocamento, com a redução dos erros com o refino de malha.

Para os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N, ainda é observado um comportamento inadequado em relação à solução exata, mas houve a redução da variação de comportamento com o refino.

O segundo refino de malha é mostrado no gráfico 32:

Gráfico 32– Deslocamento x Posição da malha com 80 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de nove nós.



Fonte: Autor.

Os elementos Isoparamétricos, devido ao custo computacional e exigências de memória de processamento, não conseguiram ser processados e gerar dados no programa utilizado.

Assim é possível visualizar os resultados relacionados a notação *Strain gradient*, e mostrar o desempenho em relação aos elementos com termos espúrios, em SG9, sem termos espúrios, em SG9C, e sem termos espúrios, porém com inserção intencional de modos espúrios de energia nula, em SG9N, imitando as consequências das formulações do elemento ISOP9SRI2 e ISOP9SRIP2.

Observa-se que os elementos S9E e SG9C, assim como nas outras malhas, mostram um bom desempenho para o problema, enquanto o elemento SG9N continua mostrando um comportamento inadequado, mesmo com todos os refinamentos realizados.

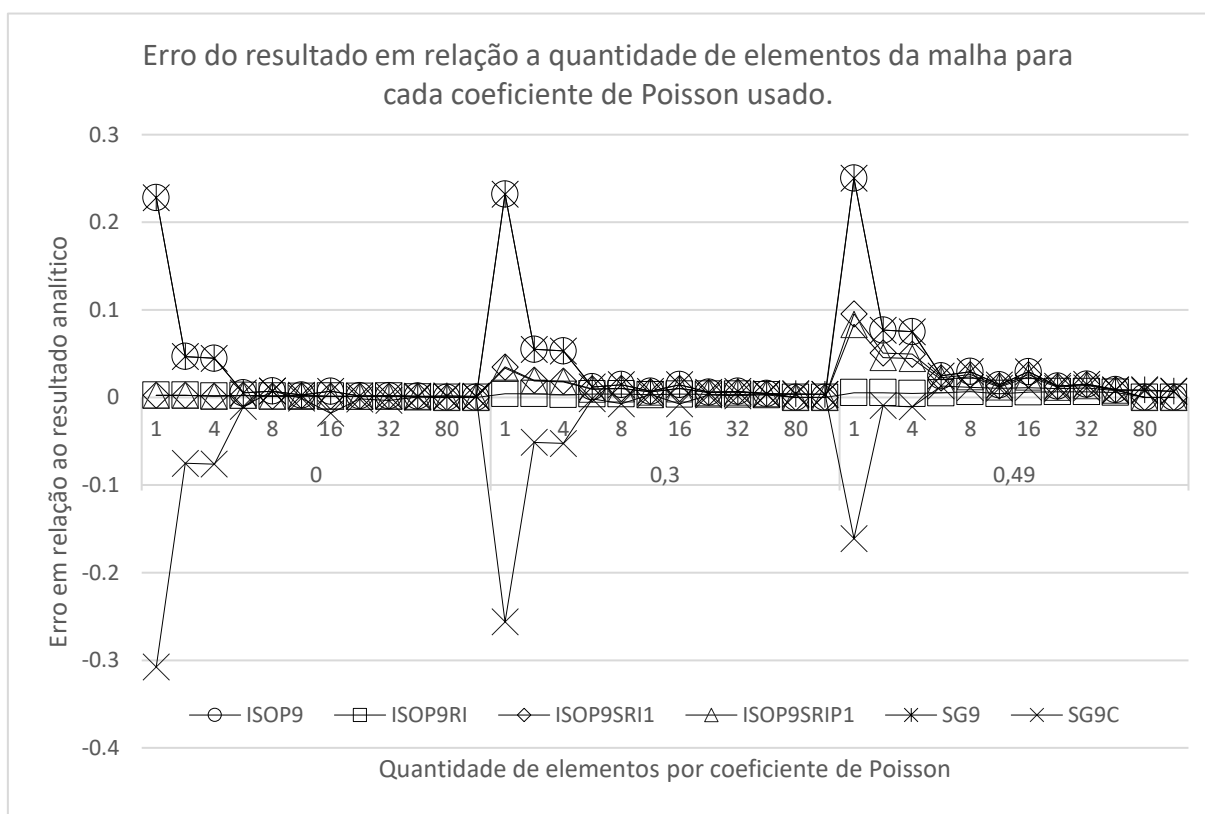
Como mostra a dedução da notação *Strain gradient* abordada no referencial teórico, a eliminação da equação de compatibilidade na equação da deformação angular cria instabilidades, devido à inserção de modos cinemáticos de energia nula, demonstrado no elemento SG9N, onde esse fenômeno foi inserido propositalmente, e visualizado nos elementos ISOP9SRI2 e ISOP9SRIP2.

Apesar da instabilidade ser encontrada tanto nos elementos isoparamétricos, como no elemento *Strain gradient* com inserção proposital do erro, pode-se observar que os resultados não são exatamente iguais, isto deve-se a integração por pontos de Gauss com uma quadratura menor que o polinômio exigiria para ser completamente integrado.

Como consta na bibliografia, quando um polinômio é integrado por uma quadratura reduzida, seus termos de maior grau não são necessariamente anulados, sendo atribuídos valores menores que a integração completa destes, o que explica as diferenças no resultado das duas notações, pois a inserção proposital do erro na notação *Strain gradient* anulou ou termos da equação de compatibilidade, o que não necessariamente ocorre na formulação isoparamétrica.

Para abordar a interferência do coeficiente de Poisson na aproximação do problema, foi compilado o gráfico 33, onde é mostrado o erro para a mesmo problema, com diferentes quantidades de elementos, e diferentes coeficientes de Poisson:

Gráfico 33– Erro x Quantidade de elementos, para coeficientes de Poisson igual à 0, 0,3 e 0,49 para o elemento de nove nós.



Fonte: Autor.

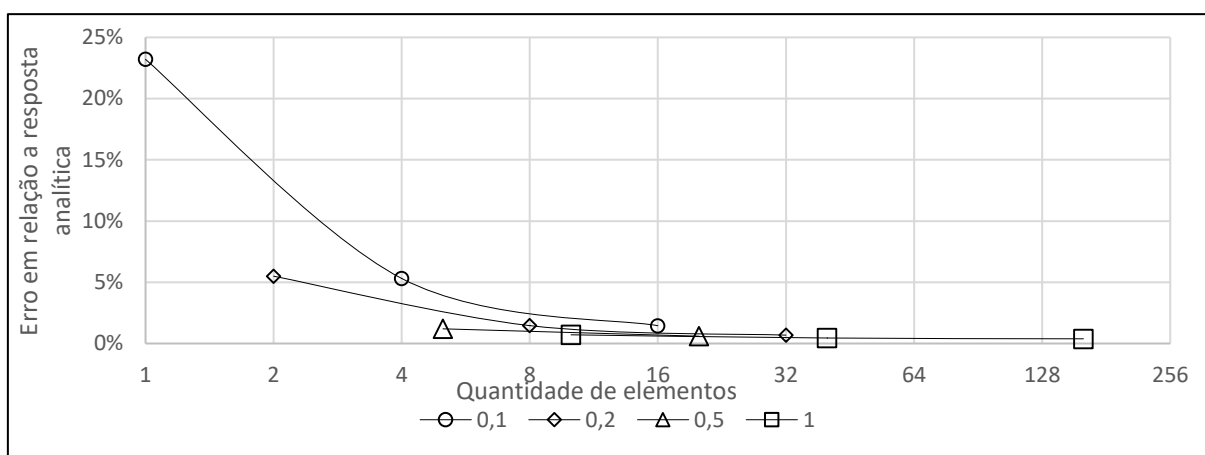
Foram suprimidos os resultados dos elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N devido à instabilidade dos resultados, que não trazem uma análise satisfatória dos resultados.

Observa-se que com o aumento da quantidade de elementos, a modelagem retorna melhores resultados, porém a razão de aspecto possui uma interferência importante no resultado a ser explorada com mais detalhe nos gráficos 34 a 38.

Também é mostrado que com o aumento do coeficiente do Poisson, existe um aumento do erro de aproximação, com exceção do elemento SG9C, que melhorou a aproximação com o aumento do coeficiente.

No gráfico 34 é mostrado a aproximação alcançada para os elementos ISOP9 e SG9, que possuem resultados idênticos, para diferentes quantidades de elementos na resolução da Viga em Balanço com Poisson igual à 0,3:

Gráfico 34– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9 e SG9.

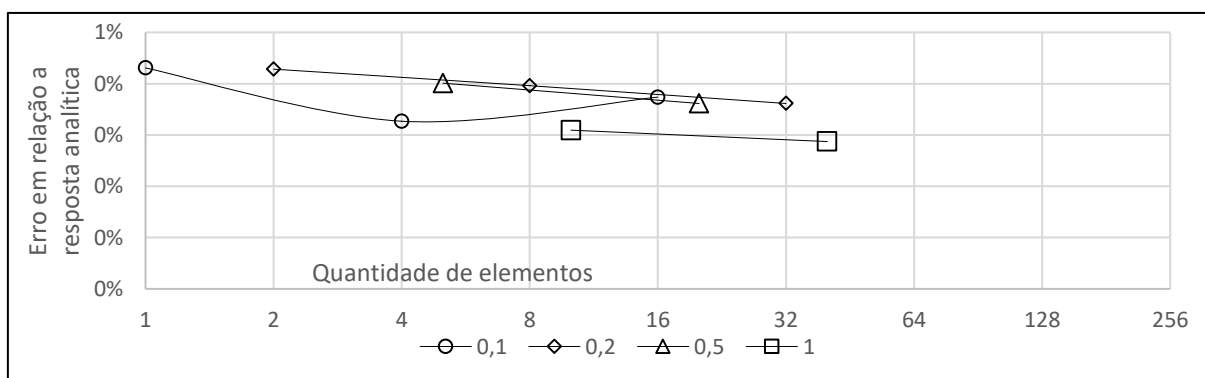


Fonte: Autor.

A aproximação melhora com o aumento da quantidade de elementos, mas para elementos muito alongados, é necessária uma quantidade maior de elementos para obter a mesma aproximação.

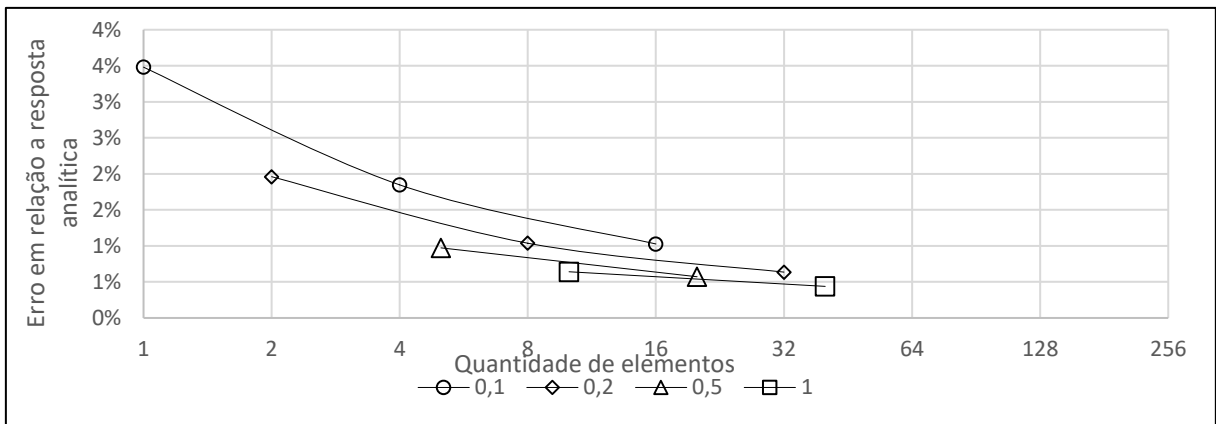
Este comportamento se repete para os elementos ISOP9RI, ISOP9SRI1, ISOP9SRIP1 e SG9C, mostrados nos gráficos 35 a 38:

Gráfico 35– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9RI.



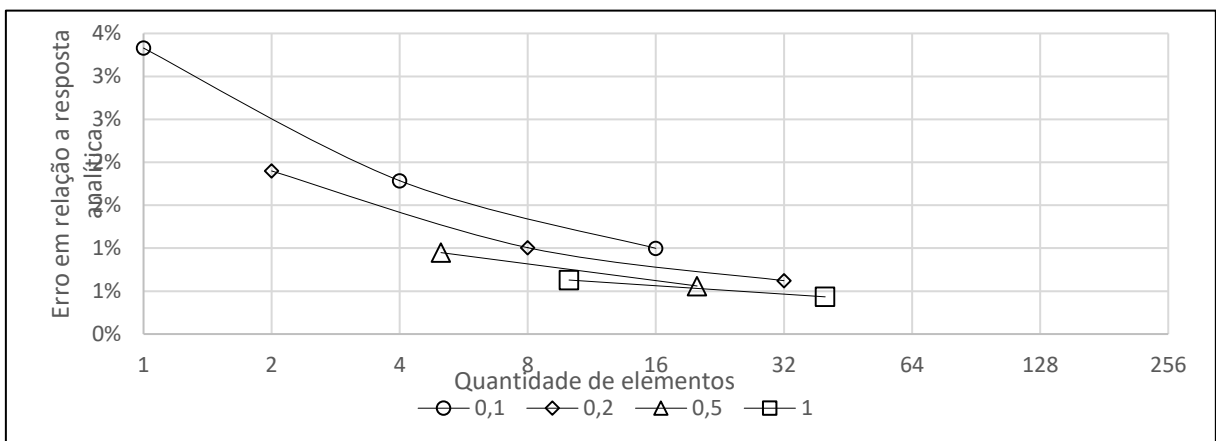
Fonte: Autor.

Gráfico 36– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9SRI1.



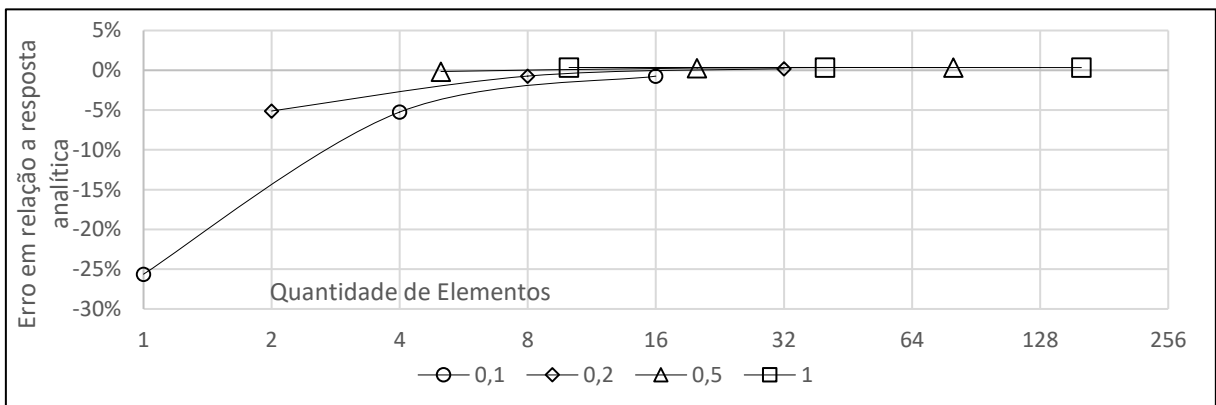
Fonte: Autor.

Gráfico 37– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos ISOP9SRIP1.



Fonte: Autor.

Gráfico 38– Erro x Quantidade de elementos, para cada razão de aspecto dos elementos SG9C.



Fonte: Autor.

