

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA
E A MATEMÁTICA

RAQUEL POLIZELI

**VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: UM ESTUDO COM
INGRESSANTES E CONCLUINTE DE UM CURSO DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MARINGÁ – PR

2020

RAQUEL POLIZELI

**VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: UM ESTUDO COM
INGRESSANTES E CONCLUINTE DE UM CURSO DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador:

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

MARINGÁ – PR

2020

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

P769v Polizeli, Raquel
Visualização em geometria : um estudo com ingressantes e concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática / Raquel Polizeli. -- Maringá, PR, 2020.
214 f.: il. color.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2020.

1. Educação matemática - Geometria - Ensino Superior. 2. Visualização Geométrica - Ensino Superior. 3. Educação superior - Licenciatura em Matemática - Paraná. I. Franco, Valdeni Soliani, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. III. Título.

CDD 23.ed. 516.007

Síntique Raquel Eleutério - CRB 9/1641

**VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: UM ESTUDO COM
INGRESSANTES E CONCLUINTEs DE UM CURSO DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Luciano Carvalhais Gomes
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof^ª. Dr^ª. Lucieli Maria Trivizoli da Silva
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof^ª. Dr^ª. Claudia Regina Flores
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof^ª. Dr^ª. Karla Aparecida Lovis
Instituto Federal do Paraná – IFPR

Maringá, 30 de junho de 2020.

Dedico esta tese primeiro a Deus.

Porque Dele, e por meio Dele, e para Ele são todas as coisas. A Ele, pois, a glória eternamente.

Rm.1:36

Dedico também à minha filha, Maria Isabela, cujas batidas do coração e os chutinhos me incentivam no final deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por seu infinito amor e cuidado. Por estar comigo sempre, por me capacitar e colocar pessoas especiais que me ajudam a seguir os propósitos Dele em minha vida.

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta pesquisa. Minha sincera gratidão a todos. A algumas dessas deixo registado nominalmente aqui meu ‘muito obrigada’.

Pelo acolhimento, compreensão, carinho, amizade, entusiasmo, apoio, aprendizado, incentivo e por expandir meus horizontes, registro minha admiração e meu agradecimento especial ao Prof.º Dr.º Valdeni Soliani Franco, meu orientador neste trabalho.

Por estarem sempre me incentivando, me ouvindo, me encorajando, agradeço à minha irmã, aos meus pais, irmão, cunhada e sogra. Em especial, pela paciência, parceria, amor e carinho agradeço ao meu marido, Jonathas Coutinho Corradi.

Pelo suporte e compreensão, sou grata à Camila Mangolim.

Pelo aprendizado, apoio e incentivo no início do meu percurso na pesquisa em Educação Matemática, agradeço à Prof.ª Dr.ª Lilian Akemi Kato e aos integrantes, de 2014 e 2015, do grupo GIEME-UEM, em especial à Michele Carvalho de Barros, Bárbara Cândido Braz e Priscila Amara Patrício de Melo.

Aos colegas do PCM que fizeram parte da minha caminhada, especialmente aos integrantes do grupo GPEG-UEM, pela parceria, experiências compartilhadas e aprendizado.

À instituição de ensino, aos participantes e todos que tornaram a pesquisa possível, em especial as professoras doutoras Patrícia Hernandes Baptistelli, Roseli Nozaki e Mariana Moran Barroso.

Pelas contribuições e leitura atenciosa do meu trabalho, meu sincero agradecimento à Prof.ª Dr.ª Claudia Regina Flores, Prof.ª Dr.ª Karla Aparecida Lovis, Prof.ª Dr.ª Lucieli Maria Trivizoli da Silva, Prof.º Dr.º Luciano Carvalhais Gomes e a Prof.ª Dr.ª Clélia Maria Ignatius Nogueira.

À secretária do PCM, Sandra Grzegorzcyk, por seu trabalho, atenção, carinho e cuidado.

Por permitir minha dedicação integral à pesquisa, agradeço aos professores do DAMAT e à UTFPR- CM.

*A mente que se abre a uma nova ideia jamais
voltará ao seu tamanho original.*

(Albert Einstein)

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo investigar a atividade de Visualização na resolução de tarefas de Geometria, pelos integrantes de dois grupos de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná. A motivação para este estudo deu-se a partir da participação da pesquisadora no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, no qual a Visualização era um dos principais temas de interesse na época. Este trabalho é de cunho qualitativo, pautado no paradigma interpretativo e segue a modalidade estudo de casos múltiplos. Teve como unidades de análise um grupo formado por oito acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática e outro formado por oito membros que já haviam cursado as disciplinas de Geometria deste curso. Nessa pesquisa a Visualização Geométrica entendida como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, na qual são articuladas imagens mentais, representações externas, ações de interpretação para a visualização e as habilidades para a visualização, de modo que proporcione a integração entre as funções heurística e discursiva. Essa adoção teve como base as aproximações delineadas neste estudo entre as concepções de Duval e Gutiérrez. O instrumento de análise escolhido para a produção dos dados desta pesquisa se constituiu a partir de uma entrevista semiestruturada, cuja estrutura foi pautada em seis tarefas do tipo problema de exploração, no contexto geométrico em que a Visualização é requerida. Os dados foram analisados a partir de procedimento metodológico descritivo, em que foram estabelecidas categorias *a priori*, pautadas na concepção de Visualização Geométrica adotada. Observou-se pela análise realizada que a produção de imagens mentais esteve presente no raciocínio dos entrevistados dos dois grupos, bem como o uso das representações externas, auxiliando no desenvolvimento e na expressão para a comunicação do raciocínio. Pôde-se notar que o processo de interpretação de informações obtidas a partir de imagens foi o mais requerido nas tarefas escolhidas. Observou-se que as habilidades foram mobilizadas como esperado em cada tarefa por parte de alguns dos participantes dos dois grupos, porém, nota-se que são necessárias estratégias para a promoção do seu uso e desenvolvimento, principalmente nos membros do grupo dos ingressantes. Pode-se inferir que as funções heurística e discursiva são empregadas nas resoluções das tarefas e que a coordenação entre elas ocorre, mas observou-se que o emprego dessas funções pode ser melhorado, visto que são notadas dificuldades, principalmente em relação ao emprego da função discursiva, por parte dos integrantes dos dois grupos e que essas dificuldades são acentuadas nas produções dos ingressantes. Também foram percebidas dificuldades com respeito a conceitos como quadrado, triângulo retângulo, rotação, translação. Observou-se que ao invés de evocarem o conceito em si, os entrevistados mobilizam uma imagem do conceito que é limitada do ponto de vista matemático, evidenciando dificuldade na formalização e em relação a características que definem os objetos matemáticos. Pôde-se observar ainda que os argumentos apresentados nas respostas das tarefas pelos participantes do grupo dos iniciantes eram mais sucintos, perceptivos e intuitivos quando comparados aos apresentados pelos membros do outro grupo. E como era esperado, o grupo daqueles que já haviam cursado as disciplinas de Geometria do curso tiveram um melhor desempenho em suas respostas, embora também se observe argumentos perceptivos e intuitivos em suas respostas. De modo geral, a esta pesquisa evidencia a necessidade de busca de estratégias que promovam o conhecimento, o manuseio e a aplicação dos elementos que compõem a Visualização Geométrica, em especial, as duas ações de interpretação da informação, as habilidades de visualização, as funções heurística e discursiva. Para que a visualização seja de fato efetiva e contribua com a aprendizagem em Geometria.

Palavras-chave: Educação Matemática. Visualização Geométrica. Habilidades de Visualização. Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

This research aims to investigate the Visualization activity in Geometry tasks solution, by two different groups of undergraduate students from a Mathematics Degree course at a State University in Northern Paraná. The thing that motivated this study is the involvement of the researcher at the Research Group in Teaching Geometry- GPEG, which had Visualization as one of the main topics of interests at that time. This is a qualitative research grounded on the interpretive paradigm and the multiple case study. The units of analysis consist of a group of eight Mathematics Degree's freshmen and another group composed by eight students who had previously attended the Geometry subjects. In this research, Geometric Visualization is thought to be a cognitive activity intrinsically semiotic, in which mental images, external representation, elements of interpretation for image view, and visual abilities are articulated, so that, there is an integration among heuristic and discursive functions. This choice was based on outlined approximations in this study within Duval and Gutiérrez's rationale. The analysis instrument chosen for the production of the data was constituted from a semi-structured interview, whose structure was guided in six tasks of the type exploration problem, in the context geometric where the Visualization is required. Data were analysed from the descriptive research method, in which categories were established based on the Geometric Visualization idea applied. It was observed that the production of mental images was present in both interviewees groups' reasoning, as well as the use of external representations, supporting the development and expression of the reasoning communication. The interpretation process of information taken from images was noticed to be one of the most required on the chosen tasks. Abilities were noticed to be applied as it was expected in each one of the tasks, considering only some of the people from both groups, however some strategies are needed to promote their use and development, specially from the freshmen group. That can be inferred that heuristic and discursive functions are used in tasks solutions, and there is a coordination between them, in spite of this, that was observed that the application of these two functions can be enhanced, considering that difficulties are noticed, mainly taking into account the two groups discursive function usage, and these difficulties are stronger in freshmen productions. Difficulties concerning concepts such as square, right triangle, rotation and translation were also noticed. That was perceived that, instead of remembering the concept itself, the interviewees mobilized a concept image, which is restricted from the mathematics perspective, highlighting the difficulty in formalize and also in regard to the features that define mathematical objects. It could be noticed that the arguments on the freshmen's answers were more concise, perceptive, intuitive than those presented by the members of the other group. Furthermore, as a foregone conclusion, those who had already attended the Geometry subjects, had a better outcome in their answers, even though that perceptive and intuitive arguments were noticed in their answers. In general, this research highlights the need to search for strategies that promote the knowledge, handling and application of the elements that make up Geometric Visualization, in particular, the two actions of interpretation of information, visual abilities, heuristic and discursive functions. For Visualization to be truly effective and contribute to learning in Geometry.

Keywords: Math Education. Geometric Visualization. Visual Abilities. Degree in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Demonstração da primeira proposição de Euclides, feita na obra “Os Elementos”	23
Figura 2 – Retângulos	36
Figura 3 – Comparação das análises dualista e cognitiva da utilização de uma figura 2D em um dado problema	44
Figura 4 – Problema de comparação de áreas	47
Figura 5 – Composição de figuras geométricas planas I	50
Figura 6 – Composição de figuras geométricas planas II	51
Figura 7 – Representação de uma figura espacial	51
Figura 8 – Representação de uma peça tridimensional e suas vistas	52
Figura 9 – Representação mental da montagem de um cubo a partir de uma planificação	52
Figura 10 – Configurações de triângulos	53
Figura 11 – Concepção adotada de Visualização Geométrica	57
Figura 12 – Tarefa 1 – Identificando os quadrados	84
Figura 13 – Tarefa 2 – Faces do cubo	85
Figura 14 – Tarefa 3 – O que você vê?	85
Figura 15 – Tarefa 4 – Vista de uma peça tridimensional	86
Figura 16 – Resposta do item b da tarefa 4	87
Figura 17 – Resposta do item c da tarefa 4	87
Figura 18 – Tarefa 5 – Movendo as peças	87
Figura 19 – Tarefa 6 – Configuração de triângulos	88
Figura 20 – Reconfiguração I da figura apresentada na Tarefa 6	88
Figura 21 – Reconfiguração II da figura apresentada na Tarefa 6	89
Figura 22 – Reconfiguração III da figura apresentada na Tarefa 6	89
Figura 23 – Composição de quadrados	102
Figura 24 – Figuras com todas as medidas dos lados iguais e ângulos de 90°	103
Figura 25 – Respostas de J1, J2 e J5 ao item a da tarefa 1	105

Figura 26 – Respostas de I6 e I8 ao item a da tarefa 1	106
Figura 27 – Respostas de J4, J5 e J8 ao item b da tarefa 1	108
Figura 28 – Respostas de I1 e I4 ao item b da tarefa 1.....	109
Figura 29 – Respostas de J3, J6 e J8 ao item c da tarefa 1	110
Figura 30 – Resposta de I1, I2 e I8 ao item c da tarefa 1	111
Figura 31 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J1	113
Figura 32 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J4	114
Figura 33 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J6	115
Figura 34 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J8	115
Figura 35 – Resolução do item d da tarefa 1 pelos entrevistado I2, I5 e I6	118
Figura 36 – Planificação de um do cubo	120
Figura 37 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J2.....	121
Figura 38 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J3.....	121
Figura 39 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J4.....	122
Figura 40 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J6.....	122
Figura 41 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado I1	124
Figura 42 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado I8	124
Figura 43 – O que você vê.....	126
Figura 44 – Resolução da Tarefa 3 pelo entrevistado J4.....	127
Figura 45 – Resolução da Tarefa 3 pelo entrevistado J7.....	128
Figura 46 – Resolução da Tarefa 3 pelo entrevistado J8.....	128
Figura 47 – Peça tridimensional e suas vistas	132
Figura 48 – Resolução do item c da tarefa 4 pelos entrevistado J3, J5 e J7.....	133
Figura 49 – Resposta de J1 à tarefa 4	134
Figura 50 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I2	137
Figura 51 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I3	138
Figura 52 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I5	138

Figura 53 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I6	139
Figura 54 – Composição de figuras geométricas planas à partir de duas peças.....	141
Figura 55 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J3.....	142
Figura 56 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J5.....	143
Figura 57 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J7.....	144
Figura 58 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J8.....	144
Figura 59 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I2.....	149
Figura 60 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I3.....	149
Figura 61 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I4.....	149
Figura 62 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I5.....	150
Figura 63 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I6.....	150
Figura 64 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I7.....	151
Figura 65 – Configuração inicial de triângulos.....	154
Figura 66 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado J5.....	156
Figura 67 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado J7.....	156
Figura 68 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado J8.....	157
Figura 69 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I2.....	161
Figura 70 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I3.....	162
Figura 71 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I4.....	162
Figura 72 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I5.....	163
Figura 73 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I7.....	164
Figura 74 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I8.....	164
Figura 75 – Tarefa de Aproximação 1- Completando o cubo.....	202
Figura 76 – Tarefa de Aproximação 2- Comparando áreas.....	203
Figura 77 – Tarefa de Aproximação 3- Cubo cortado.....	203
Figura 78 – Tarefa de Aproximação 4- Simetria.....	204
Figura 79- Tarefa de Aproximação 5- Cubo.....	204

Figura 80 – Tarefa de Aproximação 6 - Simetria.....	205
Figura 81 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 1 – Completando o cubo	206
Figura 82 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 2 – Comparação de áreas	207
Figura 83 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 3 – Cubo cortado	207
Figura 84 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 4 – Simetria	208
Figura 85 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 5 - Dado.....	208
Figura 86 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 6 - Superfícies de revolução..	209

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Classificação dos diferentes Registros de Representação Semióticos.....	32
Quadro 2 – Teses e Dissertações envolvendo visualização obtidas no Catalogo de Teses e Dissertações da CAPES, entre 2010 e 2019	59
Quadro 3 – Artigos nacionais sobre visualização em Geometria obtidos no levantamento entre 2010 e 2019	60
Quadro 4 – Síntese das técnicas de recolha de dados, fontes, formas de registro e momento .	81
Quadro 5 – Categorias de análise para as produções matemáticas dos entrevistados.....	91
Quadro 6 – Respostas dos integrantes do GI aos questionamentos iniciais	101
Quadro 7 – Respostas dos integrantes do GJ aos questionamentos iniciais.....	101
Quadro 8 – Definições de quadrado emergentes no GJ.....	102
Quadro 9 – Definições de quadrado emergentes no GI.....	104
Quadro 10 – Características observadas nas respostas do item c da tarefa 1	111
Quadro 11 – Disciplinas de Geometria ofertadas no curso de Licenciatura em Matemática.	210

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	17
1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	22
1.1 VISUALIZAÇÃO NO CONTEXTO DA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	22
1.2 BREVE EXPLANAÇÃO SOBRE A GEOMETRIA.....	29
1.2.1 Geometria sob o olhar de Duval: Registros de Representação Semiótica	31
1.3 VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: PESQUISAS E CONCEITOS.....	37
1.3.1 Considerações sobre pesquisas inspiradoras em Visualização em Geometria.....	37
1.3.2 Visualização em Geometria sob a perspectiva de Duval	40
1.3.3 Visualização em Geometria sob a perspectiva de Gutiérrez	48
1.3.4 Aproximações entre as concepções de Duval e Gutiérrez	54
1.4 VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: UM LEVANTAMENTO DE PESQUISAS NACIONAIS E INTERNACIONAIS	58
1.4.1 Pesquisas levantadas no Portal de Teses e Dissertações da CAPES e a presente pesquisa	61
1.4.2 Artigos nacionais levantados e a presente pesquisa.....	65
1.4.3 Artigos Internacionais levantados e a presente pesquisa	69
1.5 TAREFAS.....	72
2. VIÉS METODOLÓGICO	75
2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS.....	75
2.2 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	76
2.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA E CONTEXTO DA SELEÇÃO	77
2.4 COLETA DE DADOS	79
2.4.1 Técnicas e procedimentos de recolha de dados.....	80
2.5 ELABORAÇÃO E ESTRUTURA DA ENTREVISTA	82
2.5.1 Descrição do guia para entrevista	83
2.6 PRESSUPOSTOS PARA AS ANÁLISES: CATEGORIAS A PRIORI.....	90
2.7 ESTRUTURA PARA AS ANÁLISES DE CADA TAREFA.....	92
2.7.1 Estrutura para análise da Tarefa 1	92
2.7.2 Estrutura para análise da Tarefa 2.....	94
2.7.3 Estrutura para análise da Tarefa 3.....	95

2.7.4 Estrutura para análise da Tarefa 4.....	96
2.7.5 Estrutura para análise da Tarefa 5.....	97
2.7.6 Estrutura para análise da Tarefa 6.....	98
3. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	100
3.1 RESPOSTAS DOS QUESTIONAMENTOS INICIAIS DA ENTREVISTA	100
3.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 1	101
3.2.1 Análise sobre o que os entrevistados entendem por ‘Quadrado’	102
3.2.2 Análise do item a da Tarefa 1	104
3.2.3 Análise do item b da Tarefa 1	107
3.2.4 Análise do item c da Tarefa 1	109
3.2.5 Análise do item d da Tarefa 1	112
3.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 2	119
3.3.1 Análise da Tarefa 2 referente ao grupo J	120
3.3.2 Análise da Tarefa 2 referente ao grupo I.....	123
3.4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 3	125
3.4.1 Análise da Tarefa 3 referente ao grupo J	126
3.4.2 Análise da Tarefa 3 referente ao grupo I.....	130
3.5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 4	132
3.5.1 Análise da Tarefa 4 referente ao grupo J	133
3.5.2 Análise da Tarefa 4 referente ao grupo I.....	136
3.6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 5	141
3.6.1 Análise da Tarefa 5 referente ao grupo J	141
3.6.2 Análise da Tarefa 5 referente ao grupo I.....	147
3.7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 6	154
3.7.1 Análise da Tarefa 6 referente ao grupo J	154
3.7.2 Análise da Tarefa 6 referente ao grupo I.....	160
4. DISCUSSÕES	168
4.1 DISCUSSÃO ACERCA DAS CATEGORIAS ANALISADAS NO BLOCO 1	168
4.1.1 Produção de imagem mental	168
4.1.2 Utilização de representações externas.....	170
4.1.3 Realização de ações de interpretação de informação	171
4.1.4 Mobilização de habilidades para a Visualização	173
4.2 DISCUSSÃO ACERCA DAS CATEGORIAS ANALISADAS NO BLOCO 2	177

4.2.1 Emprego da função heurística.....	177
4.2.2 Emprego da função suporte.....	179
4.2.3 Emprego da função discursiva	179
4.2.4 Realização de conversões.....	181
4.3 DISCUSSÃO ACERCA DAS CATEGORIAS ANALISADAS NO BLOCO 3	182
4.3.1 Respostas matematicamente aceitáveis.....	183
4.3.2 Respostas matematicamente não aceitáveis	184
4.4 DISCUSSÃO GERAL	185
CONSIDERAÇÕES	187
REFERÊNCIAS	193
APÊNDICE A - TAREFAS DE APROXIMAÇÃO	202
APÊNDICE B - DISCIPLINAS DE GEOMETRIA OFERTADAS NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	210
APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	211
APÊNDICE D - TERMO DE CONSENTIMENTO PARA REALIZAÇÃO DE PESQUISA	213

INTRODUÇÃO

Em Matemática, a visualização não é um fim em si, mas um meio para atingir um fim, que é o entendimento.

(Zimmermann e Cunningham)

A presente pesquisa foi motivada a partir da participação da autora desta tese nos estudos realizados pelo grupo de pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG. O foco do grupo são pesquisas que contribuam e auxiliem no ensino e na aprendizagem da Geometria, devido à experiência e interesse na área de seu fundador, Prof. Dr.º Valdeni Soliani Franco, também orientador desta tese. No período em que a autora iniciou a participação no grupo, a Visualização em Geometria, em especial as pesquisas de Presmeg (1986, 2006), vinham sendo o assunto principal das discussões.

Com base nas discussões promovidas no grupo, a curiosidade levou à busca de novos materiais sobre Visualização em Geometria. Além das pesquisas de Presmeg (1986, 2006), a autora teve contato inicialmente com as pesquisas de Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b), Costa (2000), Fernández Blanco (2011, 2013, 2014), Godino, Gonzato e Fernández Blanco (2011), Flores, Wagner e Buratto (2012), Buratto (2012), Duval (2015), entre outros. O estudo dessas pesquisas evidenciou a pluralidade de significados e mecanismos relacionados ao termo Visualização em Matemática, as várias perspectivas existentes e suas potencialidades no ensino e na aprendizagem, principalmente em Geometria.

As pesquisas de Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b) e Fernandez Blanco (2011, 2013, 2014) tratam da Visualização em futuros professores na Espanha com foco em questões envolvendo Geometria Euclidiana. Essas pesquisas evidenciaram, naquele contexto, a necessidade em se projetar e implementar ações específicas para promover a melhoria, tanto em relação à atividade de Visualização quanto aos conceitos no ensino da Geometria.

Com o estudo desses trabalhos, indagações surgiram: Como acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade no Brasil resolvem tarefas de Geometria Euclidiana em que a Visualização é requerida? Como se dá a atividade de Visualização nesse público? Há diferenças na atividade de Visualização de alunos ingressantes e de concluintes? Os conceitos geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para eles?

Buscando caminhos para responder a estas questões, procurou-se por mais referências por meio de um levantamento de trabalhos brasileiros no período de 2010 a 2019, o qual será

descrito no capítulo 1. Com isso, pode-se observar que, das 07 pesquisas entre teses e dissertações sobre Visualização em Geometria analisadas, nenhuma investigou a Visualização no nível superior de ensino. A pesquisa de Kawamoto (2016) apresenta questionamentos próximos aos levantados, porém é uma pesquisa diagnóstica com estudantes do 3º Ano do Ensino Médio. Dentre os 11 artigos analisados, somente um – Mota e Laudares (2013) – trata de uma pesquisa aplicada a alunos de Licenciatura em Matemática, porém traz um estudo que visa promover a exploração de habilidades de visualização. Pelo levantamento de pesquisas internacionais no período de 2016 a 2019, dentre as 05 pesquisas analisadas não havia estudos com o nível superior.

Assim, o projeto desta pesquisa tomou forma como um estudo diagnóstico que se insere no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Para buscar compreender se há diferenças na atividade de visualização e na consolidação de conceitos da Geometria Euclidiana requeridos entre alunos ingressantes e concluintes, dois grupos participaram da pesquisa. Um deles formado por acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná e outro grupo formado por participantes que já haviam concluído as disciplinas de Geometria¹ do referido curso.

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo, segundo a modalidade estudo de casos múltiplos. A fundamentação teórica para análise dos dados pautou-se nas ideias apresentadas por Duval e por Gutiérrez sobre a Visualização em Geometria. Com base nessas ideias, que também serão apresentadas adiante, a Visualização Geométrica é entendida neste trabalho como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, na qual são articuladas imagens mentais, representações externas, ações de interpretação para a visualização e as habilidades para a visualização, de modo que proporcione a integração entre as funções heurística e discursiva.

Este trabalho visa colaborar para levar à discussão a temática da Visualização em cursos de Licenciatura em Matemática e contribuir para que sejam levantadas mais alternativas que favoreçam a aprendizagem em Geometria no Ensino Superior. É importante não só tratar os vários conceitos ligados à Visualização, mas também favorecer o aprendizado durante a formação em Matemática, através de abordagens que levem em conta a promoção da Visualização, para que além de aprender os conceitos Matemáticos durante a graduação, os

¹ No primeiro semestre do primeiro ano é oferecida a disciplina de Geometria Analítica; no segundo semestre do segundo ano, Geometria Euclidiana; Construções Geométricas é ofertada no primeiro semestre do terceiro ano e Introdução à Geometria Não-Euclidiana, no primeiro semestre do quarto ano.

futuros professores tenham familiaridade com a Visualização para utilizá-la como aliada no ensino.

Assim, o presente estudo tem sua relevância para a Educação Matemática, uma vez que está inserido no âmbito da formação inicial de professores de Matemática e aborda a Visualização como uma atividade que pode auxiliar no ensino e na aprendizagem, principalmente em Geometria. Esta afirmação se baseia no fato que, segundo Duval (2015), principalmente na Geometria “as figuras servem como suporte à intuição e evidenciam em um objeto visível relações ou hipótese que não são claramente evidentes em uma declaração verbal” (DUVAL, 2015, p. 1, tradução nossa). Além disso, a Visualização também auxilia na atribuição da concretude na elaboração e aquisição do conhecimento matemático, como explica Santos (2014).

Com o intuito de responder como acadêmicos ingressantes e concluintes do curso de Licenciatura em Matemática resolvem tarefas de Geometria Euclidiana em que a visualização é requerida, se há diferenças nas suas atividades de visualização e se os conceitos geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para ambos os grupos, formulou-se o seguinte objetivo geral: Investigar a atividade de visualização na resolução de tarefas de Geometria², em especial a mobilização de imagens mentais, das ações de interpretação de informações e das habilidades mobilizadas para visualização, bem como a coordenação entre as funções heurística e discursiva pelos integrantes de dois grupos de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná, o grupo de ingressantes no curso e o grupo daqueles que concluíram as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do referido curso.

Para isso, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- a) identificar a mobilização de imagens mentais, o uso de representações externas, as ações de interpretação de informações e as habilidades para visualização pelos participantes ingressantes no referido curso e nos participantes que concluíram as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do curso;
- b) identificar se os conceitos Geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para ambos os grupos;

² A fundamentação do conceito encontra-se na seção 2.5 do capítulo 2. De modo resumido, neste trabalho, entende-se por resolução de tarefas de Geometria, a resolução de questões, segundo Ponte (2005), do tipo problema de exploração, no contexto geométrico, em sua maioria de média duração e com grau de desafio variados. Os problemas escolhidos ou desenvolvidos envolvem a utilização e a manipulação de imagens, mentalmente ou externamente em papel, e foram baseados/inspirados em problemas utilizados nas pesquisas de Fernandez Blanco (2011) e Kawamoto (2016).

- c) identificar se há a coordenação das funções heurística e discursiva, segundo Duval (2015);
- d) buscar indícios de possíveis contribuições do ensino no curso de Licenciatura em Matemática para o desenvolvimento das habilidades para a visualização;
- e) verificar se os argumentos apresentados nas respostas das tarefas apresentam variações quanto ao uso das habilidades para a visualização pelos participantes dos dois grupos.

Para alcançar esses objetivos foram realizados estudos sobre Geometria, Visualização e Visualização em Geometria. Estes alicerçaram o desenvolvimento dos mecanismos para a coleta de dados (a saber, entrevista semiestruturada pautada na resolução de tarefas de Geometria em que a visualização é requerida), assim como para a construção das categorias *a priori* que norteiam as análises.

Com relação à estrutura da tese, esta está organizada em cinco capítulos. No primeiro capítulo são apresentadas a fundamentação teórica e a revisão bibliográfica realizada para o trabalho. Esse capítulo aborda a Visualização no contexto da pesquisa em Educação Matemática, discutindo acerca da importância da Visualização em Matemática e sua pluralidade de conceitos. Apresenta um breve apanhado sobre Geometria, discutindo-a principalmente sob a perspectiva de Duval (1999b, 2012, 2015), aborda pesquisas sobre Visualização em Geometria que inspiraram este estudo – com destaque para as ideias de Duval (1999b, 2012, 2015) e Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b, 2018) – e apresenta, também, aproximações entre as ideias desses dois pesquisadores sobre o tema. Ao final é apresentado um levantamento de trabalhos dos últimos dez anos com foco na Visualização em Geometria e como esses se relacionam com a presente pesquisa. Fechando o capítulo, será apresentado o referencial teórico utilizado sobre o conceito de ‘Tarefa’ utilizado nesta pesquisa.

O segundo capítulo expõe o viés metodológico da pesquisa, descrevendo as opções metodológicas, o desenvolvimento da pesquisa, os participantes da pesquisa e contexto da seleção. Descreve também a elaboração e a organização das ferramentas de produção e coleta de dados. Por fim, apresenta os pressupostos estabelecidos para as análises, as categorias *a priori* e a estrutura para análise de cada tarefa.

No terceiro capítulo discorreremos sobre a análise e discussão dos resultados. Neste capítulo são apresentados os dados coletados por meio da observação realizada e das produções escrita e oral dos entrevistados referentes as respostas, bem como a análise referente à categorização em cada tarefa.

O capítulo quatro traz as discussões acerca das categorias analisadas referentes aos três blocos de análise estabelecidos e uma discussão geral relacionando os resultados com a teoria, abordando possíveis restrições para as conclusões e recomendações para pesquisas futuras.

Por fim, as considerações apresentam uma análise de todo o trabalho desenvolvido em coerência com a introdução, relembra os objetivos e o problema da pesquisa e as considerações referentes a esses objetivos. Finalizando com uma proposta de continuidade e melhorias para futuras pesquisas na perspectiva desta.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo trata da Visualização no contexto da pesquisa em Educação Matemática, da Visualização em Geometria, abordando pesquisas que inspiraram este trabalho, com destaque para as ideias de Duval (1999b, 2012, 2015) e Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b, 2018) apresentando aproximações entre as ideias desses dois pesquisadores.

Esta seção traz um olhar sobre a Geometria, em que serão tecidas considerações sobre a sua natureza e, pautados na perspectiva de Duval (1999b, 2012, 2015) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, serão apresentadas particularidades do ensino e aprendizagem deste ramo da Matemática.

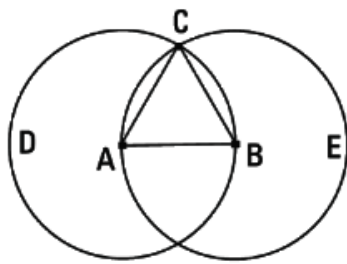
Serão discutidos também trabalhos nacionais e internacionais que abordam o tema da Visualização em Geometria e quais suas aproximações e distanciamentos com relação a este trabalho. Os materiais compreendem publicações realizadas entre os anos de 2010 e 2019 e foram levantados através do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, do Portal de Periódicos da CAPES e também pelos portais Scielo e Google Acadêmico. Para concluir este capítulo, será apresentado o conceito de Tarefa que é utilizado nesta pesquisa.

1.1 VISUALIZAÇÃO NO CONTEXTO DA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O pensamento pautado no uso e/ou formação de imagens, na mente ou fora dela, é uma característica da prática matemática e ocorre em vários níveis. O pensamento espacial, o raciocínio visual, a visualização, entre outros, são termos utilizados na literatura que remetem a um raciocínio que alimenta e é alimentado pela intuição e pela criatividade. Esses tipos de raciocínio foram combustíveis para o início do desenvolvimento da Matemática, e assim foi durante muito tempo.

Podemos citar, como primeiro exemplo, o forte emprego das imagens nos argumentos utilizados por Euclides na sua obra “Os Elementos” (2009), na demonstração da proposição 1, cujo enunciado é: “Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada”:

Figura 1 – Demonstração da primeira proposição de Euclides, feita na obra “Os Elementos”



Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

[Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer.

Fonte: Euclides (2009, p. 99).

Destaca-se que nesta demonstração foram utilizados o postulado 1 (quando se constrói o segmento de reta AC e BC), o postulado 3 (quando se constrói as circunferências) de Euclides (2009, p. 98), e a noção comum 1, que está em Euclides (2009, p. 99). Além disso, é importante observar que em Euclides (2009) a reta é um infinito em potência³, e não em ato, por isso, o que se denomina hoje de ‘segmento de reta’, para Euclides, era uma “reta limitada”, mas pelo postulado 2, em Euclides (2009, p. 98), a reta pode ser prolongada indefinidamente.

Voltaremos a falar do formalismo a seguir, pois saltamos para o século XVII, e percebemos que as imagens continuavam fundamentais para conclusões matemáticas, conforme exemplo citado por Rival (1987) devido a Isaac Newton:

Mesmo Isaac Newton, comumente creditado com a invenção do cálculo, na verdade não provou seus teoremas fundamentais - pelo menos, não de acordo com os rigorosos

³ Importante lembrar que o infinito em potência é o infinito que está “além de ...”, ele não é atingível. Por exemplo, ao escrever que no conjunto dos naturais estão os números: 1, 2, 3, ..., ou no caso em questão, que a reta pode ser sempre prolongada. Já o infinito em ato é o infinito real(izado), terminado, concreto, alcançado, etc. Por exemplo, ao escrever que o conjunto dos naturais é {1, 2, 3, ...}, ou no caso em questão, na Geometria Euclidiana formalizada por Hilbert, temos o axioma que diz que dois pontos determinam uma reta, ou seja, aqui, a reta já é completa, ela está lá inteira, não é necessário prolongá-la passo a passo para se chegar ao infinito..

padrões de prova formal de hoje. Ao discernir as propriedades das diferentes classes de funções algébricas (relações que definem uma variável em termos de uma outra ou mais variáveis, tais como como $y = x^2 + 1$, ele o fez, presumimos, selecionando um exemplo e contemplando seu gráfico, fazendo generalizações e testes com experimentações adicionais. Assim, as regras que ele criou para determinar a inclinação do gráfico de uma função, embora úteis, não se baseavam sobre uma base formal. Se você tivesse pedido a ele para justificá-los, ele provavelmente teria apresentado um argumento que, embora convincente, estava solto e dependia fortemente de imagens.⁴ (RIVAL, 1987, p. 3, tradução nossa).

Essa forma de raciocínio, intuitivo e fortemente pautado no pensamento visual, é considerado por autores como Rival (1987) e Mancosu (2005), entre outros, como visualização. Porém, essa visualização presente no início do desenvolvimento da Matemática passou a ser renegada a partir do século XIX, dando lugar ao formalismo.

Rival observa que “o estilo de argumento intuitivo e muitas vezes persuasivo usado por Newton e seus contemporâneos caiu em descrédito durante o século XIX, depois que provou ser enganoso, em vários casos famosos” (RIVAL, 1987, p. 3, tradução nossa). Também Mancosu (2005) comenta que “o desenvolvimento da Matemática no século XIX havia mostrado que afirmações matemáticas que pareciam óbvias devido a uma visualização intuitiva e imediata acabavam incorretas em uma inspeção mais minuciosa” (MANCOSU, 2005, p. 13, tradução nossa). Rival (1987) diz que esse período poderia ser nomeado de “crise na intuição”.

Zimmermann e Cunningham (1991) consideram que nesse período houve a “degradação da consciência geométrica”, segundo eles “[...] Durante esse período o formal, o simbólico, o verbal e o analítico prosperaram muito” (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 2, tradução nossa).

É importante lembrar que ambos o formalismo e o processo de visualização são importantes, tanto na produção matemática bem como em seu ensino e aprendizagem. O formalismo algébrico tem grande importância, porém, isoladamente não é garantia de certeza, como frisa Rival (1987), lembrando que “a ortodoxia dedutiva também é enganosa na sua promessa de certeza” (RIVAL, 1987, p. 5, tradução nossa).

O uso do formalismo algébrico em detrimento à utilização da intuição em Geometria também passou a ser forte no ensino. Porém, a importância de se resgatar o raciocínio pautado

⁴ “Even Isaac Newton, commonly credited with the invention of the calculus, did not actually prove its fundamental theorems—at least, not in accordance with today’s stringent standards of formal proof. In discerning the properties of classes of algebraic functions (relationships that define one variable in terms of one or more other variables, such as $y = x^2 + 1$, he would, we presume, select an example, contemplate its graph, draw generalizations, and test them with further experimentation. Thus, the rules he created for determining the slope of a function’s graph, while useful, did not rest on a formal foundation. Had you asked him to justify them, he would likely have presented an argument that, though compelling, was loose and depended heavily on pictures”. (RIVAL, 1987, p. 3).

na intuição, no uso e/ou formação de imagens vem crescendo, pois, esse tipo de raciocínio, também considerado visualização, é capaz de gerar *insights* e conhecimento.