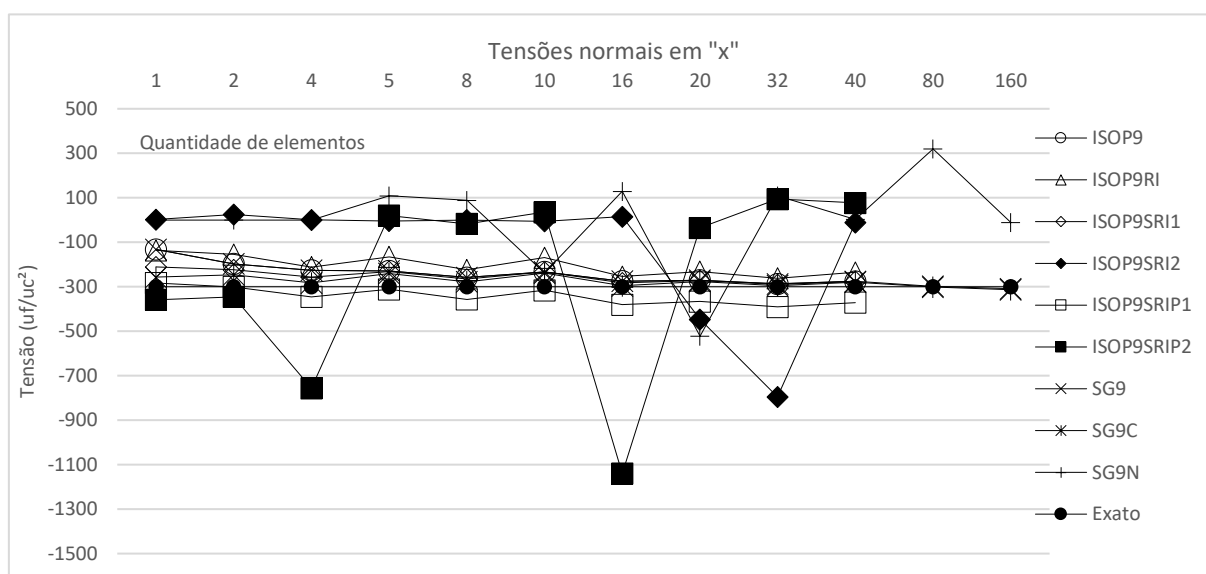
É possível observar nos gráficos 34 a 38 com mais detalhe o que também é mostrado no gráfico 33, que quanto maior o alongamento do elemento, pior se torna a aproximação para este problema, sendo necessários mais elementos para obtenção da mesma ordem de aproximação.

No gráfico 33 a razão de aspecto causa as oscilações na convergência, pois se analisados todos os refinamentos juntos, o refinamento não seria considerado uniforme, pois a razão de aspecto não é mantida de uma quantidade de elementos à quantidade em sequência, mas o refinamento é uniforme em cada razão de aspecto analisada.

Desta forma também é possível observar os efeitos na convergência utilizando um refinamento uniforme e não uniforme, tanto nos elementos de quatro nós como nos de nove nós.

Obtendo nas simulações as tensões presentes na Viga em Balanço com Poisson igual à 0,3, é possível compilar no gráfico 39 a tensão normal na direção “x” do primeiro ponto do primeiro elemento, para todos os elementos ensaiados:

Gráfico 39– Tensão normal em “x” pela quantidade de elementos da malha.



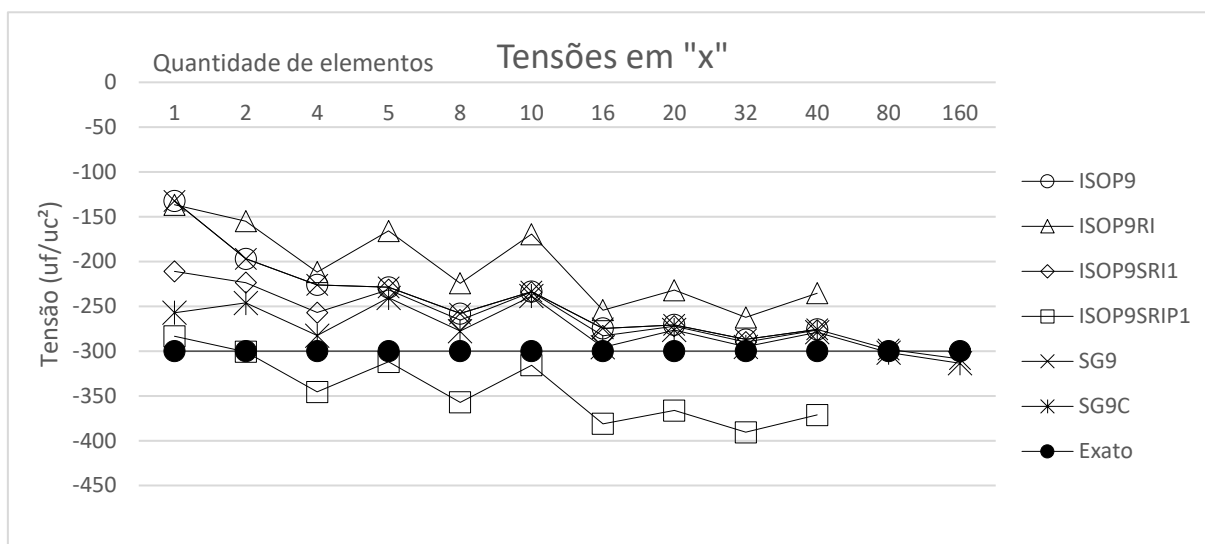
Fonte: Autor.

Pode-se observar no gráfico 39 que os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N, por se tratarem de elementos com inserção de modos cinemáticos de energia nula, apresentam instabilidade na convergência, de forma a não proporcionarem uma boa modelagem, mesmo com o refinamento de malha.

Para analisar melhor o desempenho dos demais elementos, o gráfico 40 mostra as tensões normais na direção “x”, para cada refinamento de malha independente da razão de aspecto,

pela quantidade de elementos usados, sem os elementos que possuem a instabilidade mostrada no gráfico 39:

Gráfico 40– Tensão normal em “x” pela quantidade de elementos da malha, sem os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N.

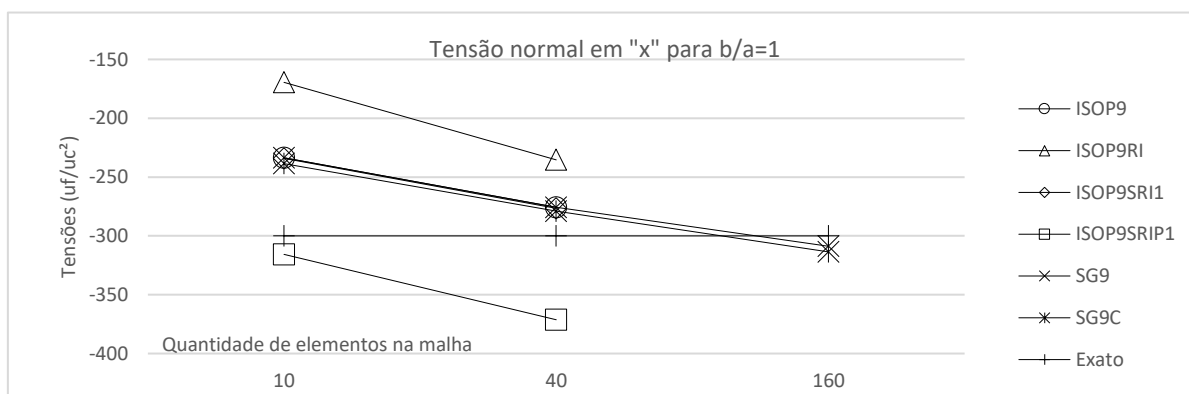


Fonte: Autor.

Como pode-se observar no gráfico 40, todos os elementos sem a inserção dos modos cinemáticos de energia nula aproximam-se da solução exata com o refinamento da malha, sofrendo influências com relação a razão de aspecto. As interferências devido à razão de aspecto foram menores em elementos corrigidos com a integração reduzida seletiva ou com termos espúrios corrigidos diretamente na notação *strain gradient*.

Pode-se observar de forma mais detalhada a convergência com refinamento uniforme através dos gráficos 41 a 44 onde são mostradas as razões de aspecto separadamente:

Gráfico 41– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=1$.

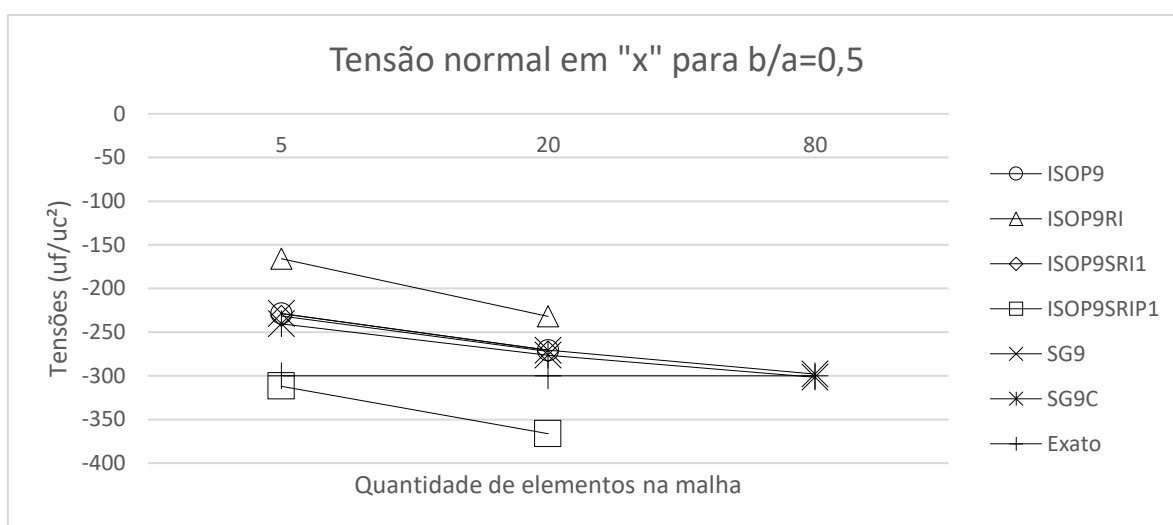


Fonte: Autor

Observa-se no gráfico 41 a ausência de dados relacionados aos elementos na formulação isoparamétrica, pois devido ao custo computacional da formulação, foi possível atingir apenas os resultados da notação *strain gradient* para malha de 160 elementos com nove nós.

Quanto mais horizontais as curvas do gráfico, mais rápida a convergência para um resultado, e quanto mais próximas da curva exata, maior a precisão.

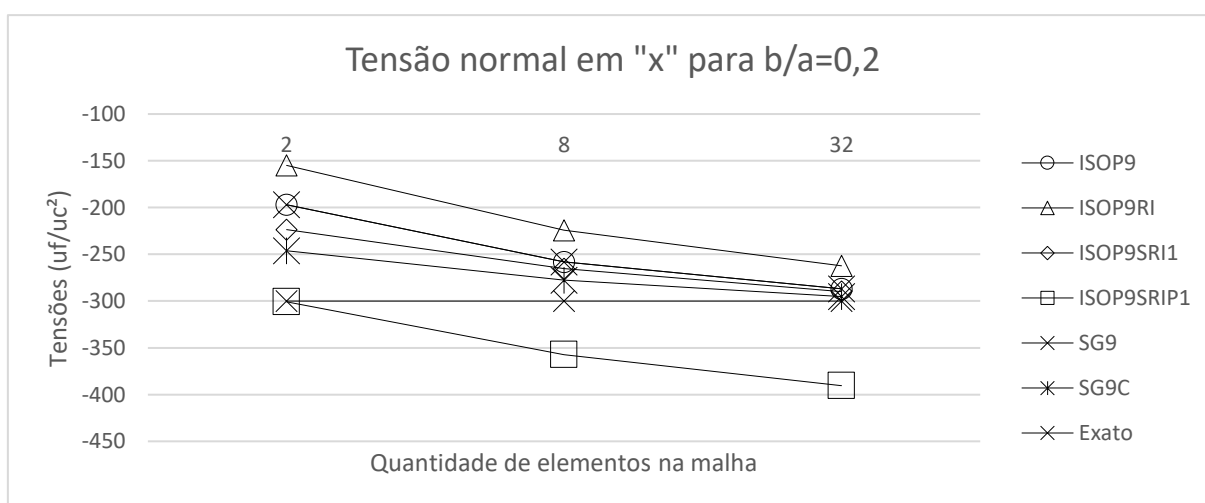
Gráfico 42– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,5$.



Fonte: Autor.

No gráfico 42 pode-se observar o mesmo fenômeno mostrado no gráfico 41, a ausência de dados referentes a formulação isoparamétrica para malha com mais elementos.

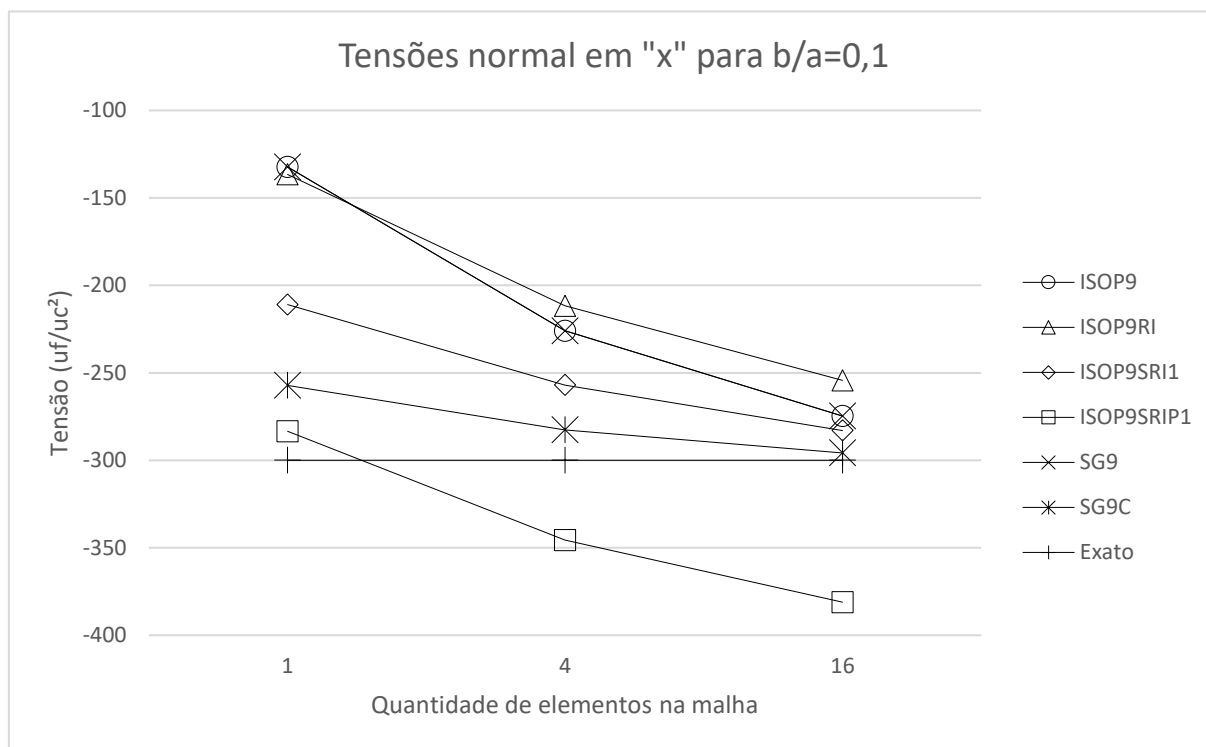
Gráfico 43– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,2$.



Fonte: Autor.

Devido ao custo computacional, foi possível realizar os dois refinamentos da malha com razão de aspecto igual à 0,2 para todos os elementos estudados, por precisar de menor quantidade de elementos.

Gráfico 44– Tensões normais em “x” pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,1$.



Fonte: Autor.

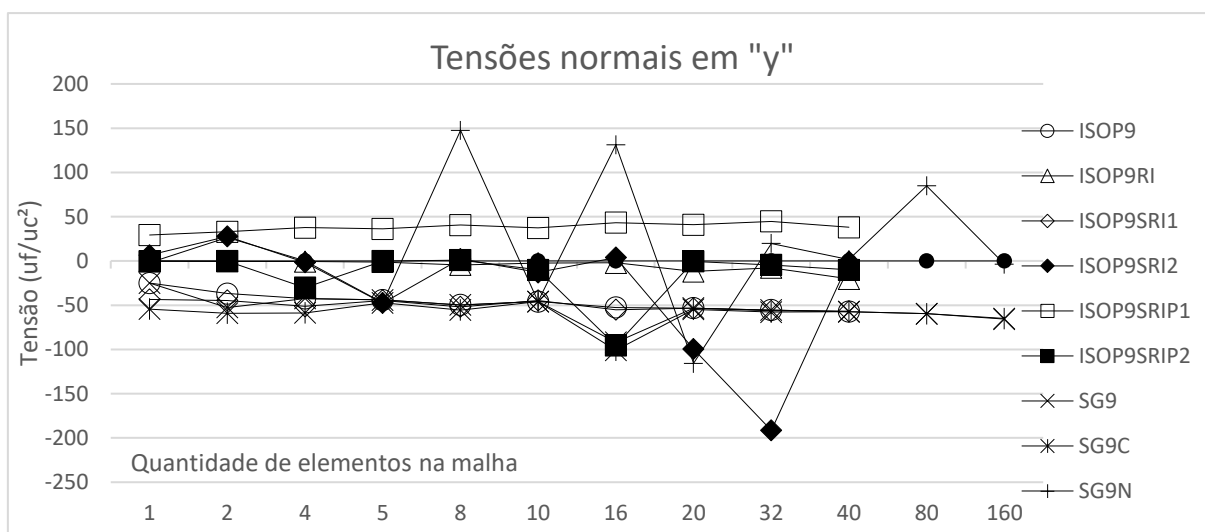
Analisando o que é mostrado nos gráficos 40 a 44, pode-se observar que as razões de aspecto possuem influência na aproximação, prejudicando a convergência com o alongamento do elemento.

Em comparação entre os elementos, o elemento SG9C possui melhor convergência e aproximação para elementos cuja base e altura são próximas, mas em todas as simulações, independente da razão de aspecto, os resultados para tensões foram maiores que a resposta exata.

Um comportamento parecido ao elemento SG9C também foi obtido com o elemento ISOP9SRIP1, onde todas as tensões obtidas foram maiores que o resultado exato esperado, porém a convergência e a precisão não foram tão boas.

Para a mesma Viga em Balanço, é possível compilar no gráfico 45 a tensão normal na direção “y” do primeiro ponto do primeiro elemento, para todos os elementos ensaiados:

Gráfico 45– Tensões normais em “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha.

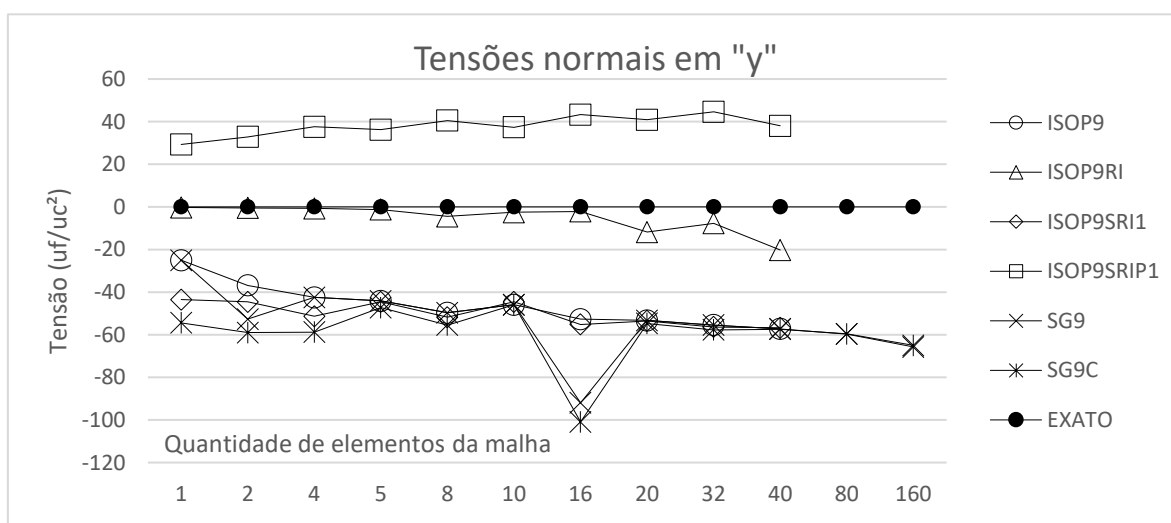


Fonte: Autor.

O mesmo comportamento observado na análise do gráfico 39, para tensões normais na direção “x”, é observado no gráfico 45 para tensões normais na direção “y”, onde os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N mostram instabilidade nos resultados com o refinamento, não mostrando convergência.

Por conta da poluição que os resultados destes elementos causam, eles são retirados da análise, nos gráficos 46 a 50, para mostrar a convergência, precisando e interferência da razão de aspecto nos resultados das tensões normais na direção “y”:

Gráfico 46– Tensão normal em “y” pela quantidade de elementos da malha, sem os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N.

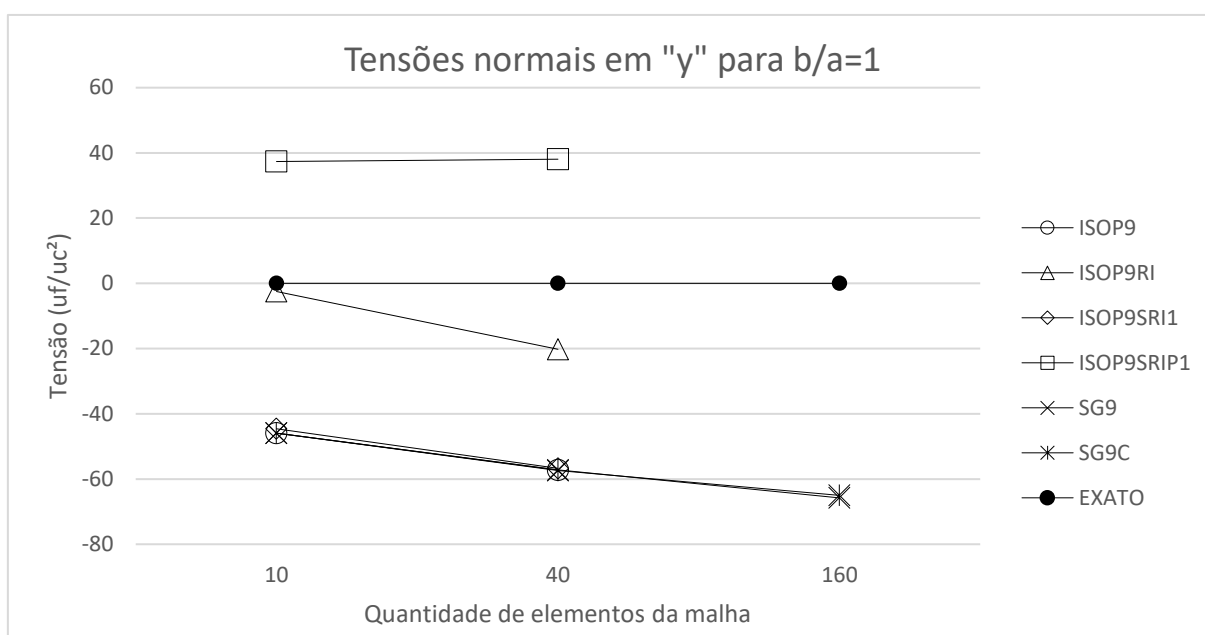


Fonte: Autor.

Pode-se observar que todos elementos que não tiveram a introdução de modos espúrios de energia nula em seus resultados possuem certa convergência para um dado resultado, porém os elementos que apresentam alguma correção mostram uma convergência mais rápida.

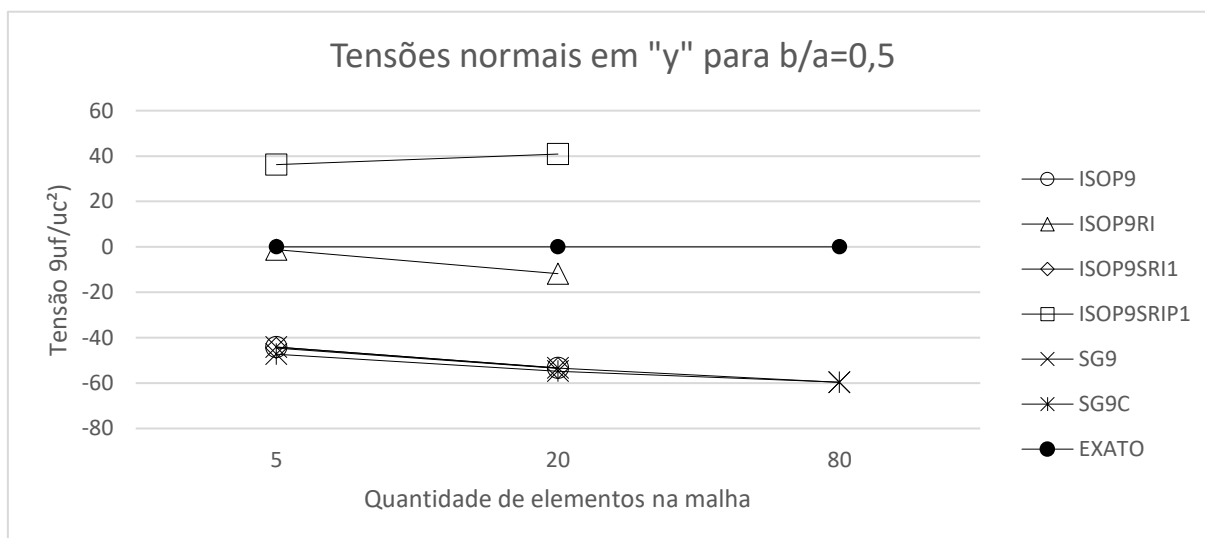
Para serem analisados os refinamentos uniformes, são isoladas as razões de aspecto simuladas nos gráficos 47 e 50:

Gráfico 47 Tensões normais em "y" pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=1$.



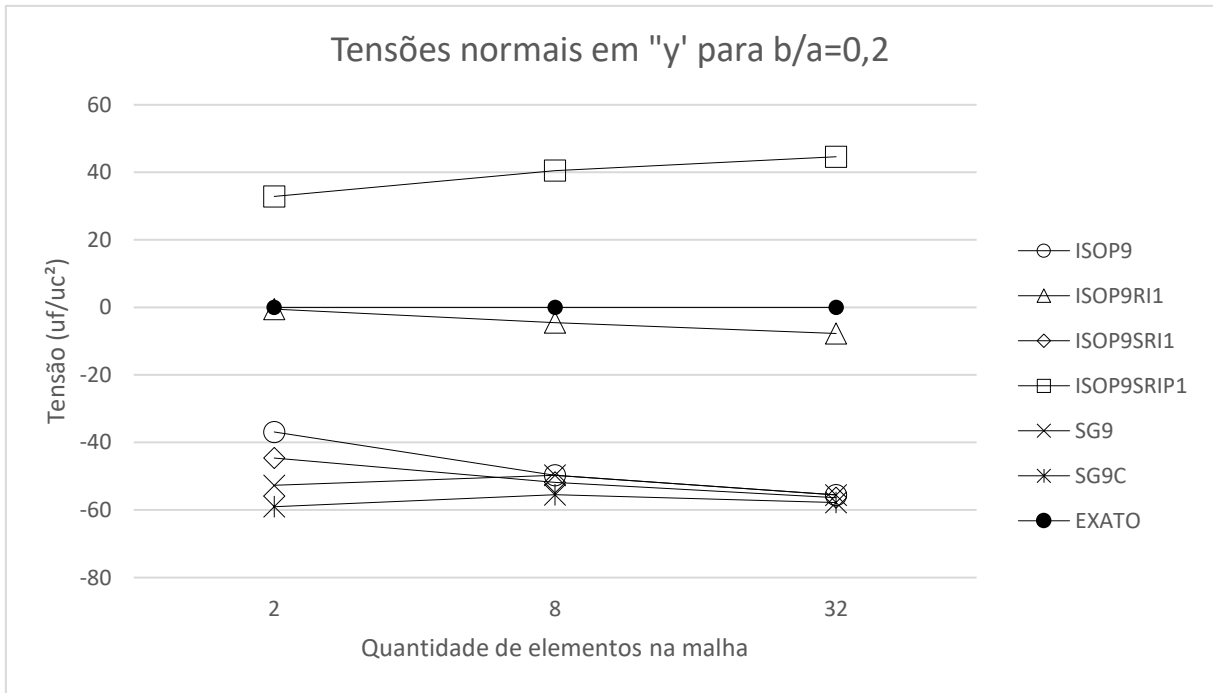
Fonte: Autor.

Gráfico 48 Tensões normais em "y" pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,5$.



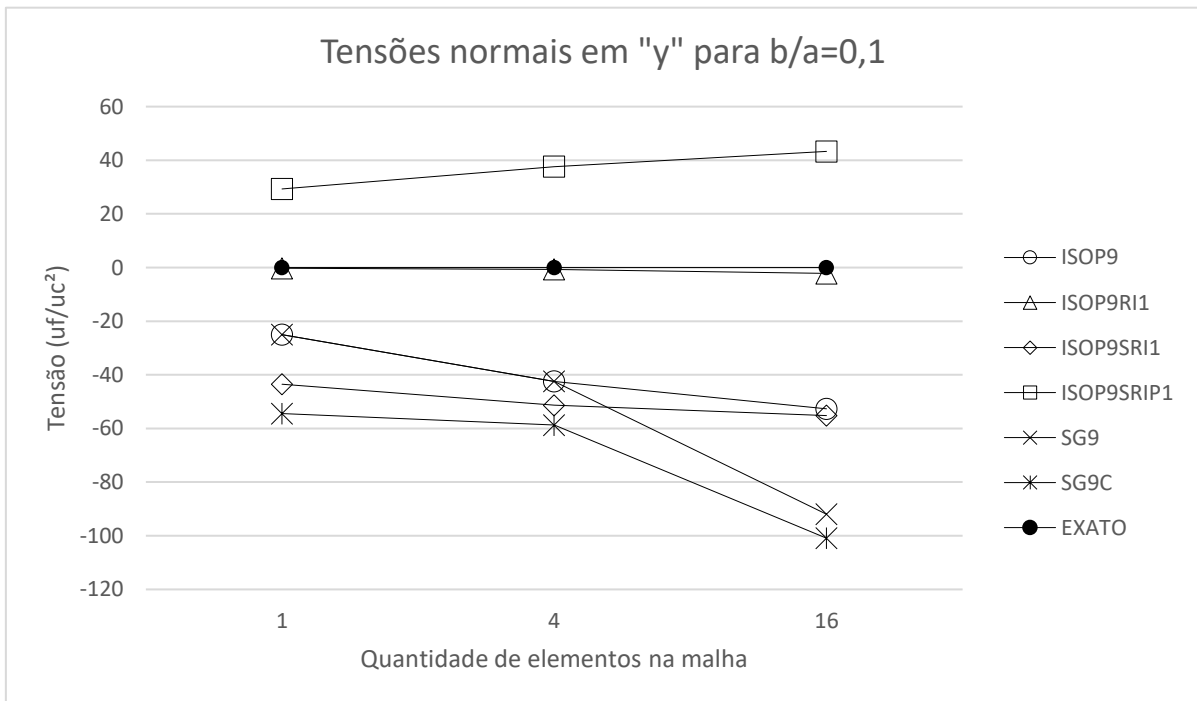
Fonte: Autor.

Gráfico 49 Tensões normais em "y" pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,2$.



Fonte: Autor.

Gráfico 50 Tensões normais em "y" pela quantidade de elementos de nove nós da malha, para elementos com $b/a=0,1$.



Fonte: Autor.

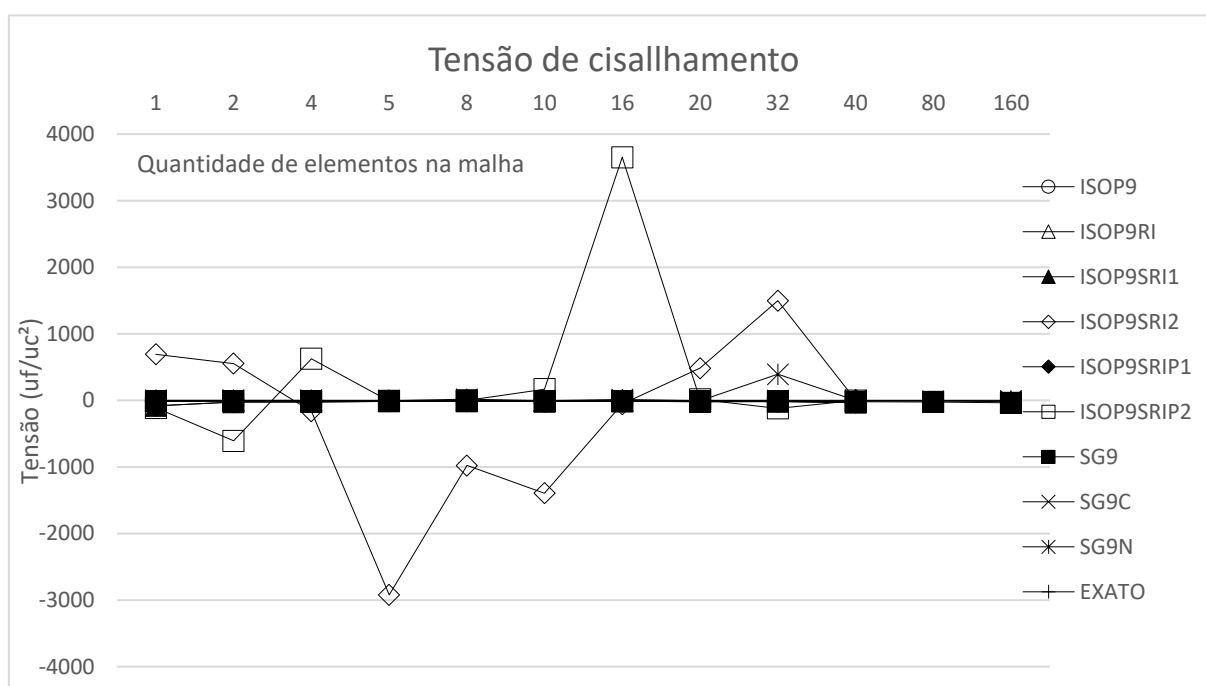
Analisando o observado nos gráficos 47 a 50, observa-se que o refino uniforme proporciona uma convergência melhor.