Na Educação Matemática o interesse pela visualização ressurgiu ao longo das últimas cinco décadas. Segundo Presmeg (2006), no final da década de 1970 foram iniciadas as primeiras pesquisas em Visualização no campo da psicologia e “durante a década de 1990, ela passou a ser reconhecida como um campo significativo para a Matemática” (PRESMEG, 2006 p. 233, tradução nossa).

Fernández Blanco (2013) argumenta que tal ressurgimento é devido principalmente a duas razões. Segundo ela, a primeira razão está relacionada ao uso de novos elementos e ambientes de aprendizagem próprios do mundo altamente tecnológico em que vivemos e aos avanços tecnológicos. Diz ainda que “essas ferramentas tecnológicas conduzem a mudanças nos recursos semióticos e nas representações e vice-versa, o que leva a investigar sobre os processos visuais que estão acontecendo” (FERNÁNDEZ BLANCO, 2013, p. 19, tradução nossa). A segunda razão está relacionada às “mudanças de concepção da própria natureza da Matemática, segundo a qual a Matemática é entendida como uma busca de padrões e a Visualização será uma ferramenta fundamental para reconhecer esses padrões” (FERNÁNDEZ BANCO, 2013, p. 19, tradução nossa).

Bishop (1989) e Presmeg (1986) contribuíram para o estabelecimento da Visualização como um campo de pesquisa em Educação Matemática. Bishop (1989), apresenta uma revisão de pesquisas sobre a Visualização na Educação Matemática, examinando a situação das pesquisas na época. O autor comenta também que pesquisas sobre Visualização eram tratadas por uma abordagem psicométrica em psicologia e que estudos posteriores mostraram que essa era uma abordagem inadequada para o estudo do processo de visualização. Cita: “ Guay *et al.* (1978), que finalmente convenceu muitas pessoas de que a abordagem psicométrica era inadequada para o estudo do processo de visualização” (BISHOP, 1989, p. 172, tradução nossa). Presmeg (1986) é uma referência em pesquisas sobre Visualização e foi um dos primeiros trabalhos aplicados sobre o tema.

A visualização, como cita Mancosu (2005), vem sendo amplamente discutida em pesquisas de várias áreas diferentes, incluindo Ciência da Computação, Matemática, Ensino de Matemática, Psicologia Cognitiva e Filosofia.

Percebe-se nessas pesquisas que a palavra ‘visualização’ passou a assumir diversas interpretações. Na fala cotidiana, isto é, no senso comum, muitas vezes essa palavra é interpretada como sinônimo de visão, no sentido relativo ao sistema sensorial, ou como o “formar uma imagem mental” de algo. Nas pesquisas, a visualização às vezes é interpretada

como no senso comum, outras vezes, dependendo do enfoque ou ponto de vista, ela ganha complementos que variam desde o seu entendimento a especificações que a restringe a um determinado campo.

Segundo o “dicionário Aurélio”, Ferreira (2010), ‘visualização’ é um substantivo que indica o ato, processo ou efeito de visualizar ou ainda transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. Por sua vez, ainda segundo este dicionário, visualizar é um verbo e pode ser entendido como uma ação, e significa: tornar visível, mediante manobra ou procedimento ou formar ou conceber uma imagem visual mental de (algo que não existe no momento).

Neste estudo a visualização é compreendida como uma forma de pensamento que vai além do simples ato de ver ou da percepção. Assim como Santos e Mikuska (2019), este estudo compreende que há relações entre a visualização, visão, percepção e representação, porém a visualização não se restringe a nenhum desses conceitos.

Em Buratto (2012) pode ser observada uma lista com dezoito concepções de Visualização em Educação Matemática. Em várias dessas concepções, como em Presmeg (1986), Zimmermann e Cunningham (1991), Gutiérrez (1996a) e Duval (1999b), a visualização é entendida como processo de visualizar, relacionado ao tipo de ação que cada autor entende como sendo visualizar. “A visualização é levada a incluir processos de construção e transformação de imagens mentais visuais e todas as inscrições de natureza espacial que possam estar envolvidas na matemática” (PRESMEG, 2006, p.3, tradução nossa).

Por exemplo, em Premeg (1986) a Visualização está relacionada ao processo de formação de uma imagem visual, sendo essa imagem entendida como um esquema mental. Zimmermann e Cunningham (1991) adotam o termo ‘Visualização Matemática’ para descrever o “processo de produção e uso de elementos geométricos ou representações gráficas de conceitos matemáticos, princípios ou problemas, desenhados à mão ou gerado por computador para a descoberta e o entendimento matemáticos” (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 3, tradução nossa).

Para Gutiérrez (1996a) “o processo de visualização é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 10, tradução nossa) que integra quatro elementos: imagens mentais; as representações externas; as ações de interpretação de informações para geração de imagens e também a “leitura” de imagens (obter informações a partir da imagem); e as habilidades para a visualização (esses quatro elementos encontram-se definidos na subseção 1.3.3).

Para Duval (1999b), a Visualização é entendida como “uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica” (DUVAL, 1999b, p. 13, tradução nossa). Como será exposto na subseção 1.3.2, Duval (2015) a Visualização em Geometria requer a integração entre as funções heurísticas (que perpassa pela desconstrução dimensional) e discursiva (relacionada as propriedades matemáticas), passando por uma função de suporte para verificações concretas.

A importância da visualização, em sua multiplicidade de conceitos, e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem Matemática têm sido enfatizadas em diversas pesquisas ligadas à Educação Matemática. Flores, Wagner e Buratto (2012) relatam que:

[...] muitas pesquisas ligadas à educação matemática passaram a enfatizar a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem matemática (PRESMEG 1989; ZIMMERMAN; CUNNINGHAM, 1991; DREYFUS, 1991; ARCAVI, 1999); outras exploraram exemplos concretos de visualização e raciocínio visual no contexto da resolução de problemas (ZIMMERMAN, 1991; GOLDENBERG, 1991; TALL, 1991); outras defenderam a ideia de que as tecnologias e softwares matemáticos têm papel fundamental no processo de visualização, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade do aluno para visualizar em matemática (NEMIROWSKY; NOBLE, 1997; BORBA; VILLAREAL, 2005), e ainda, outras passaram a considerar professores e suas crenças sobre o papel da visualização. (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2010). (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 33).

Nesse artigo, Flores, Wagner e Buratto (2012) apresentam um mapeamento de tendências nas pesquisas brasileiras sobre Visualização na Educação Matemática, pautadas no estudo de Presmeg (2006). As autoras consideraram os trabalhos em anais do Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, entre 1998 a 2010. As tendências elencadas por elas, são:

1. Estudo qualitativo identificando o pensamento visual de estudantes.
 2. Desenvolvimento curricular e visualização.
 3. Influência da tecnologia no pensamento visual.
 4. Questões de gênero e uso de imagens na construção de conhecimentos.
 5. Relutância dos estudantes em lidar com informações visuais.
 6. Aspectos semióticos e representacionais na visualização matemática.
 7. Teorização da visualização para a pesquisa.
- (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 41)

Além das sete tendências elencadas, Flores, Wagner e Buratto (2012) apontam uma oitava tendência: a Visualidade⁵. Também salientam que alguns trabalhos atendem a mais de uma tendência, ou ainda, alguns deles não atendem a nenhuma delas.

⁵Conceito apresentado por Flores (2010). Segundo a autora, visualidade é “a soma de discursos que informam como nós vemos, olhamos as coisas e para as coisas” e “implica conhecer práticas visuais inseridas em processos históricos, em meio a relações de poder e estabelecendo-se como regimes visuais” (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p.43).

As tendências que mais se destacaram nas pesquisas envolvendo Visualização em Geometria obtidas no levantamento que será descrito na seção 1.4 são:

- a) O estudo qualitativo identificando o pensamento visual de estudantes (Souza (2010); Mota e Laudares (2013); Kawamoto (2016); Máximo (2016); Oliveira e Leivas (2017); Utomo, Juniati e Siswono (2017; 2018); Moura (2018); Lovis et al. (2018); Gutiérrez et al. (2018); Nobre e Manrique (2019); Souza, Moretti e Almouloud (2019); Galvão, Souza e Bastos (2019));
- b) a influência da tecnologia no pensamento visual (Palles (2013); Mota e Laudares (2013); Pachemska et al. (2016); Krochin (2017); Moura (2018); Galvão, Souza e Bastos (2019));
- c) aspectos semióticos e representacionais na Visualização Matemática (Palles (2013); Máximo (2016); Nobre e Manrique (2019); Souza, Moretti e Almouloud (2019)) e;
- d) visualidade (Zago e Flores (2010); Wagner (2012); Flores, Wagner e Buratto (2012); Flores (2010; 2012; 2016)).

Durante a realização do levantamento pôde-se notar que muitas das pesquisas sobre Visualização Matemática (que não tratam especificamente da Geometria), nacionais e internacionais, têm foco na representação de dados através da tecnologia, em particular no uso de ambientes dinâmicos de computador, realidades virtuais e impressão 3D (além das já relatadas, Von Gagern *et al.* (2016); Han *et al.* (2017); Kortenkamp (2017); Lebow, Bernhardt-Barry e Datta (2018); Numa e Patterson (2018)).⁶

A Visualização no ensino e aprendizagem da Matemática é um dos tópicos de estudo do Congresso Internacional em Educação Matemática – ICME, desde a participação de Bishop no primeiro ICME, em 1969, relatada em Bishop (2007, p. 18), até os dias atuais.

De acordo com o grupo de estudo do tópico Visualização no Ensino e Aprendizagem de Matemática (TSG-23) do 14º Congresso Internacional em Educação Matemática - ICME-14⁷:

Na pesquisa em educação matemática, a visualização é geralmente referida como o produto e o processo de criação, uso, interpretação e reflexão sobre informações visuais. Ela desempenha um papel importante no pensamento matemático e na maioria dos ramos da matemática: parece haver consenso na comunidade de educação

⁶ Essas pesquisas tiveram a descrição suprimida na seção 2.4 por não tratarem especificamente da Visualização em Geometria.

⁷14º Congresso Internacional em Educação Matemática- ICME-14, (que deveria ser realizado em 2020, em Changhai, China, porém devido à pandemia do Covid-19, foi alterado para julho de 2021). Disponível em: <https://icme14.org/static/en/index.html>. Acesso em: 22 abr. 2020.

matemática de que a visualização é um componente vital do entendimento conceitual, raciocínio, resolução de problemas e provas. (TSG-23,2019, p.1, tradução nossa).⁸

Dentre os subtemas relacionados à Visualização Matemática sugeridos pelos organizadores do evento estão: Visualização como um processo cognitivo; Visualização como um processo social; Visualização como uma construção Matemática; Visualização e novas tecnologias; Visualização e funcionamento neurológico; Visualização e linguagem; Visualização e metodologia de pesquisa; Visualização e teoria; e Visualização na prática escolar e na formação de professores.

Como pode-se constatar, a visualização em Matemática, assim como afirmam Zimmermann e Cunningham (1991), não é um fim em si mesma. Por tratar da visualização relacionada à prática e à formação de professores, este trabalho faz-se relevante. Espera-se contribuir para a aplicação da visualização – em especial em Geometria – como ferramenta nas aulas e para a reflexão dos professores de Matemática sobre o assunto.

1.2 BREVE EXPLANAÇÃO SOBRE A GEOMETRIA

Vivemos em um espaço tridimensional. Estamos cercados pela Geometria. Ela faz parte do nosso cotidiano, sempre lidamos com formas geométricas, relações, medições etc. Segundo Lied (2016), a Geometria é uma área da matemática que, além de proporcionar capacidades e habilidades próprias de sua especificidade, possui uma vasta aplicabilidade, isto é, a partir dela existe a possibilidade de solucionar problemas práticos em várias áreas do conhecimento e do cotidiano.

A Geometria se faz presente desde a antiguidade, estágio em que o aspecto visual é predominante. De acordo com Mammana e Villani (1998, p. 1, tradução nossa) “desde a pré-história as pessoas demonstram um forte desejo de reproduzir os multifacetados aspectos da realidade por meio de desenhos estilizados”. Isso pode ser verificado em vários povos através da história, por exemplo, em pinturas, ornamentos, objetos, construções, entre outros em que são notadas formas geométricas munidas de simetrias ou não, mantendo ou não um padrão.

⁸ “*In mathematics education research, visualization is generally referred to as the product and the process of creating, using, interpreting, and reflecting on visual information. It plays an important role in mathematical thinking and most branches of mathematics: there seems to be consensus in the mathematics education community that visualization is a vital component of conceptual understanding, reasoning, problem solving and proving*”. (TSG-23, 2019, p. 1). Disponível em: <http://icme14.org/static/en/news/37.html?v=1555478896122>. Acesso em: 22 abr. 2019.

Segundo Mammana e Villani (1998, p. 1, tradução nossa), com a expansão das comunidades vieram as melhorias na estrutura e organização da vida social, a Geometria passou a atender principalmente as necessidades utilitárias para medir comprimentos, áreas, volumes, traçar limites de terra. Além disso, ela passa também a desempenhar um papel relevante em outras ciências. Segundo os autores, nesse estágio se começa a perceber uma primeira tentativa de racionalizar (pelo menos localmente) o conhecimento geométrico adquirido. Nesse estágio os aspectos visuais e algorítmicos estão entrelaçados.

O desenvolvimento da Geometria como Ciência, como dito por Mammana e Villani (1998, p. 1, tradução nossa), se dá por razões históricas e culturais, principalmente através da civilização grega. “O interesse deixa de ser somente pelas necessidades práticas e a abstração e os processos de racionalização globais ganham espaço, culminando na sistematização alcançada por Euclides”, exposta na obra *Elementos* (MAMMANA; VILLANI, 1998, p. 1, tradução nossa). Mesmo nessa fase, o emprego do aspecto visual é forte, como exposto na seção 1.1. As fases de forte apego ao formalismo na Geometria e o crescente resgate do raciocínio pautado na intuição, no uso e/ou formação de imagens também foram expostos na seção 1.1.

Atualmente a Geometria ainda inclui, segundo Vilani (2001), uma diversidade de aspectos, tais como: a ciência do espaço (que envolve por diferentes pontos de vista as Geometrias: Euclidiana, Afim, Descritiva, Não-Euclidianas, Combinatórias e a Topologia); método para representar visualmente conceitos e processos de outras áreas da Matemática ou outras ciências (envolvendo gráficos e teoria gráfica, diagramas de várias classes, histogramas etc.); ponto de encontro entre Matemáticas como teoria e Matemáticas como fonte de modelos; uma maneira de pensar e entender, e em um nível mais alto; exemplo paradigmático para o ensino do raciocínio dedutivo; como ferramenta em aplicações tradicionais ou inovadoras, entre outros.

Quanto ao ensino da Geometria, neste trabalho, assim como Costa (2000), entende-se que para o ensino não se deve repetir a história. Também se entende que:

A geometria no ensino da matemática deve ser a geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar; induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; aberta à interdisciplinaridade com as ciências e as artes; paradigma da modelização matemática; predadora de aplicações assombrosas e relações interessantes (...) esta é a geometria com a qual nós gostaríamos de educar todos. (COSTA, 2000, p. 158).

Em Geometria, assim como nos demais ramos da Matemática, os objetos de estudo não são acessíveis fisicamente, ao que de fato temos acesso são suas representações. Por exemplo, na Biologia, uma célula pode ser vista através de um microscópio, ela não é um objeto abstrato que só pode ser acessado através da linguagem explicitando uma ideia.

Na Geometria, assim como a maior parte dos conceitos e resultados matemáticos, é um pouco diferente. Por exemplo, o desenho do triângulo é uma representação desse objeto geométrico, pois um triângulo é de fato definido por um texto, é uma ideia. Do mesmo modo, uma função é uma relação definida por uma lei de formação em que, para cada valor x , há um único valor $f(x)$, porém muitas vezes esse conceito é confundido ou reduzido a uma de suas representações, como o gráfico, a tabela ou o diagrama.

Em Geometria, a confusão entre o conceito e sua representação pode ser acentuada, já que esta é considerada por muitos, assim como para Passos (2000), a parte mais intuitiva da Matemática, concreta e ligada à realidade. Isso pode se dar por conta do forte uso das representações (por exemplo, figuras e modelos) e da confusão entre elas e os objetos que representam.

Duval (2012b, p. 268) salienta que “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos ‘reais’ ou ‘físicos’ ”. O objeto matemático é imaterial, invisível (ou seja, não ostensivo), mas sua "existência" depende das representações, que são materiais, visíveis (ostensivas). Para clarificar estas ideias, a seção seguinte expõe a perspectiva de Duval (1998, 1999b, 2012b, 2015), pautada em sua Teoria dos Sistemas de Registros de Representação Semiótica, sobre a Geometria.

1.2.1 Geometria sob o olhar de Duval: Registros de Representação Semiótica

Segundo Duval (2012b), as representações semióticas são fundamentais na atividade matemática, pois somente por meio delas é que temos acesso aos objetos matemáticos. De acordo com Duval (2011), as representações semióticas são produzidas intencionalmente pela mobilização de um sistema semiótico de representação. Para Duval (1999a), os sistemas semióticos devem permitir o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes a toda representação semiótica: produzir a representação de alguma coisa e permitir a transformação dessa representação em outra por meio da conversão e do tratamento.

Os sistemas que permitem essas atividades são chamados sistemas de registros de representação semiótica, por exemplo: registro figural (figuras geométricas), registro em língua

natural (um enunciado, uma proposição), registro algébrico (fórmulas, expressões algébricas), registro gráfico (gráfico cartesiano). As representações semióticas são diferentes em cada sistema semiótico distintos. Em Geometria os registros mais utilizados são o figural e a língua natural e, como veremos, estes têm particularidades que podem dificultar a compreensão dos conceitos geométricos.

Para Duval (2008), a atividade Matemática do ponto de vista cognitivo é caracterizada não pelos conceitos matemáticos em si, mas pela importância primordial das representações semióticas e pela grande variedade delas utilizadas em Matemática. Nem sempre os alunos – e até mesmo os professores – compreendem o funcionamento dos vários tipos de sistemas de registro de representação semióticos.

Duval (2008) salienta que existem quatro tipos diferentes de registros: os multifuncionais discursivos, multifuncionais não discursivos, monofuncionais discursivos e monofuncionais não discursivos, como descrito no Quadro 1:

Quadro 1 – Classificação dos diferentes Registros de Representação Semióticos

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou teoremas. 	Figuras Geométricas planas ou em perspectiva (configurações em 0, 1, 2 ou 3). <ul style="list-style-type: none"> • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> • Mudanças de sistemas de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2008, p. 14).

A atividade em Geometria utiliza registros multifuncionais pois, segundo Duval (2004), essa atividade se baseia em dois registros: o figural e a língua natural. O primeiro é responsável por designar as figuras e suas propriedades, e o segundo para enunciar definições, teoremas, hipóteses etc..

A aprendizagem em Matemática, de acordo com Duval (2008), se dá pela diferenciação e a coordenação de diferentes registros. Esses processos que levam à apreensão conceitual dos

objetos também em Geometria. Tal processo passa pelas atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose, que são o tratamento e a conversão de representações.

Duval (2012b, p. 272) explica que “o tratamento é uma transformação interna a um registro”, ou seja, “o tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada”. Por exemplo, no registro figural, a transformação (reconfiguração) de um triângulo em dois triângulos com a mesma área é um tratamento, já uma conversão, segundo Duval (2012b, p. 272) “é uma transformação externa ao registro de início”, ou seja, é uma interpretação em outro registro. Por exemplo, partindo do registro em língua natural, lugar geométrico dos pontos que equidistam de um dado ponto fixo, a pessoa desenha uma circunferência (registro figural), houve a conversão entre dois registros. Ou ainda, a conversão pode ocorrer no outro sentido, ou seja, se a partir da figura geométrica de uma circunferência o estudante conseguir enunciar que a distância de um ponto P qualquer desta ao seu centro C é a medida r do raio. O treinamento em um sentido de conversão não está treinando a conversão no outro sentido.

Além do sentido de a conversão poder ser um complicador na compreensão Matemática, Duval (2008) explica que outro fenômeno ligado à atividade de conversão, a de variação de congruência e de não congruência, também pode afetar o sucesso nas operações de conversão. O autor considera a utilização da conversão como um instrumento de análise para pesquisar processos de aprendizagem.

Em Geometria, os tratamentos são também de grande relevância para a aprendizagem. Como observado em Duval (2004), os tratamentos em Geometria são mais específicos devido à complexidade de uma figura.

No presente trabalho entende-se figura no mesmo sentido que Duval, como representação semiótica, por exemplo: figuras geométricas planas ou em perspectiva, gráficos cartesianos etc., e as distinguimos de seu conceito.

Segundo Duval (2015), as figuras em Geometria, assim como as outras representações visuais, esboços, diagramas, mapas, gráficos ou imagens dão origem a uma apreensão sinóptica e não a uma apreensão sucessiva e linear como para tudo o que pertence à escrita e à fala. Ou seja, apreensão sinóptica no sentido de que a figura resume em si uma série de conceitos de modo sintetizado que podem ser captados de modo mais direto, diferente do que ocorre em relação à escrita e a fala. Desse modo, cada sujeito ao interpretá-la pode captar essas propriedades ao seu modo, em uma ordem sequencial particular.

Já no caso da escrita ou fala, pode-se considerar uma apreensão sucessiva e linear visto que quando se escreve ou se fala é possível fazer uma descrição que compreenda todas

características e propriedades importantes para o momento, estabelecendo uma linearidade, proporcionando aos interlocutores que compreendam de tal modo.

Essas características tornam as figuras geométricas objetos complexos do ponto de vista cognitivo. Para Duval (2015), as figuras em Geometria servem como suporte à intuição, mostrando, em um objeto visível, relacionamentos ou hipóteses de relacionamento que não são claramente evidentes em uma declaração verbal (DUVAL, 2015, p. 1, tradução nossa). Elas possuem três aspectos fundamentais que podem nos levar a três maneiras de vê-las de formas bem diferentes:

- a) Podem ser construídas instrumentalmente (por meio de régua, compasso etc.);
- b) subordinadas a declarações que determinam as propriedades e objetos que representam, estando relacionadas à língua natural e baseiam-se em um vocabulário geométrico que condensa declarações de definições e teoremas;
- c) como um campo de exploração visual para resolver problemas, e geralmente exige que "enriqueçamos" a figura dada realizando ações heurísticas sobre ela, ou seja, possíveis modificações, como sobreposição, desconstrução dimensional etc.;

Para Duval (2015) o desconhecimento desses três aspectos gera desamparo e incompreensão da Geometria.

Assim como Duval, Parzysz (1988, 2006) também diferencia o objeto geométrico da sua representação. Ele chama a representação de desenho e o objeto geométrico de figura e considera o papel heurístico do desenho fundamental, dizendo que esse permite uma relação do tipo dialético entre ver e conhecer. Também salienta que o trato com as representações dos objetos geométricos pode ocasionar dificuldades de entendimento em relação ao seu estudo e, conseqüentemente, podendo levar à incompreensão da Geometria.

Segundo Duval (1998, p. 37) “ensinar geometria é mais complexo e geralmente menos bem-sucedido do que ensinar operações numéricas ou álgebra elementar”⁹ (DUVAL, 1998, p. 37, tradução nossa). Para o ensino da Geometria faz-se necessária a compreensão da natureza particular da Geometria, assim como estimular as ações heurísticas sobre as representações dos objetos geométricos, já que a experiência com o espaço perceptivo é algo importante desde a infância. Segundo Piaget e Inhelder (1993), o indivíduo constrói o espaço cognitivo a partir da experiência com o espaço perceptivo.

Nesta pesquisa nos pautaremos na concepção de Geometria apresentada por Duval (1998), o qual considera que a Geometria envolve três tipos de processos cognitivos que

⁹Teaching geometry is more complex and often less successful than teaching numerical operations or elementary algebra. (Duval, 1998, p. 37)

cumprem funções epistemológicas específicas: o processo de visualização, o processo de construção por ferramentas e o raciocínio.

Segundo Duval (1998, p. 38), o primeiro processo é relacionado à representação espacial para a ilustração de uma afirmação; para a exploração heurística de uma situação complexa; para um olhar sinóptico sobre ela; ou para uma verificação subjetiva. O processo de construção com auxílio de ferramentas como a régua, o compasso, softwares, entre outras é o segundo processo. O terceiro está relacionado a construção de configurações ou reconfigurações, pode funcionar como um modelo em que as ações sobre o representante e os resultados observados estão relacionados aos objetos matemáticos representados. Esses processos de raciocínio englobam as atividades discursivas desenvolvidos na atividade geométrica e efetuam a função de extensão do conhecimento com a elaboração de provas e explicações.

A comunicação, na atividade geométrica, entre esses três tipos de processos é crucial para a aprendizagem em Geometria e requer diferentes registros de representação semiótica. Segundo Duval (1998), a diferenciação e a coordenação entre esses registros evitam que os objetos da Geometria sejam confundidos com suas representações e também contribuem para que esses objetos sejam reconhecidos em todas as suas representações possíveis. De acordo com o autor, a aprendizagem da Geometria se explica pela diferenciação e a coordenação de diferentes registros, e são esses processos que levam à apreensão conceitual dos objetos da Geometria. Como já mencionado, esse processo passa pelas atividades cognitivas de tratamento e de conversão de representações.

Duval (2005) volta a chamar a atenção ao fato de que a Geometria é um campo de conhecimento que requer a articulação cognitiva de dois registros representacionais muito diferentes: o registro figural, na forma não discursiva que requer a visualização de formas para representar o espaço e o registro língua natural, na forma discursiva, ou seja, a linguagem, a fim de afirmar suas propriedades e deduzir novas.

Os processos cognitivos empregados na diferenciação e coordenação desses registros conduzem a diferentes modos de apreensões em Geometria. Duval (2012b) elenca os quatro modos pelos quais ocorre a apreensão dos objetos geométricos que são as apreensões: perceptiva, sequencial, discursiva e operatória.

De acordo com Duval (2012b), a apreensão perceptiva que se dá no reconhecimento automático e imediato das formas de uma figura em uma situação geométrica. Esse reconhecimento pode estar relacionado à forma, ao tamanho, orientação no plano e o número de dimensões (2D ou 3D). Por exemplo, ao olhar para a Figura 2 percebe-se algumas formas retangulares de tamanhos diferentes:

Figura 2 – Retângulos



Fonte: A autora, adaptado de Duval (2012a, p. 124), 2020.

Apreensão discursiva consiste em interpretar uma figura mediante uma descrição verbal em que algumas de suas propriedades são determinadas explicitamente. Duval (2012a) relata uma subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva, que pode ser considerada como uma teorização da representação figural. Para ele “equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável” (DUVAL, 2012a, p. 135). Considerando a pergunta: “Quantos retângulos há na Figura 2?”, para responder é necessário relacionar esse enunciado à figura para se chegar à solução e, após a análise da figura, responder. Essa atividade perpassa um tipo de conversão (da língua natural para o registro figural, ou ao contrário), podendo ser mais simples ou complicada dependendo do grau de congruência semântica entre enunciado e figura.

Segundo Duval (2012b), a apreensão operatória está centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial (de partida) e sua reorganização perceptiva determinada pelas suas modificações. Essas podem ser, por exemplo, tratamentos como: rotação da figura, superposição, sobreposição, decomposição da figura em subfiguras. No caso da pergunta sobre quantos retângulos há na Figura 2, é necessário ativar não só a apreensão perceptiva, mas também a operatória, realizando tratamentos como modificações e reconfigurações na figura que permitam responder à questão. Uma possibilidade seria considerar os retângulos como elementos de uma pavimentação, pensar no maior sendo recoberto pelos menores, que por sua vez formam outros retângulos.

Já a apreensão sequencial, de acordo com Duval (2012b), se dá na descoberta ou descrição da ordem de uma determinada construção e está relacionada à estrutura didática. Esse tipo de interpretação “é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura” (DUVAL, 2012a, p. 119). Voltando à pergunta sobre quantos retângulos há na Figura 2, a explicação sistematizada do processo realizado para a conclusão sobre a quantidade de retângulos presentes na figura dada seria fruto da apreensão sequencial, nesse caso.

Duval (2008) chama a atenção para o desenvolvimento dos processos cognitivos de visualização, reconfiguração e os processos de raciocínio, buscando que as quatro apreensões sejam alcançadas, para que deste modo a apreensão dos conceitos em Geometria seja mais efetiva.

1.3 VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: PESQUISAS E CONCEITOS

Esta seção trata sobre os primeiros trabalhos estudados que versam sobre a visualização em Geometria no contexto do ensino e da aprendizagem, que inspiraram esta pesquisa e formam sua base teórica. Inicialmente foram estudados os de Presmeg (1986, 2006), Godino *et al.* (2012) e Duval (1999b, 2012, 2015) e, posteriormente, Fernández Blanco (2011) e Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b, 2018).

Serão apresentadas considerações sobre os trabalhos de Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b) e Duval (1999b, 2012, 2015), bem como aproximações entre as perspectivas desses dois autores, que compõe a base do referencial teórico do presente trabalho.

1.3.1 Considerações sobre pesquisas inspiradoras em Visualização em Geometria

As primeiras pesquisas estudadas sobre o tema foram as de Presmeg (1986, 2006). Presmeg (1986) se foca em identificar os pontos fortes e as limitações do processamento visual na Matemática do Ensino Médio e alguns efeitos de diferentes estilos de ensino sobre a aprendizagem da Matemática por educadores visualizadores e não visualizadores. Para a autora, visualizadores são indivíduos que preferem usar métodos visuais na resolução de problemas matemáticos que podem ser resolvidos por métodos visuais e não visuais. A autora estabeleceu também outros conceitos relevantes em visualização, como imagem visual e seus tipos.

De acordo com Presmeg (1986), imagem visual é um esquema mental que descreve informações visuais ou espaciais. Essas imagens podem ser: pictóricas, ou seja, imagens reais, concretas; imagens padrão ou esquemas; imagens de memória de fórmulas; imagens cinestésicas, ou seja, em movimento através da ação corporal (por exemplo, gestos); e imagens dinâmicas.

Já Presmeg (2006) oferece uma perspectiva extensa das investigações realizadas na comunidade de Educação Matemática, como comentado na seção 1.1.

Neste trabalho não serão utilizados os conceitos como definidos em Presmeg (1986). Por exemplo, será utilizado ‘imagem mental’, ao invés de utilizar o termo ‘imagem visual’.

Sendo imagem mental considerada como qualquer tipo de representação cognitiva (semiótica ou não) por meio de elementos visuais ou espaciais.

A pesquisa de Godino *et al.* (2012) tem foco nos objetos geométricos espaciais. Propõe uma forma de compreender a linguagem e o pensamento visual e suas relações com a linguagem e o pensamento analítico, utilizando as ferramentas teóricas do "Enfoque Ontosemiótico"¹⁰ do conhecimento matemático. Os autores entendem a visualização como processos e capacidades dos sujeitos para realizar determinadas tarefas que requerem "ver" ou "imaginar" mentalmente os objetos geométricos espaciais, bem como relacioná-los e realizar certas operações ou transformações geométricas com eles. Mostra que a noção de "configuração visual" de objetos e processos, com suas diferentes modalidades contextuais, permite articular diferentes perspectivas de visualização, compreender suas relações com outras formas de expressão analíticas e reconhecer diferentes graus de visualização da atividade matemática.

Godino *et al.* (2012), em suas considerações finais, destaca a importância da visualização em todos os ramos da matemática, não só na Geometria, e também da ostensão na construção e comunicação Matemática.

Também pautada no "Enfoque Ontosemiótico" e com foco nos objetos geométricos, a pesquisa de Fernández Blanco (2011) é de natureza cognitiva e se propõe a investigar os conhecimentos, formas de raciocínio e habilidades de pensamento de futuros professores da Educação Primária na Espanha¹¹. A autora entende a visualização segundo Gutiérrez (1996a), como um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades.

Dentre as contribuições de Fernández Blanco (2011) estão categorizações que podem servir de base para descrever as habilidades dos estudantes ao resolver as tarefas propostas por ela e compreender os conflitos estes que manifestam.

Algo que chamou a atenção nessa pesquisa foi que Fernández Blanco (2011) conclui que os alunos mobilizam uma grande quantidade de objetos e processos visuais, porém não fazem isso de forma eficiente e, muitas vezes, nem conscientemente. Observa, por meio das configurações cognitivas dos alunos, que eles utilizaram a argumentação visual na resolução

¹⁰A EOS é um sistema teórico inclusivo que procura articular diversas abordagens e modelos teóricos utilizados em pesquisas em Educação Matemática a partir de pressupostos antropológicos e semióticos sobre a matemática e seu ensino. Foi iniciado pelo grupo de pesquisa Teoria da Educação Matemática da Universidade de Granada no início dos anos 90 e atualmente é desenvolvido e aplicado por outros grupos de pesquisa espanhóis e latino-americanos. Disponível em: <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/>. Acesso em: 20 maio 2019.

¹¹ Na Espanha a Educação Primária é aquela oferecida a crianças com idade entre 6 e 12 anos.

das tarefas propostas, e que na resolução da maioria das tarefas as referências ou restrições visuais são mais fortes para os alunos do que as que vêm de uma sentença verbal.

Além disso, Fernández Blanco (2011) comenta que os futuros professores pesquisados apresentam ideias muito vagas e limitadas sobre conceitos básicos como simetria, rotação, cubo, paralelepípedo etc. e muitas vezes o significado que eles atribuem a eles é baseado em exemplos prototípicos. Foram encontradas limitações importantes ao comunicar informações visuais, por exemplo, quando os alunos usam as palavras "círculo" ou "circunferência" quando se referiam à esfera.

O fato de os pesquisados mobilizarem uma grande quantidade de objetos e processos visuais, mas também apresentarem ideias muito vagas e limitadas sobre conceitos básicos, segundo Fernández Blanco (2011), nos levam a pensar na afirmação feita em Duval (2008, p. 27): “Um sucesso Matemático não corresponde a um sucesso cognitivo”.

Fernández Blanco (2011) também diz que os alunos não estão acostumados a mobilizar imagens dinâmicas e manter as características visuais e posicionais (capacidade de memória visual) que, em casos de configurações com apenas apoio mental, não geram 100% de eficácia. Pauta-se em Duval (1999b) chamando a atenção para o fato que este autor coloca a representação e a visualização no centro do entendimento em Matemática. Comenta sobre a importância da distinção entre o objeto e sua representação semiótica e identifica que em seu trabalho um dos maiores conflitos que foram encontrados quando a solução de tarefas tem a ver com a falta de inter-relação entre representação e visualização.

As considerações de Fernández Blanco (2011) contribuíram para os questionamentos que levaram a esta pesquisa. Com elas vieram a curiosidade sobre os futuros professores formados no Brasil, mais especificamente no curso de licenciatura da universidade em que esta pesquisa foi desenvolvida.

Um dos conceitos utilizados por Fernández Blanco (2011) é o de elementos ostensivos e não ostensivos. A autora traz em suas considerações que o uso de elementos ostensivos facilita muito a resolução da tarefa. Ela considera especificações contextuais da visualização, dentre essas especificações estão a dualidade ostensivo – não ostensivo e a dualidade extensivo - intensivo. O ostensivo se refere ao perceptível, material, enquanto o não ostensivo refere-se ao imaterial, mental ou ideal. O extensivo refere-se a uma prática particular, enquanto o intensivo está relacionado à uma classe, a uma generalidade (FERNÁNDEZ BLANCO, 2011, p. 146, tradução nossa).

Para a autora, qualquer objeto matemático (ideal, abstrato, portanto não ostensivo) está associado a um ou vários objetos ostensivos. Ideia similar à de Duval quando diz que os

conceitos matemáticos podem ser vistos em variados sistemas de registros de representação semióticos. Deste modo, pode-se considerar que as representações semióticas são ostensivas, enquanto as representações que são produzidos na mente (não semióticas) são não ostensivas.