Outro ponto importante a ser observado nos gráficos de 39 a 50 é que como as equações que definem as tensões normais na viga entre os elementos ISOP9 e ISP9SRI, e SG9 e SG9C são similares, os resultados para razões de aspecto próximas à um proporcionaram curvas bastante próximas, e convergem para um mesmo valor.

As maiores diferenças são esperadas para as tensões de cisalhamento no plano definido pela direção “x” e “y”, onde atua a integração reduzida seletiva na formulação isoparamétrica, e onde são corrigidos os termos espúrios na notação *strain gradient* sem a inserção de modos espúrios de energia nula.

O gráfico 51 compila os resultados obtidos para as tensões de cisalhamento no primeiro ponto do primeiro elemento de cada malha simulada:

Gráfico 51 Tensões de cisalhamento em “x” e “y” pela quantidade de elementos de nove nós da malha.

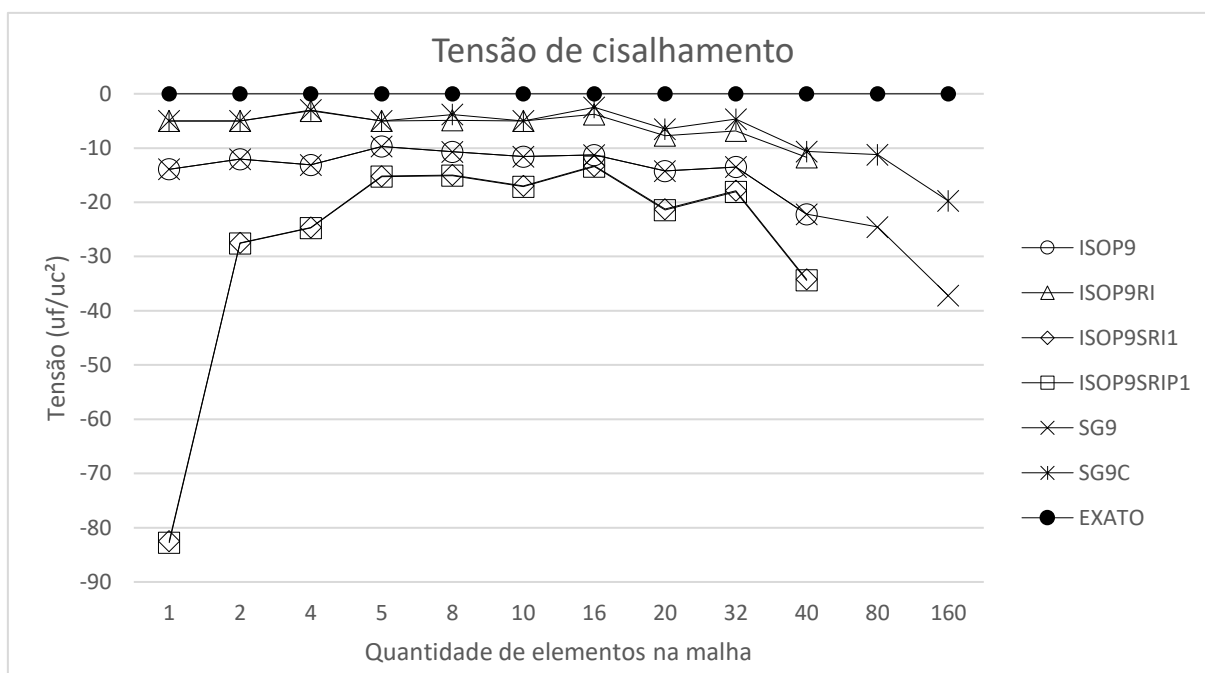


Fonte: Autor.

Pode-se observar que os elementos com inserção de modos espúrios de energia nula possuem resultados sem aproveitamento prático, sem convergência ou magnitude útil.

Tendo em vista isto, para o gráfico 52 foram eliminados os elementos com inserção de modos cinemáticos de energia nula para uma análise dos demais elementos:

Gráfico 52 Tensões de cisalhamento em “x” e “y” pela quantidade de elementos de nove nós, sem inserção de modos cinemáticos de energia nula.



Fonte: Autor.

É possível observar que os elementos ISOP9RI e SG9C apresentam a menor variação de resultados, mostrando uma convergência mais rápida.

O bom desempenho do elemento ISOP9RI pode ser relacionado ao problema modelado, fazendo com que a integração uniforme reproduza um grau polinomial mais próximo a solução exata deste problema em específico, sendo necessários maiores estudos sobre a aplicação deste elemento para outros problemas.

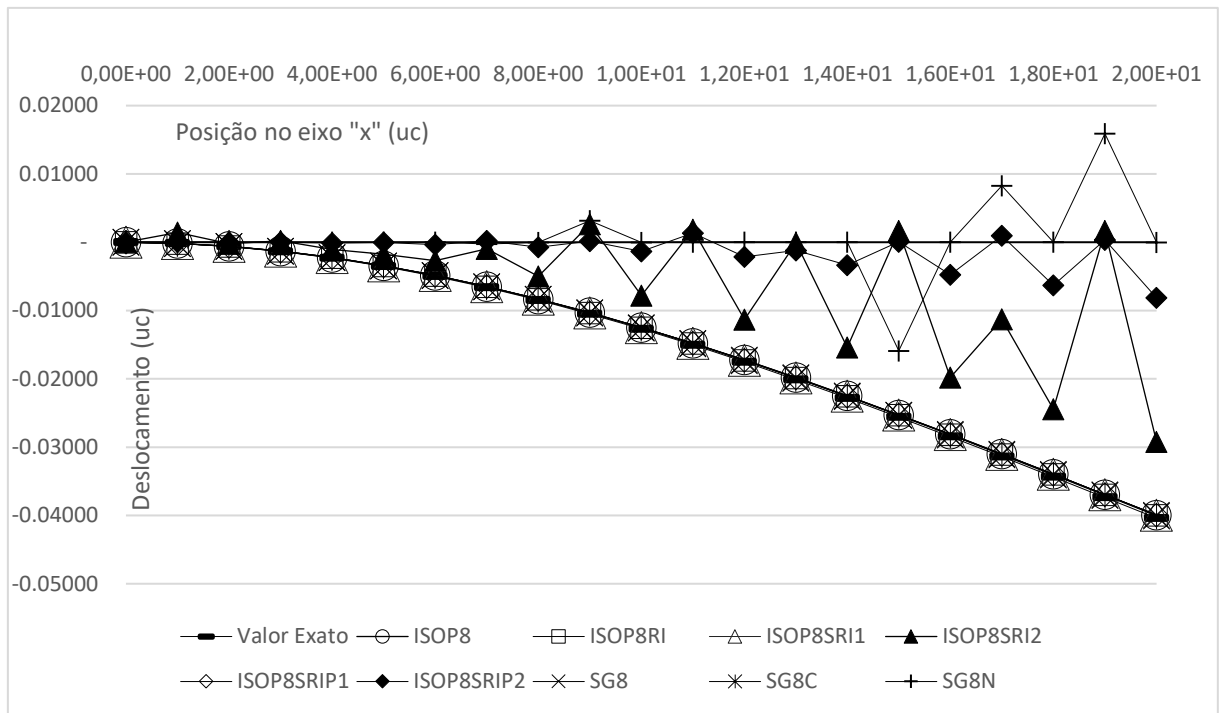
Já o elemento SG9C apresentou bom desempenho tanto aos deslocamentos como as tensões, não sendo melhor em todos os cenários estudados, mas tendo potencial para análises seguras em aspectos mais amplos.

4.1.3. Elemento de oito nós

Assim como feito com o elemento de quatro e nove nós, as variáveis que interferem de alguma forma na aproximação foram sistematicamente variadas para que seja possível à comparação do desempenho das notações em diferentes situações. Os gráficos relacionados à deformação vertical por posição mostrados na sequência são relacionados a Viga em Balanço com Poisson igual à 0,3.

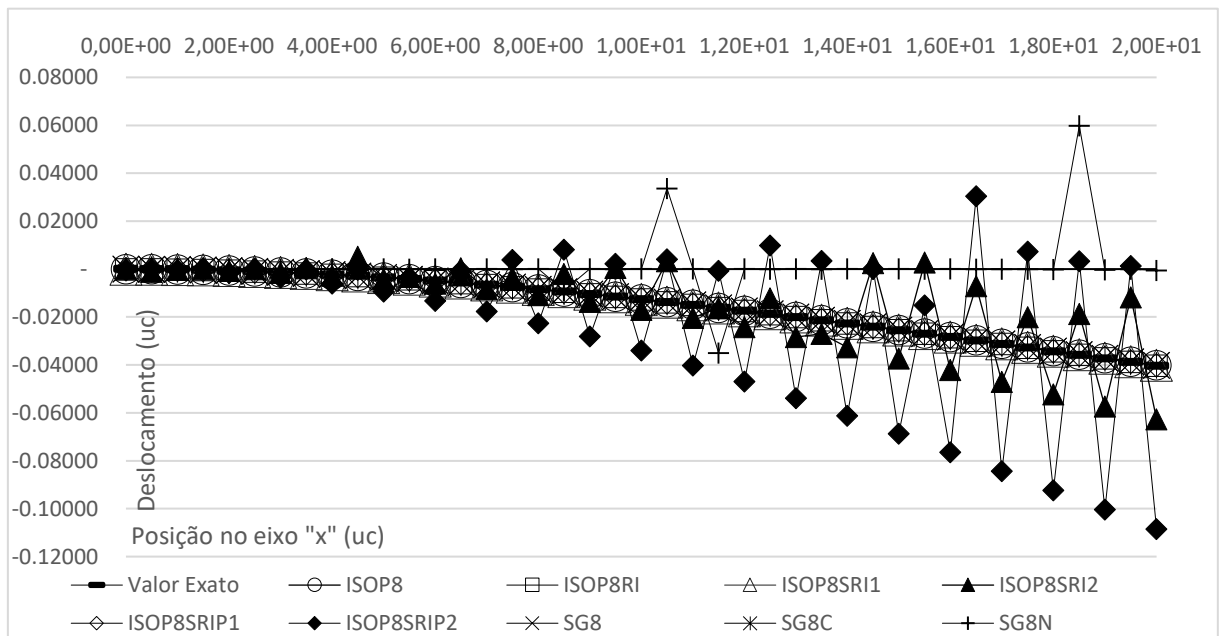
Para as modelagens com relação $b/a = 1$, obtém-se o gráfico 33 e 34:

Gráfico 53– Deslocamento x Posição da malha com 10 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



Fonte: Autor.

Gráfico 54– Deslocamento x Posição da malha com 40 elementos com relação $b/a=1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



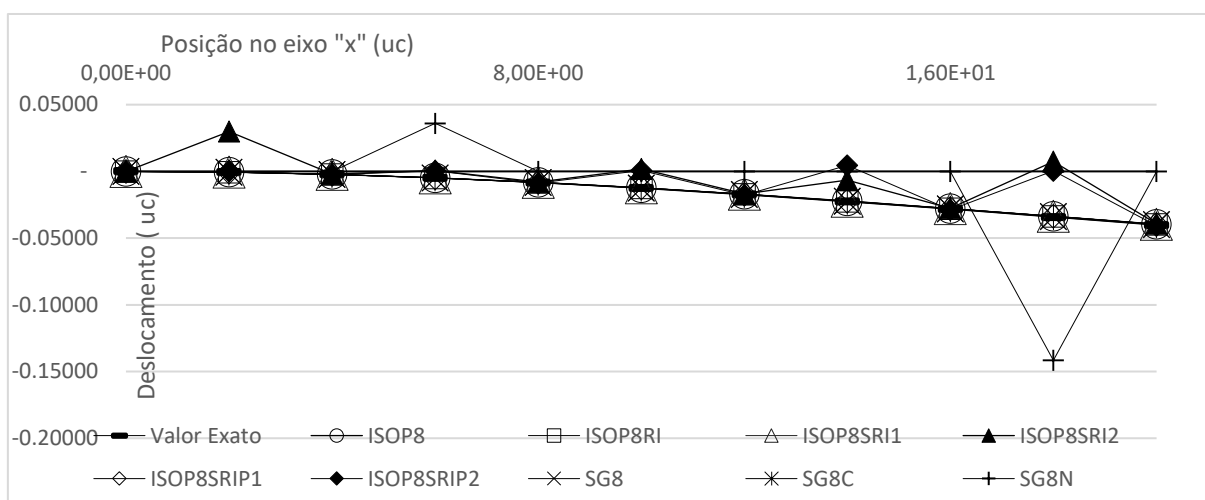
Fonte: Autor.

Observam-se os mesmos comportamentos já registrados para os elementos de nove nós, devido as formulações demonstradas na notação *Strain gradient* onde podem-se visualizar a

inserção de erros na busca em eliminar todos os elementos espúrios, e a não eliminação completa com o uso da quadratura reduzida da integração por pontos de Gauss, sendo apenas na notação *Strain gradient* possível de eliminar todos os termos espúrios sem a inserção de outros.

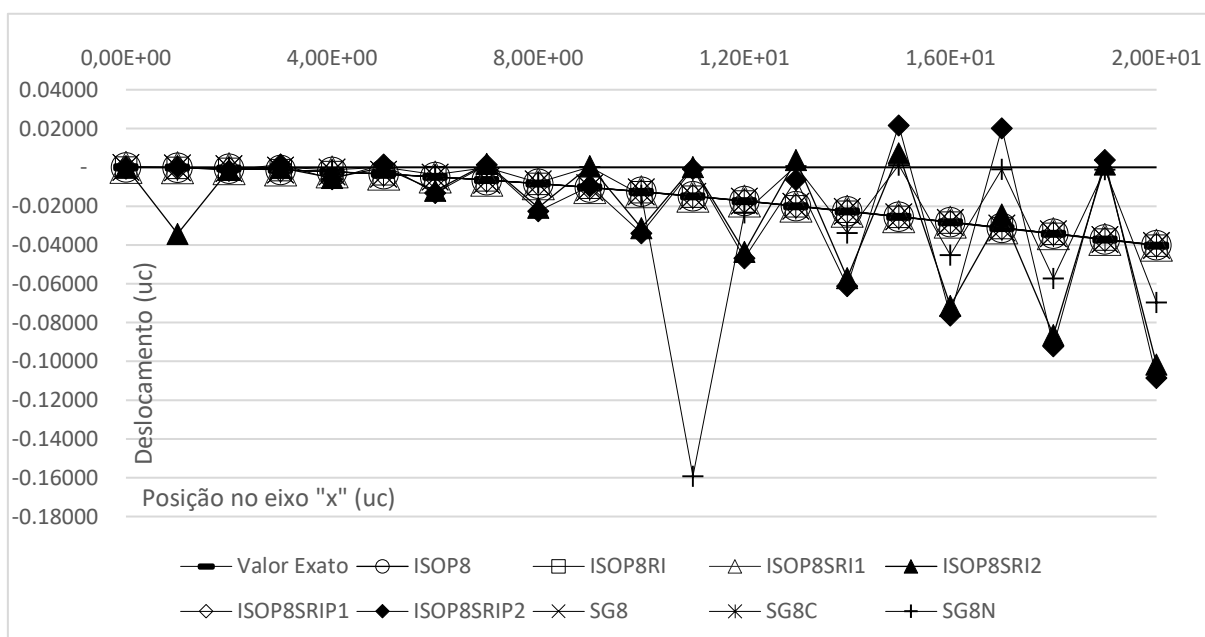
Para as modelagens com relação $b/a = 0,5$, obtém-se o gráfico 35 e 36:

Gráfico 55– Deslocamento x Posição da malha com cinco elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



Fonte: Autor.