Bittar (2017) também aborda o conceito de objetos ostensivos e não ostensivos como elementos teóricos fundamentais no caso particular da atividade Matemática. Essa autora entende esses conceitos segundo Bosch e Chevallard (1999), que afirma:

Nós falaremos de objeto ostensivo [...] para nos referirmos a todo objeto tendo uma natureza sensível, uma certa materialidade, e que, por isso, adquire para o ser humano uma realidade perceptível. Esse é o caso de um objeto material qualquer e, notadamente, e de objetos materiais particulares que são os sons [...], os grafismos [...] e os gestos. Os objetos não ostensivos são então todos os “objetos” que, como as ideias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente – no sentido em que lhe atribuímos uma existência – sem, entretanto, poderem ser vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por si mesmos: eles só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita, um gesto ou um longo discurso). (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.10 apud BITTAR, 2017, p. 368).

Godino *et al.* (2012) salienta que é necessário levar em conta a natureza não ostensiva, imaterial, dos objetos matemáticos e das complexas relações dialéticas que se estabelecem entre esses objetos e suas representações materiais. Ao mesmo tempo, deve-se saber que não há objeto matemático sem suas várias representações, porque tal objeto nada mais é do que as regras de uso de tais representações. Na presente pesquisa, o caráter ostensivo e o não ostensivo serão considerados ao tratar das representações envolvidas no processo de visualização.

Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018) apresentam os tipos de objetos e processos realizados por um sujeito ideal na resolução de uma tarefa de visualização relacionada a simetrias planas. A tarefa em questão foi estudada também em Fernández Blanco (2011) e é inspiração para uma das tarefas que será utilizada nesta pesquisa. Com esse estudo os autores mostraram que os alunos têm dificuldade em aplicar habilidades de visualização para decompor e recompor figuras, além de reconhecer simetria como movimento em contextos incomuns.

As pesquisas exploradas nesta seção fornecem conceitos e elementos que auxiliam a compreensão da Geometria, bem como fundamentos teóricos que direcionam este estudo. Contribuindo para a formação da fundamentação teórica deste trabalho, a seguir apresentaremos considerações sobre as concepções de visualização em Geometria das pesquisas de Duval (1999b, 2012, 2015) e posteriormente de Gutiérrez (1992, 1996a).

1.3.2 Visualização em Geometria sob a perspectiva de Duval

Nesta seção apresenta-se a Visualização Geométrica segundo Duval (2015), o qual apresenta uma teorização da visualização pautada nos aspectos semióticos e representacionais. Duval (2015) apresenta a visualização como combinação ou coordenação entre as funções heurística e discursiva, sendo centrada nas operações cognitivas sobre as figuras geométricas. Nesse trabalho, o autor compreende que as figuras geométricas possuem três aspectos que podem levar a três maneiras distintas de vê-las, e que sua compreensão depende principalmente da conexão entre a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva, ligadas às funções heurística e discursiva, respectivamente.

Duval (1999b) distingue visualização de visão e complementa que, ao contrário da visão, que fornece um acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica.

Segundo Duval (2012a, p. 268), as “representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática. Os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos ‘reais’ ou ‘físicos’ ”.

De acordo com Henriques e Almouloud (2016), representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótico e, de outro lado, pela referência do objeto representado. Em particular, isso se dá também com respeito à Geometria.

Duval (2015), destaca que as figuras geométricas são objetos complexos do ponto de vista cognitivo. Essa complexidade vem do fato de as figuras apresentarem três diferentes aspectos:

- a) serem um campo de exploração visual para resolver problemas. Mas essa exploração exige o reconhecimento de formas, de unidades figurais e, além disso, geralmente, que "enriqueçamos" a figura dada, acrescentando tramas que "levarão a ver" outras formas do que aquelas inicialmente vistas na figura inicial. Em outras palavras, as figuras podem ser modificadas de várias maneiras (reconfiguradas), tornando possível resolver problemas matematicamente diferentes;
- b) serem instrumentalmente construídas. Sua construção envolve levar em conta as proporções de grandezas e, portanto, possíveis medidas. E cada instrumento usado para produzir, por exemplo, um gráfico corresponde a uma propriedade geométrica (uma linha reta com uma régua, uma curvatura constante com um compasso etc.). É por isso que figuras em Geometria não são "desenhos", como outras

representações visuais. Elas têm restrições internas que tornam a construção mais ou menos difícil, dependendo dos instrumentos ou do software usado;

c) estarem necessariamente associadas e subordinadas a instruções que determinam as propriedades e os objetos que representam (teoria matemática). Em outras palavras, as figuras em Geometria não representam o que é percebido de forma perceptiva à primeira vista. Na maioria das vezes, o reconhecimento dos objetos que elas representam é contra a evidência perceptiva de formas reconhecidas imediatamente, e muitas vezes o reconhecimento perceptivo não é suficiente. Há, portanto, uma ruptura epistemológica entre a figura que percebemos e os objetos matemáticos que não podemos perceber. Do ponto de vista matemático, essa subordinação às propriedades dadas como hipóteses é a característica essencial das figuras.

O autor considera que estas três especificidades correspondem a três usos diferentes das figuras, e essas três maneiras de "ver" não têm nada em comum e são simultaneamente incompatíveis. Visto que o primeiro é independente do requisito matemático e requer que deixemos os limites estreitos e estáticos da evidência perceptiva. O segundo aspecto está relacionado à percepção, e o último aspecto relaciona-se ao uso matemático vinculado ao vocabulário geométrico (a figura condensa declarações de definições e teoremas), e muitas vezes é esperado que somente as propriedades dadas nas hipóteses do enunciado associado à figura sejam visualmente consideradas (esse uso matemático exige uma maneira de ver que, muitas vezes, vai contra as evidências perceptivas).

Para Duval (2015), é necessário que haja um “treinamento” para que os estudantes possam conhecer essas características das figuras geométricas e desenvolver a capacidade de passar espontaneamente de uma forma de uso para outra. Segundo ele, esse é o primeiro limiar que os alunos devem atravessar para entenderem a Geometria e serem capazes de resolver problemas.

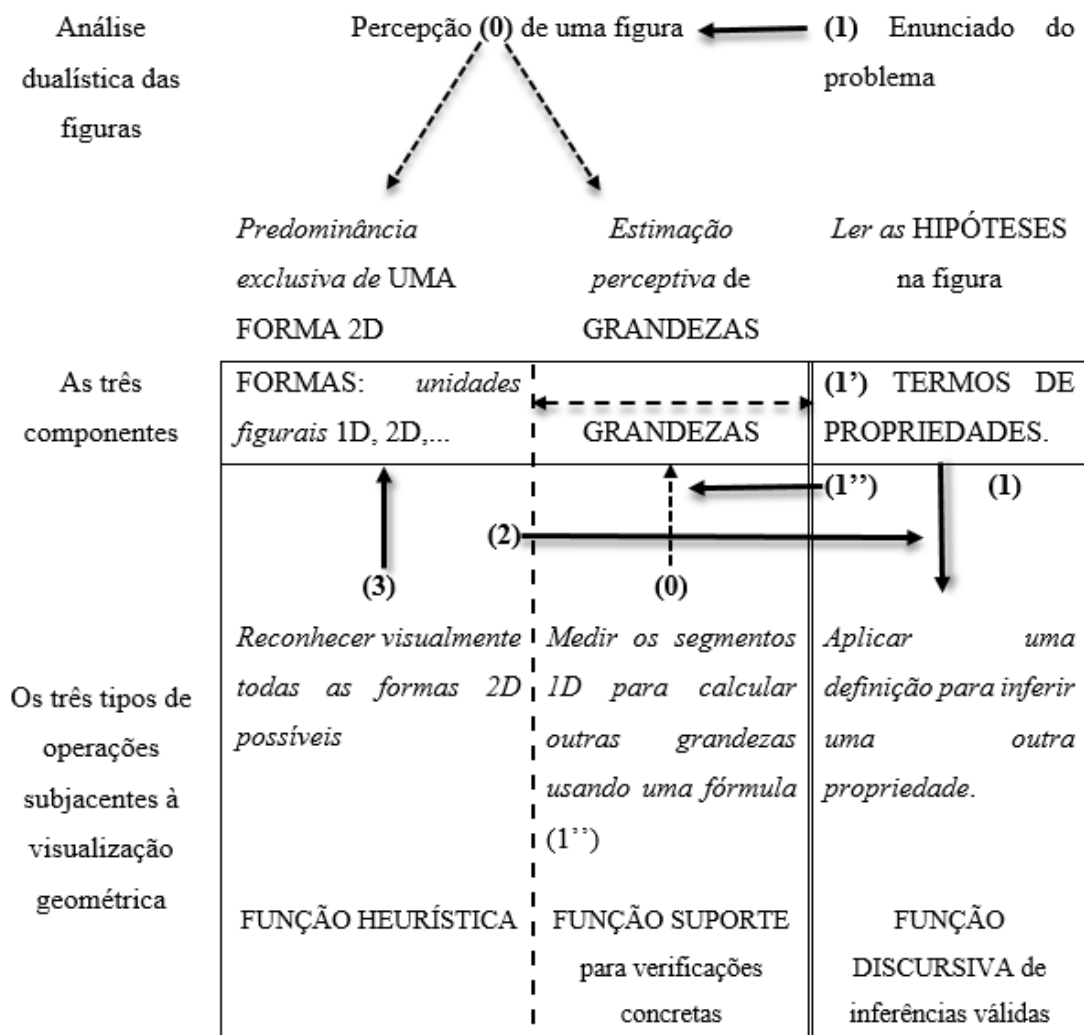
De acordo com Duval (2015), entre a figura visível e o que ela representa geometricamente, há o olhar de quem a vê. Dessa forma, as figuras geométricas podem criar um conflito entre o que procurar e quais os aspectos relevantes para resolver dado problema. Segundo o autor, a ideia de que é automático olhar para a figura e saber as relações e propriedades que ela engloba oculta a ruptura cognitiva que separa a percepção imediata de formas 2D ou 3D e a exigência matemática, contraintuitiva no olhar para a figura. Essa forma de pensar também ignora a complexidade cognitiva do uso heurístico das figuras.

Para Duval (2015), o uso efetivo de uma figura em um dado problema, é necessária uma análise dualística e cognitiva da figura, levando em conta os três componentes relacionados à forma (unidades figurais), as grandezas e propriedades de uma figura e acionando os três tipos de operações subjacentes à visualização geométrica. A análise dualística envolve o ato de relacionar a percepção da figura com o enunciado do problema. A análise cognitiva parte da dualística considera as três componentes da figura e emprega a visualização geométrica, que por sua vez envolve as funções heurística (relacionas ao reconhecimento de formas e modificações na figura); de suporte (relacionada a verificações concretas, como medições e cálculos); e a discursiva (relacionada a inferências matemáticas).

Assim, para Duval (2015), a ruptura epistemológica entre a percepção do desenho e a compreensão das propriedades representadas não seria, portanto, o principal obstáculo cognitivo no aprendizado da Geometria. Por essa visão, pode-se concluir que a visualização possui grande importância para o aprendizado de Geometria, e até mesmo da Matemática em geral.

Na figura 3 pode-se observar como a visualização tem um papel importante na compreensão de uma figura geométrica (no caso, 2D) associada a um dado problema sob a perspectiva de Duval (2015).

Figura 3 – Comparação das análises dualista e cognitiva da utilização de uma figura 2D em um dado problema



Fonte: A autora, adaptado de Duval (2015, p. 3), 2020.

Duval (2015) considera a Figura 3 composta por um diagrama (parte superior) e um quadro (parte delimitada por bordas). As três colunas do quadro que faz parte da figura anterior correspondem às três componentes das figuras geométricas. A segunda linha do quadro contém os tratamentos, ou seja, as operações especificamente relacionadas dentro do registro de representação em questão.

De acordo com o autor, as setas nomeadas por (2) e (3) correspondem, respectivamente, às duas formas cognitivas de "visão" necessárias para o uso matemático de figuras geométricas e para o uso heurístico delas e estas constituem a visualização geométrica.

O diagrama, na parte superior ao quadro corresponde à análise dualística das figuras geométricas. Está centrado no requisito matemático de não ver as figuras apenas por meio das

propriedades dadas como hipóteses (seta **(1)**). Nesta análise, Duval (2015) não se preocupa com o fato de que a percepção impõe a evidência de certas formas 2D e de certas relações de grandezas (seta **(0)**), quaisquer que sejam as hipóteses do enunciado. A figura é relegada ao grau de "objeto material", no qual é possível fazer medições ou verificações. O autor diz investir nos três componentes de uma figura geométrica e na função que o uso privilegiado de cada um dos três componentes cumpre, e destaca tudo o que diz respeito às operações cognitivas implicadas por esses diferentes usos na segunda linha do quadro que compõe a Figura 3.

A comparação das setas no diagrama (com respeito a quantidade, sentidos e formas) com as que estão no quadro destaca o obstáculo cognitivo para a compreensão da Geometria.

A exigência matemática sobre como ver uma figura geométrica apenas por meio das propriedades dadas como hipóteses (seta **(1)**) no diagrama pressupõe a relação inversa, sem a qual nenhuma figura poderia representar propriedades visualmente geométricas (seta **(2)**) no quadro). É essa relação que constitui o problema cognitivo crucial para o ensino da Geometria.

De acordo com Duval (2015), as unidades figurativas que devem ser reconhecidas desde o início para entender como visualizar propriedades geométricas de uma figura, independentemente das hipóteses escolhidas, são as unidades figurativas 1D, ou seja, as que devem poder ser mapeadas em termos de propriedade (seta dupla pontilhada **(1')**). Para o autor, o obstáculo para a compreensão da Geometria vem do fato de que a percepção sempre impõe a evidência de certas unidades figurativas 2D em que as unidades 1D desaparecem visualmente como seu contorno fechado (seta **(0)**). O primeiro limiar para inserir o requisito matemático sobre como ver uma figura (seta **(1)** no diagrama e no quadro) é a relação cognitiva inversa que pressupõe: o desenvolvimento de uma maneira para ver, não natural, que realizasse a desconstrução dimensional de todas as formas 2D, que a percepção impõe como evidentes.

Para Duval (2015), a desconstrução dimensional de formas 2D (setas **(1')** e **(2)**) é a maneira de “ver” que é pré-requisito para a aquisição e uso de propriedades geométricas (seta **(1)**). Reconhecer visualmente todas as unidades figurativas 2D possíveis a partir das unidades 1D, cujos traços formam a figura geométrica inicial, consiste no emprego da função heurística (seta **(3)**).

Essas duas maneiras de ver não podem ser subordinadas ao conhecimento ou ao uso de propriedades geométricas (flecha **(1)**), nem assimiladas à percepção (seta **(0)**). O seu desenvolvimento específico é o pré-requisito cognitivo fundamental para a compreensão e resolução de problemas de Geometria, até mesmo de problemas práticos (setas **(3)** e **(1')**).

Baseados nas apreensões dos objetos geométricos de Duval (2012), Moretti e Brandt (2015, p. 605) sintetizam os conceitos de figura geométrica, de visualização, de heurística e demonstração e de construção geométrica.

Para esses autores, o que chamamos de ‘figura geométrica’ é o resultado da conexão entre a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses, e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva.

Segundo eles, a visualização é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. A visualização não exige nenhum conhecimento matemático, mas ela pode comandar a apreensão operatória.

Moretti e Brandt (2015) também revelam que a heurística e a demonstração são resultados da conexão entre a apreensão operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e a discursiva.

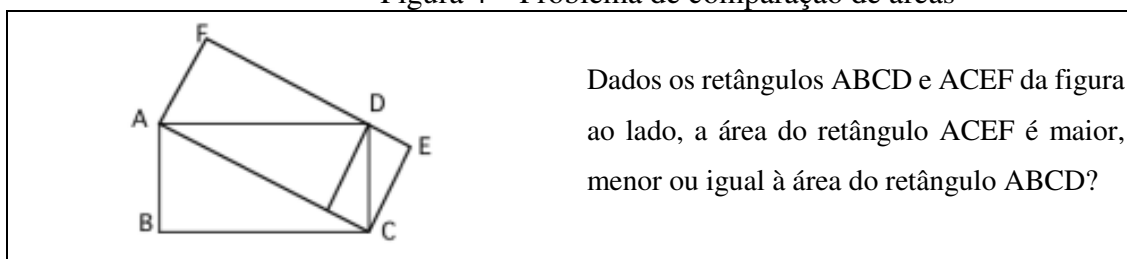
A construção geométrica, segundo Moretti e Brandt (2015), é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial – que também requer a apreensão perceptiva especialmente requisitada em atividades dessa natureza.

É possível observar, pelo exposto até aqui, que a Visualização “refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica e o uso da visualização na matemática requer um treino específico, para ver em cada registro de representação” (DUVAL, 1999b, p. 9).

Pelo fato das figuras geométricas serem caracterizadas por três aspectos distintos que levam à maneiras de ‘ver’ diferentes ligadas à função heurística, à função suporte e à função discursiva. Pode-se notar que ao utilizar uma figura geométrica na resolução de um problema, para sua compreensão deve haver principalmente da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, que estão relacionadas a tratamentos dentro do registro de representação semiótico figural (envolvendo a função heurística e, eventualmente, funções suporte). Além disso, é necessária a conexão entre o produto da apreensão operatória com a apreensão discursiva, que por sua vez está relacionada à conversão entre o registro figural e o da língua natural (ou seja, a coordenação entre as funções heurística e discursiva).

Por exemplo, a Figura 4 apresenta um problema de comparação de áreas, em que é dada uma figura 2D composta por figuras geométricas e o enunciado:

Figura 4 – Problema de comparação de áreas



Dados os retângulos ABCD e ACEF da figura ao lado, a área do retângulo ACEF é maior, menor ou igual à área do retângulo ABCD?

Fonte: A autora, adaptado de Duval (2015, p. 4), 2020.

É possível observar que para resolver o problema é necessário inicialmente realizar a análise dual, ou seja, relacionar a figura (no registro figural [não discursivo]) e o enunciado do problema (registro em língua natural [discursivo]) para então dar sequência ao processo de visualização.

Para que o problema seja respondido, e pelo fato de uma figura geométrica compreender as três características apresentadas anteriormente, para começar o processo de visualização é necessária uma análise heurística da figura. Ou seja, é preciso realizar alguns tratamentos, como identificar as subfiguras geométricas que a compõe (elementos 2D) e identificar segmentos que fazem parte da figura (1D). Como os registros figural e em língua natural são multifuncionais, até os tratamentos podem ter um grau maior de dificuldade por não serem algoritmizáveis.

Alguns estudantes podem sentir a necessidade de utilizar a chamada ‘função suporte’, ou seja, de medir os segmentos e/ou realizar cálculos de área. Nesse caso se, por exemplo, houver a passagem do registro figural para o algébrico, estará acontecendo uma conversão entre estes registros.

Relacionado as informações obtidas pela exploração da figura através das funções descritas nos dois parágrafos anteriores, passa-se a relacionar as propriedades e conceitos matemáticos (e isso pode acontecer simultaneamente à exploração). Nesse momento se dá a passagem entre os registros figural e discursivo, ou seja, uma conversão (lembrando que essa conversão nem sempre é simples, pelo fato de ambos os registros serem multifuncionais, o que é frequente em Geometria). Nos casos em que o processo é realizado de modo completo e ocorre a coordenação das apreensões operatória e discursiva, pode-se chegar à apreensão sequencial, contribuindo para a explicação sistematizada do processo realizado para dar a resposta ao problema.

Um exemplo de solução para o problema proposto parte da identificação dos três retângulos (unidades 2D) contidos na figura inicial e suas diagonais (unidades 1D) (ou seja, aplicação da função heurística). Ligando essas informações à propriedade de que uma diagonal divide um retângulo em dois triângulos iguais (aplicação da função discursiva). Pode-se

concluir, aplicando esta propriedade às três diagonais que compartilham, respectivamente, os três retângulos da figura dada, que as áreas dos retângulos ABCD e ACEF são iguais.

Em resumo, sob a perspectiva de Duval (2015), a visualização geométrica é composta e se dá pela coordenação dessas três operações: a função heurística, a função suporte e a função discursiva. Sendo que a função heurística pode ser considerada um tratamento dentro do registro figural, que parte da apreensão perceptiva e é um instrumento da apreensão operatória. A coordenação da função heurística com a função suporte (ver Figura 3) ainda dentro do registro figural permite novos tratamentos e a passagem à função discursiva, ou seja, trata-se da conversão entre os registros figural e discursivo, que por sua vez depende da mobilização da apreensão discursiva, e essa conexão pode conduzir à apreensão sequencial.

1.3.3 Visualização em Geometria sob a perspectiva de Gutiérrez

Nesta seção apresenta-se a visualização geométrica sob a perspectiva de Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b, 2018), que nos trabalhos levantados versa sobre a visualização principalmente em Geometria Euclidiana Espacial. Esses trabalhos consistem em estudos envolvendo uma teorização da visualização, levando em conta aspectos qualitativos identificando o pensamento visual, buscando contribuir para o desenvolvimento dessa atividade em pesquisas com estudantes em nível escolar e com futuros professores cursando o nível superior.

De acordo com Gutiérrez (1996a), a Geometria pode ser considerada como a origem da visualização em Matemática, mas aponta o aumento de trabalhos que lidam com a visualização no ensino de matemática. Destaca que há vários estudos focados no ensino ou aprendizagem de cálculo, álgebra e sistemas numéricos, alguns em geometria plana e apenas alguns focando em geometria espacial (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 1, tradução nossa).

O autor considera que a visualização é um componente básico para o ensino e a aprendizagem em Geometria, principalmente tridimensional, é o foco de suas pesquisas. Para ele, a visualização na Matemática é “um tipo de atividade do raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, físicos ou mentais, realizadas para resolver problemas ou provar propriedades” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 2, tradução nossa). Segundo o autor, ela integra quatro elementos principais, os quais nomeia como: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e as habilidades de visualização.

O conceito de visualização utilizado por Gutierrez (1992, 1996a) é um modelo que integra resultados parciais de diversas áreas que caracterizam os diferentes componentes de

visualização. Por exemplo, o conceito de imagem mental se baseia no conceito e nos tipos de imagem visual elencados em Presmeg (1986) (apresentados neste trabalho na seção 2.3.1). Os chamados pelo autor de processos de visualização, que serão descritos a seguir, são definidos por Bishop (1983, p.177 apud Gutiérrez, 1996 a, p. 1). As chamadas habilidades de visualização, elencadas por Gutiérrez (1992, 1996 a) são conceitos advindos de uma lista bastante detalhada das habilidades que podem integrar a percepção espacial de um indivíduo, obtida ao unir as propostas de vários autores e que se refere a um contexto mais amplo que o da Geometria fornecida por Del Grande (1990 apud Gutiérrez, 1992, p. 45).

Imagem mental, para Gutiérrez (1992, 1996a), é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade, por meio de elementos visuais ou espaciais. Essas podem ser, como dito em Presmeg (1986), imagens pictóricas (imagens reais, concretas); imagens padrão (esquemas); imagens de memória de fórmulas; imagens Cinestésicas (em movimento através da ação corporal); e imagens dinâmicas.

Como este trabalho aborda também a visualização ligada à Teoria dos Registros de Representações Semióticas, já fazendo um paralelo, essas imagens mentais podem ou não ser representações semióticas. Lembrando que os sistemas semióticos devem permitir o cumprimento de três atividades cognitivas: produzir a representação de alguma coisa e permitir a transformação dessa representação em outra por meio da conversão e do tratamento (DUVAL, 1999a). E nem todas as imagens mentais permitem isso.

Gutiérrez (1996a) considera uma representação externa pertinente à visualização como qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc., em folha de papel ou com modelos concretos, entre outras. Na concepção desse autor a representação externa é instrumento importante para expressar conhecimentos e ideias geométricas que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e produzir raciocínio visual. Pelo escrito no parágrafo anterior, pode-se observar que nem toda representação externa é uma representação semiótica.

Os processos de visualização são ações físicas ou mentais em que imagens mentais estão envolvidas. Gutiérrez (1992, 1996a) cita os dois processos inversos realizados na visualização elencados por Bishop (1983)¹²: a “interpretação visual de informações” para criar imagens mentais e a “interpretação de informações obtidas a partir de imagens” para gerar informações. Segundo Bishop (1983 apud Guillén *et al.*, 1992, p. 22), o processamento ou interpretação visual é um processo de conversão de informações abstratas ou não figurativas em imagens

¹² BISHOP, A.J. Spatial abilities and mathematical thinking. In: ZWENG, M. et al.(eds.). **Proceedings of the IV I.C.M.E.** (Birkhäuser: Boston, USA), p. 176-178, 1983.

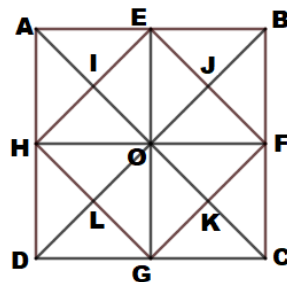
visuais. E a interpretação de informações obtidas partir de figuras é um processo de leitura, compreensão e interpretação das representações usadas em matemática para extrair as informações contidas nestas.

Nesta pesquisa, em lugar de processos de visualização, será utilizado o termo **ações de interpretação para a visualização**, com o intuito de clarificar o conceito e evitar confusão com o processo global compreendido por visualização neste trabalho.

As habilidades de visualização, em Matemática, são habilidades que “um sujeito deve adquirir e desenvolver para realizar os processos necessários, com as imagens mentais específicas de um dado problema” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 10). Algumas das habilidades de visualização elencadas por Gutiérrez (1992, 1996a), baseado em Del Grande (1990)¹³, que serão utilizadas nesta pesquisa, são:

- a) Percepção da figura e contexto (ou percepção figura-fundo): é a capacidade de reconhecer uma figura isolando-a de seu contexto. É necessário, por exemplo, quando a figura manipulada é formada por várias partes ou subfiguras, como nos mosaicos ou quando o contexto é formado por várias figuras sobrepostas que interferem umas nas outras. Por exemplo, a mobilização dessa habilidade é necessária para que se reconheça, na Figura 5, 10 quadrados, 20 trapézios, 32 triângulos, 8 paralelogramos, 8 retângulos e 4 pentágonos não regulares;

Figura 5 – Composição de figuras geométricas planas I



Fonte: A autora, 2018.

- b) constância Perceptiva (ou conservação da percepção): é a capacidade de reconhecer que um objeto mantém certas propriedades, como sua forma ou tamanho, constantes mesmo que não sejam vistas total ou parcialmente, ou ainda, sejam observadas de um ponto de vista diferente (por exemplo, por uma mudança na posição do objeto ou do observador). Essa habilidade é necessária para associar as propriedades identificadas

¹³ DEL GRANDE, J. J. Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, v. 37, n. 6, p. 14-20, 1990.

em uma imagem mental de um objeto com outras imagens do mesmo objeto. Por exemplo, para que se reconheça na Figura 6 as peças A e B na composição C, é necessário a mobilização dessa habilidade;

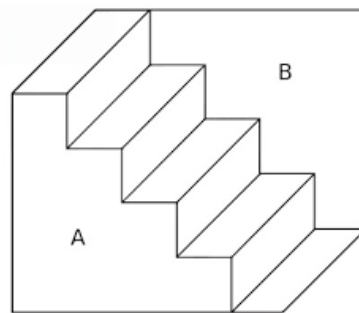
Figura 6 – Composição de figuras geométricas planas II



Fonte: A autora, 2020.

c) posições no espaço (ou percepção de posições espaciais): é a capacidade de relacionar a posição de um objeto a si mesmo (o observador) ou a outro objeto, que atua como um ponto de referência. Por exemplo, considerando a Figura 7 como uma escada, em que o observador vê os degraus de cima para baixo, ao identificar a face A como a mais próxima do observador, é necessário a mobilização da habilidade em questão. A percepção será diferente se o observador ver os degraus da escada como estando acima dele;

Figura 7 – Representação de uma figura espacial



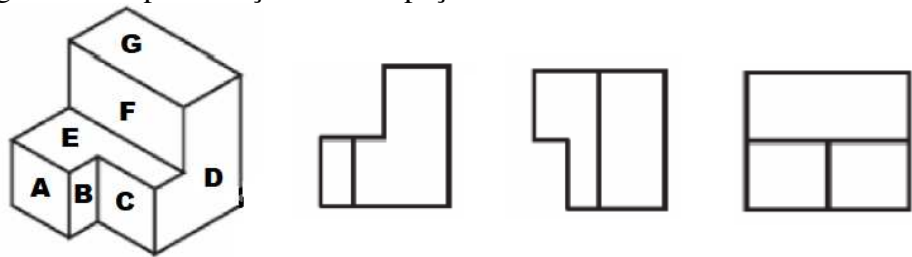
Fonte: A autora, 2018.

d) relações espaciais (ou percepção de relações espaciais): é a capacidade de identificar corretamente as características das relações entre vários objetos localizados no espaço. Essas relações podem ser expressas de maneira relativa, isto é, referindo-se apenas aos próprios objetos, ou em termos absolutos, referidos ao observador ou um terceiro objeto. Por exemplo, considerando ainda a Figura 7, considerando os degraus da escada, ao identificar o plano de A a frente do plano em que B está, o observador está

mobilizando a habilidade de percepção de relações espaciais;

e) discriminação visual: é a capacidade de comparar vários objetos identificando suas semelhanças e diferenças visualmente. Por exemplo, na Figura 8, para identificar as imagens que correspondem às vistas da peça tridimensional e determinar o lugar de cada letra nessas vistas é necessário mobilizar a discriminação visual;

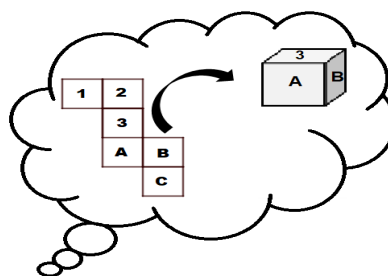
Figura 8 – Representação de uma peça tridimensional e suas vistas



Fonte: A autora, 2018.

f) rotação mental: é a capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e imaginar configurações em movimento. Por exemplo, considerando a peça tridimensional dada na Figura 8, aplica-se a rotação mental ao imaginar a peça girando para se observar a face que forma sua base e não está visível na figura. Outro exemplo é a montagem de um cubo mentalmente, a partir de sua planificação ou a planificação (mental) a partir do objeto tridimensional (ou de sua representação em perspectiva);

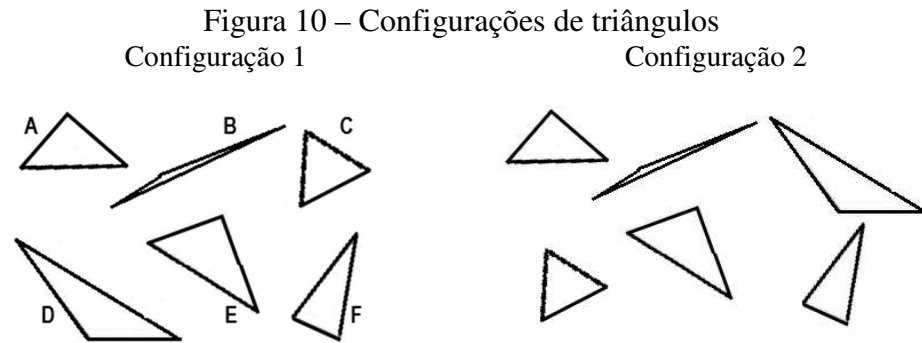
Figura 9 – Representação mental da montagem de um cubo a partir de uma planificação



Fonte: A autora, 2020.

g) memória visual: é a capacidade de lembrar as características visuais e posicionais que tinham ao mesmo tempo um conjunto de objetos que estavam em exibição, mas que não são mais vistos ou que foram alterados de posição. Por exemplo, considerando a Figura 10, se for apresentada ao observador somente a configuração I, suprimi-la e

depois apresentar a configuração II e o observador reconhecer que os triângulos representados na figura inicial pelas letras C e D tiveram suas posições trocadas na nova configuração, pode-se dizer que houve, por parte dele, a mobilização da habilidade de memória visual.



Fonte: A autora, 2020.

Segundo Gutiérrez (1992, p. 47, tradução nossa) “é possível definir outras habilidades que são freqüentemente observadas durante a realização de atividades de visualização espacial, mas geralmente são combinações das habilidades descritas”. Por exemplo, de acordo com o autor, pode-se definir a capacidade de "conservação de relações espaciais", que permite reconhecer, por exemplo, que as posições relativas do objeto não variam quando este é submetido ao movimento de translação. Essa habilidade seria uma combinação das habilidades de reconhecimento de posições no espaço e de conservação da percepção.

Gutiérrez (1996a, p. 10, tradução nossa) resume as etapas a serem seguidas ao usar a visualização para resolver uma tarefa da seguinte forma:

A declaração da tarefa é interpretada pelos alunos como uma representação externa adequada para gerar uma imagem mental. Essa primeira imagem inicia um processo de raciocínio visual em que, dependendo da tarefa e das habilidades dos alunos, eles usam algumas de suas habilidades visuais para executar diferentes processos, e outras imagens mentais e / ou representações externas podem ser geradas antes que os alunos cheguem à resposta. (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 10, tradução nossa).¹⁴

Voltando ao problema proposto na Figura 4 da seção anterior, pode-se notar que o processo de visualização empregado para a solução envolve a combinação dos quatro elementos

¹⁴ “The statement of the task is interpreted by the students as an external representation suitable to generate a mental image. This first image initiates a process of visual reasoning where, depending on the task and students’ abilities, they use some of their visual abilities to perform different processes, and other mental images and/or external representations may be generated before the students arrive at the answer”. (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 10).

elencados no parágrafo anterior. A figura dada junto ao enunciado já é uma representação externa ligada ao problema e útil para sua solução, bem como propriedades utilizadas (por exemplo, a diagonal divide um retângulo em dois triângulos iguais).

A interpretação dessa figura com base no enunciado (que já é a ação de interpretação da figura para obter informações) requer a mobilização de habilidades, como por exemplo a percepção figura-fundo (e/ou outras como a rotação mental) para identificar as subfiguras e as diagonais.

A conexão entre as propriedades e as subfiguras é também uma ação de interpretação, a partir de informações teóricas para gerar imagens mentais envolvendo a figura. Enfim, no processo de raciocínio envolvido, como um todo, ocorre a formação de imagens na mente, podendo ser esquemas para identificar as figuras geométricas envolvidas, por exemplo, através dos conjuntos de letras que designam seus vértices, ou mesmo as formas imaginadas.

Nesta pesquisa o conceito admitido como visualização em Geometria abrange o entendimento de Gutiérrez (1996a) apresentado nesta seção, como um processo cognitivo no qual são articuladas imagens mentais, representações externas, duas ações de interpretação de informações (processos de visualização) e as habilidades para a visualização. E além disso, o conceito de visualização em Geometria admitido abrange também a concepção apresentada por Duval (1999b), de um processo cognitivo intrinsecamente semiótico.

1.3.4 Aproximações entre as concepções de Duval e Gutiérrez

Para Duval (2015), é necessário que haja um “treinamento” para desenvolver o raciocínio para a visualização em Geometria. Do mesmo modo, Gutiérrez (1996a) diz que é necessário adquirir e desenvolver as habilidades para realizar os processos necessários para a visualização geométrica.

Pode-se notar que, de acordo com Duval (2015), a visualização centra-se em três operações cognitivas sobre as figuras geométricas, sendo essas operações relacionadas a registros semióticos distintos (discursivos e não-discursivos (figural ou gráficos)). A visualização geométrica na perspectiva desse autor envolve a coordenação entre as funções heurísticas, de suporte e discursiva, sendo executados tratamentos dentro dos registros na aplicação de cada função, que culminam (com a coordenação das funções) na conversão entre registro de representação semióticos, proporcionando assim a compreensão do conteúdo estudo.

Embora não utilize diretamente o termo ‘atividade cognitiva’, Gutiérrez (1996a) entende a visualização como uma atividade do raciocínio capaz de integrar as imagens mentais, as

representações externas, as duas ações de interpretação de informações e as habilidades para a visualização, o que na prática implica em um processo cognitivo.

Gutiérrez (1996a), mesmo não se aprofundando tanto nas figuras geométricas como Duval (2015), faz uso, mesmo que indireto, de representações semióticas. Em alguns casos as imagens mentais podem ser representações semióticas, como, por exemplo, figuras geométricas (lembrando que nem toda imagem mental é uma representação semiótica, como dito nas seções 2.2.1 e 2.3.3). Do mesmo modo, pelo conceito de representações externas adotado por Gutiérrez (1996a), em alguns casos essas podem ser representações semióticas.

É importante salientar que a concepção de representação se apresenta em três situações distintas: a representação mental, representação computacional e representação semiótica, sendo que a diferença entre elas está centrada na função (Duval, 2012b). A representação mental caracteriza-se pela evocação dos objetos ausentes e incluem, além de imagens, crenças, concepções, ideias, noções, fantasias, etc. A representação computacional está associada à codificação da informação, tem a função de tratamento automático ou quase automático. E as representações semióticas, segundo (Duval, 2012b, p. 269) “são produções constituídas pelo emprego de signos¹⁵ pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento”, realizando assim uma função de objetivação, uma função de expressão e função de tratamento intencional.

A mobilização das habilidades para a visualização elencadas por Gutiérrez (1996a) compõem um processo cognitivo na visualização. Pode-se observar, pelo exposto nas seções anteriores que versam sobre as perspectivas desses autores sobre a visualização em Geometria, que essas habilidades compõe ou fazem parte da exploração heurística das figuras (sendo algumas delas tratamentos, no sentido de Duval (2012b), dentro do registro figural), como, por exemplo, a percepção figura-fundo tem relação com a desconstrução dimensional; a rotação mental tem relação com a reconfiguração de uma composição etc.

As ações de interpretação para formação de uma imagem e interpretação de informação a partir da figura que compõem a visualização segundo Gutiérrez (1996a) e que, de acordo com ele “são processos inversos” (GUTIÉRREZ, 1992, p 45) se assemelham à passagem entre as funções heurística e discursiva, elencadas por Duval (2015), e consistem em conversões, segundo Duval (2012b). Faz parte da interpretação visual criar a imagem a partir das informações, ou seja, das representações discursivas (processo de transição (conversão) do

¹⁵ “Um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico”. (Henriques & Almouloud, 2016, p. 468).

discursivo para o figural). Enquanto o processo de interpretação de informação a partir da figura contempla “ver” as propriedades matemáticas que estão resumidas na figura (processo de transição da função heurística para a discursiva, ou seja, conversão do registro figural para a língua natural).

Pode-se considerar que a visualização, tanto no sentido de Duval, quanto de Gutiérrez, consiste em uma atividade de raciocínio que depende de uma elaboração cognitiva que reconheça as figuras e as relacione como os elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, que passam por representações semióticas (podendo ser registros em língua natural, registros figurais etc.). Pela ideia apresentada por Duval (1999) “a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica” (Duval, 1999, p. 12), dessa forma, a visualização é realizada pela atividade de representação, precisando dela para que a visualização se concretize.

Uma das principais diferenças entre as perspectivas dos dois autores estaria no fato de que, para Duval (2015), o reconhecimento das formas 1D e 2D são de suma importância para realizar a relação com a função matemática, o que possibilitaria o melhor desempenho na aprendizagem dos conceitos de Geometria e na necessidade de se compreender melhor o funcionamento dos registros de representação semióticos utilizados em Geometria, bem como os tratamentos internos a eles e a conversão entre pelo menos dois registros relacionados à um mesmo objeto geométrico.

Nesta pesquisa entende-se que as perspectivas de ambos autores se complementam e fornecem uma concepção de visualização geométrica mais densa. Por esse fato e por todo exposto nesta seção, optamos por adotar metodologicamente a visualização como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, na qual são articuladas imagens mentais, representações externas, ações de interpretação para a visualização e as habilidades para a visualização, de modo que proporcione a integração entre as funções heurística e discursiva. A Figura 11 ilustra esse entendimento:

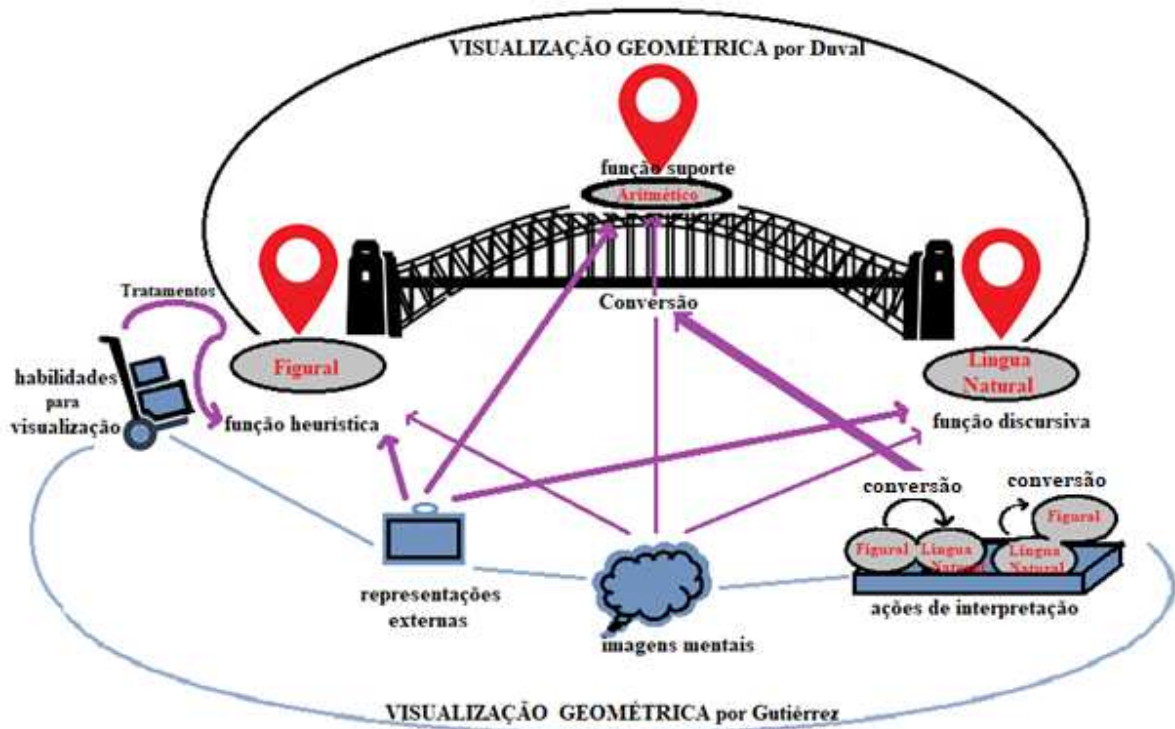


Figura 11 – Concepção adotada de Visualização Geométrica

Fonte: A autora, 2020.

Entende-se que as habilidades para visualização proporcionam tratamentos dentro do registro figural compondo a função heurística. As representações externas, por implicarem na utilização de imagens dadas e/ou produzidas na resolução escrita e na explicação oral, fazem parte das operações heurísticas, de suporte e discursiva. As imagens mentais, como parte cognitiva do raciocínio, também permeiam as três operações, e pode-se observar que as ações de interpretação envolvem conversões entre os registros figural e língua natural, importantes para a consolidação da ação de visualização.

Na busca por mais subsídios para este trabalho e para compreender o que vem sendo estudado sobre visualização em Geometria na última década, na seção 1.4 será apresentado um breve levantamento envolvendo pesquisas nacionais e internacionais sobre visualização em Geometria.

1.4 VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: UM LEVANTAMENTO DE PESQUISAS NACIONAIS E INTERNACIONAIS

A fim de situar a presente pesquisa e compreender o que vem sendo estudado sobre visualização em Geometria foi realizado, e refeito em fevereiro de 2020, um levantamento de pesquisas nos seguintes sites de busca: Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, Portal de Periódicos da CAPES, SciELO e Google Acadêmico.

Nas buscas por pesquisas nacionais foram utilizadas palavras-chave munidas do operador booleano *OR* e dos caracteres aspas para refinar a pesquisa. Os descritores utilizados foram: "habilidades de visualização" *OR* "visualização matemática" *OR* "visualização geométrica" *OR* "visualização em geometria". O período definido para refinamento foi de 2010 a 2019. Na procura por pesquisas internacionais foram usados os descritores em inglês: "visualization abilities" *OR* "mathematical visualization" *OR* "geometric visualization" *OR* "visualization in geometry" e restringiu-se ao período de 2016 a 2019, no intuito de encontrar trabalhos internacionais recentes sobre o tema pesquisado.

No Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES a busca sem o refinamento do período trouxe 40 trabalhos de grau profissionalizante, mestrado profissional, mestrado e doutorado. A partir daí, fez-se o refinamento em relação ao ano, de 2010 a 2019, e aos trabalhos referentes à Doutorado e Mestrado Acadêmico, esse segundo refinamento, deu-se pelo interesse em saber como as pesquisas acadêmicas de mestrado e doutorado têm tratado o tema, além de buscar como esses trabalhos se articulam e/ou se distanciam da tese proposta. Nessas condições, foram encontrados 17 trabalhos, sendo dois de Doutorado e 15 de Mestrado.

No Quadro 2 foram analisados os títulos e as palavras-chave desses, e foi adotado como critério de inclusão que o título e as palavras-chave trouxessem indicações de que o trabalho trata da visualização voltada à Geometria. Desta forma, foram excluídas pesquisas com foco, por exemplo, em Geologia, Química, Física, Cálculo, Psicologia, entre outros. Por essa análise foram selecionados 07 trabalhos:

Quadro 2 – Teses e Dissertações envolvendo visualização obtidas no Catalogo de Teses e Dissertações da CAPES, entre 2010 e 2019

Ano	Dissertação	Tese
2010	1	
2012	1	
2013	1	
2014	1	
2016	2	
2018		1
Total	6	1

Fonte: A autora, 2020.

Foi realizada a leitura dos resumos, referenciais teóricos e conclusões (ou correspondentes) desses 07 trabalhos. Verificou-se que todos versam sobre Geometria Euclidiana. Buscou-se analisar o entendimento que estes apresentam sobre visualização (com respeito a significados e conceitos adotados), se foram e quais os referenciais teóricos adotados referente a visualização, o desenvolvimento metodológico da pesquisa e em quais tendências¹⁶ para a pesquisa sobre visualização em Educação Matemática as pesquisas levantadas se enquadram.

Na busca realizada no Portal de Periódicos da CAPES, foram encontrados 14 trabalhos, sendo 12 artigos e dois resumos (de apresentação em evento), optamos por analisar somente os artigos, pelo fato dos resumos não conterem muitas informações.

No site SciELO quatro artigos foram obtidos como resultado da busca. Desses quatro, apenas um não havia sido encontrado na busca pelo Portal de Periódicos da CAPES. Também foi realizada uma busca no SciELO por trabalhos internacionais, de 2016 a 2019, na qual foi encontrado somente o mesmo artigo identificado na busca por trabalhos nacionais.

Pela análise dos resumos, utilizando como critério de inclusão admitir apenas os trabalhos que focam na visualização voltada à Geometria, foram encontrados 09 artigos (08 oriundos do Portal de Periódicos da Capes e um do SciELO), que serão discutidos na seção seguinte. Algo que se pode notar dentre os artigos não selecionados é que eles abordam a visualização de variadas formas, e muitos a utilizam no sentido de ver, outros a interpretam como produção de imagens utilizando tecnologias como softwares.

¹⁶ Tendências para a pesquisa sobre Visualização em Educação Matemática elencadas em Flores, Wagner e Buratto (2012, p.40), já apresentadas na seção 2.1 deste capítulo.

Por fim, realizou-se uma busca no site Google Acadêmico, primeiro em português, utilizando os mesmos descritores e período, porém refinando a pesquisa de modo que os descritores ocorressem no título do trabalho e não incluindo patentes ou citações, com isso obteve-se 22 resultados. Fazendo a análise dos títulos e resumos, focando para que esses trouxessem indicações de que o trabalho trata da visualização voltada à Geometria, excluimos 06 trabalhos que fugiam ao foco. Dos 16 restantes, observou-se que sete já foram identificados nas buscas anteriores, um é datado de 2009 e foge ao refinamento realizado, um refere-se a um trabalho de conclusão de curso de licenciatura, um não tem indicação da natureza ou ano do trabalho e quatro são resumos publicados em eventos. Sendo assim, optamos por discutir sobre os artigos publicados em periódicos, o que nos restringiu a dois trabalhos, que trataremos na seção seguinte. O quadro a seguir resume a quantidade de artigos nacionais a serem discutidos neste trabalho.

Quadro 3 – Artigos nacionais sobre visualização em Geometria obtidos no levantamento entre 2010 e 2019

Ano	Origem do Artigo		
	Portal de Periódicos da Capes	SciELO	Google Acadêmico
2010	1		1
2012	2		
2013	1		
2016	1		
2017			1
2018	1		
2019	2	1	
Total	8	1	2

Fonte: A autora, 2020.

Também no site Google Acadêmico, foi realizada uma busca por trabalhos internacionais, porém refinando a pesquisa de modo que os descritores ocorressem no título do trabalho, não incluindo patentes ou citações. Com isso foram obtidos 27 resultados. Desses, encontramos disponíveis 17 trabalhos que conseguimos acessar na íntegra. Pela análise dos títulos e resumos, buscando indicações de que o trabalho trata da visualização voltada à Geometria, desconsideramos trabalhos voltados para Geologia, Física, Biologia, Psicologia,

Engenharia, trabalhos de conclusão de curso e relatórios. Um fato que se pode notar é que muitos desses trabalhos utilizavam a palavra ‘visualização’ como a produção de imagens a partir de dados ou hipóteses através de tecnologias como softwares, impressão 3D entre outras. Verificou-se também, nos artigos nacionais e internacionais, que todos versam sobre Geometria Euclidiana.

1.4.1 Pesquisas levantadas no Portal de Teses e Dissertações da CAPES e a presente pesquisa

Pela busca realizada no portal de Teses e Dissertações da CAPES foram selecionados para análise 07 trabalhos, sendo os demais desconsiderados por não terem foco na visualização em Geometria. Visto que a presente pesquisa visa investigar a atividade de visualização na resolução de tarefas de Geometria pelos acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná ao ingressar e ao concluir as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do referido curso. Busca-se compreender se há pesquisas nessa direção e também como as pesquisas acadêmicas de mestrado e doutorado têm tratado do tema.

Com a leitura dos resumos, referenciais teóricos e conclusões (ou correspondentes), buscou-se compreender o entendimento que trabalhos apresentam sobre o conceito relativo à visualização, quais os referenciais teóricos adotados referentes ao tema, como foi o desenvolvimento metodológico da pesquisa e, se possível, identificar em qual(is) tendência(s) dentre as elencadas em Flores, Wagner e Buratto (2012) as pesquisas levantadas se enquadram.

Pode-se observar que a pesquisa de mestrado de Souza (2010) entende a visualização no sentido de Gutiérrez (1996a) e, quanto ao ensino e aprendizagem de Geometria, utiliza Parzysz (1988), focando na utilização de habilidades de visualização. O trabalho investiga a utilização de imagens para desenvolver a visualização em alunos do Ensino Médio. É um estudo qualitativo e identifica o pensamento visual dos estudantes seguindo uma das tendências elencadas em Flores, Wagner e Burrato (2012).

Em sua dissertação, Wagner (2012) tem por objetivo verificar como a técnica da perspectiva se instituiu em uma prática visual que serviu tanto de suporte quanto de efeito para a realização das pinturas no Renascimento. Fazendo isso através do cruzamento entre Arte, Matemática e práticas do olhar, partindo da reflexão que história e arte podem contribuir tanto para o entendimento das práticas de olhar quanto para o exercício da visualização Matemática. Para a análise, escolheram quatro pinturas realizadas por artistas italianos no período do

Renascimento e aplicaram a técnica da perspectiva central de Alberti com o propósito de realizar um exercício de visualização. O trabalho elenca os principais entendimentos sobre visualização nas pesquisas em Educação Matemática e segue a tendência da Visualidade, conceito discutido por Flores (2010), sendo visualidade a “soma de discursos que informam como nós vemos, olhamos as coisas e para as coisas” e “implica conhecer práticas visuais inseridas em processos históricos, em meio a relações de poder e estabelecendo-se como regimes visuais” (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p.43).

Palles (2013), em sua dissertação, entende a visualização no sentido de Duval (2004), como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, sendo esta atividade de representação e não apenas de percepção. Apresenta como objetivo o estudo da visualização geométrica dos registros figurais dinâmicos por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, visando responder a seguinte questão de pesquisa: “Quais elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização estão presentes em uma sequência didática para a construção da fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro por meio do software Cabri-3D?” (PALLES, 2013, p. 8). A autora analisou a sequência didática aplicada por Possani (2012) à luz da visualização embasada na teoria de Duval (2004). A pesquisa segue as tendências: Influência da tecnologia no pensamento visual e também a tendência aspectos semióticos e representacionais na visualização Matemática.

A dissertação de Santos (2014) propõe compor um solo de investigação e reflexão sobre o papel da visualização, no intuito de tornar visíveis aspectos do conhecimento matemático. Tem como objetivo de investigar o modo como a visualização colabora para a compreensão e possível construção dos conceitos matemáticos. Aborda múltiplos significados e tipos de visualização nas pesquisas em Educação Matemática, segundo os principais pesquisadores do tema como apresentados em Buratto (2012), entre outros e analisa de que forma esses processos podem contribuir para a concretude do conhecimento Matemático. A pesquisa é de natureza teórica, foge às tendências de pesquisa elencadas em Flores, Wagner e Buratto (2012) porém pode ser vista como uma base para o estudo da visualização para subsidiar pesquisas posteriores, por tratar da essência do processo de visualização através de uma discussão teórica e de exemplos.

Na dissertação de Kawamoto (2016), o entendimento sobre visualização segue as ideias apresentadas por Gutiérrez (1996a), tendo também utilizado Parzysz (1998, 2006) como referencial quanto aos níveis de raciocínio geométrico. O objetivo apresentado foi verificar se alunos de 3ª ano do Ensino Médio mostram ter desenvolvido habilidades de visualização em Geometria Espacial e se, quando questionados ou não, preocupam-se em justificar o raciocínio

feito. A pesquisa se enquadra como diagnóstica com análise qualitativa dos dados, seguindo a tendência, de acordo com Flores, Wagner e Buratto (2012), de um estudo qualitativo identificando o pensamento visual de estudantes.

Máximo (2016), em sua dissertação, teve por objetivo analisar como os estudantes do Ensino Normal Médio¹⁷ lidam com tarefas visuais de leitura e escrita¹⁸ de diferentes representações de poliedros (representações em malha isométrica, modelos tridimensionais e representações dinâmicas de poliedros em softwares de Geometria (Sketchup8, Cabri 3D v2 e o s3D SecBuilder)), tarefas estas aplicadas em forma de uma oficina. Nesse trabalho a visualização é entendida como “um processo amplo e complexo que tem em sua composição a presença do pensamento visual, das imagens mentais e das representações dessas imagens mentais” (MÁXIMO, 2016, p. 16). Utiliza como aporte teórico relacionado a visualização, principalmente, Godino *et al.* (2012) e Gutiérrez (1998). O trabalho pode ser enquadrado em duas das tendências de pesquisa em visualização elencadas por Flores, Wagner e Buratto (2012): é um estudo qualitativo identificando o pensamento visual dos estudantes e também aspectos semióticos e representacionais, por trabalhar com o enfoque Ontosemiótico e mudanças de representações.

Na tese de Moura (2018), a pesquisadora investiga se - e como - a visualização geométrica com dinâmica mental¹⁹ é importante para a compreensão de conceitos geométricos. A autora utilizou o modelo de desenvolvimento geométrico de Van Hiele, a Teoria das Situações Didáticas TSD de Brousseau e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Trabalhou 4 fases da Engenharia Didática, a análise prévia, análise a priori, experimentação e análise a posteriori com alunos do 2º ano do curso técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio. Apoiada na concepção de Van Garderen de que “visualização é a capacidade de manipular mentalmente, girar ou torcer, ou inverter um objeto pictoricamente estímulo apresentado” (VAN GARDEREN, 2006, p. 496 apud BURATTO, 2012, p. 58). A pesquisadora adota a visualização como “capacidade de produzir e transformar imagens mentais; como o processo de formação de imagens, quer seja mental ou com lápis e papel ou com o auxílio de tecnologias” (MOURA, 2018, p. 42). A pesquisa segue as tendências: estudo qualitativo

¹⁷ Curso que habilita a lecionar na Educação Infantil e no Ensino Fundamental - Anos iniciais.

¹⁸ Para a autora, tarefas visuais de leitura são aquelas que consistem em identificar poliedros em três ambientes distintos e tarefas visuais de escrita são aquelas em que se deve esboçar as representações de poliedros no papel isométrico ou utilizando materiais manipulativos.

¹⁹ A autora define o termo Visualização Geométrica com dinâmica mental como “a percepção de uma regularidade e/ou irregularidade geométrica oriunda da ação conjugada da exploração e reflexão em ambiente dinâmico. Esse ambiente dinâmico se dá através de figuras manipuladas mentalmente” (MOURA, 2018, p. 46). Ou seja, visualizar e manipular mentalmente as figuras geométricas a fim de construir o conhecimento.

identificando o pensamento visual de estudantes e a influência da tecnologia no pensamento visual, elencadas em Flores, Wagner e Buratto (2012).

Pode-se observar que as pesquisas apresentam diferentes concepções de visualização. Por exemplo, Souza (2010) e Kawamoto (2016) entendem a visualização no sentido de Gutiérrez (1996a). Máximo (2016, p. 16) se apoia nas concepções de Gutiérrez (1996a) e leva em consideração também Godino *et al.* (2012) para em seu trabalho estabelecer a visualização “como um processo amplo e complexo que tem em sua composição a presença do pensamento visual, das imagens mentais e das representações dessas imagens mentais” (MÁXIMO, 2016, p. 16). Moura (2018), citando como base Van Garderen (2006) assume que a visualização é a “capacidade de produzir e transformar imagens mentais; como o processo de formação de imagens, quer seja mental, com lápis e papel ou com o auxílio de tecnologias” (MOURA, 2018, P. 42). Palles (2013) entende a visualização segundo Duval (2004), Santos (2014) e Wagner (2012) apresentam múltiplos significados e concepções de visualização, porém Santos (2014) segue abordando tipos de visualização e investiga o modo como estas colaboram para a compreensão e possível construção dos conceitos matemáticos, enquanto Wagner (2012) desloca o foco dos aspectos cognitivos da visualização para o conceito de visualidade.

O entendimento sobre visualização adotado nesta pesquisa está pautado nas concepções de Gutiérrez (1996a) e de Duval (2004, 2015), aproximando-se de ideias expostas em Souza (2010), Palles (2013) e Kawamoto (2016), porém diferenciando-se destas por assumir como foco a Visualização Geométrica como a combinação das concepções de Duval e Gutiérrez, sendo uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, na qual são articuladas imagens mentais, representações externas, as ações de interpretação de informação e as habilidades para visualização, de modo que proporcione a integração entre as funções heurística e discursiva.

Pode-se notar que quatro (Souza, 2010; Kawamoto, 2016; Máximo, 2016; Moura, 2018) das 07 pesquisas elencadas através do levantamento podem ser vistas como estudos qualitativos que identificam o pensamento visual de estudantes, sendo que Máximo (2016) também pode ser considerada dentro da tendência: aspectos semióticos e representacionais na Visualização Matemática, e Moura (2018) dentro da tendência: influência da tecnologia no pensamento visual. A pesquisa de Palles (2013), além da tendência que envolve a influência da tecnologia no pensamento visual, está relacionada com aquela referente aos aspectos semióticos e representacionais na Visualização Matemática. O estudo de Wagner (2012) passa da visualização à tendência da Visualidade, e Santos (2014) não atende diretamente às tendências para a pesquisa sobre Visualização em Educação Matemática elencadas em Flores, Wagner e Buratto (2012).

Nossa pesquisa, assim como a de Kawamoto (2016), é uma pesquisa diagnóstica e um estudo qualitativo identificando o pensamento visual de estudantes, porém também leva em consideração aspectos semióticos e representacionais na Visualização Matemática, como pode ser notado nas pesquisas de Palles (2013) e Máximo (2016). Embora se distancie destas duas, já que Palles (2013) retrata uma pesquisa de cunho teórico analisando uma sequência didática aplicada em outra pesquisa à alunos do Ensino Médio, e Máximo (2016) apresenta as análises de questões, aplicadas durante uma oficina à alunos cursando o Ensino Normal Médio, pautado na Ontosemiótica.

Pode-se notar que três das pesquisas levantadas (Wagner, 2012; Palles, 2013; Santos, 2014) são pesquisas de cunho teórico, enquanto as quatro demais (Souza, 2010; Kawamoto, 2016; Máximo, 2016; Moura, 2018) são pesquisas que envolveram aplicação com alunos em nível médio de ensino. Nenhuma das pesquisas investiga a Visualização em Geometria no nível superior de ensino. Tal fato diferencia nosso trabalho de todos os analisados nesse levantamento e ressalta sua potencialidade em discutir sobre a visualização e a formação do professor no ensino superior.

1.4.2 Artigos nacionais levantados e a presente pesquisa

Foram analisados, a partir da busca relatada anteriormente, 11 artigos nacionais com foco na Visualização em Geometria. Como já exposto na seção anterior, buscou-se, também em relação aos artigos, compreender o entendimento que os trabalhos apresentam sobre o conceito relativo à visualização, quais os referenciais teóricos adotados referentes ao tema, como foi o desenvolvimento metodológico da pesquisa e, se possível, identificar em qual(is) tendência(s) dentre as elencadas em Flores, Wagner e Buratto (2012) as pesquisas levantadas se enquadram. Isso para situar a presente pesquisa em relação ao que vem sendo estudado.

Dentre os artigos analisados, somente o de Mota e Laudares (2013) trata de uma pesquisa aplicada a alunos de Licenciatura em Matemática, porém trata-se de um estudo que visa promover a exploração de habilidades de visualização, distanciando-se desta pesquisa, que segue uma linha diagnóstica e, apesar de buscar identificar o pensamento visual dos participantes, leva em consideração aspectos semióticos e representacionais na Visualização Matemática.

O trabalho de Mota e Laudares (2013) apresentam os resultados de uma pesquisa que consistiu na aplicação de uma sequência didática a alunos de Licenciatura em Matemática. O objetivo era de possibilitar o esboço de gráficos, no papel e em um software, buscando a

exploração de habilidades de visualização. Os autores definem Visualização como “uma aptidão que está relacionada com a habilidade de gerar uma imagem mental, promover diversas transformações com objetos e reter alterações produzidas sobre o mesmo” (MOTA; LAUDARES, 2013, p.501). Utilizam também a teoria de Van Hiele como referencial teórico. Pode-se observar que a pesquisa é um estudo qualitativo identificando o pensamento visual e também considerando a influência da tecnologia sobre este.

Cinco dos artigos também foram pesquisas envolvendo um estudo qualitativo, identificando o pensamento visual de estudantes.

Assim como a presente pesquisa, porém com referenciais, objetivos e nível de ensino diferentes, Lovis *et al.* (2018) trata-se de uma pesquisa diagnóstica. Os autores aplicaram um questionário com questões de Geometria para alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, a partir dele realizaram a identificação e análise das habilidades que os grupo de alunos apresentam com relação aos conteúdos pesquisados. Os autores têm como aporte teórico Fainguelernt (1999) e Bressan, Bogisic e Crego (2010). Lovis *et al.* (2018, p. 112) entendem que a “visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais” e “requer dois tipos de habilidades: capacidade de representação visual externa (interpretação de informações de figuras) e o processamento de imagens mentais (processo mental)” (LOVIS *et al.*, 2018, p. 113).

Nobre e Manrique (2019) e Oliveira e Leivas (2017) desenvolveram seus estudos com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Nobre e Manrique (2019), além de um estudo qualitativo identificando o pensamento visual dos estudantes, também considera aspectos semióticos e representacionais na Visualização Matemática. Entendem, pautadas em Duval (2016), que “processo central da Visualização Geométrica recai na desconstrução dimensional das formas” (NOBRE; MANRIQUE, 2019, p.137). O trabalho traz uma análise do desenvolvimento de cinco situações didáticas envolvendo conteúdos de Geometria, área e volume. A sequência didática, com base na Teoria da Situações Didáticas na perspectiva da criatividade aborda a Geometria com foco na observação das interações entre os alunos, pautada no conceito de desconstrução dimensional de Duval.

Já Oliveira e Leivas (2017), é um recorte da dissertação de mestrado profissional da primeira autora, e tem por objetivo desenvolver percepção visual e raciocínio geométrico. Utilizam como suporte teórico a Teoria de Van Hiele. Entendem a Visualização como “um processo capaz de auxiliar na construção do fazer matemático, bem como na comunicação dos

conceitos nas diversas áreas desse conhecimento matemático” (LEIVAS, 2009, p.136 apud OLIVEIRA; LEIVAS, 2017, p. 110).

Dois dos artigos trazem pesquisas qualitativas identificando o pensamento visual dos estudantes do Ensino Médio.

Apresentando como suporte teórico os estudos de Parzysz (1988) e de Gutiérrez (1998), os autores Galvão, Souza e Bastos (2019) elaboraram atividades para analisar pinturas e imagens de várias épocas utilizando um ambiente de Geometria Dinâmica para explorar técnicas de construção de imagens em perspectiva, visando ampliar o repertório de representações planas e as habilidades de visualização dos alunos. Além de ser um estudo qualitativo identificando o pensamento visual dos estudantes, também trata da influência da tecnologia no pensamento visual.

Souza, Moretti e Almouloud (2019), além de ser um estudo qualitativo identificando o pensamento visual dos estudantes, também trata de aspectos semióticos e representacionais na Visualização Matemática. Os autores se pautam em Duval e, assim como Nobre e Manrique (2019), entendem que o processo central da Visualização Geométrica recai na desconstrução dimensional das formas. O artigo, embasado nos princípios da Engenharia Didática, faz uma análise semiótica e cognitiva das produções dos alunos e traz para discussão a desconstrução dimensional das formas como elemento relevante a se considerar na aprendizagem da Geometria.

Nesta pesquisa considera-se a desconstrução dimensional como importante dentro da Visualização. Porém, trata a Visualização Geométrica de um modo mais amplo, como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, na qual são articuladas imagens mentais, representações externas, as ações de interpretação de informações e as habilidades para visualização, de modo que proporcione a integração entre as funções heurística e discursiva.

Os artigos de Zago e Flores (2010); Flores, Wagner e Buratto (2012) e de Flores (2010, 2012, 2016) seguem a tendência da visualidade, são trabalhos em uma linha teórica, ou seja, não houve aplicação ou participantes.

O objetivo do artigo de Flores (2010) é inserir-se no debate acerca de cultura visual e visualidade, buscando contribuições para o entendimento de Visualização Matemática de um modo mais amplo e propondo formas de conectar visualidade à Educação Matemática. A autora propõe o uso da visualidade como estratégia de análise para ampliar a consistência das pesquisas que se ocupam da linguagem visual e educação matemática. Segundo ela, a visualidade pretende relacionar cultura, Educação Matemática e Visualização, considerando a visualização como uma experiência do olhar e do pensar.

Zago e Flores (2010) discutem a relação entre arte e Matemática e levantam a questão “Como a arte e a Matemática podem se relacionar e contribuir com o ensino da Geometria, na qual não só o conhecimento Matemático deve estar em jogo, mas também o desenvolvimento da estética e a visualização?” (ZAGO; FLORES, 2010, p. 337). As autoras analisam obras de arte como potencial para o desenvolvimento e a aplicabilidade de conceitos matemáticos e concluem que arte e matemática podem ser ligadas através do exercício do pensamento, considerando o aspecto matemático como uma sugestão de trabalho para ajudar a ver a arte.

Flores, Wagner e Buratto (2012) apresentam nesse artigo estudo sobre como pesquisadores conceituam ou dão significado ao termo ‘Visualização na pesquisa em Educação Matemática’. Além disso, esse artigo nos serviu de norte na análise dos trabalhos levantados, pois mapeia e classifica tendências na pesquisa brasileira sobre Visualização na Educação Matemática. Tal mapeamento teve como base trabalhos apresentados, de 1998 a 2010, no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). O artigo destaca uma nova tendência teórica, a Visualidade. As autoras explicam que:

[...] enquanto visualização preocupa-se com a aprendizagem de conceitos e a desenvoltura de habilidades visuais, visualidade tende a problematizar o visual enquanto percepção natural e fisiológica e articula-se com práticas visuais no âmbito da história e da cultura. (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p.43).

Segundo as autoras, essa tendência “vem sendo problematizada tanto para desconstruir os princípios fundantes sobre os quais se construíram a noção de visão e percepção, quanto para fomentar novos aportes teóricos para a pesquisa sobre visualização matemática” (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p.31).

Flores (2012), na linha da visualidade, trata da análise de um modo de olhar e representar registrados em plantas de fortificações militares norte-americanas dos séculos XVII e XVIII. Propõe “uma reflexão sobre a construção e a representação do espaço militarizado no âmbito da atividade matemática, para se compreender como a operação do olhar se tornou um olhar geometrizado e, como se criaram e usaram saberes matemáticos para representar com a técnica da perspectiva” (FLORES, 2012, p. 87).

Ainda sob a perspectiva da visualidade, o artigo de Flores (2016) discute sobre potencialidades de uma Educação Matemática através da Arte. Segundo a autora “pretende demarcar uma postura e uma perspectiva teórica ao propor descaminhos para tratar de Arte, Educação e Matemática” (FLORES, 2016, p. 502). A autora demonstra nesse trabalho uma maneira metodológica de lidar com pinturas que vai além de simplesmente ensinar e aprender Matemática.

As pesquisas discutidas aqui trazem diferentes concepções e entendimentos sobre visualização, ou vão além da perspectiva cognitiva, muito difundida nas pesquisas em Educação Matemática, indo da Visualização à Visualidade. O que se pode observar também é que a Visualização em Geometria, nas suas múltiplas concepções e tendências, continua sendo um tema relevante nas pesquisas. O desenvolvimento do pensamento visual é uma potencialidade na busca por uma aprendizagem mais efetiva em Geometria. Com isso, reiteramos a potencialidade deste trabalho que se difere das pesquisas discutidas, embora apresente proximidades com algumas delas, como foi apresentado.

1.4.3 Artigos Internacionais levantados e a presente pesquisa

Foram analisados a partir da busca relatada anteriormente 05 artigos internacionais com foco na Visualização em Geometria, sendo um deles capítulo de livro. Buscou-se, também em relação a esses trabalhos, compreender o entendimento que apresentam sobre Visualização, quais os referenciais teóricos adotados referentes ao tema, como foi o desenvolvimento metodológico da pesquisa e, se possível, identificar as tendências na pesquisa sobre Visualização que esses trabalhos se enquadram. Buscando relações e diferenciações entre a presente pesquisa em relação ao que vem sendo estudado.

Nota-se que os artigos Pachemska *et al.* (2016) e Krochin (2017) relacionam a visualização com a produção de imagens através de tecnologias.

O artigo de Pachemska *et al.* (2016) tem como um dos principais objetivos a determinação dos pontos de vista e da opinião, em termos de Visualização em Matemática – especialmente em Geometria – dos professores no Ensino Fundamental na República da Macedônia. A autora traz referenciais como Arcavi, Bishop, Dreyfus, Presmeg, entre outros. Argumenta que a visualização “não se limita apenas à representação de desenhos para ilustrar certos objetos ou conceitos, mas também é usada em todas as etapas da resolução de qualquer problema matemático” (PACHEMSKA *et al.*, 2016, p.34, tradução nossa).

A autora ressalta as potencialidades do uso de computadores e da tecnologia moderna para criar não apenas animações narrativas, mas também animações interativas, que permitam ao espectador fazer suas próprias explorações, fugindo da educação em que os alunos aprendem fatos e fórmulas enquanto resolvem problemas de Geometria ao invés de usar novos métodos e estratégias. Ou seja, também considera a influência da tecnologia no pensamento visual.

A pesquisa de Krochin (2017) trata de um estudo teórico (não aplicada a participantes) que defende o uso das metáforas visuais (representações) e sua visualização através de recursos

tecnológicos no ensino. Mais especificamente, defende o uso e a implementação das metáforas visuais para transformar imagens matemáticas 2D e 3D em um arquivo PDF.

É indiscutível que o emprego de tecnologias pode auxiliar no desenvolvimento da atividade de Visualização, e sua importância tem sido discutida em diversas pesquisas, embora este não seja o foco deste trabalho.

As pesquisas de Utomo, Juniati e Siswono (2017, 2018) e Gutiérrez *et al.* (2018) centram-se na ideia de um estudo qualitativo identificando o pensamento cognitivo dos alunos do Ensino Médio.

Os dois artigos dos mesmos autores (UTOMO; JUNIATI; SISWONO, 2017; 2018), inspirados nos estudos de Presmeg (1986), tratam de explorar o processo de visualização Matemática em alunos do Ensino Médio ao resolver o seguinte problema:

Uma piscina com 50 metros de comprimento e 25 metros de largura, cuja profundidade foi dividida em duas categorias: adulto e adolescente. O adulto estava com profundidade de 3 metros com distância em 30 metros e o adolescente com profundidade com 1,5 metro e distância em 17 metros, enquanto a barreira inferior era feita em forma de rampa. Quantos litros de água são necessários para encher a piscina? Explique sua resposta! ²⁰ (UTOMO; JUNIATI; SISWONO, 2017, p. 4, tradução nossa).