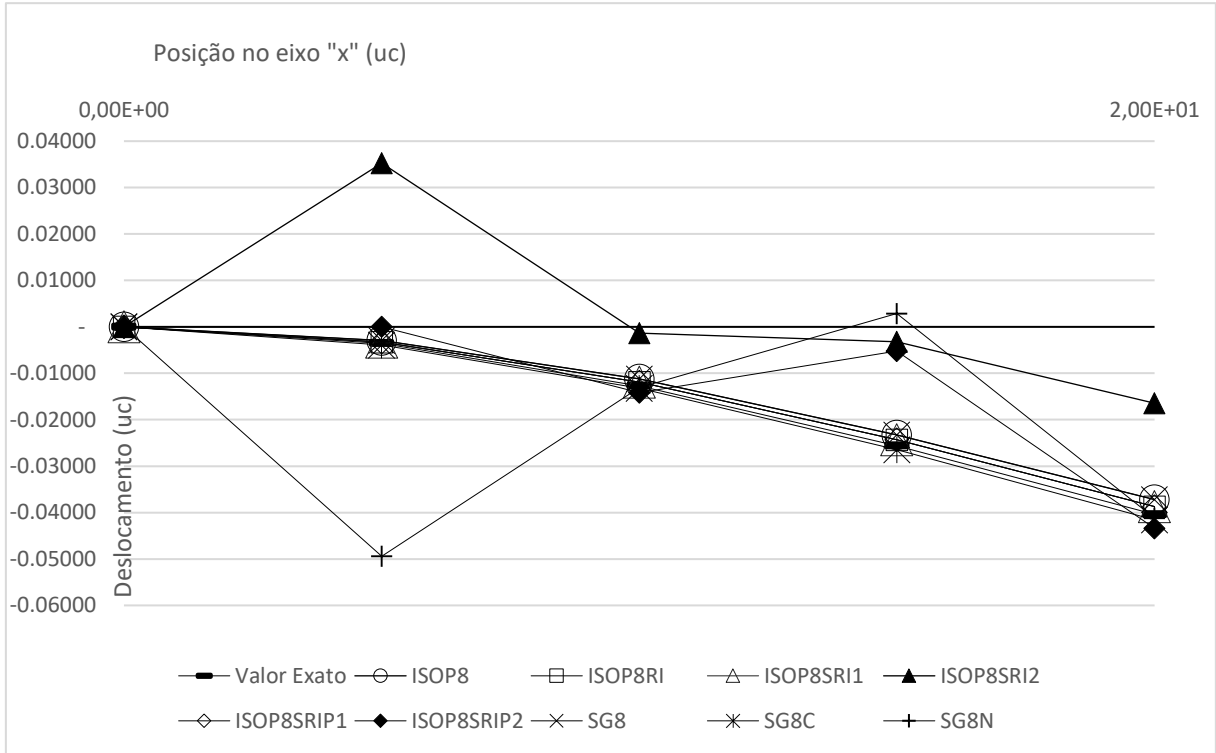
Gráfico 56– Deslocamento x Posição da malha com 20 elementos com relação $b/a=0,5$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



Fonte: Autor.

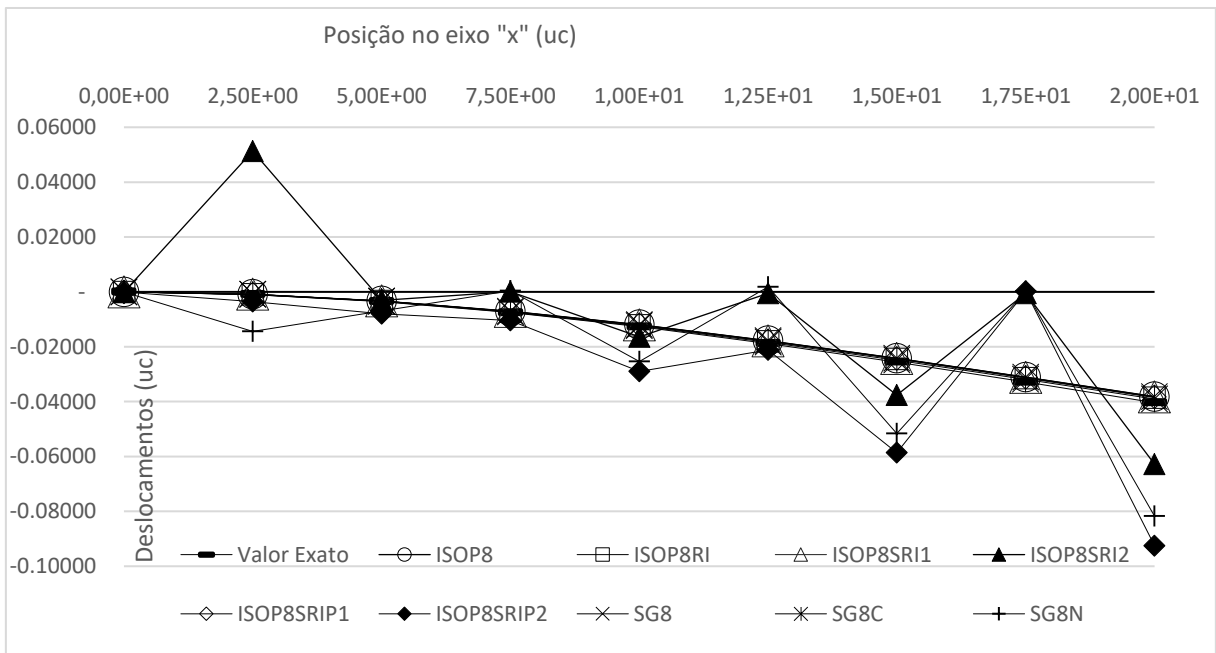
Para as modelagens com relação $b/a = 0,2$, obtém-se o gráfico 37 e 39:

Gráfico 57– Deslocamento x Posição da malha com dois elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



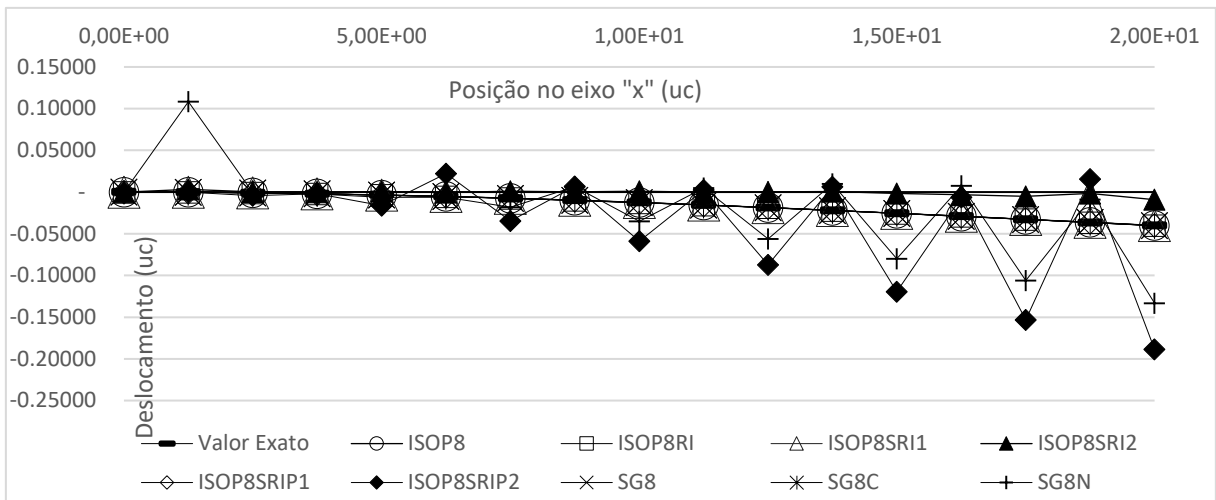
Fonte: Autor.

Gráfico 58– Deslocamento x Posição da malha com oito elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



Fonte: Autor.

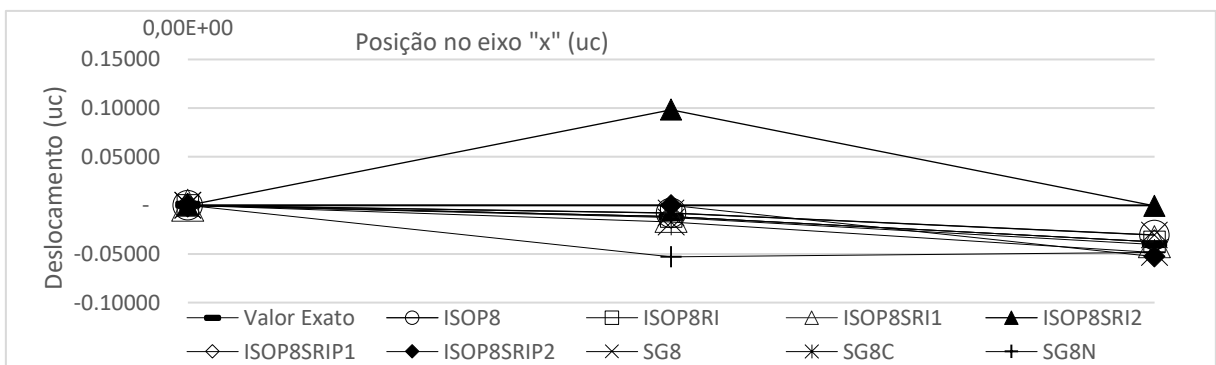
Gráfico 59– Deslocamento x Posição da malha com 32 elementos com relação $b/a=0,2$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



Fonte: Autor.

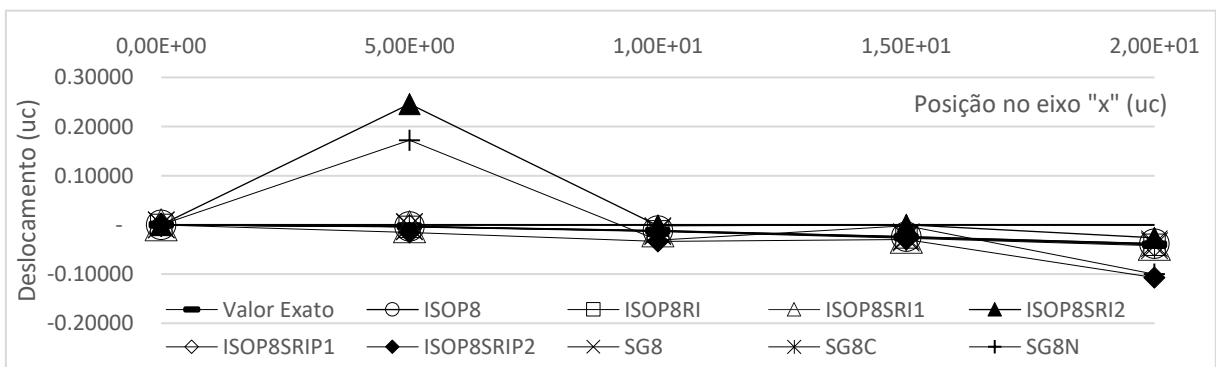
Para as modelagens com relação $b/a = 0,1$, obtém-se o gráfico 40 e 42:

Gráfico 60– Deslocamento x Posição da malha com um elemento com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



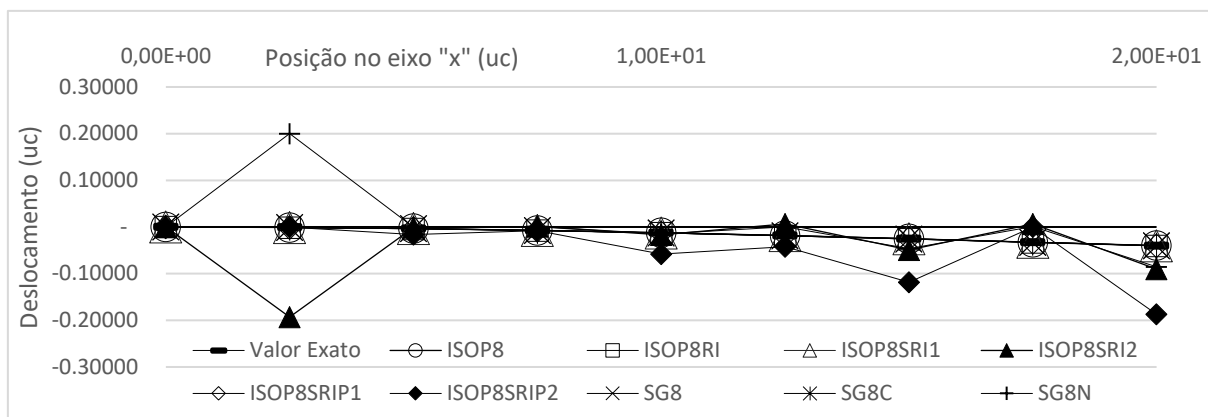
Fonte: Autor.

Gráfico 61– Deslocamento x Posição da malha com quatro elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço, para o elemento de oito nós.



Fonte: Autor.

Gráfico 62– Deslocamento x Posição da malha com 16 elementos com relação $b/a=0,1$ da Viga em Balanço (Cantilever Beam), para o elemento de oito nós.



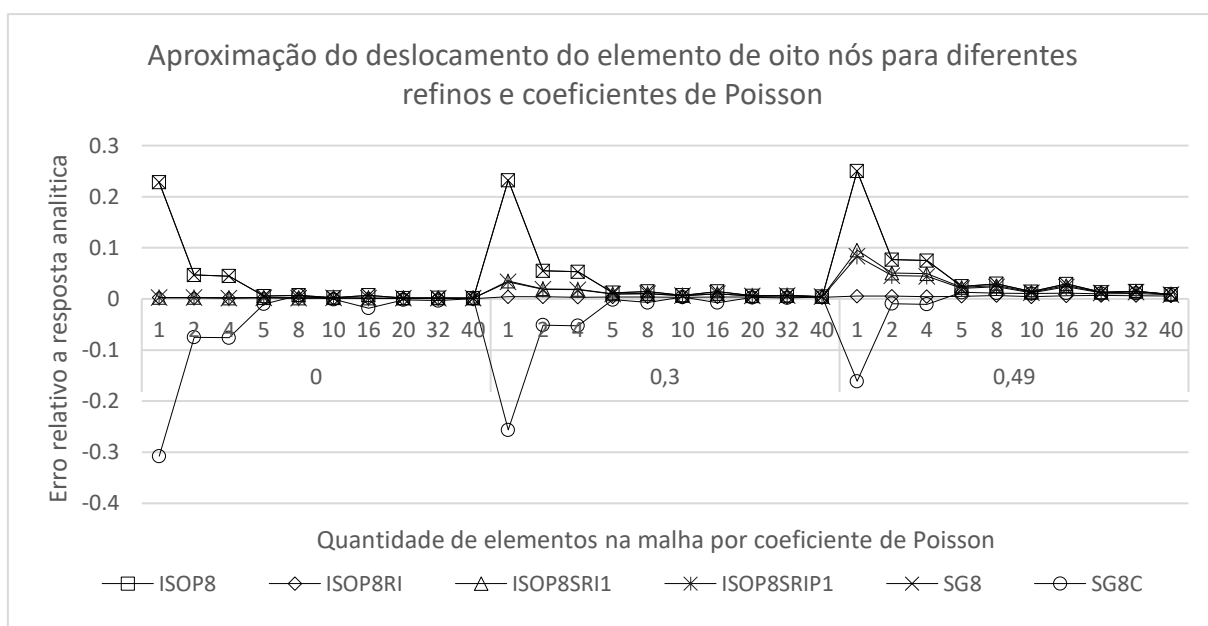
Fonte: Autor.

Para os ensaios realizados para o elemento de oito nós, dos gráficos 36 a 42, é possível observar a repetição do comportamento dos elementos conforme o alongamento dos elementos e refino da malha.

Para todos os elementos, o alongamento prejudicou a aproximação da deformação da viga, assim como o refino uniforme melhorou o desempenho da malha ao problema.

Com a repetição das simulações para diferentes coeficientes de Poisson, obtém-se os dados presentes no gráfico 43:

Gráfico 63– Erro x Quantidade de elementos, para coeficientes de Poisson igual à 0, 0,3 e 0,49 para o elemento de oito nós.



Fonte: Autor.