Nas duas pesquisas os autores entendem a Visualização Matemática como “atividade mental ou atividade cognitiva individual na exploração e manipulação da criatividade durante o término do problema com o objetivo de comunicar informações, pensar e desenvolver a ideia conhecida anteriormente para obter maior entendimento”²¹ (UTOMO; JUNIATI; SISWONO, 2017, p. 3, tradução nossa). E foram observados aspectos de geração de imagens, inspeção de imagens, digitalização e transformação de imagens, sendo que no primeiro trabalho a análise centrou-se em aspectos baseados em dois estilos cognitivos, e no segundo foi dada maior ênfase nas estratégias de resolução.

A pesquisa de Gutiérrez *et al.* (2018) também foi aplicada a alunos do Ensino Médio considerados dotados matematicamente. Os autores analisaram o uso das habilidades de visualização e a complexidade do raciocínio nas soluções oferecidas pelos alunos ao resolverem

²⁰ “A swimming pool which had a size of length 50 meters and width 25 meters which the depth was divided into two categories, namely adult and teenager category. The adult one was with the depth of 3 meters with the distance in 30 meters and the teenager one with the depth 1,5 meters with the distance in 17 meters, while the bottom barrier was made in the form of ramp. How many liters of water required to fill the pool? Explain your answer!” (UTOMO; JUNIATI; SISWONO, 2017, p. 4)

²¹ [...] “mathematical visualization was mental activity or an individual cognitive activity in exploring and manipulating as creativity during finishing the problem with the aim of communicating information, thought and developed the idea known before to get higher understanding”. (UTOMO; JUNIATI; SISWONO, 2017, p. 3).

uma tarefa colaborativa, projetada para promover o desenvolvimento da competência de visualização. O autor expõe que:

Visualização consiste em quatro elementos principais (Gutiérrez, 1996a, p. 10): Imagens mentais são “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais”. Representações externas são “qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e a raciocinar visualmente”. Um processo de visualização é “uma ação mental ou física em que imagens mentais estão envolvidas”. As habilidades de visualização são capacidades estáveis do sujeito, necessárias para o aprendizado efetivo da geometria (Bishop, 1980)²². Em geral, diferentes habilidades de visualização precisam ser dominadas “para executar os processos necessários com imagens mentais específicas para um determinado problema” ao resolver tarefas matemáticas (Gutiérrez, 1996a, p. 10). Del Grande (1990)²³ compilou várias habilidades de visualização com grande relevância para o desenvolvimento de estudantes de matemática. (GUTIÉRREZ *et al.*, 2018, p. 312, tradução nossa).²⁴

As pesquisas de Utomo, Juniati e Siswono (2017, 2018) e Gutiérrez *et al.* (2018) aproximam-se da pesquisa proposta neste trabalho por buscarem compreender o processo cognitivo envolvido na atividade de Visualização a partir de tarefas propostas a estudantes. O que difere a presente pesquisa desses trabalhos são, principalmente, os níveis de ensino pesquisados e o conceito de visualização empregado, embora o entendimento apresentado por Gutiérrez *et al.* (2018) seja parte da base do entendimento empregado neste trabalho.

Assim entende-se que a pesquisa aqui discutida está inserida no contexto das pesquisas em Visualização em Educação Matemática e tem um diferencial por se tratar de uma pesquisa diagnóstica em participantes do nível Superior de Ensino, contribuindo para a discussão sobre a necessidade do uso da visualização e/ou suas variações nos ambientes de ensino de Geometria, bem como para um aprendizado mais efetivo.

²²BISHOP, A. J. Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. **Educational Studies in Mathematics**, v. 11, n. 3, p. 257-269, 1980.

²³ DEL GRANDE, J. J. Spatial sense. **Arithmetic Teacher**, v. 37, n. 6, p. 14-20, 1990.

²⁴“Visualization consists of four main elements (Gutiérrez, 1996, p. 10): Mental images are “any kind of cognitive representation of a mathematical concept or property by means of visual or spatial elements”. External representations are “any kind of verbal or graphical representation of concepts or properties including pictures, drawings, diagrams, etc. that helps to create or transform mental images and to do visual reasoning”. A process of visualization is “a mental or physical action where mental images are involved”. Visualization abilities are stable capacities of the subject which are necessary for effective learning of geometry (Bishop, 1980). In general, different visualization abilities have to be mastered “to perform the necessary processes with specific mental images for a given problem” when solving mathematical tasks (Gutiérrez, 1996, p. 10). Del Grande (1990) compiled several visualization abilities with great relevance for the development of mathematics students”. (GUTIÉRREZ *et al.*, 2018, p. 312).

Em pesquisas como as de Fernandez Blanco (2011, 2013, 2014), Godino *et al* (2012), Gutiérrez (1992, 1996b), Máximo (2016) e Kawamoto (2016) o termo ‘tarefas’ ou ‘tarefas visuais’ foram empregados. E por utilizarmos também esse termo na presente pesquisa, optamos por clarificar o entendimento adotado.

1.5 TAREFAS

Neste trabalho será investigada a atividade de Visualização na resolução de tarefas de Geometria que envolvem o uso de imagens representadas mentalmente ou externamente. Essa seção tem o intuito de clarificar o termo ‘tarefa’ utilizado nesta pesquisa.

Segundo Cyrino e Jesus (2014, p. 752), alguns países, têm dado considerável atenção às tarefas matemáticas na busca de promover o desenvolvimento da Educação Matemática. As autoras mencionam vários pesquisadores de diversos países que exploram o tema e relatam que, embora as tarefas matemáticas exerçam um papel relevante na aprendizagem do aluno, no Brasil, estudos a respeito desse tema ainda são muito recentes.

Brocardo *et al.* (2014, p. 3) diz que “[...] é possível ter entendimentos diferentes do que é uma tarefa e, em particular do que é uma tarefa matemática”. Segundo os autores “as tarefas são os instrumentos mediadores entre o ensino da matemática e a aprendizagem e constituem, por isso, um tema de grande relevo em Educação Matemática” e consideram uma tarefa como “qualquer coisa que o professor usa para ‘revelar’ matemática ou que os alunos decidem fazer por si sós” (BROCARD *et al.* (2014, p. 3).

Ponte (2005) propõe uma organização das tarefas em termos do grau de desafio cognitivo e de abertura; quanto à duração (se longa, média ou curta) e quanto ao contexto (se real, semirreal ou puramente matemático). Segundo o autor, cada uma, de acordo com as suas características próprias, ocasiona diferentes oportunidades de aprendizagem para os alunos. Ele salienta a necessidade de uma gestão curricular, na qual o professor interpreta e (re)constrói o currículo, levando em consideração as características dos alunos e suas condições de trabalho, realizando a diversificação de tarefas, bem como de experiência de aprendizagem e de instrumentos de avaliação.

O trabalho de Ponte (2005) aborda a existência de alguns tipos de tarefas e descreve as tarefas do tipo: problemas, exercícios, exploração, investigações, projeto, modelação e jogos.

As tarefas dos tipos problemas e exercício são muito utilizadas no ensino de Matemática. Ponte (2005) chama a atenção para o fato de que uma mesma tarefa pode ser um problema para certos alunos de determinada faixa etária, enquanto que para outros não passará de um

exercício. Para o autor, um problema comporta sempre um grau de dificuldade apreciável, ou seja, o aluno não dispõe de um processo imediato para a resolução. Já no caso do exercício, o aluno conhece o processo e é capaz de usá-lo. E em ambos os tipos, está perfeitamente indicado nessas tarefas o que é pedido. Esses tipos de tarefa são importantes e servem essencialmente ao propósito de consolidação de conhecimentos. Mas Ponte (2005) alerta que “mais importante do que fazer muitos exercícios será fazer exercícios cuidadosamente escolhidos, que testem a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos” (PONTE, 2005, p. 5).

A importância das tarefas de investigação é defendida por vários autores segundo Ponte (2005), pois essas promovem o envolvimento dos alunos, por requerer uma participação ativa desde a formulação das questões a resolver. Essas tarefas, fornecendo informação e/ou colocando questões ou não, proporcionam muito trabalho ao aluno, quer em termos de elaboração de uma estratégia de resolução, quer em termos da formulação específica das próprias questões a resolver.

Ponte (2005) caracteriza as tarefas em termos do seu grau de desafio e da abertura. Salaria que “o grau de desafio matemático relaciona-se de forma estreita com a percepção da dificuldade de uma questão e constitui uma dimensão que varia, naturalmente, entre os polos de desafio ‘reduzido’ e ‘elevado’ ” (PONTE, 2005, p. 7). Para esse autor, uma tarefa fechada é caracterizada por deixar claro o que é dado e o que é pedido, já uma tarefa aberta é aquela que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado ou no que é pedido, ou em ambos. Sendo assim, um exercício é uma tarefa fechada de desafio reduzido; um problema é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado e uma investigação é uma tarefa aberta com um grau de desafio elevado.

Um outro tipo de tarefa elencada por Ponte (2005) é a tarefa de exploração, a qual define como uma tarefa relativamente aberta e fácil, na qual o aluno pode começar a trabalhar sem muito planejamento. O fato de ser considerada fácil é o que a distingue da tarefa de investigação. Além do grau de desafio e abertura, Ponte (2005), caracteriza as tarefas quanto à duração e ao contexto.

A realização de uma tarefa matemática pode requerer poucos minutos ou demorar dias, semanas ou meses, ou seja, a duração pode ser curta ou longa. Segundo o autor, um projeto é uma tarefa de longa duração que partilha muitas das características das investigações. Para ele, os exercícios são tarefas de curta duração; já os problemas, as tarefas de exploração e investigação são de média duração e os projetos são de longa duração.

Com respeito ao contexto, segundo o autor, as tarefas podem ser enquadradas num contexto da realidade, nas quais apresentam informações que fazem parte do cotidiano e da

vivência do aluno. Podem ser enquadradas num contexto de Matemática pura, no qual as tarefas são formuladas em termos e para fins puramente matemáticos. Por fim, há tarefas que são designadas num contexto considerado “semirrealidade”, no qual, embora aparentemente a tarefa contemple uma situação real, a maior parte das propriedades reais das situações não são levadas em conta.

O foco está na propriedade que interessa a quem elaborou a tarefa, nelas que o aluno deve se centrar. Por exemplo, uma tarefa que trata da quantidade de pessoas em um ônibus e que apresenta como resposta um número não natural. Ponte (2005) chama de ‘tarefas de modelação’ aquelas que se apresentam num contexto de realidade. Por fim, fala dos jogos, como uma tarefa que, segundo ele, constitui um problema, já que as regras são bem definidas e o objetivo normalmente é vencer. Dependendo do jogo, pode ser de difícil solução ou natureza exploratória. Além disso, tem importantes potencialidades para a aprendizagem, se valorizados os aspectos matemáticos.

O instrumento de análise escolhido para a produção dos dados desta pesquisa se constituiu a partir de uma entrevista semiestruturada, cuja estrutura foi pautada em seis tarefas do tipo problema de exploração, no contexto geométrico em que a visualização é requerida, em sua maioria de média duração e com grau de desafio variados podendo, em alguns casos, ser alto para os acadêmicos ingressantes. A organização da estrutura da entrevista, bem como a escolha dessas seis tarefas serão apresentadas no próximo capítulo.

2. VIÉS METODOLÓGICO

Este capítulo versa sobre a metodologia empregada na pesquisa. O processo metodológico é descritivo, a pesquisa é de cunho qualitativo, pautada no paradigma interpretativo e delineada segundo a modalidade técnica de estudo de casos múltiplos, sendo a produção dos dados a partir de uma entrevista semiestruturada, cuja estrutura é pautada na resolução de tarefas e a análise dos dados realizada a partir de uma categorização *a priori* à luz dos referenciais teóricos.

2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Segundo Coutinho (2015), a abordagem interpretativa/qualitativa das questões sociais e educativas procura penetrar no mundo pessoal dos sujeitos para saber como interpretar as diversas situações, tentando compreender o mundo complexo desde o ponto de vista de quem vive e que significados tem para eles. Nessa abordagem o pesquisador é o instrumento-chave, o ambiente é a fonte direta dos dados, não requer o uso de técnicas e métodos estatísticos, têm caráter descritivo, o resultado não é o foco da abordagem, mas sim o processo e seu significado, ou seja, o principal objetivo é a interpretação do fenômeno objeto de estudo (GODOY, 1995; SILVA; MENEZES, 2005).

É usual as pesquisas serem classificadas com base em seus objetivos gerais e do ponto de vista de seus procedimentos técnicos, como é apresentado por Gil (2008). Esse autor afirma ser possível classificar as pesquisas, em relação aos objetivos gerais, em três grandes grupos: exploratórias, descritivas e explicativas.

Como já apresentado na introdução, o presente estudo visa investigar a atividade de Visualização na resolução de tarefas de Geometria, em especial a mobilização de imagens mentais, das ações de interpretação de informações e das habilidades mobilizadas para visualização, bem como a coordenação entre as funções heurística e discursiva pelos acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná, ao ingressar no curso e ao concluir as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do referido curso. Desse modo, entende-se que essa é uma pesquisa exploratória, de cunho qualitativo, pautada no paradigma interpretativo.

Pelo objetivo de pesquisa apresentado e de acordo com Yin (2005), entende-se que o estudo de casos múltiplos é o delineamento metodológico que melhor se adequa à pesquisa pelo fato de buscar pela resposta à questão de pesquisa ocorrer em dois grupos, o dos acadêmicos

ingressantes e daqueles que concluíram as disciplinas de Geometria do curso. Sendo estes dois grupos as unidades de análise deste estudo de caso.

2.2 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em cinco ações. Iniciando com um levantamento teórico, no qual foram estudados livros, artigos e demais trabalhos de pesquisas sobre Visualização em Geometria. Porém, tal levantamento e estudo permearam todas as fases da pesquisa.

A segunda ação consistiu na aplicação de um conjunto de tarefas aos alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática e aos que já haviam concluído as disciplinas de Geometria.

O conjunto de tarefas aplicadas nesse momento foi nomeado por Tarefas de Aproximação.²⁵ Essas tarefas abordam conceitos básicos como: vértice, aresta, face, paralelismo, retas reversas, comparação entre áreas, simetria etc., e sua resolução requer a mobilização de habilidades para visualização.

A expectativa com essa ação, além da aproximação com os participantes, eram obter dados que possibilitassem ter uma ideia de como os alunos compreendem e utilizam esses conceitos, se mobilizavam algumas habilidades para visualização na resolução, identificar semelhanças e/ou diferenças na forma de responder as tarefas propostas entre os grupos. Ou seja, que fornecesse subsídios para responder às questões: como acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade no Brasil, resolvem tarefas de Geometria Euclidiana em que a visualização é requerida; como se dá a atividade de Visualização nesse público; há diferenças na atividade de Visualização de alunos ingressantes e de concluintes e os conceitos Geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para eles.

Essa ação se mostrou importante, pois os registros escritos obtidos de cada participante e a observação direta por parte da pesquisadora durante a aplicação das tarefas mostraram-se insuficientes para análise. A partir dela, viu-se a necessidade de reformular a estratégia de coleta dos dados, principalmente em relação aos objetivos de cada tarefa e a forma de coleta, que passou a ser uma entrevista semiestructural individual.

A terceira ação foi a construção e aplicação da entrevista para coleta de dados. A base da entrevista é constituída por seis tarefas pensadas e selecionadas de modo a suprir as lacunas observadas na ação anterior. Na seção 2.5.1 apresentaremos as seis tarefas.

²⁵Disponível no Apêndice A.

Cada um dos participantes respondeu à entrevista individualmente. Cada tarefa foi lida pelo entrevistador junto ao entrevistado. As resoluções das tarefas foram registradas por cada indivíduo em folhas de sulfite, as respostas à entrevista também foram gravadas em áudio com consentimento dos mesmos e, além disso, a pesquisadora realizou anotações em notas de campo durante a entrevista. Enquanto eles executavam a atividade matemática requerida em cada tarefa, eram questionados sobre como estavam pensando para responder, era solicitado que compartilhassem em voz audível seu raciocínio. E, além disso, eram feitas perguntas particulares à resolução individual na busca de compreender cada raciocínio em particular.

A quarta ação foi a análise das respostas obtidas na entrevista e a organização dos dados. Para isso, foram estabelecidas categorias *a priori* (apresentadas na seção 3.6 deste capítulo) para a análise realizada sobre os áudios e os registros em papel de cada participante, considerando também as anotações realizadas na observação direta realizada pela pesquisadora durante a entrevista. A organização é pautada no procedimento metodológico descritivo e no referencial teórico.

A quinta ação passou a ser a escrita e organização da pesquisa, contemplando a apresentação dos resultados, considerações finais e sugestões de possíveis contribuições.

Pretende-se ainda realizar uma sexta ação, finalizando esta pesquisa com uma fala devolutiva aos partícipes da pesquisa e a demais professores interessados, apontando as considerações realizadas na pesquisa, bem como a produção de artigos, entre outros trabalhos embasados neste trabalho.

2.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA E CONTEXTO DA SELEÇÃO

No projeto inicial pensou-se em realizar a pesquisa com acadêmicos ingressantes e egressos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual do norte do Paraná no ano de 2018. A escolha em se trabalhar com esses dois grupos deu-se pela curiosidade em saber se a forma de resolver tarefas de Geometria que envolvem a visualização é diferente entre os dois grupos e se o fato de os alunos terem cursado as disciplinas de Geometria da licenciatura favorece o desenvolvimento da Visualização e das habilidades que a compõe.

As disciplinas específicas de Geometria ofertadas em cada um dos quatro anos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática da universidade estadual do norte do Paraná pesquisada são: Geometria Analítica, Geometria Euclidiana, Construções Geométricas e Introdução à Geometria Não-Euclidiana. O apêndice B traz um quadro listando essas disciplinas, com suas respectivas ementas e objetivos.

Seguindo a linha de raciocínio inicial, a primeira ação para a seleção dos participantes foi a aplicação das Tarefas de Aproximação,²⁶ as quais requeriam a aplicação da visualização e em específico a mobilização de habilidades para visualização em sua resolução. O objetivo inicial era aplicar essas tarefas a todos os ingressantes do curso no ano de 2018 e aos egressos que se dispusessem a respondendo ao contato da pesquisadora. As tarefas foram escolhidas com base nas apresentadas nas pesquisas de Kawamoto (2016), Duval (2015) e Fernández Blanco (2011). Para a realização de cada tarefa era necessária a mobilização de uma variedade de habilidades para visualização, as quais esperava-se poderem ser observadas nas resoluções escritas de cada participante.

A aplicação dessas tarefas deu-se separadamente às três turmas do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática (101 acadêmicos) durante o período de aula regular, em duas horas-aula (1h e 40 min.). No caso dos alunos ingressantes da turma diurna, as aulas utilizadas foram cedidas pelo professor de Geometria Analítica, e no caso das duas turmas do noturno foram cedidas pelo professor de Fundamentos da Matemática. Nas três turmas os alunos responderam as tarefas individualmente, utilizando cerca de 1 hora, sem a interferência da pesquisadora ou outros.

As mesmas Tarefas de Aproximação também foram aplicadas à 17 alunos que já haviam cursado todas as disciplinas de Geometria do referido curso de Licenciatura e se dispuseram respondendo o contato do pesquisador. Tal contato foi realizado via aplicativo de comunicação a 29 possíveis participantes da pesquisa, entre egressos e acadêmicos em vias de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, mas que já haviam concluído as disciplinas de Geometria. Nesse caso, as tarefas foram aplicadas individualmente, na biblioteca da instituição, em horário estabelecido em concordância entre o participante e a pesquisadora. Cada pesquisado teve 1 hora e 40 minutos para responder às tarefas, embora a maioria tenha utilizado cerca de 1 hora. Também nesse caso não houve interferência da pesquisadora ou outros durante a resolução.

Verificamos nas respostas dadas pelos alunos que estes escreviam pouco ou nada, impossibilitando a análise da mobilização das habilidades para visualização ou atividade de visualização. Observamos que seria importante questioná-los durante a resolução das tarefas, instigando-os a dizer o que estavam pensando. A partir do observado, o conjunto de tarefas foi reformulado de modo a escolher/formular tarefas em que a quantidade de habilidades para visualização requeridas para a resolução fosse menor em cada uma, buscando assim melhorar

²⁶Disponível no Apêndice A.

a identificação daquelas mobilizadas, e foi decidido realizar sua aplicação na forma de entrevistas individuais, ou seja, com a reestruturação, as tarefas de aplicação deram lugar a uma entrevista semiestruturada composta por seis tarefas (apresentadas na seção 2.5.1).

Para a aplicação da entrevista semiestruturada individual foram convidados os acadêmicos ingressantes que participavam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), dentre eles foram chamados os oito primeiros que se dispuseram. O convite e parte das entrevistas ocorreu durante um dos encontros desse projeto, com a autorização de uma das coordenadoras. As demais entrevistas ocorreram nas dependências da universidade em horário estabelecido em concordância entre o participante e o pesquisador.

Foi realizado um novo contato com aqueles que já haviam cursado todas as disciplinas de Geometria e responderam às Tarefas de Aproximação. Retornaram o contato se disponibilizando novamente cinco acadêmicos em fase de conclusão desse curso no referido ano e três recém-formados nesse curso no ano de 2017. Do mesmo modo, as entrevistas ocorreram individualmente nas dependências da universidade em horário estabelecido em concordância entre os participantes e a pesquisadora.

Por motivos de organização e sigilo, chamou-se o grupo dos ingressante de GI e o grupo dos participantes que já haviam concluído as disciplinas de Geometria de grupo GJ, sendo essas duas unidades de análise composta por oito participantes cada.

2.4 COLETA DE DADOS

Esta seção apresenta a forma como os dados foram coletados. O procedimento para coleta deu-se por meio da entrevista semiestruturada que foi realizada individualmente com cada participante. Sua estrutura contemplou uma sequência de seis tarefas de Geometria em que a visualização é requerida.

O registro da entrevista deu-se pela gravação em áudio, por anotações em notas de campo, frutos da observação pela pesquisadora e também foram realizados registros escritos em folha pelos participantes, de modo que os raciocínios matemáticos foram expostos como registros discursivos e não discursivos de forma oral e por extenso na folha de registro.

A coleta ocorreu em conformidade com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos - COPEP²⁷ -, da Universidade Estadual de Maringá. De modo que foram

²⁷ O COPEP compõe o comitê de ética da Universidade Estadual de Maringá, que se responsabiliza por apreciar os protocolos de pesquisas em que há envolvimento de seres humanos e que são desenvolvidos na instituição. A função do comitê é salvaguardar a dignidade, os direitos, a segurança e o bem-estar dos sujeitos da pesquisa. Ver

entregues à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática da instituição pesquisada e aos colaboradores solicitando suas assinaturas, duas cópias do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C), com explicações éticas e sobre a pesquisa, incluindo a necessidade das gravações de áudio.

2.4.1 Técnicas e procedimentos de recolha de dados

Nesta pesquisa, a recolha de dados se voltou para a mobilização dos quatro elementos que compõem a Visualização segundo Gutiérrez (1996a) (as imagens mentais, representações externas, ações de interpretação de dados, habilidades para a visualização) e para a coordenação das três operações subjacentes à Visualização segundo Duval (2015) (as funções heurística, de suporte e discursiva, que envolvem a coordenação de diferentes representações semióticas), procedentes das produções Matemáticas dos estudantes no transcorrer da resolução de tarefas de Geometria Euclidiana que requerem a Visualização.

Para Yin (2005, p. 105) “as evidências para um estudo de caso podem vir de seis fontes distintas: documentos, registros em arquivo, entrevistas, observação direta, observação participante e artefatos físicos”. Pautados nesse autor, as técnicas de recolha de dados utilizadas nesta pesquisa foram a entrevista semiestruturada, a análise dos registros realizados pelos participantes e a observação direta ou simples.

Neste sentido, o Quadro 4 apresenta uma síntese das técnicas de recolha de dados utilizadas, bem como suas respectivas fontes, formas de registro e momento:

Quadro 4 – Síntese das técnicas de recolha de dados, fontes, formas de registro e momento

Técnica	Fonte	Formas de registro	Momento
Entrevista semiestruturada	Participantes	Gravação de áudio e registros escritos	Durante o desenvolvimento da pesquisa, fase de coleta de dados. Em horário estabelecido entre o participante e o pesquisador,
Análise dos registros realizados pelos participantes	Produções escritas dos participantes	Produção escrita	Durante o desenvolvimento da pesquisa, fase de análise
Observação simples	Participantes	Notas de campo	Durante a entrevista

Fonte: A autora, 2020.

Segundo Yin (2005, p. 112), “uma das mais importantes fontes de informações para um estudo de caso são as entrevistas”. Neste estudo a entrevista constitui a parte central na recolha de dados, por esse fato, será detalhada na seção 2.5 a elaboração e a estrutura da entrevista aplicada.

O tipo de observação realizada durante a entrevista foi a direta ou simples, que segundo Gil (2008, p. 101) é “aquela em que o pesquisador, permanecendo alheio à comunidade, grupo ou situação que pretende estudar, observa de maneira espontânea os fatos que aí ocorrem. Neste procedimento, o pesquisador é muito mais um espectador que um ator”. Para esse autor:

Embora a observação simples possa ser caracterizada como espontânea, informal, não planejada, coloca-se num plano científico, pois vai além da simples constatação dos fatos. Em qualquer circunstância, exige um mínimo de controle na obtenção dos dados. Além disso, a coleta de dados por observação é seguida de um processo de análise e interpretação, o que lhe confere a sistematização e o controle requeridos dos procedimentos científicos. (GIL, 2008, p.101).

No campo de pesquisa, segundo Matos e Carreira (1994, p.35) “as observações têm a seu favor, entre outras coisas, o fato de permitir registrar comportamentos e acontecimentos à medida que estes vão tendo lugar”.

Como as imagens cinestésicas (as imagens em movimento) fazem parte do rol de imagens mentais que é um dos elementos a serem observados nesta pesquisa, a observação tornou-se de grande valia para a coleta de dados, e a partir da observação foram realizados em

notas de campo, como recomendado por Gil (2008), os registros mais significativos frutos da observação realizada pela pesquisadora durante a entrevista, tais como gestos, dificuldade, equívocos conceituais, entre outros, em conformidade também com Zabalza (1994), para quem as notas de campo incluem descrições verbais, gestuais e outras ações pertinentes aos participantes da investigação, permitindo ao pesquisador realizar anotações e comentários sobre as ações reveladas pelos investigados.

Os documentos gerados pelos participantes da pesquisa ao responderem a entrevista (registros escritos em folha de sulfite), bem como os áudios e as notas de campo, permitiram à pesquisadora analisar e interpretar as respostas identificando os elementos que compõe a Visualização.

A análise dessas produções é uma importante técnica de recolha de dado, que permite confrontar informações com as outras técnicas de coleta. No estudo de caso, de acordo com Yin (2005, p. 131) “a análise de dados consiste em examinar, categorizar, classificar em tabelas ou, do contrário, recombinar as evidências tendo em vista proposições iniciais de um estudo”. Para esse autor, como as estratégias e as técnicas não foram muito bem definidas no passado, analisar as evidências de um estudo de caso é uma atividade particularmente difícil. Na seção 2.6 serão detalhadas as categorias estabelecidas nesta pesquisa para as análises. Antes disso, a seção seguinte apresenta a elaboração e a estrutura da entrevista aplicada.

2.5 ELABORAÇÃO E ESTRUTURA DA ENTREVISTA

Esta seção apresenta como se deu a escolha por uma entrevista semiestruturada como base para a coleta de dados. Basicamente, a estrutura da entrevista é dada por seis das tarefas pautadas nos referenciais teóricos descritos no capítulo 2.

Como apresentado nas seções 2.2 e 2.3, esta pesquisa delineou-se em cinco ações, sendo as três primeiras: o levantamento teórico inicial, a aplicação de um conjunto de tarefas à qual foi nomeada por ‘Tarefas de aproximação’ e a construção e aplicação da entrevista semiestruturada.

A expectativa inicial era, por meio da aplicação das Tarefas de aproximação, obter dados relevantes para se chegar ao objetivo proposto no projeto de pesquisa. Porém, as produções escritas dos participantes dessa fase não nos permitiam muitas inferências. Notou-se que muitas vezes as respostas não deixavam claro o raciocínio realizado para responder as tarefas e que eram muitas as habilidades requeridas para a resolução de cada tarefa, dificultando a análise.

A partir do observado, estabeleceu-se que a coleta de dados teria como base uma entrevista semiestruturada individual, cuja estrutura é dada, principalmente, por um conjunto de tarefas, reformulado em relação ao aplicado nas Tarefas de Aproximação, para que desse modo os participantes pudessem ser questionados sobre o que estavam pensando ao responder cada tarefa, incentivando-os a registrar o máximo possível na folha fornecida.

Para escolha das tarefas a compor a estrutura da entrevista, observou-se a quantidade de habilidades para visualização requeridas para a resolução, buscando que fosse menor em cada tarefa se comparadas às das Tarefas de Aproximação, para facilitar a identificação daquelas mobilizadas.

2.5.1 Descrição do guia para entrevista

Aos participantes do GI, perguntou-se inicialmente se haviam cursado o Ensino Médio em escola pública ou particular, se Ensino Médio foi convencional ou técnico, se cursam a Licenciatura em Matemática diurno ou noturno e se estavam cursando ou se tinham concluído a disciplina de Geometria Analítica.

Os participantes do GJ foram perguntados se já haviam concluído as disciplinas de Geometria do curso de Licenciatura em Matemática, se já haviam concluído o curso e, se sim, qual atividade, em relação à estudo ou trabalho, desempenham no momento.

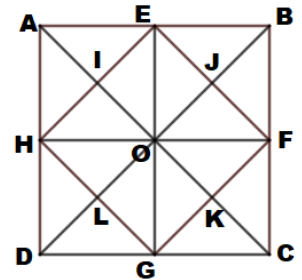
Na sequência eram dadas as folhas com as seis tarefas, que serão apresentadas na sequência, e a pesquisadora questionou cada tarefa, uma a uma, segundo a leitura de seu enunciado junto ao entrevistado. Enquanto eles executavam a atividade matemática requerida em cada tarefa, eram questionados sobre como estavam pensando e solicitado que compartilhassem em voz audível seu raciocínio.

As seis tarefas a seguir, segundo Ponte (2005), são do tipo problema de exploração dentro do contexto matemático, de média duração e grau de desafio variado, podendo ser alto para os acadêmicos ingressantes.

A primeira tarefa, apresentada na Figura 12, foi baseada em uma tarefa citada em Kawamoto (2016, p. 38):

Figura 12 – Tarefa 1 – Identificando os quadrados

1. Observe a figura ao lado e responda:
- Identifique quantos quadrados há na figura ao lado. Descreva com suas palavras o que o levou a sua conclusão.
 - Identifique os segmentos paralelos as diagonais do quadrilátero $ABCD$.
 - Explique com suas palavras qual é a relação entre os quadriláteros $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ e $HOGD$.
 - O quadrilátero $EFGH$ pode ser considerado como um quadrado. Explique com suas palavras o porquê.



Fonte A autora, baseada em tarefa citada por Kawamoto (2016, p. 38), 2018.

Ao questionar o entrevistado sobre essa primeira tarefa, o pesquisador levantou também os seguintes questionamentos:

- o que é um quadrado do ponto de vista matemático? (Questionamento apresentado junto ao item a);
- o que são diagonais de um quadrilátero? (Questionamento apresentado junto ao item b);
- quais relações podem ser estabelecidas entre os quadriláteros $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ e $HOGD$? (Durante o questionamento sobre o item c);
- o que é uma demonstração em matemática? (Questionamento apresentado junto ao item d).

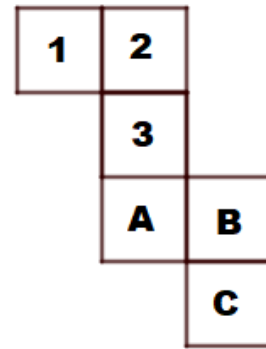
Esperava-se que o entrevistado apresentasse um conceito de quadrado considerando os pressupostos matemáticos e que, em resposta ao item **a**, reconhecesse os 10 quadrados existentes na configuração; no item **b**, as diagonais AC e BD do quadrado $ABCD$, que os segmentos EF e GH são paralelos à diagonal AC e os segmentos HE e GF são paralelos à diagonal BD . No item **c**, que explicasse que os quadriláteros em questão são congruentes e, no item **d**, que conseguissem escrever uma justificativa, matematicamente aceitável, utilizando argumentos pautados em propriedades matemáticas para justificar, por exemplo, que os ângulos internos do quadrilátero $EFGH$ medem 90° e que seus lados têm a mesma medida e, portanto, $EFGH$ é um quadrado.

A segunda tarefa, baseada na tarefa proposta em Kawamoto (2016, p. 40), é a seguinte:

Figura 13 – Tarefa 2 – Faces do cubo

2. A figura ao lado representa uma das possíveis planificações de um cubo. Considerando a figura e sabendo que a soma dos números de faces opostas é igual a 7, nessas condições, quais são os números das faces A, B e C?

Explique o que você pensou para responder.



Fonte: A autora, baseada em uma tarefa proposta em Kawamoto (2016, p. 40), 2018.

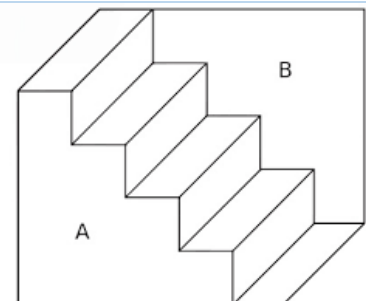
Esperava-se que o participante conseguisse, a partir da planificação dada, imaginar o cubo em 3D e, com as hipóteses do enunciado, compreendesse que a face A é oposta à face com o número 2; a B é oposta à de número 1 e a C oposta à que contém o número 3. Desse modo, apresentasse como resposta que ao número na face A é 5, que na face B está o número 6 e na face C o número 4.

A Figura 14 apresenta a terceira tarefa aplicada, que foi criada pela pesquisadora e seu orientador. É uma tarefa de exploração, sendo assim não há resposta não aceitável, a menos que apresentasse falhas em conceitos ou propriedades matemáticas.

Ao apresentar essa tarefa, a pesquisadora questionou os entrevistados sobre o que a figura dada na tarefa se assemelhava em sua opinião.

Figura 14 – Tarefa 3 – O que você vê?

3. Observe a figura ao lado, descreva o que você vê e diga qual relação pode ser estabelecida entre A e B.
Explique com suas palavras como você pensou.



Fonte: A autora, 2018.

Na resolução dessa tarefa esperava-se que o entrevistado, além de ver a imagem como uma figura plana, a relacionasse a um objeto tridimensional semelhante a uma escada, elencando ao menos duas perspectivas e variações de posicionamento entre as partes A e B, a partir de seu olhar como observador. Por exemplo, se o observador vê os degraus de cima para baixo ele indicará a parte A à frente da parte B, caso o observador veja os degraus da escada acima dele, indicará a parte B à frente da A.

A tarefa 4 (Figura 15) também foi criada pela pesquisadora e seu orientador:

Figura 15 – Tarefa 4 – Vista de uma peça tridimensional

4. Observe as figuras ao lado. A seta indica a frente da figura 1, que é uma representação de uma peça tridimensional.

a. Circule, dentre as figuras de 2 a 4, aquela que representa a figura 1 vista de frente.
Descreva com suas palavras como você pensou.

b. Complete com a letra que representa cada face da figura 1, em seus respectivos lugares nas figuras de 2 a 4.

c. Desenhe as representações planas das faces que estão ocultas na figura 1.