Observa-se o aumento da distância entre a simulação e o resultado exato, com o aumento do coeficiente de Poisson, com exceção da notação *Strain gradient* corrigida, que melhora a aproximação conforme é realizado os refinamentos de malha mesmo com o aumento do coeficiente.

A análise de tensões apresentou resultados similares de comparação com os resultados já obtidos para os elementos de nove nós, assim como os resultados referentes ao deslocamento.

A similaridade na comparação dos resultados se deve ao grau das equações, assim como os problemas relativos as correções serem muito próximos.

As vantagens dos elementos de oito nós com relação aos elementos de nove nós seriam relacionadas ao custo computacional devido à redução de ordem das matrizes na formulação, porém este fator não foi sensível para as malhas utilizadas, sendo necessários maiores recursos computacionais e dispositivos específicos para medição do tempo computacionais não disponíveis para esta pesquisa.

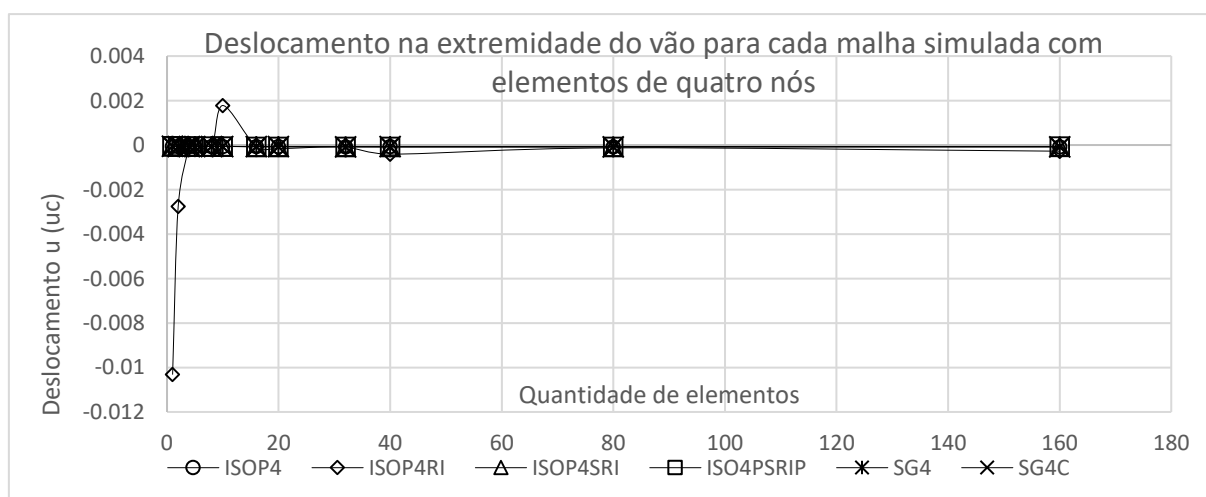
4.2. Viga Curta.

Como descrito na metodologia, foram obtidos resultados para a modelagem da viga curta com quatro e nove nós que seguem separadamente nos próximos itens apresentados.

4.2.1. Elemento de quatro nós.

Os resultados obtidos para o deslocamento da viga curta na extremidade do vão modelado com elementos de quatro nós são compilados no gráfico 64 para análise de convergência:

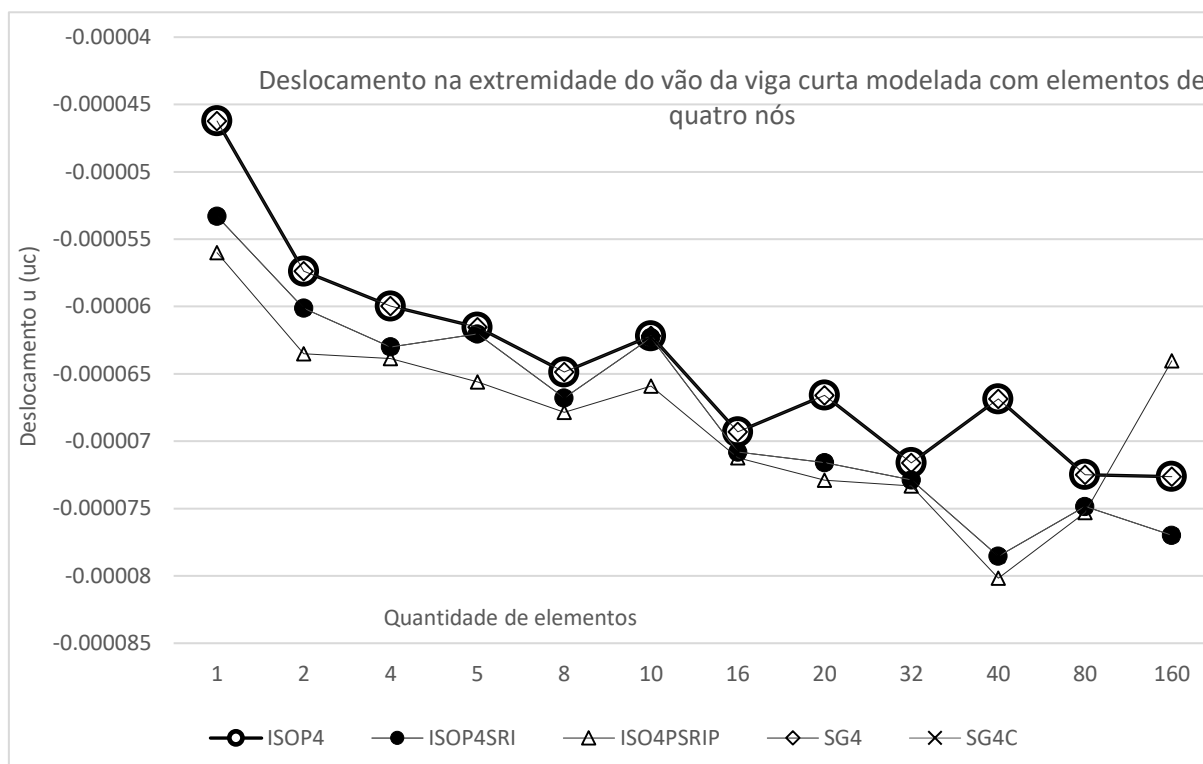
Gráfico 64– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de quatro nós.



Fonte: Autor.

O elemento ISOP4RI mostra resultados inapropriados para a análise de deslocamento, sendo suprimido no gráfico 65 para a melhor análise dos demais elementos.

Gráfico 65– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de quatro nós, sem o elemento ISOP4RI.



Fonte: Autor.

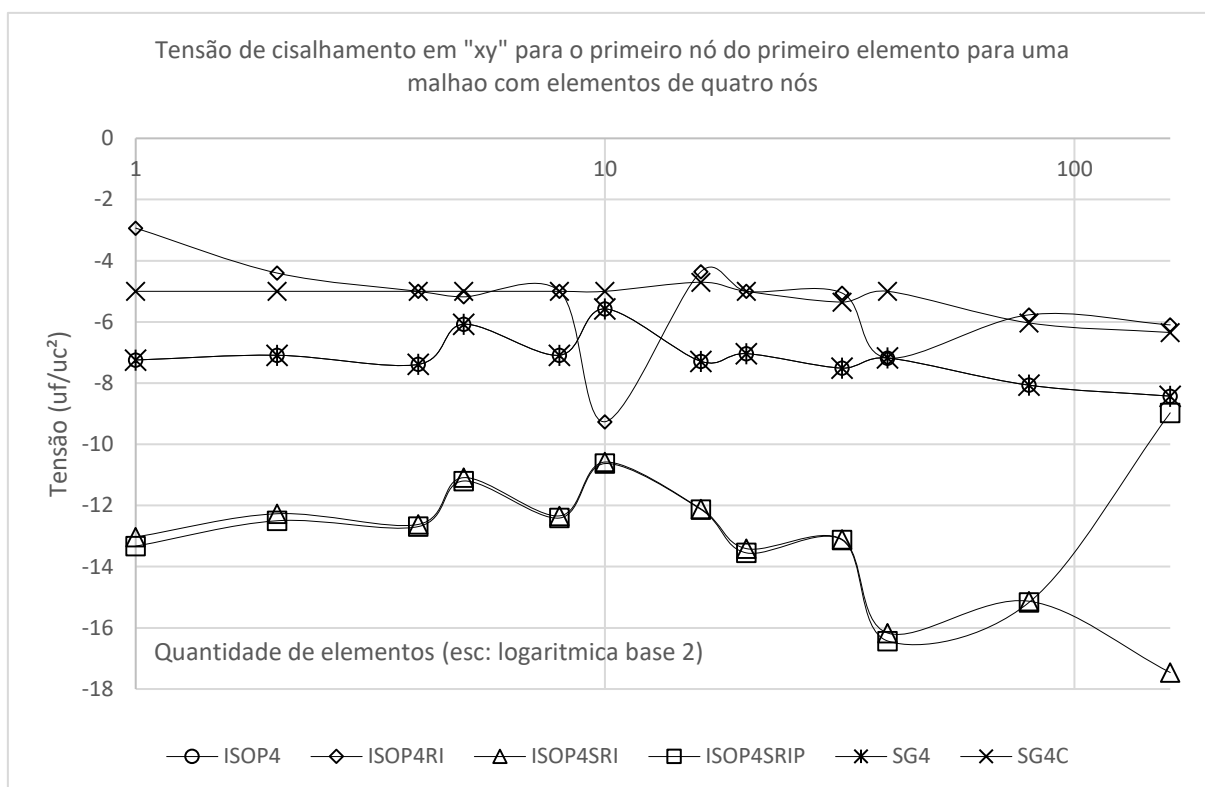
Observa-se a equivalência nos resultados obtidos entre os elementos ISOP4 e SG4, e entre ISOP4SRI e SG4C, explicados pela formulação das duas notações terem o objetivo de, ou integrar completamente as equações de deformações, ou suprimirem os mesmos termos, com técnicas matemáticas diferentes.

O elemento ISOP4SRIP, que para a Viga em Balanço forneceu boas aproximações e convergência, não mostra as mesmas vantagens ao final dos refinamentos.

Quando analisadas as razões de aspecto separadamente, onde o refino é uniforme dentro de cada uma analisada, são obtidos gráficos com uma convergência mais uniforme, o que mostra que todos os elementos sofreram influência da razão de aspecto no que se refere a modelagem dos deslocamentos.

Já a análise das tensões de cisalhamento para o primeiro nó do primeiro elemento, é possível observar a influência da razão de aspecto de forma negativa para quando a altura do elemento é aumentada em relação a base, como mostra o gráfico 66:

Gráfico 66– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de quatro nós.



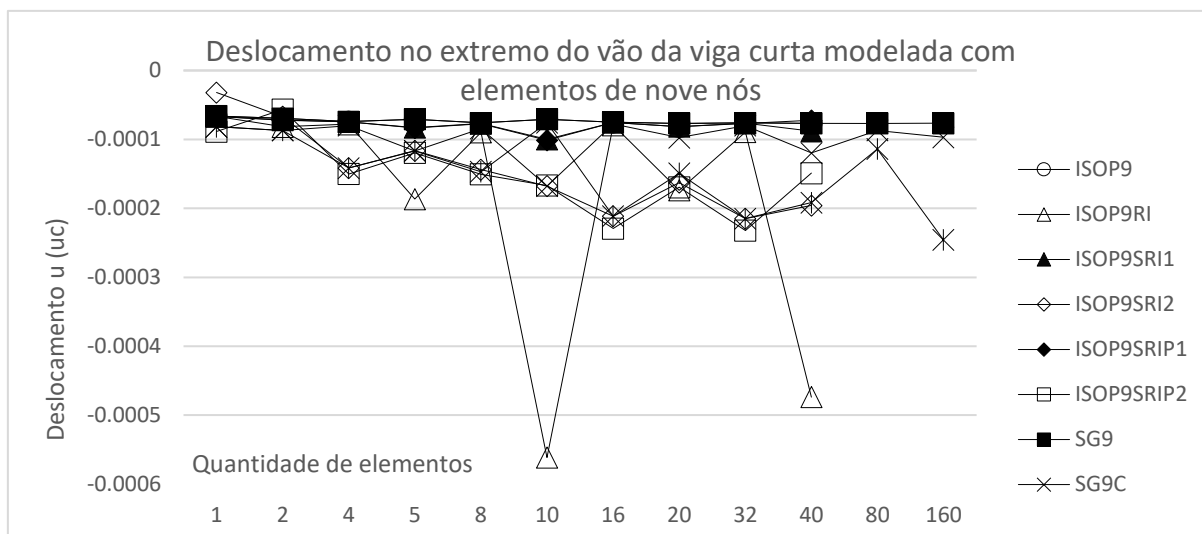
Fonte: Autor.

Nota-se uma perturbação comum a todos os elementos, com exceção do elemento SG4C, que não mostrou sensibilidade a razão de aspecto. Quando a quantidade simulada é igual a dez, a altura do elemento é dez vezes maior que a base utilizada, mas antes e após a perturbação provocada pela modelagem com uma razão de aspecto que prejudicou o desempenho dos elementos, observa-se a convergência dos elementos ISOP4, ISOP4RI, SG4 e SG4C, o que não ocorre com as correções propostas para os elementos isoparamétricos, que não apresentam convergência após a modelagem com dez elementos.

4.2.2. Elemento de nove nós.

Os resultados obtidos para o deslocamento da viga curta na extremidade do vão modelado com elementos de nove nós são compilados no gráfico 67 para a análise da convergência dos resultados para os diferentes elementos finitos testados:

Gráfico 67– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós.

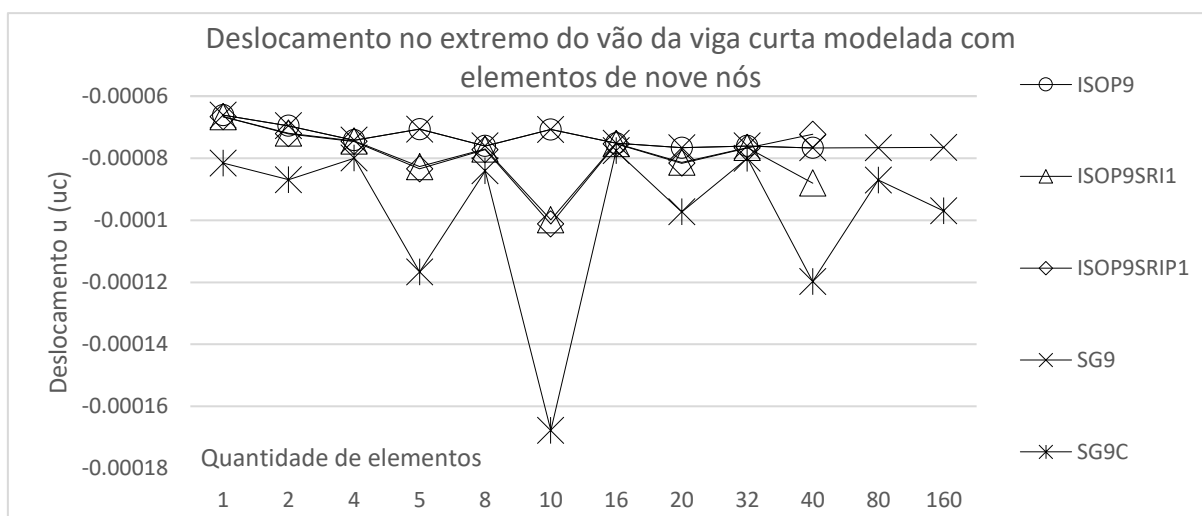


Fonte: Autor.

A introdução de modos cinemáticos de energia nula nos elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N causam resultados incoerentes com o problema proposta, assim como a integração reduzida uniforme no elemento ISOP9SRI1, e por possuírem resultados de escala inadequada, atrapalham a análise dos demais elementos, fazendo necessária a retirada do gráfico.

Sem modos cinemáticos de energia nula, e sem a integração reduzida uniforme, é possível observar no gráfico 68 o resultado dos demais elementos:

Gráfico 68– Deslocamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós, com a retirada de ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2, SG9N e ISOP9SRI1.