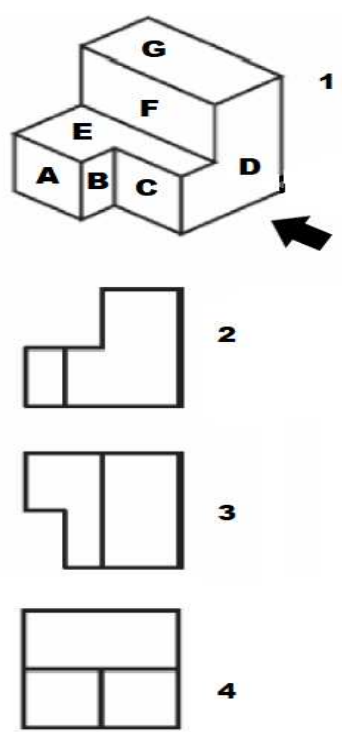
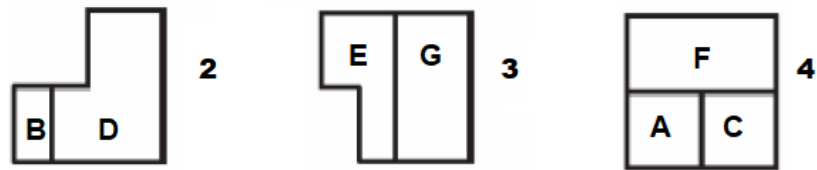


Figure 15 shows a 3D perspective drawing of a stepped block. The top face is labeled G. The front face is labeled D. The left face is labeled E. The bottom-left face is labeled A. The bottom-middle face is labeled B. The bottom-right face is labeled C. The back face is labeled F. An arrow points to the front face (D). Below the 3D drawing are three 2D orthographic projections labeled 2, 3, and 4. Projection 2 is a simple L-shaped outline. Projection 3 is a more complex L-shaped outline with a notch. Projection 4 is a rectangle divided into two horizontal sections.

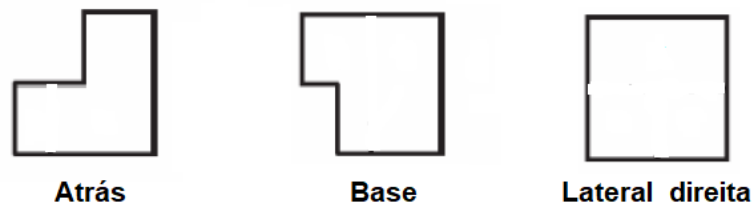
Fonte: A autora, 2018.

Esperava-se como resposta ao item **a**, que o participante identificasse a figura 2 como representante da vista frontal da peça tridimensional; que no item **b**, complete as figuras de 2 a 4 com as letras correspondentes em cada espaço, como na Figura 16.

Figura 16 – Resposta do item **b** da tarefa 4

Fonte: A autora, 2020.

E, no item **c**, esperava-se que o entrevistado identificasse a forma das faces ocultas na representação plana da peça tridimensional dada na figura 1 de acordo com a Figura 17 abaixo; justificando o raciocínio realizado para responder à tarefa através de propriedades e conceitos matemáticos:

Figura 17 – Resposta do item **c** da tarefa 4

Fonte: A autora, 2020.

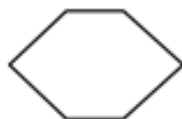
A Figura 18 traz o enunciado da tarefa 5, que foi baseada em uma tarefa aplicada por Fernandez (2011, p. 172):

Figura 18 – Tarefa 5 – Movendo as peças

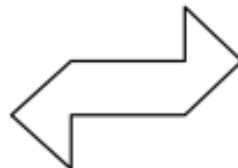
5. Temos duas peças idênticas que podemos mover.
Quais das figuras abaixo podem ser formadas pelas duas peças sem levantar nenhuma da mesa.
Descreva com suas palavras como você pensou.



A



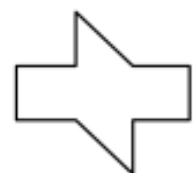
B



C



D



E

Fonte: A autora, baseada em uma tarefa aplicada por Fernandez (2011, p. 172), 2018.

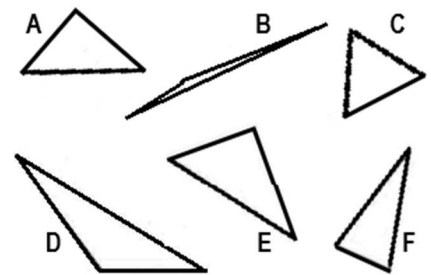
Como resposta a essa tarefa, esperava-se que os participantes identificassem que, de acordo com as hipóteses do enunciado, a única figura que não pode ser formada é aquela representada com a letra D, visto que seria necessário realizar uma transformação de reflexão em uma das peças dadas inicialmente para formar tal figura, justificando sua resposta através de propriedades e conceitos matemáticos.

A sexta e última tarefa, criada pela pesquisadora e seu orientador, é dada na Figura 19.

Ao questionar o entrevistado sobre essa sexta tarefa, perguntou-se, também “Você sabe dizer o que é um triângulo retângulo do ponto de vista matemático?”

Figura 19 – Tarefa 6 – Configuração de triângulos

6. Observe as figuras ao lado.
 a. Identifique quais dos triângulos podem ser considerados triângulo retângulo.
Descreva com suas palavras o que o levou a sua conclusão.
 b. Observe bem a figura e depois diga quais modificações ocorreram na figura nova (a parte, mostrada pelo pesquisador).

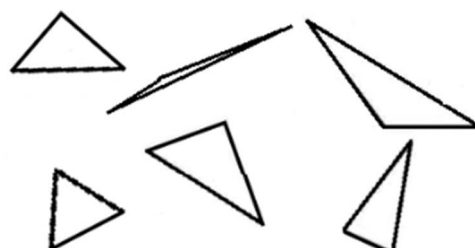


Fonte: A autora, 2018.

Esperava-se que o participante apresentasse um conceito de triângulo retângulo de acordo com os pressupostos matemáticos. Que, em resposta ao item **a**, identificasse os triângulos apresentados por A e E como possíveis representações de um triângulo retângulo e justificasse sua resposta através de propriedades e conceitos matemáticos.

Em relação ao item **b**, após a pesquisadora retirar a folha com o enunciado da tarefa 6 e fornecer uma nova folha com uma das reconfigurações (Figura 20), o entrevistado era questionado sobre quais modificações ocorreram na figura nova em relação à inicial:

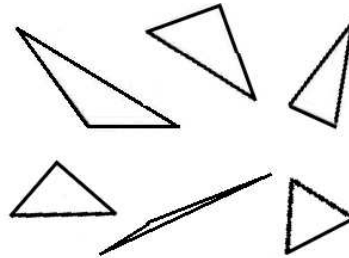
Figura 20 – Reconfiguração I da figura apresentada na Tarefa 6



Fonte: A autora, 2018.

No caso da reconfiguração I, esperava-se que o entrevistado reconhecesse que os triângulos representados na figura inicial pelas letras C e D tiveram suas posições trocadas.

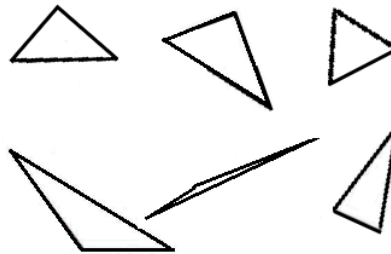
Figura 21 – Reconfiguração II da figura apresentada na Tarefa 6



Fonte: A autora, 2018.

No caso da reconfiguração II, pensando nos triângulos representados na figura inicial dispostos em duas linhas, esperava-se que o participante reconhecesse que houve uma troca nas linhas, ou seja, os triângulos D, E e F estão na primeira linha na configuração II e os triângulos A, B e C estão na segunda linha.

Figura 22 – Reconfiguração III da figura apresentada na Tarefa 6



Fonte: A autora, 2018.

Já na reconfiguração III, esperava-se que o participante identificasse que os triângulos representados na figura inicial pelas letras B e E tiveram suas posições trocadas.

Na descrição do guia para a entrevista apresentada nesta seção foram também apresentadas as respostas esperadas do ponto de vista matemático. Pelo exposto na seção 1.3 do capítulo 1, entende-se que para chegar às respostas aceitáveis matematicamente para as tarefas propostas é necessário o emprego da Visualização Geométrica., e o objetivo principal das tarefas propostas como estruturantes da entrevista foi fornecer subsídios para a identificação e análise do processo de Visualização Geométrica empregado pelos participantes.

2.6 PRESSUPOSTOS PARA AS ANÁLISES: CATEGORIAS A PRIORI

Na análise e interpretação das produções Matemáticas dos participantes desta pesquisa, procurou-se identificar e evidenciar os principais elementos apresentados nas respostas orais e escritas às tarefas de Geometria Euclidiana que compuseram a entrevista. Considerou-se importante realizar a análise desse modo pois, muitas vezes fala e escrita se complementam para as análises, visto que durante a fala pode-se observar peculiaridades do raciocínio através de movimentos, expressões faciais e principalmente gestos. Além disso, de acordo com Duval (2011, p. 105), “a produção oral e escrita não tem os mesmos papéis na tomada de consciência, [...] das unidades de sentido matematicamente pertinentes em uma representação”. Entende-se que pode parecer simples falar sobre determinado assunto oralmente, porém durante a escrita do raciocínio podem surgir questões manifestadas pela tomada de consciência e organização da escrita.

Buscou-se realizar uma análise Matemática referente ao encaminhamento das respostas e se essas foram matematicamente aceitáveis, e também uma análise cognitiva, referente à utilização da Visualização Geométrica de acordo com o conceito adotado nesta pesquisa. A opção por realizar a análise Matemática e a cognitiva separadamente deveu-se ao fato levantado por Duval (2008, p. 27) de que nem sempre “um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo”. E que do ponto de vista cognitivo, o fato de haver acertos pontuais (dentro de um único registro de representação semiótico) não significa haver sucesso cognitivo, pois para que esse ocorra é necessário sucesso em toda uma sequência de itens (são necessários acertos dentro de pelo menos dois registros de representação semiótico e ainda a passagem entre eles).

Deste modo, a análise de cada tarefa ocorreu em três partes, sendo as duas primeiras referentes à análise cognitiva, ou seja, a análise da Visualização e a terceira referente à análise Matemática, denominadas por:

- a) bloco 1: Foram identificadas a mobilização e a coordenação dos quatro elementos que compõe a Visualização segundo Gutiérrez (1996a): a produção de imagem mental; a utilização de representações externas; a presença de ações de interpretação de informação e a mobilização das habilidades para a visualização;
- b) bloco 2: Consistiu na identificação da utilização das funções heurística, de suporte e discursiva e a coordenação dessas três operações subjacentes à Visualização segundo Duval (2015), levando as conversões entre registros de representação semióticos e proporcionando a conexão entre as apreensões

operatória e discursiva;

c) bloco 3: Foi feita a verificação sobre as justificativas e respostas serem matematicamente aceitáveis, em conformidade com Duval (2008).

Seguindo por esse caminho, foram delineadas dez categorias de análise acerca das produções matemáticas dos entrevistados.

As categorias, estabelecidas *a priori*, emergiram do conceito de Visualização Geométrica adotado neste estudo, fruto das interpretações das pesquisas de Duval (1999a, 2011, 2015) e Gutiérrez (1992, 1996a), em que são apresentadas suas perspectivas sobre o tema. O quadro 5 apresenta essas categorias de análise:

Quadro 5 – Categorias de análise para as produções matemáticas dos entrevistados

Análise	Bloco	Categorias	Aspectos considerados nas produções matemática dos entrevistados
Cognitiva	1	Produção de imagem mental Utilização de representação externa Realização de ações de interpretação de informação	Indícios de produção e tipos de imagem baseados na resolução escrita e na fala do participante. Utilização da imagem dada e/ou produção de outras representações externas na resolução escrita e na fala do participante. Cria imagem a partir das informações dadas e ou conceitos e propriedades, ou interpreta a figura extraindo propriedades matemáticas.
		Mobilização de habilidades para a visualização	Utiliza as habilidades de percepção figura-fundo; constância perceptiva; percepção de posição espacial; percepção de relação espacial; discriminação visual, rotação mental e memória visual. Reações imediatas e automáticas diante da figura; identificação de aspectos importantes da figura (por exemplo: unidades figurais, propriedades, formas, subfiguras); realização de modificações (por exemplo: desconstrução dimensional, reorganizações, reconfigurações, sobreposições, justaposição).
	2	Emprego da função heurística	Realização de medições e cálculos.
		Emprego da função Discursiva	Aplicação de uma definição ou propriedade para inferir uma outra, relaciona as hipóteses do enunciado à figura geométrica a ser utilizada, apresenta justificativa matematicamente coerentes, realiza demonstrações.

		Realiza conversões	Realiza a passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder a tarefa (por exemplo: relaciona figuras geométricas às suas propriedades ou conceitos matemáticos, ou o contrário, nesses casos a conversão é entre os registros figural e língua natural; ou a partir da figura geométrica realiza cálculos (conversão entre os registros figural e algébrico)).
Matemática	3	Respostas matematicamente aceitáveis	Apresenta respostas aceitáveis em termos matemáticos, justifica de modo matematicamente coerente.
		Respostas matematicamente não-aceitáveis	Não apresenta resposta, ou apresenta respostas não aceitáveis em termos matemáticos, apresenta justificativas sem coerência matemática.

Fonte: A autora, 2020.

Pela concepção de Visualização Geométrica adotada neste estudo, como pode-se observar na seção 2.3.4 do capítulo 2, as categorias descritas no quadro 5 não são disjuntas. Por esse fato a análise das produções matemáticas dos participantes desta pesquisa seguiu um processo transversal, em que todas as categorias foram consideradas simultaneamente na análise dos dados (FIORENTINI, LORENZATO, 2009).

Destacamos que a partir da categorização será analisado o processo de Visualização como um todo em cada tarefa de ambos os grupos estudados, para assim, apresentar inferências sobre os objetivos da pesquisa.

2.7 ESTRUTURA PARA AS ANÁLISES DE CADA TAREFA

Nesta seção será apresentado a estrutura pautada nos três blocos descritos na seção anterior, na qual identificou-se o que se esperava em relação à categorização das produções oral e escrita dos entrevistados ao responderem cada tarefa.

2.7.1 Estrutura para análise da Tarefa 1

Bloco 1: Esperava-se identificar aspectos que evidenciavam a produção de representações cognitivas dos conceitos evocados, ou seja, evidências do emprego de imagens mentais, como imagens de objetos, crenças, concepções etc..

Quanto à utilização de representações externas, se esperava identificar a utilização da imagem dada, ou de outras imagens produzidas através de desenho em folha, na resolução e resposta à tarefa.

Esperava-se verificar a ação de interpretação da figura dada para responder aos itens que compõem o enunciado da tarefa, identificando os conceitos evocados no enunciado e relacionando-os com a figura. Por exemplo: os quadrados identificados no item **a**; as diagonais e paralelas no item **b**; as possíveis relações identificadas no item **c**; e os argumentos pautados em propriedades matemáticas expressos em relação à figura, para justificar a resposta no item **d**.

Em relação às habilidades para a visualização, esperava-se identificar a mobilização:

No item **a**, das habilidades de percepção de figura-fundo, ou seja, se o participante foi capaz de reconhecer e identificar os quadrados formados por justaposição ou superposição como subfiguras do quadrado ABCD e a discriminação visual, através da comparação das subfiguras, identificando semelhanças e diferenças.

No item **b**, habilidade de percepção de relações espaciais (ao relacionar os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas).

No item **c**, a conservação da percepção (ao reconhecer que propriedades do quadrado são independentes de tamanho ou posição e não se confunde quando este está em diferentes posições), e a percepção de relações espaciais (ao relacionar os quadrados entre si, entre outros elementos que compõem a figura como ângulos, lados e vértices).

Bloco 2: O emprego da função heurística está relacionado à contagem dos quadrados no item **a** e a identificação de subfiguras na imagem. No item **b**, está ligado ao reconhecimento dos segmentos (unidades 1D). A exploração da figura utilizando a mobilização das habilidades para visualização está diretamente ligada à manipulação heurística da imagem necessárias nos itens **c** e **d**, como especificado no parágrafo anterior.

Esperava-se também o emprego da função discursiva para a formalização da resposta em todos os itens e questionamentos sobre os conceitos envolvidos na tarefa, principalmente no item **d**, na utilização de argumentos pautados em propriedades matemáticas para justificar, por exemplo, que os ângulos internos do quadrilátero EFGH são retos e que seus lados têm a mesma medida e, portanto, concluir que EFGH é um quadrado.

Esperava-se com que houvesse a coordenação entre as funções heurística e discursiva e, com isso, passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder aos itens da tarefa, ou seja, que houvesse conversões entre os registros figural e língua natural,

relacionando as figuras geométricas às suas propriedades ou conceitos matemáticos, ou o contrário.

Bloco 3: Na categoria de respostas matematicamente aceitáveis ou não, foram analisadas primeiramente as produções dos participantes em relação ao conceito de quadrado. Foram consideradas respostas matematicamente aceitáveis aquelas que apresentavam variações matematicamente coerentes e congruentes à: quadrado é um polígono de quatro lados equiângulo e equilátero.

Na sequência foram analisadas as respostas aos itens que compõe a tarefa, considerando respostas matematicamente aceitáveis:

- a) no item **a**, aquelas que identifiquem 10 quadrados na configuração dada;
- b) no item **b**, respostas que mostram a compreensão do entrevistado sobre segmentos paralelos, diagonais de um quadrilátero e identifiquem as diagonais as quais os segmentos EF e GH são paralelos à diagonal AC e os segmentos HE e GF são paralelos à diagonal BD;
- c) no item **c**, aquelas que expliquem que os quadriláteros em questão são congruentes;
- d) e no item **d**, que consigam escrever uma justificativa, matematicamente aceitável, utilizando argumentos pautados em propriedades matemáticas para justificar, por exemplo, que os ângulos internos do quadrilátero EFGH medem 90° e que seus lados tem a mesma medida e, portanto, EFGH é um quadrado.

A seguir iniciam-se as discussões e análises das produções dos entrevistados ao responder a tarefa 1, começando pelo entendimento sobre quadrado e depois em relação a cada item da tarefa.

2.7.2 Estrutura para análise da Tarefa 2

Bloco 1: Esperava-se identificar aspectos que evidenciassem a produção e o emprego de imagens mentais, como de objetos (por exemplo: cubo, dado, ...), imagens cinestésicas da montagem do cubo (movimento através da ação corporal), imagens dinâmicas (movimentação do cubo), crenças, concepções etc..

Quanto a utilização de representações externas, esperava-se identificar a utilização da imagem dada, ou de outras imagens produzidas através de desenho em folha (do cubo ou dado), na resolução e resposta à tarefa.

Esperava-se verificar a ação de interpretação da figura dada para responder a tarefa, identificando a partir da figura da planificação as faces opostas às faces indicadas pelas letras A, B e C, e seus valores correspondentes segundo as hipóteses do enunciado ($A=5$, $B=6$, $C=4$).

Em relação as habilidades para a visualização, esperava-se identificar principalmente, a mobilização da habilidade de rotação mental, através de gestos e da fala dos entrevistados, indicando que estão imaginando o cubo mentalmente. E também a percepção de posições espaciais, identificada pela ação de relacionar os lados do cubo entre si.

Bloco 2: O emprego da função heurística nesta tarefa, está relacionado principalmente a reconfiguração da figura dada e o reconhecimento dos lados do cubo.

Esperava-se também, o emprego da função discursiva para a justificação e formalização da resposta à tarefa.

Esperava-se, que houvesse a coordenação entre as funções heurística e discursiva e com isso a passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder a tarefa (as conversões entre os registros figural e língua natural).

Bloco 3: Na categoria de respostas matematicamente aceitáveis, foram enquadradas as respostas que forneceram justificativas aceitáveis do ponto de vista matemático, e que apresentaram na resposta que a face A, oposta a face com o número 2, equivale a 5; a B, oposta à de número 1, equivale a 6 e a C, oposta à que contém o número 3, equivale a 4.

2.7.3 Estrutura para análise da Tarefa 3

Bloco 1: Esperava-se identificar aspectos que evidenciassem a produção e o emprego de imagens mentais, como imagens concretas, de objetos (por exemplo: escada), crenças, concepções etc..

Quanto à utilização de representações externas, esperava-se identificar a utilização da imagem dada, ou de outras imagens produzidas através de desenho em folha, na resolução e resposta à tarefa.

Esperava-se verificar a ação de interpretação da figura dada para responder a tarefa, identificando a partir da figura dada as possíveis relações que podem ser estabelecidas entre as formas representadas pelas letras A e B, por exemplo: a posição de uma em relação a outra.

Com respeito as habilidades para a visualização, esperava-se identificar principalmente, a mobilização da habilidade de percepção de posições espaciais, identificada pela ação de relacionar as formas contidas na figura dada consigo, por exemplo, identificar a forma mais

próxima do observador. E a percepção de relações espaciais, ao identificar, por exemplo, que o plano representado por A está à frente do plano representado por B.

Bloco 2: O emprego da função heurística nesta tarefa, está relacionado principalmente ao reconhecimento de formas, reorganização, identificação de sobreposição ou justaposição das subfiguras contidas na figura dada

Esperava-se também, o emprego da função discursiva para a justificação e formalização da resposta à tarefa.

Esperava-se, com que houvesse a coordenação entre as funções heurística e discursiva e com isso passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder ao responder a tarefa (a conversões entre os registros figural e língua natural).

Bloco 3: No caso da tarefa 3, por se tratar de uma tarefa de exploração, não havia resposta não aceitável, a menos que apresentasse conceitos errôneos ou propriedades matemáticas com falhas. Foram identificadas na categoria de respostas matematicamente aceitáveis aquelas em que o entrevistado identifica a figura como representação de uma escada, e identifica a região A a frente da região B, com os degraus de cima para baixo, ou caso veja os degraus da escada acima do observado, indicando a parte B a frente da A.

2.7.4 Estrutura para análise da Tarefa 4

Bloco 1: Esperava-se identificar aspectos que evidenciassem a produção e o emprego de imagens mentais, de objetos (por exemplo: peça 3D), imagens cinestésicas (através da ação corporal), imagens dinâmicas da peça ou das vistas, crenças, concepções etc..

Quanto a utilização de representações externas, esperava-se identificar a utilização da imagem dada, ou de outras imagens produzidas através de desenho em folha (faces da peça 3D), na resolução e resposta à tarefa.

Esperava-se verificar a ação de interpretação da figura dada para responder a tarefa, identificando a partir da figura as vistas correspondentes as letras dadas na representação da peça 3D. E interpretação das hipóteses do enunciado e das figuras para a confecção de figuras que representassem as faces da peça que não são vistas na imagem dada.

Em relação as habilidades para a visualização, esperava-se identificar nos itens **a** e **b**, a mobilização das habilidades de percepção de relações espaciais, de posições espaciais e de discriminação visual. Relacionadas a capacidade de identificar corretamente as características das relações entre as vistas e a peça, a capacidade de relacionar a posição das vistas em relação

a peça 3D e a si mesmo e a capacidade de comparar as vistas à peça identificando suas semelhanças e diferenças visualmente. No item **c**, esperava-se a mobilização da habilidade de conservação da percepção, ligada a capacidade de reconhecer que as vistas mantêm certas propriedades, como sua forma ou tamanho, constantes mesmo que não sejam vistas total ou parcialmente, ao reconhecer e desenhar as três faces que não aparecem na representação da peça tridimensional.

Bloco 2: O emprego da função heurística nesta tarefa, estava relacionado principalmente ao reconhecimento das formas, justaposição e a reconfiguração da figura dada.

Esperava-se, também, o emprego da função discursiva para a justificação e formalização da resposta à tarefa.

Espera-se, com que houvesse a coordenação entre as funções heurística e discursiva e com isso passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder ao responder a tarefa (a conversões entre os registros figural e língua natural).

Bloco 3: Na categoria de respostas matematicamente aceitáveis, foram analisadas as respostas que forneceram justificativas aceitáveis do ponto de vista matemático. Identificando, nos itens **a** e **b**, que a figura 2 corresponde a vista frontal e completando as formas correspondentes com as letras D e B; na figura 3 (a vista superior), completando as formas correspondentes com as letras E e G; e no caso da figura 4, identificando as formas correspondentes com as letras A, C e F (que compõe a vista lateral esquerda). E no caso do item **c**, que traçassem as representações das três faces ocultas corretamente.

2.7.5 Estrutura para análise da Tarefa 5

Bloco 1: Esperava-se identificar aspectos que evidenciassem a produção e o emprego de imagens mentais, de objetos (por exemplo: das peças dadas ou outras formas geométricas), imagens cinestésicas (movimento das peças através da ação corporal), imagens dinâmicas das peças ou das figura formadas por elas, crenças, concepções etc..

Quanto a utilização de representações externas, esperava-se identificar a utilização da imagem dada, ou de outras imagens produzidas através de desenho em folha, na resolução e resposta à tarefa.

Esperava-se verificar a ação de interpretação da figura dada para responder a tarefa, identificando a partir da hipóteses do enunciado a(s) figura(s) possíveis de serem formadas. E/ou a interpretação das figuras dadas para responder a questão proposta (relacionada a

percepção figura-fundo). Identificando que a única figura que não pode ser formada de acordo com o enunciado, é aquela representada pela letra D.

Em relação as habilidades para a visualização, espera-se identificar a mobilização das habilidades de discriminação visual (ao realizarem a comparação de figuras e peças identificando suas semelhanças e diferenças visualmente.); constância perceptiva (ao reconhecer que as peças mantêm certas propriedades, como sua forma ou tamanho, constantes mesmo que observadas de um ponto de vista diferente); percepção de relações espaciais (ao identificar corretamente as características das relações entre as peças e figuras), de posições espaciais (ao relacionar a posição de uma peça ou figura a outra) e de rotação mental (ao criar imagens mentais dinâmicas na tentativa de formar as figuras utilizando as duas peças).

Bloco 2: O emprego da função heurística nesta tarefa, está relacionado ao reconhecimento das formas, a reconfiguração e o reconhecimento das figuras dadas.

Esperava-se, também, o emprego da função discursiva para a justificação e formalização da resposta à tarefa.

Esperava-se que houvesse a coordenação entre as funções heurística e discursiva e com isso passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder ao responder a tarefa (a conversões entre os registros figural e língua natural).

Bloco 3: Na categoria de respostas matematicamente aceitáveis, foram enquadradas as respostas que fornecem justificativas aceitáveis do ponto de vista matemático. Identificando que a única figura que não pode ser formada de acordo com o enunciado, é aquela representada pela letra D.

2.7.6 Estrutura para análise da Tarefa 6

Bloco 1: Esperava-se identificar aspectos que evidenciassem a produção e o emprego de imagens mentais, de objetos (por exemplo: formas triangulares), como imagens cinestésicas de triângulos (pela ação corporal), imagens dinâmicas de triângulos, imagem do conceito de triângulo, crenças, concepções etc..

Quanto a utilização de representações externas, esperava-se identificar a utilização da configuração de triângulos dada, ou de outras imagens produzidas através de desenho em folha, na resolução e resposta à tarefa.

Esperava-se verificar a ação de interpretação da figura dada para responder a tarefa, identificando a partir da configuração as representações figurais de triângulos retângulo.

Com relação as habilidades para a visualização, esperava-se identificar principalmente, a mobilização da habilidade de memória visual, identificando a capacidade de lembrar as características visuais dos triângulos retângulos, com respeito ao item **a**, e a posição que os triângulos ocupavam quando apresentada a nova configuração e suprimida a antiga, como dito no item **b**. Outras habilidades como a percepção de posição espacial (relacionando a posição dos triângulos entre si), de relação espacial (identificando corretamente as características das relações entre os triângulos) e discriminação visual (comparando os vários triângulos e identificando semelhanças e diferenças visualmente) podem ser identificadas na resolução da tarefa, já que podem favorecer o reconhecimento dos triângulos e as posições entre eles.

Bloco 2: O emprego da função heurística nesta tarefa, está relacionado principalmente a reconfiguração da figura dada e o reconhecimento dos triângulos retângulo e de outras unidades figurais.

Esperava-se, também, o emprego da função discursiva para a justificação e formalização da resposta à tarefa.

Esperava-se que houvesse a coordenação entre as funções heurística e discursiva e com isso passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder ao responder a tarefa (a conversões entre os registros figural e língua natural).

Bloco 3: Na categoria de respostas matematicamente aceitáveis, foram colocadas as respostas que fornecem justificativas aceitáveis do ponto de vista matemático. E que, em resposta ao item **a**, identifique os triângulos apresentados por A e E como possíveis representações de um triângulo retângulo. E no item **b**, identifique as mudanças realizadas na nova reconfiguração.

3. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esta seção apresenta as análises das produções escritas e orais obtidas a partir das respostas às seis tarefas que compuseram a entrevista semiestruturada. Serão discutidas as análises destas produções referentes a cada uma das tarefas, de acordo com os pressupostos estabelecidos na seção anterior.

A seção 3.1 apresenta os dados referentes aos questionamentos iniciais da entrevista, as seguintes seções deste capítulo apresentam as análises de cada tarefa, dividida em três blocos, como apresentado na seção 2.6 do capítulo 2. No decorrer das análises, para justificar as inferências realizadas, fragmentos das entrevistas e das respostas escritas dos participantes são destacados.

Para as análises, o grupo dos entrevistados que concluíram as disciplinas de Geometrias do curso de Licenciatura em Matemática será denotado por Grupo J (GJ), e os entrevistados deste grupo por: J1, J2, J3, J4, J5, J6, J7, J8. O grupo dos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática entrevistados será denotado por Grupo I (GI), e os entrevistados por: I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8.

3.1 RESPOSTAS DOS QUESTIONAMENTOS INICIAIS DA ENTREVISTA

O Quadro 6 expõe as respostas dos integrantes do GI, referentes às seguintes perguntas: se haviam cursado o Ensino Médio em escola pública ou particular; se o Ensino Médio foi convencional ou técnico; se cursam a Licenciatura em Matemática diurno ou noturno e se estavam cursando ou se tinham concluído a disciplina de Geometria Analítica.

Quadro 6 – Respostas dos integrantes do GI aos questionamentos iniciais

Entrevistados	Curso diurno ou noturno	Disciplina de Geometria Analítica.	Ensino médio
I1	noturno	Cursando	Particular
I2	diurno	Cursando	Público
I3	diurno	Cursando	Particular
I4	diurno	Cursando	Público/ técnico
I5	diurno	Cursando	Público
I6	diurno	Concluiu	Particular
I7	noturno	Concluiu	Público/Magistério
I8	diurno	Cursando	Particular

Fonte: A autora, com base nas respostas orais dos entrevistados, 2020.

O Quadro 7 expõe as respostas dos integrantes do GJ, referentes as seguintes perguntas: se concluiu as disciplinas de Geometria do curso de Licenciatura em Matemática; se já concluiu o curso e, se sim, qual a área de atuação:

Quadro 7 – Respostas dos integrantes do GJ aos questionamentos iniciais

Entrevistado	disciplinas de Geometria	Concluiu o curso	Área de atuação
J1	concluiu todas	não	
J2	concluiu todas	não	
J3	concluiu todas	não	
J4	concluiu todas	sim	assistente de Tecnologia da Informação
J5	concluiu todas	não	
J6	concluiu todas	sim	Tecnico em Engenharia Civil
J7	concluiu todas	sim	Mestranda em bioestatística
J8	concluiu todas	não	

Fonte: A autora, com base nas respostas orais dos entrevistados, 2020.

As seções subsequentes apresentam as análises de cada tarefa que compôs a estrutura da entrevista.

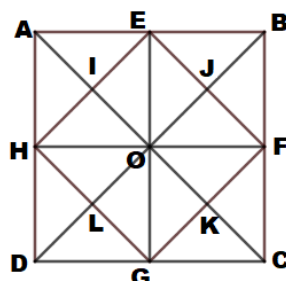
3.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 1

A análise das produções escritas e oral dos entrevistados ao responder a tarefa 1 segue uma organização em três blocos, que como já mencionado, segue um processo transversal, em que as categorias serão consideradas simultaneamente, principalmente, por não serem disjuntas.

O enunciado desta tarefa pede que observada a Figura 23, se responda: **a.** quantos quadrados há na figura ao lado; **b.** Identifique os segmentos paralelos as diagonais do quadrilátero ABCD; **c.** Explique com suas palavras qual é a relação entre os quadriláteros $AEOH$,

$EBFO$, $OF CG$ e $HOGD$; **d.** Explique com suas palavras o porquê o quadrilátero $EFGH$ pode ser considerado como um quadrado.

Figura 23 – Composição de quadrados



Fonte A autora, 2018

3.2.1 Análise sobre o que os entrevistados entendem por ‘Quadrado’

Esta seção se inicia com a apresentação de fragmentos das produções orais dos entrevistados do grupo de alunos que concluíram as disciplinas de Geometria do curso de Licenciatura em Matemática quanto ao que entendem por quadrado:

Quadro 8 – Definições de quadrado emergentes no GJ

GJ	Definição de Quadrado
J1	“ <i>Quadrilátero com ângulos retos e lados congruentes</i> ”
J2	“ <i>Uma região quadrangular que possui seus lados paralelos dois a dois e seus ângulos internos de 90°</i> ”
J3	“ <i>Quadrilátero com quatro lados iguais e ângulos congruentes</i> ”
J4	“ <i>Quadrilátero com quatro ângulos retos e arestas iguais</i> ”
J5; J6	“ <i>Figura com quatro lados iguais e ângulos internos de 90°</i> ”
J7	“ <i>Figura com todas as medidas dos lados iguais e ângulos de 90°</i> ”
J8	“ <i>Quadrilátero com quatro lados iguais e quatro ângulos de 90°</i> ”

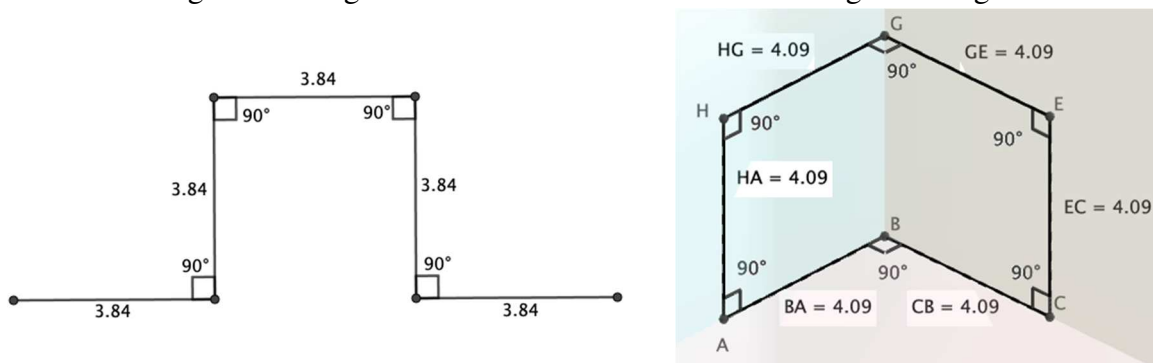
Fonte: A autora, com base nas produções orais dos entrevistados, 2020.

Pode-se observar que, de acordo com o conceito matemático de quadrado,²⁸ a resposta apresentada por J1 é matematicamente aceitável, já que apresenta as características relacionadas à figura (quadrilátero), aos lados congruentes e aos ângulos congruentes (retos).

Duas das respostas, a de J2 e a de J7 não caracterizam um quadrado, pois J2 não especifica uma das características do quadrado, a congruência entre os lados da figura.

A resposta de J7 também não caracteriza um quadrado, pelo fato de não especificar que a figura é um polígono plano ou que é um quadrilátero. Observa-se na Figura 24, à esquerda uma linha poligonal e à direita uma figura espacial em que ambas satisfazem o afirmado por J7, e que evidentemente nenhuma representa um quadrado.

Figura 24 – Figuras com todas as medidas dos lados iguais e ângulos de 90°



Fonte: A autora, 2019.

Já as outras cinco respostas se aproximam do conceito matemático de quadrado, porém não são matematicamente aceitáveis por apresentarem incoerências do ponto de vista matemático em sua formulação. As respostas de J3, J4, J5, J6 e J8 utilizam os termos ‘lados’ ou ‘arestas iguais’ ao invés de ‘lados de mesma medida’ ou ‘lados congruentes’, ou seja, não utilizam em suas respostas a palavra “medida” dos lados, não considerando a característica formal de que lados são segmentos e, portanto, não são números.

No Quadro 9 apresentaremos o entendimento sobre quadrado obtidos a partir dos fragmentos das produções orais dos entrevistados do grupo de alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática:

²⁸ Quadrado é um polígono de quatro lados equiângulo e equilátero.

Quadro 9 – Definições de quadrado emergentes no GI

GI	Definição de Quadrado
I1, I5, I6, I7, I8	<i>“Quatro lados iguais e quatro ângulos iguais de 90°”</i>
I2, I3	<i>“Figura com quatro lados iguais”</i>
I4	<i>“Paralelogramos com os 4 lados iguais”</i>

Fonte: A autora, com base nas produções orais dos entrevistados, 2020.