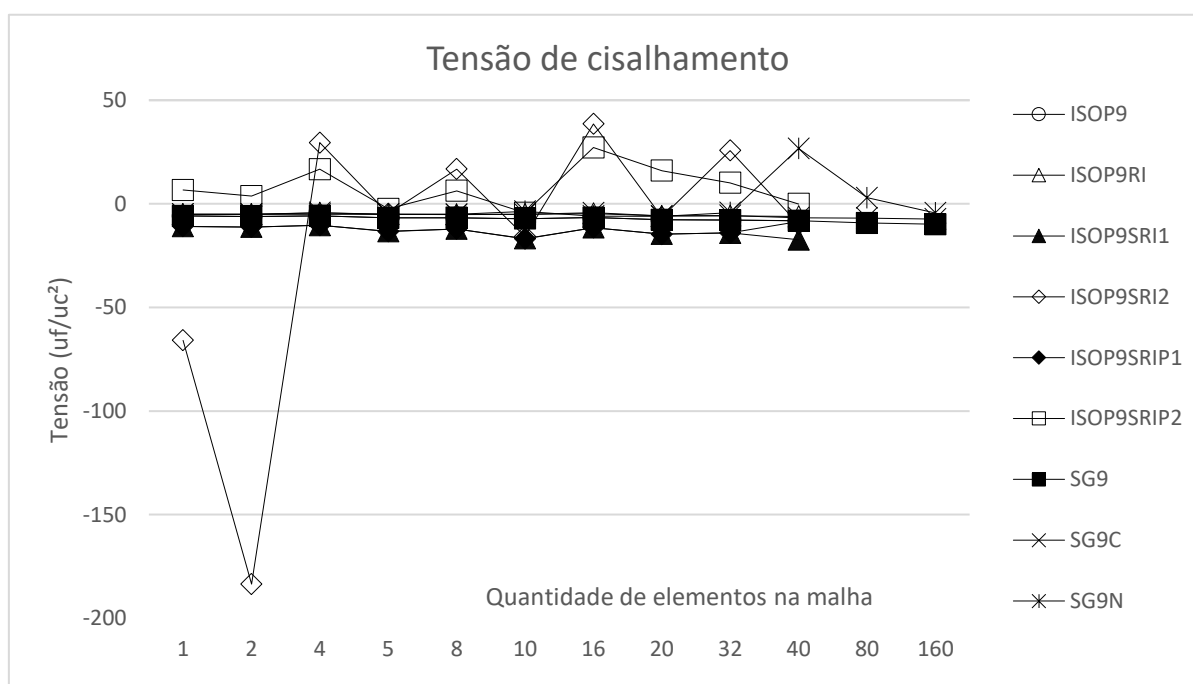


Fonte: Autor.

Todas as malhas, quando realizado o refinamento uniforme, apresentam convergência para um mesmo resultado, porém é visível a influência da razão de aspecto para a notação *strain gradient* corrigida, assim como para os outros elementos que sofrem correção. Os elementos ISOP9 e SG9 possuem equivalência numérica, apesar de que, devido ao custo computacional, apenas a notação *strain gradient* retornou resultados para malhas com 80 e 160 elementos, com ou sem correção.

Os elementos ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2, ISOP9RI e SG9N, cuja introdução de erros também afetou a análise de deslocamentos, continua retornando resultados inadequados para a análise de tensões de cisalhamento, como mostra o gráfico 69:

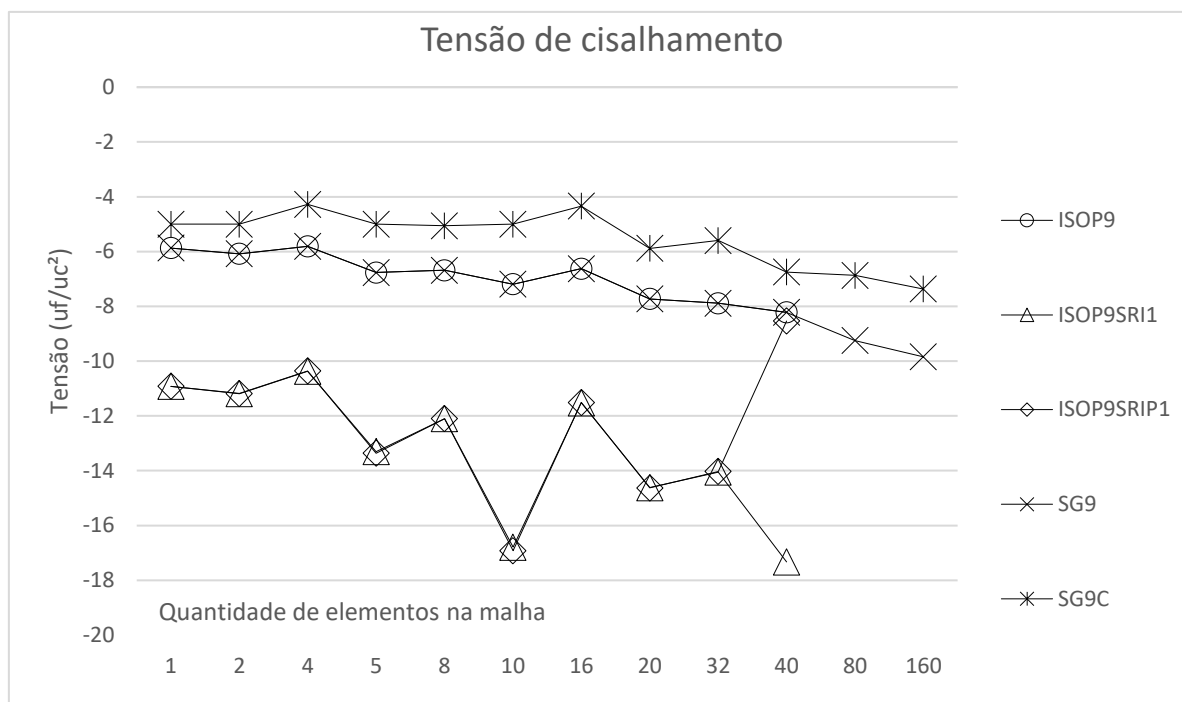
Gráfico 69– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós.



Fonte: Autor.

Devido a escala dos erros associados aos elementos citados interferir na análise dos demais, o gráfico 70 traz a tensão de cisalhamento no primeiro ponto do primeiro elemento de cada malha, para comparação já realizada também com os elementos de quatro nós:

Gráfico 70– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para a viga curta, modelada com elementos finitos de nove nós, sem os elementos ISOP9RI, ISOP9SRI2, ISOP9SRIP2 e SG9N.



Fonte: Autor.

O elemento SG9C mostra convergência, apesar da visível influência da razão de aspecto entre os resultados, assim como os elementos não corrigidos SG9 e ISOP9.

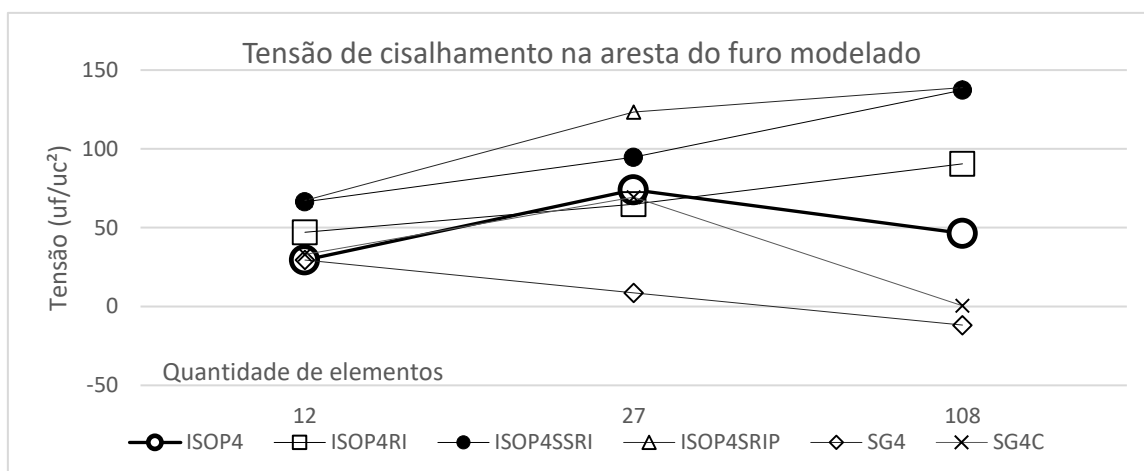
Os elementos ISOP9SRI1 e ISOP9SRIP1 mostram maior sensibilidade a razão de aspecto, não mostrando convergência para um único valor entre diferentes malhas, mesmo se só analisados os refinamentos uniformes entre uma mesma razão de aspecto.

4.3. Furo quadrado.

Como descrito na metodologia, foram obtidos resultados para a modelagem do furo quadrado com quatro nós, analisando a concentração de tensões gerada na aresta do furo.

Para as tensões de cisalhamento, o gráfico 71 compila os resultados obtidos nas diferentes malhas e elementos finitos simulados:

Gráfico 71– Tensão de cisalhamento x Quantidade de elementos, para o furo quadrado, modelado com elementos finitos de quatro nós.



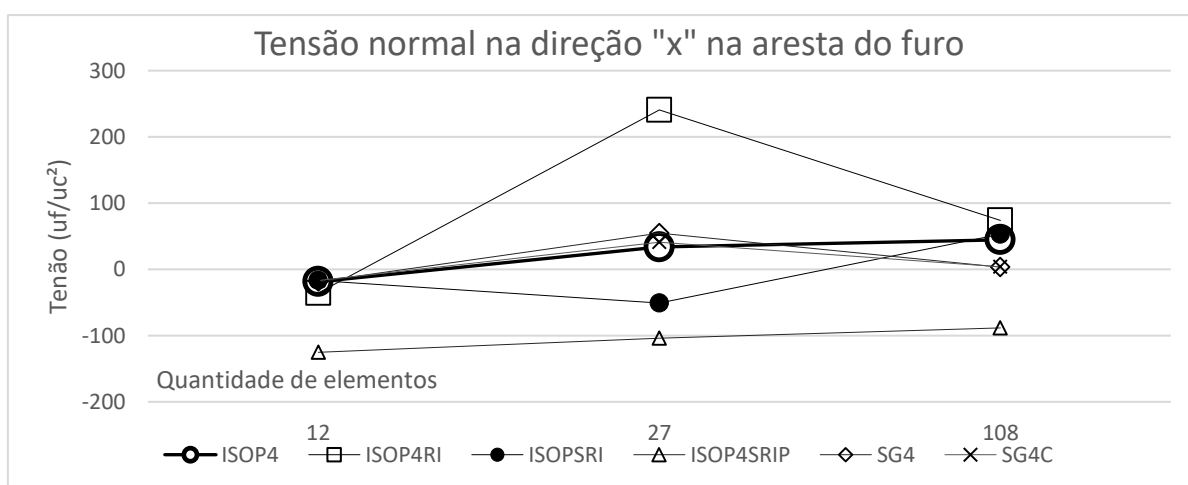
Fonte: Autor.

A convergência para a integração completa na formulação isoparamétrica, ou com todos os termos na notação *strain gradient*, mostra um desempenho menor do que obtido com a correção na integração por meio das integrações reduzidas ou correção *a priori*.

Porém o resultado que mostra a menor concentração de tensões na aresta do furo é do elemento SG4C, enquanto outros elementos obtiveram valores superiores.

Os resultados das tensões normais na direção “x” são dispostos no gráfico 72 para análise:

Gráfico 72– Tensão normal na direção “x” x Quantidade de elementos, para o furo quadrado, modelado com elementos finitos de quatro nós.

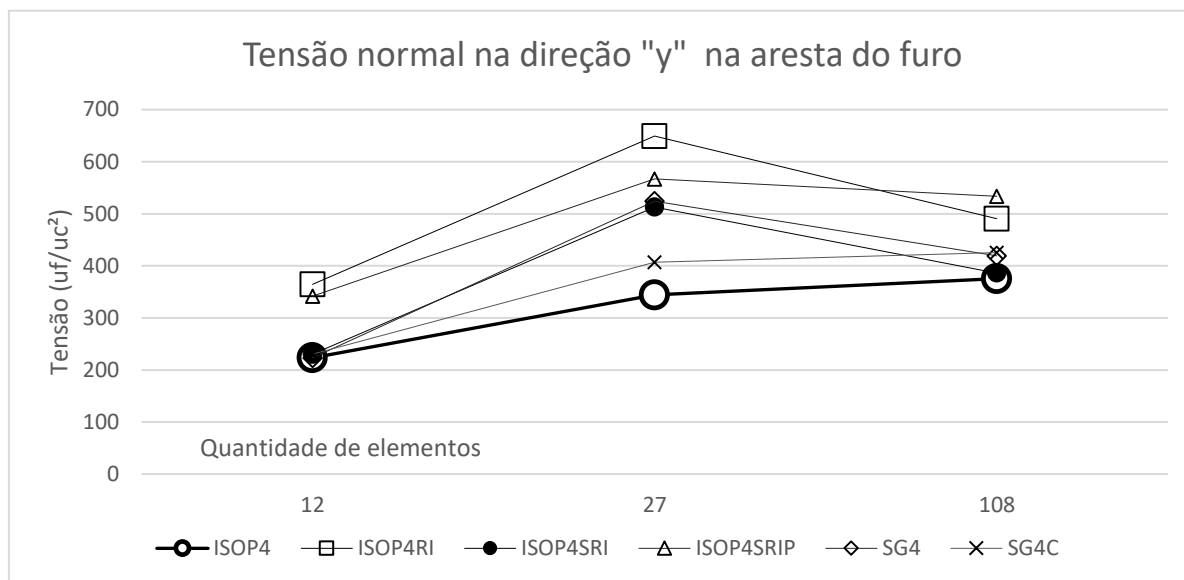


Fonte: Autor.

A convergência dos elementos ISOP4, ISOP4SRIP, SG4 e SG4C são similares, porém os valores do elemento isoparamétrico corrigido possuem variação em relação aos demais, mostrando uma concentração de tensão elevada na aresta do furo quadrado.

A mesma análise é realizada para as tensões normais na direção “y”, no gráfico 73:

Gráfico 73– Tensão normal na direção “y” x Quantidade de elementos, para o furo quadrado, modelado com elementos finitos de quatro nós.



Fonte: Autor.

Os elementos ISOP4, ISOP4RI, SG4 e SG4C alcançam resultados próximos no último refino, sendo a menor variação entre a malha de 27 elementos e de 108 para o elemento SG4C.

Todos apresentaram variação elevada entre a malha de 12 e 27 elementos, possivelmente devido à alteração da geometria da malha, simulada com menor variedade de razões de aspecto.

Com base em todos os resultados descritos neste capítulo, serão concluídos os efeitos causados pela variação da razão de aspecto, refinamentos, coeficientes de Poisson para todos os diferentes elementos finitos tratados em diferentes simulações, de forma que as constatações sejam abrangentes e melhor embasadas.

5. CONCLUSÕES

Neste capítulo são realizadas as conclusões referentes as análises descritas no capítulo quatro, assim como relacionados os fenômenos encontrados com o referencial teórico presente no capítulo dois, na busca de explicações que orientem o melhor entendimento do tema tratado, assim como trabalhos futuros que promovam o avanço do estado da arte.

5.1. A *Viga em Balanço (Cantilever Beam)* modelada com elementos de quatro nós.

Para os elementos de quatro nós se observa a diferença na aproximação e convergência dos resultados ao serem usadas as notações com termos espúrios, no caso da isoparamétrica com a integração completa no elemento ISOP4, e na notação *Strain gradient* no caso de SG4, e com a eliminação correta dos termos espúrios, como feito com a integração reduzida seletiva sem ponderação em ISOP4SRI, e com a notação *Strain gradient* em SG4C.

Quando é realizada a integração reduzida seletiva, sem ponderação, no elemento de quatro nós, os termos de maior grau apenas da deformação angular são eliminados no processo de integração, o que acontece explicitamente na notação *Strain gradient*, por se mostrarem termos espúrios quando realizada sua interpretação física.

A integração reduzida uniforme não mostra desempenho adequado em todas as aplicações com elementos de quatro nós, e possui uma aproximação menor que os demais elementos, que pode ser explicada pela dedução da notação *Strain gradient*, uma vez que ao eliminar os elementos de maior grau de todas as equações de deformação, ao mesmo tempo que se elimina os termos de deformação angular parasítica, também são eliminados termos não espúrios de deformação linear.

O elemento ISOP4SRIP consegue um desempenho melhor com relação aos deslocamentos que os elementos SG4C e ISOP4SRI, o que sugere que são possíveis correções relacionadas às deformações normais ainda não abordadas na notação *Strain gradient*.

Analisando as diferenças entre os resultados obtidos, pode-se concluir que quanto maior o coeficiente de Poisson do material, maior é a diferença entre resultados entre os elementos SG4C, ISOP4SRI e o elemento ISOP4SRIP para os deslocamentos.