Observa-se que as respostas apresentadas pelos integrantes do GI não são matematicamente aceitáveis, por apresentarem incoerências do ponto de vista de matemático em sua formulação.

Assim como observado nas respostas de cinco dos entrevistados do GJ, todos os entrevistados do GI não expressam a característica formal de que lados são segmentos e não se atentando ao uso do termo “medida dos lados” em suas respostas.

Pode-se observar que três das respostas (de I2, I3 e I4) não apresentam a característica de que os quatro ângulos de um quadrado devem ser congruentes. As respostas de I2 e I3 ainda podem levar à interpretação errônea de que uma figura com mais de quatro lados, em que quatro deles tem a mesma medida, é um quadrado. Pela resposta de I4, os losangos poderiam ser considerados como quadrados.

3.2.2 Análise do item a da Tarefa 1

No item **a**, pede-se que o entrevistado identifique quantos quadrados há na figura dada.

Inicialmente foi observada a forma com que os participantes fizeram o registro escrito da resposta. Com respeito ao GJ, observou-se que cinco dos entrevistados (J2, J3, J6, J7 e J8) registraram: *“10 quadrados”*. Uma das respostas, dada por J1, apresenta os dez quadrados identificando-os através das letras correspondentes aos seus quatro vértices. Nas produções escritas de J4 e J5, observa-se que identificam que há dez quadrados e explicam terem visto inicialmente um quadrado maior (ABCD) contendo outros quatro em seu interior e outro quadrado (EFGH) formado pelos pontos médios dos lados do maior que também contém outros quatro quadrados. A Figura 25 ilustra as respostas de J1, J2 e J5:

Figura 25 – Respostas de J1, J2 e J5 ao item a da tarefa 1

J1:

1) a) ABCD, AEOH, HODG, EBOF, OFGC,
EJOI, IO LH, JFKO, OKLG, EFGH.

J2:

a: Identifique quantos quadrados há na figura ao lado.
Descreva com suas palavras o que o levou a sua conclusão. São 10 quadrados.

J5:

a) Temos um quadrado maior ABCD e com pontos médios
Temos os pontos E, F, H e G, que a partir destes pontos, temos mais
quatro quadrados, com um total de 5, mas aindaalhando a
função na diagonal temos o quadrado EFGH e também
os pontos J, K, L, I que são pontos médios deste quadrado e
que a partir deste no quadrado podemos formar mais
quatro quadrados e assim, ~~com~~ Temos um total
de 10 quadrados nesta figura.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Oralmente, J1, J4, J5 e J8 deram explicações equivalentes sobre terem visto inicialmente o quadrado ABCD contendo outros quatro em seu interior e o quadrado EFGH também contém outros quatro quadrados. Os demais entrevistados fizeram a contagem apontando cada um dos dez quadrados.

Pode-se observar que o exposto acima evidencia o uso da função heurística, o acionamento da habilidade de percepção figura-fundo e da discriminação visual, já que a contagem passa pelo reconhecimento das formas, a identificação das subfiguras por justaposição ou superposição e a comparação entre essas subfiguras, bem como ativação da ação de interpretação de informação e o uso da representação externa, já que relaciona as informações obtidas a partir da figura dada com o pedido no enunciado culminando na resposta matematicamente aceitável para o item.

Foi observado durante a resolução a ação de girar a folha contendo o enunciado da tarefa por parte dos entrevistados J1, J3 e J5. Ao serem indagados sobre isso, expuseram que essa é uma forma de ver os quadrados EFGH e os que estão contidos nele com pares de lados na horizontal. Isso dá indícios de que esses três participantes tem a necessidade de executar a ação para além da manipulação mental que incluiria a rotação do quadrado em questão, o que nos leva a pensar que pode haver, para eles, uma dificuldade na mobilização da habilidade de rotação mental e na produção de imagens mentais. Além disso, pode-se inferir que há a produção de uma imagem mental de quadrado “com base horizontal”, uma ideia incoerente do ponto de vista matemático.

Com respeito às produções dos integrantes do GI, observou-se nos registros escritos de cinco participantes (I1, I2, I4, I5 e I6) a resposta identificando dez quadrados. Sendo que I1 identifica os quadrados como sendo formados a partir dos triângulos presentes como subfiguras e conta-os um a um; os entrevistados I2 e I5 identificam os dez quadrados contando um a um; o participante I4 identifica um a um os dez quadrados utilizando as letras que nomeiam seus quatro vértices; o entrevistado I6 identificou os quadrados ABCD e EFGH (chama EFGH de “*quadrado rotacionado*”) e mais quatro quadrados no interior de cada um deles, totalizando dez. Três participantes (I3, I7, I8) identificaram somente seis quadrados contando-os um a um, sendo que I8 refere-se ao quadrado EFGH como “*quadrado inclinado*”.

A figura 26 ilustra as respostas de I6 e I8:

Figura 26 – Respostas de I6 e I8 ao item a da tarefa 1

- I6:** 1-a) Tem o quadrado maior ABCD, que está dividido em 4 quadrados menores; Tem um quadrado ~~o~~ rotacionado EFGH, que também está dividido em 4 menores, totalizando 10 quadrados.
- I8:** Há 6 quadrados. Primeiramente observei o quadrado inclinado, depois após o maior quadrado, por fim, quatro quadrados que formam o maior.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

As respostas orais de cada entrevistado foram similares às registradas por escrito, porém I3 e I7 dizem ter visto primeiro o quadrado ABCD e quatro quadrados em seu interior e depois

o quadrado EFGH, totalizando seis. Em sua fala, I6 se refere ao quadrado EFGH e os quatro em seu interior como quadrados “inclinados”. O participante I8 diz ter visto primeiro o quadrado EFGH e depois ter identificado o quadrado ABCD e outros quatro em seu interior.

Pode-se notar, pelo exposto em relação às produções dos integrantes do GI em relação ao item a da tarefa 1, que para cinco deles (I1, I2, I4, I5, I6), pelos mesmos argumentos utilizados em relação a essa análise do GJ, há evidências do uso da função heurística; da mobilização da habilidade de percepção figura-fundo e da discriminação visual; da ação de interpretação de informação e da representação externa ao apresentar uma resposta matematicamente aceitável para o item.

As produções dos participantes I3, I7 e I8, dão indícios de que pode haver para eles uma dificuldade no emprego da função heurística, na mobilização das habilidades de percepção figura-fundo e de discriminação visual e/ou na ação de interpretação de informação e uso da representação externa, por apresentarem uma resolução incompleta e uma resposta matematicamente não aceitável para o item.

Nas produções de I6 e I8 identificou-se que estes utilizam os termos “*quadrado rotacionado*” e “*quadrado inclinado*”, respectivamente, o que leva à inferência semelhante a feita em relação aos participantes J1, J3 e J5 do GJ, de que há a produção de uma imagem mental durante o raciocínio, e nessa imagem o quadrado possui “base horizontal”, uma ideia incoerente do ponto de vista matemático.

A seção a seguir trata da discussão e análise das produções escrita e oral dos participantes da pesquisa em relação ao item b da tarefa 1.

3.2.3 Análise do item b da Tarefa 1

É pedido no item **b** que se identifique os segmentos paralelos às diagonais do quadrado ABCD.

Nos registros escritos da resposta, observou-se que sete entrevistados do GJ reconheceram as diagonais do quadrado ABCD como sendo AC e BD, bem como os segmentos paralelos a elas (EF, HG paralelos à AC e EH, FG paralelos à BD). Somente a resposta escrita de J5 não deixa claro tal reconhecimento, como pode ser observado na Figura 27. Em sua resposta J1 elenca, além dos segmentos paralelos citados, os segmentos contidos neles (EJ, JF, HL, LG paralelos à AC e EI, IH, FK, KG paralelos à BD). O participante J4 escreve o termo ‘reta’ no lugar de ‘segmento’. Em sua resposta escrita, J8 utiliza de forma incorreta setas de implicações.

A seguir pode-se observar as respostas de J4, J5 e J8:

Figura 27 – Respostas de J4, J5 e J8 ao item b da tarefa 1

J4:

b) \angle : DIAGONAL \overline{AC} , POSSUI AS "METAS"
 \overline{EF} e \overline{HG} PARALELAS A ELA.

J5:

(b) Observe que os possíveis diagonais deste quadrado ABCD, são os segmentos EF, HG, EH, FG e que podem ser subdivididos em mais segmentos que são diagonais do quadrado, ABCD.

J8:

b) $EH \parallel BD \Rightarrow FG \parallel BD \Rightarrow EF \parallel AC \Rightarrow GH \parallel AC$

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Oralmente, as respostas de cada entrevistado foram similares às registradas por escrito, exceto a de J5. Esse participante chega a identificar as diagonais AC e BD durante sua fala, porém, ao fazer o registro escrito não deixa este fato claro. Pela observação da entrevista pôde-se notar que J5 se expressa de modo errôneo, escrevendo apenas “*diagonais*” ao invés de escrever a sentença “segmentos paralelos às diagonais”.

Assim pode-se inferir que os oito integrantes do GJ têm noção dos conceitos evocados e os reconhecem na figura, interpretando as informações obtidas a partir de imagens, ou seja, utilizaram a representação externa dada e efetuaram a ação de interpretação da figura. Para isso, realizaram a identificação dos segmentos (unidades 1D) que fazem parte da figura e relacionaram esses segmentos aos conceitos evocados (segmentos paralelos, diagonal), ou seja, realizaram a coordenação entre as funções heurística e discursiva, embora dois dos entrevistados (J5 e J8) apresentaram dificuldade na escrita da resposta (J5, em relação escrita no registro da língua natural, já que oralmente ele demonstra seu conhecimento, e J8 em relação à utilização dos caracteres matemáticos). Pode-se notar que eles mobilizaram a habilidade de percepção de relações espaciais ao relacionar os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas.

No caso dos integrantes do GI, estes identificam nos registros escritos as diagonais do quadrado ABCD como sendo AC e BD, bem como os segmentos paralelos a elas (EF, HG paralelos à AC e EH, FG paralelos à BD). Assim como na resposta escrita de J5, I4 registra os segmentos que são paralelos às diagonais, mas não expõe quais são as diagonais em questão. Porém, em sua fala ele identifica AC e BD como as diagonais de ABCD, e sua resposta escrita deixa claro que ele está se referindo aos segmentos paralelos às diagonais, como pedido no enunciado. As respostas orais dos demais não diferem das que apresentaram escritas.

Figura 28 – Respostas de I1 e I4 ao item **b** da tarefa 1

I1:

b) As diagonais do quadrado ABCD são AC e BD, suas paralelas são, respectivamente \overline{GH} e \overline{EF} (AC); e \overline{GF} e \overline{EH} (BD).

I4:

b) São ~~paralelos~~ segmentos paralelos:

1º HE

2º GF

3º HG

4º EF

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Pode-se inferir, como no caso do GJ, que os oito integrantes do GI também têm noção dos conceitos evocados e os reconhecem na figura, interpretando as informações obtidas a partir de imagens. Pode-se notar que eles mobilizaram a habilidade de percepção de relações espaciais ao relacionar os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas, ou seja, nesse item, ambas as turmas tiveram resultados próximos.

A seção a seguir trata da discussão e análise das produções escrita e oral dos participantes da pesquisa em relação ao item **c** da tarefa 1.

3.2.4 Análise do item **c** da Tarefa 1

Os entrevistados devem responder nesse item qual a relação entre os quatro quadriláteros *AEOH*, *EBFO*, *OFCG* e *HOGD*.

Observando os registros escritos dos integrantes do GJ, verificou-se que três deles, J2, J3 e J8 identificaram e registraram que os quadriláteros $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ e $HOGD$ são congruentes. Os participantes J1, J4, J5, J6, J7, assim como J8, apresentaram outras características que consideraram como relações entre os quadriláteros. Dentre as relações elencadas estão: $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$, $HOGD$ compartilham o vértice O (J1, J4, J6); compartilham um mesmo lado (J7); têm mesma área (J1, J4, J6); têm mesmo perímetro (J1, J4, J6); compõem o quadrilátero $ABCD$ (J1, J7); têm lados de mesma medida (J1, J5, J6); ângulos internos retos (J5); são semelhantes ao quadrilátero $ABCD$, sendo a razão de semelhança $1/2$ (J8).

Na Figura 29, pode-se observar as respostas de J3, J6 e J8:

Figura 29 – Respostas de J3, J6 e J8 ao item c da tarefa 1

- J3: c) Os quadriláteros não congruentes entre si.
- J6: c - Possui 1 vértice em comum O .
- Tem lados com a mesma medida.
 - Possui áreas iguais.
 - Possui o mesmo perímetro.
- J8: c) Se $ABCD$ for um quadrado e os pontos E , F , G e H forem respectivamente os pontos médios dos segmentos AB , BC , CD e AD , temos que os quadriláteros $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ e $HOGD$ não são congruentes, e semelhantes ao quadrado $ABCD$ numa razão de semelhança igual a $1/2$.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

As respostas orais foram coerentes com as escritas, mas somente três dos participantes especificaram as congruências entre os quadriláteros $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ e $HOGD$, o que era esperado principalmente na turma que já havia concluído as disciplinas de Geometria da licenciatura. Pode-se observar nas produções dos entrevistados o uso da representação externa dada, da utilização da função heurística pela mobilização das habilidades de conservação da

percepção e percepção de relações espaciais. Visto que eles reconheceram que propriedades do quadrado são independentes de tamanho ou posição, relacionaram os quadrados entre si e compararam outros elementos que compõem a figura, como ângulos, lados e vértices. Em relação à escrita, relacionada à função discursiva, nota-se uma dificuldade em formular respostas mais elaboradas utilizando corretamente os termos matemáticos.

Com respeito ao GI, nos registros escritos podem ser observadas algumas características consideradas como relações, porém a congruência entre os quatro quadriláteros não foi elencada. Pôde-se notar, além das características apontadas pelo GJ, outras como: reconhecer que os quadriláteros são semelhantes entre si; que não são iguais, por estarem em posições distintas; e que são equivalentes. O Quadro 10 traz as características apontadas pelos dois grupos, como relação entre os quadriláteros *AEOH*, *EBFO*, *OFCG* e *HOGD*:

Quadro 10 – Características observadas nas respostas do item c da tarefa 1

Relações e/ou características entre <i>AEOH</i> , <i>EBFO</i> , <i>OFCG</i> e <i>HOGD</i>	GJ	GI
“São congruentes”	J2, J3, J8	
“Têm o ponto <i>O</i> em comum”	J1, J3, J4,	I1, I4
“Têm os lados com mesma medida”	J1, J5, J6	I1, I4, I5
“Têm mesma área”	J1, J3, J4,	I1, I2, I3,
“Têm mesmo perímetro”	J1, J3, J4,	I2, I3, I6, I8
“Compõe o quadrilátero <i>ABCD</i> ”	J1, J4, J6	I7
“São semelhantes à <i>ABCD</i> ”	J8	I7
“São semelhantes entre si”		I5
“Não são iguais por estarem em posições distintas”		I6
“São equivalentes”		I8

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

A Figura 30 ilustra algumas das respostas de integrantes do GI:

Figura 30 – Resposta de I1, I2 e I8 ao item c da tarefa 1

I1:

- Possuem um ponto em comum (*O*);
- Lembramos o segmento \overline{EO} presente em dois quadrados (*AEOH* e *EBFO*), portanto pela definição de quadrado, onde todos os lados tem que ser iguais, temos \overline{OE} como medida para todos.
- Sabemos que os pontos *H*, *G*, *F* e *E* são pontos médios, logo podemos concluir que os segmentos $\overline{DH} = \overline{HA} = \overline{DG} = \overline{GC} = \overline{BF} = \overline{FC} = \overline{BE} = \overline{AE}$

- I2: c) mesma área e perímetro em relação ao quadrado ABCD.
- I8: Ambos possuem mesmo perímetro e área. Dois equivalentes.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Pode-se notar que todos do GI reconheceram propriedades e relações na figura, porém nenhum deles identificou a relação de congruências entre os quadriláteros $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ e $HOGD$. Observa-se também que, assim como os integrantes do GJ, houve o uso da representação externa, da ação de interpretação da figura, da utilização da função heurística na mobilização das habilidades de conservação da percepção e a percepção de relações espaciais. Em relação à escrita, relacionada à função discursiva, do mesmo modo que no GJ, nota-se também a dificuldade em formular respostas mais elaboradas utilizando corretamente os termos matemáticos.

3.2.5 Análise do item d da Tarefa 1

No item **d**, é pedido aos entrevistados que expliquem porque o quadrilátero EFGH é um quadrado. Lembrando que todos os entrevistados, de ambas as turmas, o reconheceram como ‘quadrado’ nas respostas dadas ao primeiro item desta tarefa.

Observando os registros escritos das respostas a esse item realizados pelos integrantes do GJ, pode-se notar que quatro deles (J1, J2, J5, J8) buscaram mostrar que os lados de EFGH têm a mesma medida e que seus ângulos internos são retos.

O entrevistado J1 utiliza a congruência de triângulos em sua justificativa e finaliza a demonstração com o símbolo de “*como queríamos demonstrar*”. Já J8 usa o fato de os lados de EFGH serem diagonais dos quadrados $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ e $HOGD$, e faz a demonstração.

O integrante J2 tenta usar o teorema que afirma que um quadrilátero que tem lados opostos paralelos é um paralelogramo, mas depois parece ter percebido que o quadrilátero tinha lados congruentes pelo fato de os quadriláteros do item c serem congruentes (mesmo argumento de J8), mas não deixa isso claro. Apesar de saber que tem que demonstrar que os ângulos são todos retos, não demonstrou. O participante J5 justifica que os ângulos internos são retos, mas

falta formalismo em algumas conclusões. Também tenta escrever sobre a congruência dos lados, mas lacunas distanciam a resposta de uma demonstração.

O entrevistado J6 se preocupa em mostrar que os ângulos internos de EFGH medem 90° , mas não deixa claro em sua escrita que os lados de EFGH têm a mesma medida.

O participante J4 busca mostrar que o quadrilátero EFGH é um quadrado considerando que este está inscrito no quadrado ABCD e que seus lados são paralelos às diagonais de ABCD, depois escreve: “*caso contrário, [...] a aresta HE do quadrilátero não fosse paralela a diagonal AC, o ponto E (ou H) não seria ponto médio do segmento AB (ou AD) e conseqüentemente, não seria um quadrado*”. Observa-se que J4 faz uma confusão em sua tentativa, levando-nos a inferir que não compreende o que é uma demonstração.

Ainda com respeito aos registros escritos, o participante J7 afirma que os lados de EFGH têm a mesma medida e que seus ângulos internos são retos, sem justificativas. O integrante J3 escreve apenas “*cada lado do quadrado EFGH é uma diagonal dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG e HOGD*”, não apresentando a resposta de forma completa.

As figuras a seguir trazem as respostas de J1, J4, J6 e J8, ilustrando o que foi exposto:

Figura 31 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J1

d) Quadrado é um quadrilátero (OK!); Lados congruentes:
 vem base nos quadrados AEOH, EBFO (e os outros das questões
 c), temos ~~que os segmentos (e lados de EFGH) EF, EH, FG e GH~~
~~são congruentes, pois, por exemplo em AEOH, EH é diagonal~~
~~(e em) o triângulo AEH e EBF são congruentes pelo caso~~
 LAL por $AE \cong BE$, $\widehat{EAH} \cong \widehat{EBF}$ e $BF \cong AH$, sendo assim
 $EH \cong EF$, analogamente $EF \cong FG \cong GH$. (OK!) \square .

Ângulo reto: O segmento AB tem em E um ângulo reto,
 vale-se que a diagonal de um quadrado divide o ângulo
 em 2, sendo assim $\widehat{JEO} = 45^\circ = \widehat{IEO}$, somando temos $\widehat{JEI} = 90^\circ$
 @ Outros ~~seg~~ vértices, análogo. \square .

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 32 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J4

d) O QUADRILÁTERO EFGH PODE SER CONSIDERADO UM QUADRADO, POIS ESTÁ INSCRITO NO QUADRADO ABCD E POSSUI SUAS LADOS PARALELOS AS DIAGONAIS DO QUADRADO ABCD. CASO CONTRÁRIO, ISTO É, SE, POR EXEMPLO, ~~SE~~ A LADO HE DO QUADRILÁTERO NÃO POSSER PARALELO A DIAGONAL AC, O PONTO E (OU H) NÃO SERIA PONTO MÉDIO DO SEGMENTO AB (OU AD), E CONSEQUENTEMENTE, NÃO SERIA UM QUADRADO.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 33 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J6

d) Pelo fato de que EH ser diagonal de um quadrado que é o AEOH, EF ser diagonal de BFOF e FG ser diagonal de CFOG e GH ser diagonal de OGDH, e todos essas diagonais ~~se~~ possuem a mesma medida, isto é, congruentes tems que EFGH é pelo menos um losango.
 Veja que EH é diagonal de AEOH o que faz com que o ângulo OHE seja 45° . o mesmo acontece com as diagonais EF de BFOF e FG de CFOG e GH de OGDH. Assim sendo, o ângulo GHE tem medida de 90° , e o mesmo acontece com o ângulo dos EFG, FGH e HÊF, formando assim o quadrilátero EFGH um quadrado.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 34 – Resolução do item d da tarefa 1 pelo entrevistado J8

d- Sabendo que o ponto O é o centro do quadrado ABCD, temos as diagonais de reta \overline{EG} , \overline{HF} , \overline{BD} , \overline{CA} passam pelo centro.
 Assim, temos que a medida \overline{AH} é o mesmo que o medida \overline{AE} , ou seja, seus ângulos são os mesmos.
 Sabendo que o ângulo \hat{A} mede 90° , pois é um quadrado.
 Considerando o ΔEAH sabemos que o soma dos seus ângulos interno é 180°
 Logo temos que os ângulos \hat{H} e \hat{E} medem 45° .
 Aplicando de forma semelhante o processo para o ΔEBF , encontraremos que o ângulo \hat{E} e \hat{F} medem 45° .
 Assim, temos que o ângulo $\hat{HÊF}$ mede 90°
 \therefore Continuo a demonstração de forma semelhante para os outros lados.
 \therefore Temos que EFGH é um quadrado.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Na entrevista, antes de anotar as respostas, J3 disse que “EFGH é um losango”, se confunde, questiona se todo losango é um quadrado e sinaliza não saber como proceder para

justificar, porém depois escreve: “*cada lado do quadrado EFGH é uma diagonal dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG e HOGD*”. Em sua resposta oral, J6 justifica dizendo: “*é pela intuição,*” e depois escreve uma justificativa sobre o fato de os ângulos internos serem retos. O participante J7 também justifica oralmente pela intuição e diz não saber demonstrar. Os demais entrevistados respondem como no registro escrito.

Pode-se notar que dois dos integrantes do GJ; J1 e J8, apresentam uma resposta matematicamente aceitável. Dois dos integrantes, J5 e J8, embora tenham demonstrado saber o que era necessário mostrar nesse item, apresentam dificuldade na formalização da resposta. O entrevistado J6 busca mostrar o que se pede, mas justifica corretamente apenas a característica relativa aos ângulos internos do quadrado. Os demais, J3, J4 e J7, apresentam respostas não aceitáveis do ponto de vista matemático.

Observando as produções dos entrevistados do GJ neste item, pode-se notar a utilização da figura dada, ou seja, da utilização de representação visual externa por parte de todos.

Pelas respostas dos entrevistados J1 e J8 pode-se inferir que houve a mobilização da função heurística, pois houve o reconhecimento e manipulação de formas 2D (quadrados e triângulos), de segmentos que compõem os lados dos quadriláteros (unidades 1D) e de ângulos variados (medindo 45° , 90° e 180°), o que também caracteriza a mobilização de habilidades como a de percepção de figura-fundo (para reconhecer e identificar os quadrados e as subfiguras do quadrado ABCD), a discriminação visual (para a comparação das subfiguras, identificando semelhanças e diferenças), a percepção de relações espaciais (ao relacionar as subfiguras entre si), a conservação da percepção (para reconhecer que propriedades do quadrado são independentes de tamanho ou posição e não se confunde quando este está em diferentes posições) e a percepção de relações espaciais (ao relacionar os quadrados entre si, entre outros elementos que compõem a figura como ângulos, lados e vértices).

Também se observa nestas respostas a coordenação das funções heurística, discursiva e a de interpretação da figura dada, visto que emergiram alguns conceitos matemáticos e conclusões a partir da figura, como congruência entre formas (quadrados e triângulos), o paralelismo entre segmentos, relações entre ângulos, o fato de EFGH estar inscrito em ABCD, conclusões sobre EFGH ser um quadrado, entre outras. Estas respostas demonstram que o participante é capaz de realizar raciocínios lógicos formais e compreender a estrutura axiomática da matemática.

Pelas produções dos entrevistados pode-se inferir que a resposta de J6 se caracteriza como uma demonstração incompleta. As de J2 e J5 englobam tentativas de demonstração. Pode-se inferir, como para as respostas de J1 e J8, que houve a mobilização da função heurística, com

o reconhecimento e manipulação de formas 2D, de unidades 1D (segmentos) e de ângulos. Do mesmo modo, também caracteriza a mobilização de habilidades como a de percepção de figura-fundo, a discriminação visual, a percepção de relações espaciais, a conservação da percepção e a percepção de relações espaciais.

Em suas respostas, J2, J5 e J6 dão indícios de que compreendem o papel das definições e dos requisitos de uma definição matemática, compreendem os passos individuais de um raciocínio de forma isolada, mas não compreendem ou têm dificuldade em relação ao encadeamento deles na estrutura de uma demonstração. Assim, a coordenação das funções heurística e discursiva e a de interpretação da figura dada podem ter sido não efetivas no raciocínio aplicado por esses três entrevistados, visto que as respostas apresentadas por eles não são as esperadas.

Quanto às respostas dadas por J3, J4 e J7, não deixam claro o conhecimento sobre como seria uma demonstração nesse item. As respostas destes participantes dão indícios de que eles percebem os objetos de maneira informal, mediante o reconhecimento de suas componentes e propriedades. Pela falta de argumentos nas respostas, nesses casos, não foi possível a identificação dos elementos que compõem a Visualização Geométrica como a definimos neste trabalho.

Observando os registros escritos das respostas dos integrantes do GI, pode-se notar que I1 escreve frases que aparentam não ter sentido e que não contribuem para a explicação. Situação semelhante ocorre na explicação escrita por I5, que utiliza como argumento a demonstração do teorema de Pitágoras, mas não deixa clara sua efetividade. Esse participante também escreve que os ângulos internos do quadrilátero EFGH são retos e que as diagonais neste quadrilátero o dividem em dois triângulos retângulos.

O entrevistado I2 entende que se o quadrilátero EFGH tiver uma representação com um dos lados na horizontal, será um quadrado, pois escreve: “*Sim, se eu rotacionar a imagem*”. O participante I3 escreve que pelo quadrilátero EFGH estar “*inserido*” (inscrito) no quadrado maior (ABCD) e seus “*cantos*” (vértices) estarem na metade dos lados do quadrado maior, então seus lados têm o mesmo tamanho, porém não explica o fato de os ângulos internos serem retos. O integrante I4, diz que EFGH é um quadrado, pois por hipótese, ABCD também o é, e o segmento HE é diagonal do quadrado AEOH assim como os demais lados são diagonais dos quadrados *EBFO*, *OF CG* e *HOGD*, mas não deixa claro as implicações desses fatos na explicação.

Os registros escritos dos participantes I6 e I8 descrevem um raciocínio em que buscam mostrar que EFGH é um quadrado. Ambos têm como premissa que os lados do quadrilátero

EFGH são diagonais dos quadrados $AEOH$, $EBFO$, $OF CG$ e $HOGD$. O participante I6 escreve: “como os quadrados são iguais [$AEOH$, $EBFO$, $OF CG$ e $HOGD$], as arestas tem mesma medida”, escreve também “as diagonais dividem o quadrado ao meio, também dividem o ângulo de 90° em duas partes iguais, ou seja, 45° ” e conclui que os ângulos internos do quadrilátero em questão medem 90° . O entrevistado I8, a partir da premissa, conclui de forma direta que os lados do quadrilátero têm a mesma medida e seus ângulos internos medem 90° . Em sua resposta, I7 escreve que os lados de EFGH são, dois a dois, paralelos, e também dois a dois ortogonais, mas não explica como chegou a essas conclusões.

Em suma, os registros escritos da maioria dos integrantes do GI não contribuem para a explicação e/ou são confusos, apenas os registros escritos de I6 e I8 explicitam um raciocínio coerente para a explicação, porém não apresentam formalismo matemático. A Figura 35 ilustra as respostas de I2, I5 e I6:

Figura 35 – Resolução do item d da tarefa 1 pelos entrevistado I2, I5 e I6

I2:

d) Sim, se eu rotacionar a imagem

I5:

d- Pela demonstração do teorema de Pitágoras, podemos notar que a figura apresentada tem inscrito dentro de si um outro quadrilátero, onde usando a fórmula podemos provar. Outro ponto a ser levar em consideração é a medida dos ângulos internos, pois na figura apresentada todos tem medida de 90° , podemos levar em conta também que ao traçarmos uma diagonal neste quadrilátero temos dois triângulos retângulos.

I6:

1-d) Sim, pois as arestas do quadrilátero EFGH coincidem com as diagonais de outros quadrados. Dessa forma, como as diagonais dividem o quadrado ao meio, também dividem o ângulo de 90° em 2 partes iguais, ou seja, 45° . Assim, os ângulos internos de EFGH têm medida 90° e como os quadrados menores são iguais, as arestas têm mesma medida entre si, portanto, formando um quadrado.

Analisando as respostas dadas oralmente durante a entrevista, pôde-se notar que os integrantes I4, I6 e I8 tiveram dificuldade em descrever por escrito seu raciocínio, porém buscam explicar através de um raciocínio coerente. Os três tiveram como premissa o fato de os lados de EFGH serem diagonais dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG e HOGD. Ao ser questionado, I4 relata a partir da premissa de que as diagonais dividem o quadrado em duas partes iguais (triângulos) e diz (de modo informal, mas equivalente) que juntando os quatro triângulos EOH, EFO, FOG e HOG temos o quadrado em questão. Em sua fala, I6 diz que o quadrilátero EFGH está “rotacionado”, que “seus lados são iguais e seus ângulos são de 90° ” e depois explica, a partir da premissa de que as diagonais dividem os ângulos em partes iguais, cada uma de 45° , o que, segundo I6 garante, que os ângulos internos são retos. Em sua fala, I8 parte da premissa e, assim como I6, explica a divisão dos ângulos retos pelas diagonais em dois medindo 45° cada e conclui dizendo que os lados têm a mesma medida pois as diagonais são “equivalentes”.

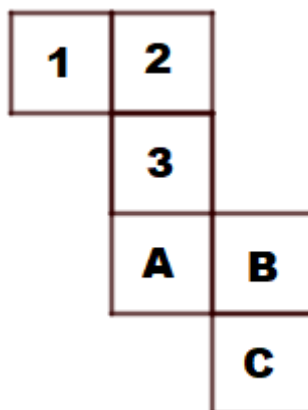
Oralmente, I1 diz que seu registro escrito é mais intuitivo e que não saberia como explicar. Os participantes I5 e I7 também não conseguem explicar por que EFGH é um quadrado. As respostas orais de I2 e I3 são coerentes com suas escritas. Pode-se observar que as respostas dadas por I2 e I4 são explicações pautadas puramente em argumentos geométricos.

Com base nas produções escritas e orais dos entrevistados do GI, pode-se inferir que seus integrantes têm dificuldade na compreensão do encadeamento lógico necessário para realizar a demonstração nesse item **d**. Pode-se notar que eles percebem os objetos de maneira informal, não utilizando os conceitos e propriedades de acordo com o formalismo matemático. Pela falta de argumentos nas respostas de todos os integrantes do GI, como no caso de J3, J4 e J7 do GJ, não foi possível a identificação, de forma efetiva, dos elementos que compõem a Visualização Geométrica como a definimos neste trabalho.

3.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 2

O enunciado da Tarefa 2 traz a Figura 36, que representa a planificação de um cubo e inquire quais são os números das Faces A, B e C, sabendo que a soma dos números de faces opostas é igual a 7.

Figura 36 – Planificação de um do cubo



Fonte: A autora, 2018.

3.3.1 Análise da Tarefa 2 referente ao grupo J

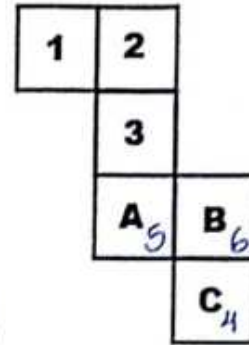
Pelos registros escritos e orais das respostas dos entrevistados do GJ, pode-se notar que as respostas da maioria dos integrantes do grupo são sucintas, em geral, contendo as inscrições $A = 5$, $B = 6$ e $C = 4$. Somente os entrevistados J3, J4 e J7 apresentam uma justificativa por extenso. Em sua resposta, J3 explica detalhadamente como pensa; os outros dois apresentam respostas mais breves, J4 baseia sua explicação no fato de que faces opostas não têm arestas em comum, e J7 explica que pela montagem do cubo encontra os valores das faces. Os três registram a produção da imagem mental do cubo. J3 escreve “*procurei montar o cubo*”, J4 registra “*imaginam a figura em ‘3D’*” e J7: “*imagino montar este cubo*”.

Os integrantes J5 e J6 desenharam a representação do cubo tridimensional, além de apresentarem os valores das faces A, B e C.

As figuras 37, 38, 39 e 40 ilustram as respostas escritas por J2, J3, J4 e J6, respectivamente:

Figura 37 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J2

2. A figura ao lado representa uma das possíveis planificações de um cubo. Considerando a figura e sabendo que a soma dos números de faces opostas é igual a 7. Nessas condições, quais são os números das faces A , B e C ?



Explique o que você pensou para responder:

Tomando A como a face "base", temos que $\boxed{3}$ é sua lateral (uma das) e $\boxed{2}$ sua face oposta. Assim, $A = 5$. Seguindo o raciocínio, a $\boxed{1}$ fica à esquerda de \boxed{A} , o que leva-me a concluir que $B = 6$ (face oposta de $\boxed{1}$). Portanto, $C = 4$ é a face oposta a $\boxed{3}$.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 38 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J3

Procurei montar o cubo mentalmente. Para tanto, $A = 5$, $B = 6$ e $C = 4$.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 39 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J4

$A = 5$
 $B = 6$
 $C = 4$

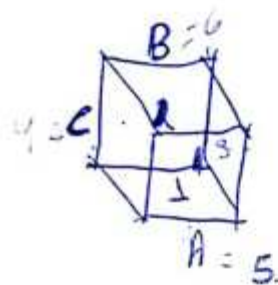
RELAÇÃO: $\begin{cases} 6 \sim 1 \\ 5 \sim 2 = 2 \\ 4 \sim 3 \end{cases}$

...DUAS FACES QUE POSSUEM ARESTAS EM COMUM NÃO PODEM SOMAR 7.
 IMAGINAR A FIGURA EM "3D" E USAR A RELAÇÃO PARA OBTENR OS VALORES.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 40 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado J6

$A = 5$
 $B = 6$
 $C = 4$



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Pelos registros orais e a observação, pode-se notar que todos os entrevistados do GJ apresentam indícios de formação de imagem mental do cubo em 3D. Os participantes J1, J2, J3, J4, J5, J7 e J8 utilizam em suas falas termos como: imaginando, pensando, montando ou dobrando mentalmente o cubo. Além disso, J1, J2, J3, J5, J7 e J8 realizaram gestos com as mãos, como se estivessem manipulando o cubo, o que indica a produção de imagens cinestésicas e dinâmicas.

Pelas produções dos entrevistados do GJ, nota-se a utilização da imagem dada por todos do GJ e a produção de representação externa por parte de J5 e J6. Observa-se que todos os

integrantes do GJ identificam a partir da figura dada as faces opostas às faces indicadas pelas letras A, B e C e seus valores correspondentes segundo as hipóteses do enunciado, o que dá indícios de que a ação de interpretação da figura foi mobilizada.

Nota-se, pelos registros escritos, pela fala e gestos dos entrevistados a mobilização da rotação mental. Como todos reconheceram as faces opostas do cubo e os valores correspondentes, entende-se que a percepção de posições espaciais também foi mobilizada.

Pelo descrito nos dois últimos parágrafos, nota-se indícios do emprego da função heurística. Pelas respostas escritas e orais apresentadas, observa-se dificuldades em escrever e justificar a resposta. A maior parte dos entrevistados apresentam respostas sucintas e sem justificativa. Embora seja notada a dificuldade em relação ao emprego da função discursiva, se pode notar a coordenação entre os registros figural e língua natural, já que todos compreenderam e responderam a tarefa de modo matematicamente aceitável.