Com relação às tensões obtidas em cada simulação, os elementos ISOP4SRI e SG4C obtiveram melhores resultados o elemento ISOP4SRIP, sendo o elemento SG4C com melhor convergência quando comparadas as tensões normais nas direções “x” e “y”.

Os elementos que não apresentaram correções de termos espúrios, como em ISOP4 e SG4, apresentam convergência mais lenta das respostas que os elementos corrigidos.

O elemento ISOP4RI, com integração reduzida uniforme, não apresenta bom desempenho na análise de tensões normais.

Estes fenômenos podem ser explicados pela forma de integração dos termos das formulações corrigidas, como já explorado no referencial teórico, uma vez que, quando as correções não alteram as deformações de flexão, diretamente proporcionais as tensões normais, esta são integradas por completo, não sendo identificados termos espúrios nestas equações.

Como os elementos corrigidos, que não alteram a integração das equações de deformação de flexão, possuem também melhor aproximação de deslocamentos, como se observa nos elementos ISOP4SRI e SG4C, são obtidas melhores aproximações também no que se refere as tensões normais.

Devido a alteração em parte das equações de flexão na correção de sua formulação, apesar do elemento ISOP4SRIP mostrar melhor aproximação em relação as deformações, em relação as tensões não obtiveram um desempenho tão satisfatório.

Identifica-se a necessidade de estudo mais aprofundado no que se refere a ponderação da matriz de rigidez utilizada na formulação do elemento ISOP4SRIP, pois em termos de deformação, pode-se transportar as vantagens obtidas para o elemento SG4C, uma vez que identificadas as razões da melhora de desempenho para o problema da Viga em Balanço, e em termos de tensões normais, poderiam ser utilizadas as deformações obtidas com ponderação, mas a obtenção das tensões através da formulação utilizada no elemento ISOP4SRI.

Tais modificações ainda não foram testadas, e podem trazer vantagens em ambas as formulações em termos de deformações e tensões normais.

Para as tensões de cisalhamento, o elemento SG4C apresentou melhor convergência em todas as simulações, pois além de apresentar bons resultados para os deslocamentos, apresenta uma eliminação explícita dos termos espúrios.

A eliminação dos termos espúrios nos elementos ISOP4SRI e ISOP4SRIP está correta segundo a própria dedução da notação *strain gradient*, porém a integração numérica, quando reduzida, pode não anular completamente termos de maior grau que a quadratura seria apropriada, o que provoca distorções na correção quando o objetivo seria anular estes termos.

O elemento ISOP4RI obteve bom desempenho para as tensões de cisalhamento, mas apenas neste quesito, não se mostrando apropriado em nenhum outro uso.

O estudo de melhores formas de integração dos elementos isoparamétricos corrigidos, utilizando como exemplo o obtido na notação *strain gradient*, pode trazer melhorias na formulação em relação as tensões de cisalhamento.

5.2.A Viga em Balanço modelada com elementos de oito e nove nós.

Para os elementos de nove e oito nós, foi possível identificar os mesmos padrões de comportamento, tanto com relação às aproximações e alongamento dos elementos, como em relação aos refinamentos.

Como esperado, os elementos com integração completa ISO9 e ISO8, e seus correspondentes em notação *Strain gradient*, SG9 e SG8, respectivamente, obtiveram resultados exatamente iguais, mostrando a equivalência na integração das duas formulações.

Para os elementos de oito e nove nós surge a peculiaridade acerca dos termos espúrios, onde não são possíveis de serem eliminados por completo sem a introdução de outro erro para a formulação isoparamétrica, o que é identificado no comportamento dos elementos ISOP9SRI2, ISOP8SRI2, ISOP9SRIP2 e ISOP8SRIP2, e foi propositalmente causado nos elementos SG9N e SG8N, eliminando a equação de compatibilidade.

Os resultados dos fenômenos na formulação isoparamétrica e *Strain gradient* não foram exatamente iguais devido ao procedimento de integração por pontos de Gauss, que não necessariamente torna nulo o resultado de elementos integrados com uma quadratura menor que a adequada, em ISOP9SRI2, ISOP8SRI2, ISOP9SRIP2 e ISOP8SRIP2, que seria equivalente a eliminação da equação de compatibilização da notação *Strain gradient*, em SG9N e SG8N.

Foi possível demonstrar o prejuízo causado pela inserção de modos cinemáticos de energia nula com a correção inadequada dos termos cuja integração reduzida seletiva elimina a equação de compatibilidade demonstrada na notação *strain gradient*.

Com relação aos resultados obtidos com a eliminação dos termos espúrios, os erros obtidos com o elemento ISOP9SRI1 foram melhores que do elemento ISOP9SRIP1 em todas as simulações.

Já em relação a notação *strain gradient*, os resultados dos elementos SG9C e SG8C não se mostraram melhores em todas as situações em comparação com seus respectivos isoparamétricos com mesma quantidade de nós.

Pode-se observar uma maior sensibilidade em relação ao alongamento do elemento, ocasionando aproximações melhores para os elementos ISOP9SRI1 e ISOP9SRIP1, e até mesmo a integração reduzida uniforme com o elemento ISOP9RI, quando o elemento tem o alongamento igual à dez vezes a dimensão da altura. O fenômeno se repete para os elementos de oito nós.

E a variação do coeficiente de Poisson altera este resultado, de forma que quanto maior o coeficiente de Poisson, melhor é o resultado da notação *Strain gradient*.

Quanto maior o refino da malha, menor as diferenças entre os resultados.

Estes resultados são interessantes do ponto de vista matemático, ao se comparar os processos que ocorrem com cada um dos elementos, principalmente com relação ao resultado da integração reduzida uniforme.

A integração reduzida uniforme, por realizar uma integração de todas as equações, inclusive de deformação linear, com uma quadratura de um grau menor do que a adequada para a integração completa, anula, ou reduz, o valor de todos os termos de maior grau. Um bom desempenho do elemento ISOP9RI e ISOP8RI, para este problema em específico, pode sugerir novas correções a serem realizadas.

Porém um desempenho melhor que o dos elementos SG9C e SG8C para os elementos ISOP9SRI1 e ISOP9SRIP1, para nove nós, e ISOP8SRI1 e ISOP8SRIP1, para oito nós, sugere que o processo de mapeamento pode estar corrigindo algo ainda não previsto na formulação da notação *Strain gradient* para quando existe um alongamento grande do elemento.

Mesmo com a notação *Strain gradient* corrigindo *a priori* os termos espúrios, e ocupando menos memória computacional, ainda existe abertura para novas correções, que possam deixar o desempenho do elemento ainda melhor, considerando os bons resultados já obtidos em comparação a formulação isoparamétrica em maior parte das simulações.

Com relação a análise de tensões normais, todos os elementos com correção e sem a introdução de modos cinemáticos de energia nula apresentaram convergência de resultados, porém os elementos na notação *strain gradient* apresentam uma convergência mais próxima já

nos primeiros refinamentos de malha, apesar das aproximações relacionadas aos deslocamentos não serem sempre os melhores.

Na análise das tensões de cisalhamento, a notação *strain gradient* adequadamente corrigida mostrou melhor convergência em relação às integrações reduzidas seletivas da formulação isoparamétrica desde os primeiros refinamentos de malha, o que denota a aplicação da equação de compatibilidade juntamente com a eliminação de todos os cisalhamentos parasíticos na equação de deformação angular, uma vez que foi possível obter resultados menores para tensões de cisalhamento, sem a introdução de modos cinemáticos de energia nula.

5.3. A viga curta modelada com elementos de quatro nós.

Como a variação da razão de aspecto se deu com o aumento da altura em relação à base, diferente do que já havia sido realizado para a Viga em Balanço, observa-se que existe uma perturbação grande na convergência tanto dos deslocamentos quanto das tensões quando são utilizados 10 elementos, ou seja, cada elemento possui dez vezes mais altura do que base.

Porém, se analisadas as razões de aspecto separadamente, pode-se observar que com o refinamento uniforme existe uma convergência uniforme.

Apesar da influência da razão de aspecto, após as perturbações causadas por geometrias muito alongadas dos elementos na direção vertical, retoma-se a convergência para um mesmo valor de deslocamento, exceto para o elemento ISOP4SRIP.

O elemento ISP4RI, que para a Viga em Balanço se mostrou inadequado, comporta-se de forma semelhante aos demais nesta simulação, o que pode ser explicado pela característica do problema estudado estar mais submetido às influências de tensões de cisalhamento, o que reduz o efeito causado pela exclusão indevida dos termos de maior grau das equações de deformação de flexão com a integração reduzida uniforme.

Já para o elemento ISOP4SRIP, a ponderação da matriz de rigidez para problemas com grande influência do cisalhamento, aparentemente, piora sua convergência, o que pode ser também observado no que se refere às tensões de cisalhamento.

A razão de aspecto perturba mais a convergência em relação às tensões de cisalhamento do que em relação aos deslocamentos, sendo os resultados da malha com 10 elementos destoantes dos demais, mesmo com a mesma razão de aspecto após ser feito o refinamento uniforme.

5.4. A viga curta modelada com elementos de nove nós.

Os resultados encontrados para a viga curta modelada com nove nós mostram que os elementos cuja integração insere modos cinemáticos de energia nula continuam a produzir resultado ruins, porém, diferentemente do observado na Viga em Balanço, a integração reduzida uniforme também mostra um desempenho inadequado nesta situação, seja para deslocamentos ou tensões de cisalhamento.

O elemento de nove nós corrigido na notação *strain gradient*, SG9C, mostrou maior sensibilidade à variação da razão de aspecto que os demais, resultado também encontrado na Viga em Balanço, porém todos os elementos que não apresentaram resultados inapropriados descritos anteriormente apresentaram convergência para um mesmo deslocamento.

Porém o elemento SG9C mostra uma convergência mais rápida para as tensões de cisalhamento que os demais, mesmo com a variação da razão de aspecto.

5.5. O furo quadrado modelado com elementos de quatro nós.

A análise das tensões mostra detalhes sobre a convergência e concentração de tensões na aresta do furo quadrado.

Destaca-se a correção dos termos espúrios na notação *strain gradient* neste tipo de problema, mostrando menor variação de resultados entre os refinamentos de malha em todas as tensões.

Correlacionando todos os dados com o referencial teórico, observam-se as equivalências esperadas entre a notação *strain gradient* e a notação isoparamétrica, tanto no que diz respeito à integração completa, como nas integrações reduzidas.

Porém compreende-se melhor os fenômenos resultantes das simulações a partir da dedução da notação *strain gradient*, entendendo o porque da alteração de desempenho em formulações que mostram melhor convergência para problemas onde esforços de flexão são mais pungentes, e a piora na convergência quando o problema estudado está submetido a elevadas tensões de cisalhamento.

A menor complexidade da notação *strain gradient* também é notável no que tange a programação, exigindo menos sub-rotinas e resultando em menores alocações de memória.

Os resultados obtidos mostraram algo revisto no referencial teórico, relacionado ao custo computacional das malhas que retornaram resultados na notação *strain gradient* e

resultaram no esgotamento da memória computacional para a formulação isoparamétrica, não gerando resultados.

Não é fortuito e nem intenção do trabalho elencar um elemento finito melhor, mas sim mostrar as potencialidades de cada notação, que mostram espaço para melhorias quando analisadas em conjunto, pois, assim como a notação isoparamétrica pode ganhar novas correções a partir da compreensão dos processos ocorridos na formulação comparando-os com os da notação *strain gradient*, o processo de mapeamento da formulação isoparamétrica poderia vir a contribuir com a notação *strain gradient*, tanto na melhora do desempenho quando aplicadas razões de aspecto desfavoráveis, assim como na simulação de malhas deformadas, que não foram abordadas no presente trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Chen W, Wang J, Zhao J. Functions for patch test in finite element analysis of the Mindlin plate and the thin cylindrical shell. *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*. 2009;52:762-7.
- [2] Zienkiewicz O, Taylor R, Zhu JZ. *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals: Seventh Edition*: Elsevier Ltd; 2013.
- [3] Turner MJ, Topp LJ, Martin HC, Clough RW. *Stiffness and deflection analysis of complex structures* 1956.
- [4] Clough RW. The finite element method in plane stress analysis. *Proceedings of 2nd conference on Journal of the Structural Division Electronic Computation*. 1960.
- [5] Ahmad S, Irons BM, Zienkiewicz OC. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1970;2:32.
- [6] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Too JM. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1971;3:15.
- [7] Clough RW, Pawsey SF. Improved numerical integration of thick shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1971;3:12.
- [8] Dow JO. *A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures*. San Diego: Academic Press; 1999. p. xi-xxiv.
- [9] Timoshenko S, 1878-1972. *HISTORY OF STRENGTH OF MATERIALS*. McGraw-Hill Book Company, Inc, NY. 1953.
- [10] R.S.Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1962.
- [11] M.L.Wilkins. Calculation of elastic-plastic flow. B Alder (Ed), *Methods in Computational Physics*, vol 3, Academic Press, New York. 1964:211-63.
- [12] ZIENKIEWICZ OC, CHEUNG YK. THE FINITE ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF ELASTIC ISOTROPIC AND ORTHOTROPIC SLABS. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 1964;28:471-88.
- [13] Reddy JN. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford University Press Inc, New York. 2004.
- [14] Herakovich CT. *A Concise Introduction to Elastic Solids. An Overview of the Mechanics of Elastic Materials and Structures*. Springer International Publishing. 2017:136.
- [15] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Nithiarasu P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics: Seventh Edition*: Elsevier Ltd; 2013.

- [16] Quek GRLaSS. The Finite Element Method. A Practical Course. AMSTERDAM. BOSTON. HEIDELBERG. LONDON. NEW YORK. OXFORD. PARIS. SAN DIEGO. SAN FRANCISCO. SINGAPORE. SYDNEY. TOKYO.: Elsevier Ltd; 2014.
- [17] Pavlou DG. Essentials of the Finite Element Method For Mechanical and Structural Engineers. AMSTERDAM. BOSTON. HEIDELBERG. LONDON. NEW YORK. OXFORD. PARIS. SAN DIEGO. SAN FRANCISCO. SINGAPORE. SYDNEY. TOKYO: Elsevier Inc.; 2015.
- [18] HUGHES TJR, COHEN M, HAROUN M. REDUCED AND SELECTIVE INTEGRATION TECHNIQUES IN THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF PLATES. Nuclear Engineering and Design. 1978;46:20.
- [19] Osama A. Mohamed PE, Byrd, Doyle E., Dow, John O. Improved Modeling Capabilities with Reduced-Order Integration. Journal of Engineering Mechanics 2005;131:10.
- [20] FELIPPA CA. Introduction to Finite Elements Methods: Material assembled from Lecture Notes for the course. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA. 2004.
- [21] Abdalla Fo JE, Fagundes FA, Machado RD. Identification and elimination of parasitic shear in a laminated composite beam finite element. Adv Eng Software. 2006;37:522-32.
- [22] I. M. Smith DVG, L. Margetts. PROGRAMMING THE FINITE ELEMENT METHOD: John Wiley & Sons Ltd; 2014.
- [23] Dow JOS, Z. W.; Feng, C. C.; Bodley, Carl; . Equivalent Continuum of Structures Composed of Repeated Elements. AIAA journal. 1985;23:6.
- [24] Dow JO, Byrd DE. Error Estimation Procedure for Plate Bending Elements. AIAA journal. 1990;28:8.
- [25] Dow JO, Byrd DE. The Identification and Elimination of Artificial Stiffening Errors in Finite Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1988;26:19.
- [26] Abdalla Fo JE, Belo IM, Pereira MS. A laminated composite plate finite element a-priori corrected for locking. Structural Engineering and Mechanics. 2008;28:31.
- [27] Dow JO, Ho TH, Cabiness HD. Generalized Finite Element Evaluation Procedure. Journal of Structural Engineering. 1985;111:18.
- [28] Dow JO, Cabiness HD, Ho TH. Linear Strain Element with Curved Edges. Journal of Structural Engineering. 1986;112:17.
- [29] Abdalla Fo JE, Dow JO. An Error Analysis Approach fo Laminated Composite Plate Finite Element Models. Computer & Structures 1994;52:6.

- [30] Dow JO, Huyer SA. Continuum Models os Space Station Structures. *Journal of Aerospace Engineering*. 1989;2:19.
- [31] Dow JO, Abdalla Fo JE. Qualitative errors in Laminated Composite Plate Models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994;37:16.
- [32] Taylor RL, Simo, J. C., Zienkiewicz, O. C. and Chan, A. C. H. The patch test—a condition for assessing FEM convergence. *Int J Numer Meth Eng*. 1986;22:39-62.