3.3.2 Análise da Tarefa 2 referente ao grupo I

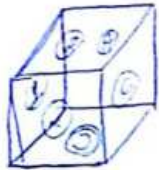
Pela análise das produções escritas dos entrevistados do GI, pode-se notar, assim como no GJ, que as respostas, em sua maioria, são sucintas. Três dos entrevistados do GI, I1, I3 e I5, buscam escrever uma justificativa um pouco mais detalhada, desenhando a representação do cubo tridimensional, porém eles apresentam dificuldade em reconhecer as faces opostas a B e a C, fornecendo uma resposta considerada não-aceitável. Os cinco demais registram a produção da imagem mental do cubo, por exemplo, I4 escreve “*primeiro montei o cubo*”, I8 registra “*imaginei as figuras dobrando e formando o cubo*”, os demais escrevem de modo análogo. O termo “*dobrando a figura*”, utilizado por I8, é observado na fala de outros dois entrevistados.

As figuras 41 e 42 ilustram as respostas escritas de I1 e I8:

Figura 41 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado I1

Como a partir do fechamento do cubo, nota-se que as faces opostas são

- 2 oposto de A
- 1 oposto de C
- 3 oposto de B



Como a soma dos opostos tem que ser 7, fazemos:

- $2 + A = 7 \Rightarrow A = 7 - 2 \Rightarrow A = 5$.
- $1 + C = 7 \Rightarrow C = 7 - 1 \Rightarrow C = 6$.
- $3 + B = 7 \Rightarrow B = 7 - 3 \Rightarrow B = 4$.

Os números de A, B e C são, respectivamente 5, 4, 6

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 42 – Resolução da Tarefa 2 pelo entrevistado I8

Imaginar as figuras dobrando e desmontando o cubo

A = 5
B = 6
C = 4

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Assim como no caso do GJ, pelos registros orais e a observação, pode-se notar que todos os entrevistados do GI apresentam indícios de formação de imagem mental do cubo em 3D, embora três deles apresentem dificuldade em identificar as faces opostas. Os participantes utilizam em suas falas termos como: “voltando para o cubo”, “dobrar a folha e formar o cubo”, “imaginando”, “montando mentalmente o cubo”. Além disso, I4 e I6 relatam ter facilidade em imaginar o cubo e identificar suas faces opostas por conhecerem e “saber montar o cubo mágico”. Os participantes I3 e I7 realizam gestos com as mãos indicando uma manipulação da imagem mental do cubo. Pelo exposto, infere-se que há produção da imagem mental do objeto cubo, embora em alguns casos tenha havido dificuldade em se identificar a localização correta das faces.

Pelas produções dos entrevistados do GI, nota-se a utilização da imagem dada por todos e a produção de representação externa por parte de I1 e I3.

Observa-se que cinco integrantes do GI identificam a partir da figura dada as faces opostas às faces indicadas pelas letras A, B e C e seus valores correspondentes segundo as hipóteses do enunciado, o que dá indícios de que a ação de interpretação da figura foi mobilizada. Os demais entrevistados dão indícios da mobilização da ação, porém apresentam dificuldades.

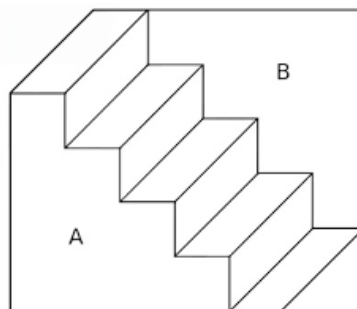
Nota-se, pelos registros escritos e orais dos entrevistados do GI, a mobilização da rotação mental, pois todos chegam à imagem mental do cubo a partir da figura planejada. Como a maioria reconhece as faces opostas do cubo e os valores correspondentes, entende-se que a percepção de posições espaciais também foi mobilizada para cinco dos oito entrevistados. O fato de haver confusão em relação às faces opostas, por parte de três dos integrantes do GI, dá indícios de que eles apresentam dificuldade na mobilização da percepção de posições espaciais nessa tarefa.

Pelo descrito nos dois últimos parágrafos anteriores, nota-se indícios do emprego da função heurística por cinco dos membros do GI. As respostas dos demais nos levam a inferir que houve dificuldade na execução da função heurística para eles. Pelas respostas escritas e orais apresentadas, assim como no caso do GJ, observa-se dificuldade em escrever e justificar a resposta. A maior parte dos entrevistados apresenta respostas sucintas e sem justificativas. Embora seja notada a dificuldade em relação ao emprego da função discursiva, pode-se notar a coordenação entre os registros figural e língua natural, por parte de cinco integrantes do GI, que demonstram ter compreendido e responderam a tarefa de modo matematicamente aceitável.

3.4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 3

O enunciado da Tarefa 3 pede que, observada a Figura 43, seja descrito o que se vê e qual relação pode ser estabelecida entre A e B.

Figura 43 – O que você vê



Fonte: A autora, 2018.

3.4.1 Análise da Tarefa 3 referente ao grupo J

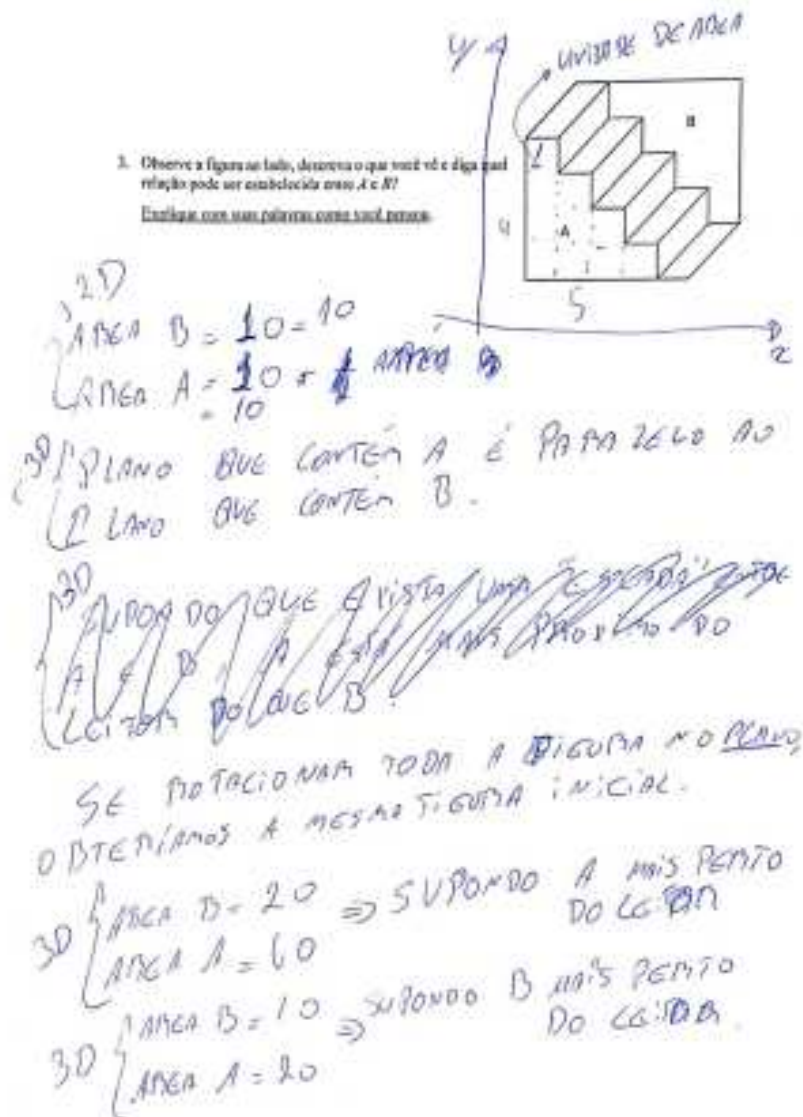
Pela análise das produções escritas e orais dos entrevistados do GJ, pode-se observar que todos seus integrantes, ao observarem a figura, a identificam como uma representação da imagem tridimensional de uma escada. Seis dos oito entrevistados afirmam ver a escada sob dois pontos de vista distintos, veem a escada de modo que a região representada por A está à frente em relação a região representada por B e, pelo outro ponto de vista, veem B à frente de A. Três desses também afirmam ver a imagem como uma representação plana. Os outros dois dizem ver a escada de modo que a região representada por A está à frente em relação à região representada por B.

As relações citadas nos registros escritos dos participantes são: a congruência entre as regiões A e B (observado nos registros de J1 e J5); a igualdade das áreas representadas por A e B (observado nas respostas de J6); relacionam as regiões representadas por A e B como paredes (J1, J2); veem as regiões A e B como complementares e se unidas formam um quadrilátero (J1, J6, J7, J8); citam a rotação da figura em 180° e que, após a transformação, a configuração da figura permanece a mesma, a menos das posições das letras A e B (J1, J4, J5).

De modo geral, as respostas escritas, embora apresentem algumas relações entre as regiões A e B, não apresentam justificativas elaboradas do ponto de vista matemático. Nota-se que as respostas estão pautadas em argumentos perceptivos e intuitivos. O participante J4 dá indícios de uma tentativa de justificativa matemática, porém apresenta dificuldade em expor o raciocínio e sua resposta é confusa.

As figuras 44 e 45 ilustram as respostas de J4, J7 e J8:

Figura 44 – Resolução da Tarefa 3 pelo entrevistado J4



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 45 – Resolução da Tarefa 3 pelo entrevistado J7

+ Pensando em plano e desconsiderando a escada, A e B formariam um retângulo

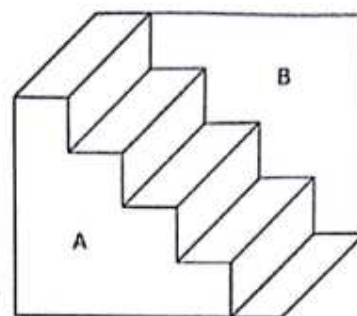
+ Considerando a escada, ~~temos um~~ ~~paralelepípedo~~ temos um ~~paralelepípedo~~ paralelepípedo que A seria a face que está a frente e B ao fundo (faces opostas)

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 46 – Resolução da Tarefa 3 pelo entrevistado J8

3. Observe a figura ao lado, descreva o que você vê e diga qual relação pode ser estabelecida entre A e B?

Explique com suas palavras como você pensou.



A FIGURA REPRESENTA UMA ESCADA.

O PLANO A, NUM PRIMEIRO MOMENTO ESTARIA A FRENTE DO PLANO B, PORÉM, MUDANDO O PONTO DE VISTA O PLANO B PASSA A FICAR NA FRENTE DO PLANO A.

SE ENCARARMOS A FIGURA NO PLANO AS PARTES "A" E "B" ~~(QUADRADO)~~ SE ENCAIXAM FORMANDO UM QUADRILÁTERO.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Pelos registros orais e a observação, pode-se notar que todos dizem ver a figura como uma representação plana de uma escada. Os participantes J1, J3, J5, J6 e J8 giram a folha para poderem observar a figura em outros ângulos. Os entrevistados J1 e J7 dizem pensar em um prisma ou paralelepípedo a partir da figura dada. Observa-se nas falas dos participantes do GJ que essas estão em conformidade com os registros escritos, embora J1, J4 e J5, em suas exposições orais, utilizem argumentos matemáticos que não ficaram tão claros na escrita para formalizar que as regiões representadas por A e B são congruentes e têm mesma área. No caso

de J1 e J4, ambos citam que pensaram em “*dividir a figura em quadradinhos*”, se referindo a dividir as regiões A e B em unidades através de um quadriculado, para assim fazer a comparação das áreas. O entrevistado J4 repensa o que escreveu e percebe que os cálculos que fez não estavam coerentes com a interpretação da figura, já que escreveu que as áreas mediam valores diferentes. O participante J5 argumenta que as regiões A e B são congruentes, dizendo “*os segmentos da escada são congruentes*”, e marca na figura a correspondência entre cada segmento.

Pode se notar que todos os entrevistados do GJ apresentam indícios de formação de imagem mental ao relacionarem a figura dada como a representação da imagem tridimensional de escada e com prismas ou paralelepípedos. Observa-se a utilização de representações externas pela utilização da imagem dada e a ação de interpretação da figura pelos entrevistados quando eles estabelecem relações entre as subfiguras e constroem imagens mentalmente baseados na representação dada.

A mobilização da habilidade de percepção de posições espaciais é identificada nas respostas de todos os membros do GJ, quando os participantes relacionam as regiões contidas na figura dada consigo, por exemplo, identificando que a região A está mais próxima dele, ou à frente da região B. Pode-se notar a mobilização da percepção de relações espaciais nas respostas de seis dos integrantes do GJ, quando eles identificam que as áreas das regiões A e B são iguais, ou que essas têm a mesma forma, que são congruentes ou complementares. Foi observada mobilização da rotação mental por parte dos entrevistados J1 e J4, que se referem à rotação da imagem que os levaram a pensar que as formas das regiões A e B eram iguais.

O emprego da função heurística nesta tarefa, pode ser observado pela percepção e reconhecimento de formas (como das regiões A e B), das suas posições, da identificação de subfiguras, de segmentos e da aplicação das habilidades para visualização.

Observa-se que os entrevistados têm dificuldade em formalizar a resposta, o que leva a inferir que eles apresentam dificuldade em relação ao emprego da função discursiva.

Pode-se observar ainda, pelas respostas, que houve uma coordenação entre a exploração da figura que ocorre com o emprego da função heurística e as respostas em língua natural, ou seja, há a passagem de um registro de representação semiótico para outro, porém pode-se notar que é necessário melhorar a qualidade das respostas, principalmente com respeito à formalização, ou seja, quanto ao registro em língua natural.

Como a Tarefa 3 é uma tarefa de exploração, todas as respostas dadas pelos integrantes do GJ (considerando as produções escritas e orais) foram identificadas na categoria de respostas

matematicamente aceitáveis. Embora não apresentem formalismo em suas justificativas, também não trazem erros do ponto de vista matemático.

3.4.2 Análise da Tarefa 3 referente ao grupo I

Observando as produções escritas dos integrantes do GI, assim como no caso do GJ, pode-se observar que todos seus integrantes, ao observarem a figura, a identificam como uma representação da imagem tridimensional de uma escada. Sete dos oito entrevistados afirmam ver a escada de modo que a região representada por A está à frente em relação a região representada por B ou que a região A está mais próxima deles do que a B. E um dos entrevistados, I8, escreve que identifica dois pontos de vista distintos, ora a região representada por A está à frente em relação a região representada por B, e pelo outro ponto de vista, B à frente de A. Em sua resposta escrita, I8 ainda registra que as áreas das regiões A e B são iguais. Na resposta escrita de I5, ele escreve que “*unindo A e B, temos um retângulo*”.

A Figura 41 apresenta as produções escritas de I2, I5 e I7, em resposta à Tarefa 3:

Figura 47 – Resposta de I2, I5 e I7 à tarefa 3

I2

:

A está mais próximo a mim do que o B.

I5:

Baseando-se na figura apresentada, podemos observar que se assemelha a uma escada, onde temos que a parte "A" de imagem seria a frente dessa escada e a parte "B" seria a parte, ou seja, onde a escada está fixada. Podemos notar também que ao unirmos a figura A e a figura B temos a imagem de um retângulo.

I7: Pensando como uma escada
 e A e B seriam paredes
 e A estaria na frente e B atrás
 na parede do fundo.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Pelos registros orais e a observação, pode-se notar que os integrantes do GI exploraram mais a figura do que pode ser observado nos seus registros escritos. Oralmente, todos dizem ver a figura como uma representação plana de uma escada. Os participantes I1, I4 e I6 relatam que veem a figura de três formas diferentes, por um ponto de vista a região A está à frente da região B; por outro B está à frente de A e ainda relatam ver a figura como uma representação plana, com A e B com áreas iguais, e que se complementam formando um quadrilátero se unidas. Os entrevistados I3 e I8, relatam que veem a figura de duas formas diferentes: por um ponto de vista a região A está à frente da região B, por outro, B está à frente de A. I3 diz que “A e B são complementares”, e I8 diz que as “áreas de A e B são iguais” e que vê também a figura como “parte de um cubo”. Os integrantes I2, I5, I7 relatam ver a região A à frente da região B. O entrevistado I5 também diz que “A e B formam um retângulo”. Pode-se observar que os argumentos utilizados são pautados na percepção e na intuição, o formalismo e a formalização matemática não se fazem presentes nas respostas.

Se pode notar que todos os entrevistados do GI, assim como do GJ, apresentam indícios de formação de imagem mental ao relacionarem a figura dada como a representação da imagem tridimensional de escada e cubo (no caso de I8). Assim como observado no GJ, a utilização de representações externas ocorre por parte dos membros do GI, pela utilização da imagem dada e a ação de interpretação da figura pelos entrevistados, quando eles estabelecem relações entre as subfiguras e constroem imagens mentalmente, baseados na representação dada.

A mobilização da habilidade de percepção de posições espaciais é identificada nas respostas de todos os membros do GI, quando os participantes relacionam as regiões contidas na figura dada consigo, por exemplo, identificando que a região A está mais próxima ou à frente da região B. Pode-se notar a mobilização da percepção de relações espaciais nas respostas de seis dos integrantes do GI, quando eles identificam que as áreas das regiões A e B são iguais, ou que essas têm a mesma forma, que são congruentes ou complementares.

Assim como no caso de GJ, no grupo GI o emprego da função heurística pode ser observado pela percepção e reconhecimento de formas (como das regiões A e B), das suas posições, da identificação de subfiguras, de segmentos e da aplicação das habilidades para visualização.

Observa-se que os entrevistados do GI têm dificuldade um pouco maior que a apresentada pelos membros do GJ em formalizar a resposta, porém ambos os grupos apresentam dificuldades em relação ao emprego da função discursiva.

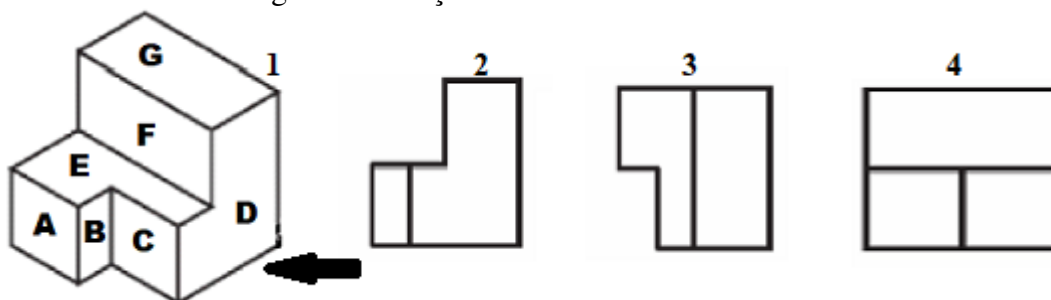
Da mesma forma que no grupo GJ, pode-se observar pelas respostas que houve uma coordenação entre a exploração da figura, que ocorre com o emprego da função heurística, e as respostas em língua natural, ou seja, há a passagem de um registro de representação semiótico para outro, porém pode-se notar que é necessário melhorar a qualidade das respostas, principalmente com respeito à formalização, ou seja, quanto ao registro em língua natural.

Pelo fato de a Tarefa 3 ser de exploração, todas as respostas dadas pelos integrantes do GI (considerando as produções escritas e orais) foram identificadas na categoria de respostas matematicamente aceitáveis. Assim como no GJ, os participantes do GI não apresentam formalismo nas justificativas e também não trazem erros do ponto de vista matemático.

3.5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 4

O enunciado da Tarefa 4 pede que, observada a Figura 48, em que a seta indica a frente da peça tridimensional, seja circulada, dentre as imagens de 2 a 4, aquela que representa a vista de frente da peça tridimensional. Pedese também que sejam completadas com as respectivas letras cada parte das vistas correspondentes às faces da peça dada e que seja feito o desenho das vistas das faces que estão ocultas na representação da peça.

Figura 47 – Peça tridimensional e suas vistas



Fonte: A autora, 2018.

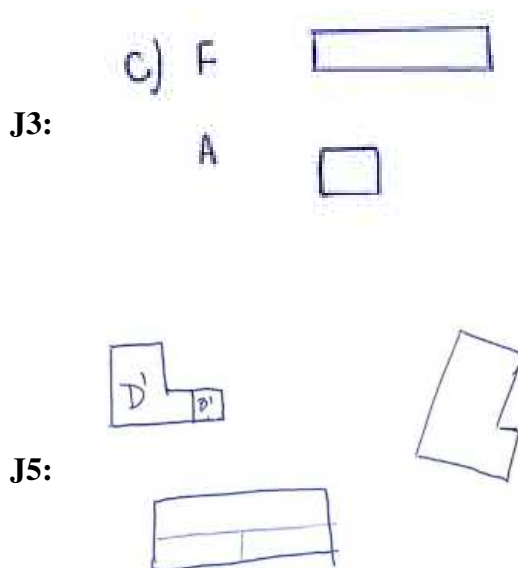
3.5.1 Análise da Tarefa 4 referente ao grupo J

Pela análise das produções escritas dos entrevistados do GJ, pode-se observar que todos os entrevistados do GJ apresentam respostas matematicamente aceitáveis para os itens **a** e **b**. Eles identificam que a figura 2 corresponde à vista frontal e completam as formas correspondentes com as letras D e B; na figura 3 (a vista superior), completando as formas correspondentes com as letras E e G; e no caso da figura 4, identificando as formas correspondentes com as letras A, C e F (que compõe a vista lateral esquerda).

Em resposta ao item **c**, cinco dos integrantes do GJ (J1, J2, J4, J6 e J8) traçam as representações das três faces ocultas corretamente. O participante J1 identifica em sua produção escrita as faces ocultas numerando-as de 5 a 7 e observa que as faces representadas por 4 e 5 são paralelas, assim como a face 6 é paralela a 3 e a face 7 é paralela a 2. Em sua resposta ao item **c**, J4 nota que o contorno das faces ocultas são os mesmos das figuras numeradas de 2 a 4. O integrante J5 faz a representação das três faces ocultas, porém desenha subdivisões em duas delas. Os participantes J3 e J7 apresentam dificuldade em identificar as faces ocultas, J3 faz dois retângulos para representá-las, e J7 identifica duas das faces ocultas (a lateral direita e a oposta à frente), mas não identifica a face correspondente à base da peça.

A Figura 49 mostra as respostas de J3, J5 e J7 ao item **c** da Tarefa 4, e a Figura 50 ilustra a resposta de J1:

Figura 48 – Resolução do item c da tarefa 4 pelos entrevistado J3, J5 e J7





Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 49 – Resposta de J1 à tarefa 4

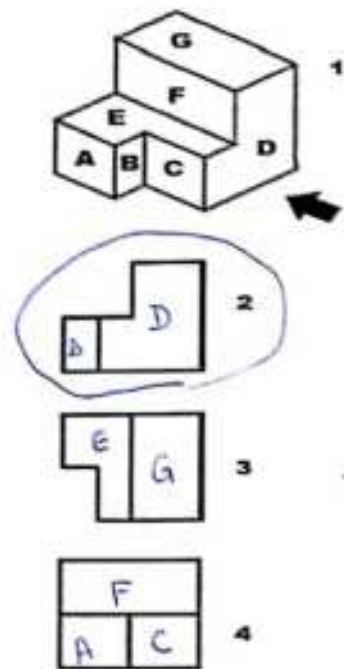
4. Observe as figuras ao lado. A seta indica a frente da figura 1 que é uma representação de uma peça tridimensional.

a. Circule, dentre as figuras de 2 a 4, aquela que representa a figura 1 vista de frente.

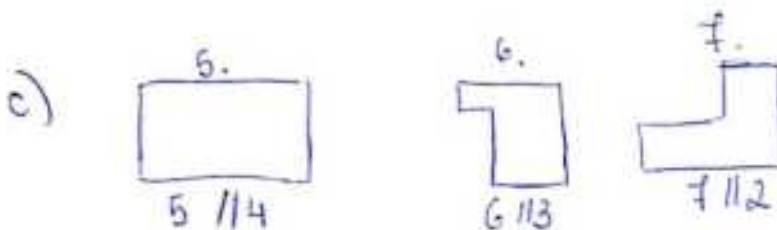
E descreva com suas palavras como você pensou.

b. Complete com a letra que representa cada face da figura 1, em seus respectivos lugares nas figuras de 2 a 4.

c. Desenhe as representações planas das faces que estão ocultas na figura 1.



4) a). A partir desta vista temos as faces B e D da peça.
A face B é um retângulo pequeno, e que se vê apenas uma.



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Pelas observações realizadas e análise das produções orais dos entrevistados do GJ, nota-se que estão em concordância com as produções escritas. Todos identificam a figura 2 como corresponde à vista frontal, embora J3 apresente dificuldade em assumir essa resposta. O participante J3 diz, inicialmente, que a figura que representa a imagem frontal da peça era a

figura 4, depois muda de ideia dizendo que é 3, e por fim diz que “baseada na proporção das subfiguras de 2, 3 e 4”, é a figura 2. Os entrevistados J1 e J4 dizem que a resposta ao item **a** é a figura 2, “por eliminação”. J1, por exemplo, diz: “meio que ‘rotacionando’, vi de frente, como se eu fosse a setinha, eu vi na minha mente. A face B é um retângulo pequeno, que só tem na figura 2”. J4 diz que “a 4 é um quadrado, não seria. E a 3 também não seria”.

O participante J5 diz fazer o reconhecimento de que a figura 2 representa a vista frontal da peça através da observação da forma das subfiguras, diz: “aqui nós temos um L”, referindo-se a forma da face D. Pela observação, pode-se inferir que todos utilizam as formas das subfiguras da peça e comparam com as subfiguras apresentadas nas figuras de 2 a 4 nos itens **a** e **b**, embora não registrem esse fato. Os participantes J2, J6 e J8 utilizam na explicação o termo ‘planificação’, dizendo que “a figura 2 é a planificação da frente da figura”, porém, querem dizer o mesmo que J7, referindo-se à vista frontal da peça: é “como se tirasse uma foto e olhasse”. O termo ‘planificação’, nesse caso, é aplicado erroneamente, já que a planificação de um sólido é a figura plana formada pela superfície deste sólido.

Com respeito ao item **c**, cinco dos integrantes do GJ (J1, J2, J4, J6 e J8) descrevem o que pensam antes de traçar as representações das três faces ocultas corretamente. Os participantes J1, J2 e J4 identificam que as faces ocultas têm o mesmo contorno das faces apresentadas nas figuras numeradas de 2 a 4. O integrante J5 identifica corretamente as três faces ocultas, embora tenha feito subdivisões em duas das representações que desenhou. As respostas orais de J3 e J7, assim como na escrita revelam que eles apresentam dificuldade em identificar as faces ocultas.

Pode-se observar que todos os integrantes do GJ constroem uma imagem mental da peça tridimensional representada pelo número 1 na figura dada. Visto que, por exemplo, J1 diz “rotacionar” mentalmente a peça; J2, J6, J7 e J8, ao utilizarem a ideia de planificação ou da foto, dão indícios da produção de imagens mentais; J1, J2, J4, J5, J6, J7 e J8 também dão indícios de produção de imagem mental ao citarem as faces ocultas da peça.

Pelo descrito no parágrafo anterior, pode-se inferir também que houve a utilização de representações externas nas resoluções por parte de todos os participantes do GJ, pois evidencia o uso da imagem dada para responder a tarefa e a produção de outras imagens (das faces ocultas).

Como todos os entrevistados do GJ identificam a partir da figura 1 suas vistas e completam as figuras de 2 a 4 com as letras correspondentes à cada parte da peça 3D, verifica-se a ação de interpretação da figura. Além disso, interpretam a figura para a confecção das faces da peça que não são vistas na imagem dada.

Observa-se que, ao responder os itens **a** e **b**, todos os integrantes do GJ mobilizam as habilidades de percepção de relações espaciais, de posições espaciais e de discriminação visual, relacionadas à capacidade de identificar corretamente as características das relações entre as vistas e a peça, a capacidade de relacionar a posição das vistas em relação à peça 3D e a si mesmo e a capacidade de comparar as vistas à peça identificando suas semelhanças e diferenças visualmente. Com respeito ao item **c**, nota-se que dois dos integrantes do GJ apresentam dificuldade em relação a reconhecer as faces ocultas, sendo que J7 tem dificuldade em reconhecer uma das faces (a base), e J3 apresenta dificuldade em reconhecer as três faces e seus formatos, o que evidencia dificuldade na mobilização da habilidade de conservação da percepção. Já os seis demais dão indícios de mobilização dessa habilidade.

Com respeito ao emprego da função heurística nesta tarefa, pode-se inferir, pelo exposto, que seu emprego ocorreu por parte de seis dos entrevistados do GJ, visto que para eles houve o reconhecimento das formas e reconfiguração, e que dois apresentaram dificuldades em relação ao emprego da função. O emprego da função discursiva é observado nas produções dos integrantes do GJ ao justificarem o raciocínio empregado na resolução da tarefa, porém nota-se dificuldade na justificação e formalização das respostas.

A dificuldade em relação à aplicação efetiva da função discursiva e o observado nas respostas dos entrevistados dão indícios de que, embora haja a passagem entre os registros figural e língua natural pela coordenação entre as funções heurística e discursiva, há dificuldades nessa conversão.

Pode-se observar que todos do GJ apresentam respostas matematicamente aceitáveis em relação aos itens **a** e **b**, identificando que a figura 2 corresponde à vista frontal e completando as formas correspondentes com as letras corretamente. No caso do item **c**, observa-se que seis dos integrantes do GJ oferecem respostas matematicamente aceitáveis e dois deles apresentam dificuldades que os levam a apresentar respostas não coerentes com o esperado. Em relação à tarefa como um todo, seis integrantes do GJ apresentaram respostas matematicamente aceitáveis e dois tiveram dificuldade com o item **c**.

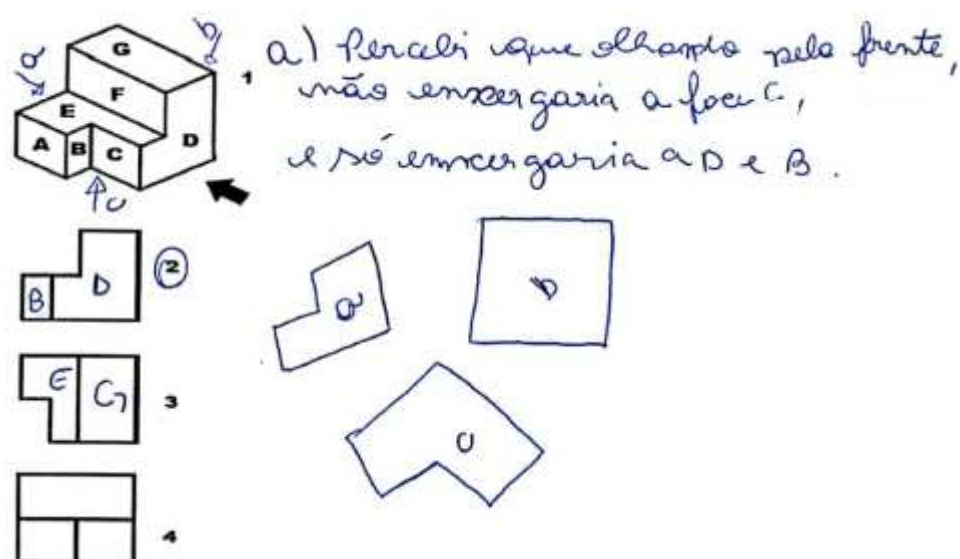
3.5.2 Análise da Tarefa 4 referente ao grupo I

Pela análise das produções escritas dos entrevistados do GI, pode-se notar que quatro entrevistados do GI apresentam respostas matematicamente aceitáveis para a tarefa 4. As respostas escritas apresentam poucos ou nenhum argumento explicando como os entrevistados chegaram às conclusões, na maior parte dessas respostas escrevem que chegaram à conclusão

“olhando a figura de frente”. Foram observadas dificuldades nas resoluções de I2, I3, I5 e I6. O participante I2 apresentou dificuldade no item **b**, não conseguiu identificar as letras e seus respectivos lugares na figura 4. A dificuldade de I3 foi um pouco maior que a de I1, não conseguiu identificar qual figura representa a vista de frente da peça tridimensional e se confundiu nas letras e seus respectivos lugares nas figuras 2, 3 e 4. Tanto I2 quanto I3 conseguiram identificar as faces ocultas e representá-las como o esperado para a tarefa. Já no caso de I5 e I6, ambos responderam satisfatoriamente aos itens **a** e **b**, porém apresentaram dificuldade no item **c**. No caso de I5, ele identifica que há três faces ocultas, mas não identifica a forma dessas faces, e I6 identifica as faces de trás e a lateral direita corretamente, só não identifica a face que representa a base da peça.

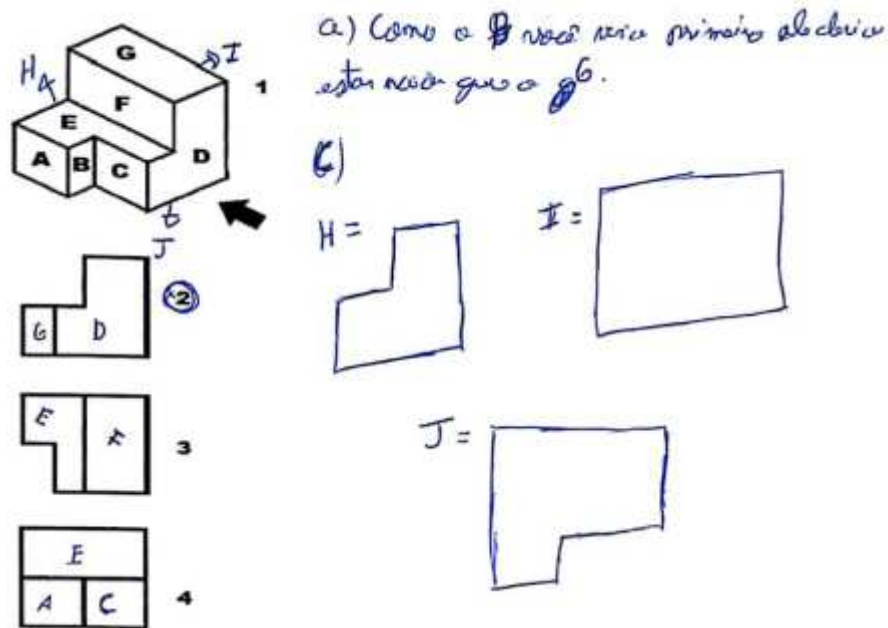
As Figuras 51, 52, 53 e 54, apresentam as respostas de I2, I3, I5 e I6, respectivamente:

Figura 50 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I2



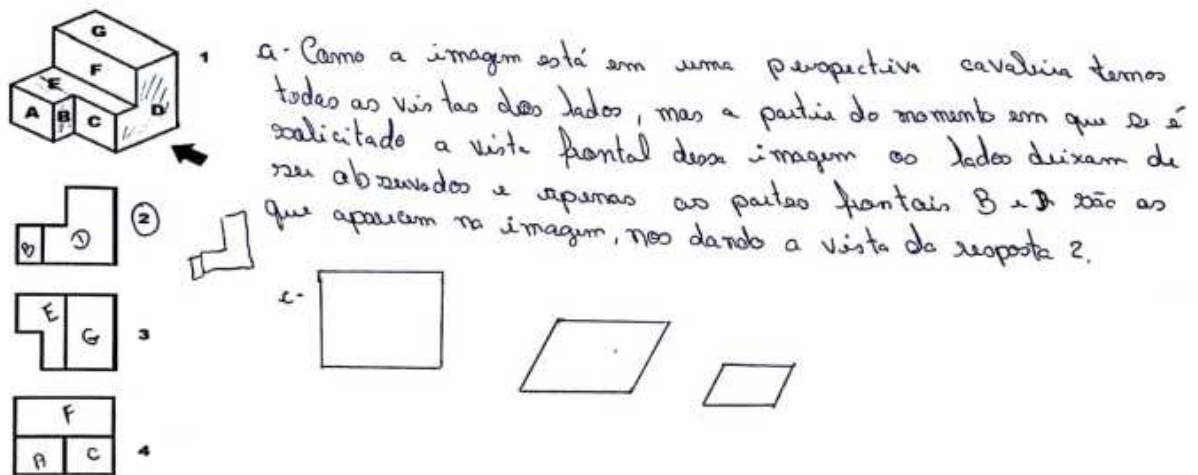
Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 51 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I3



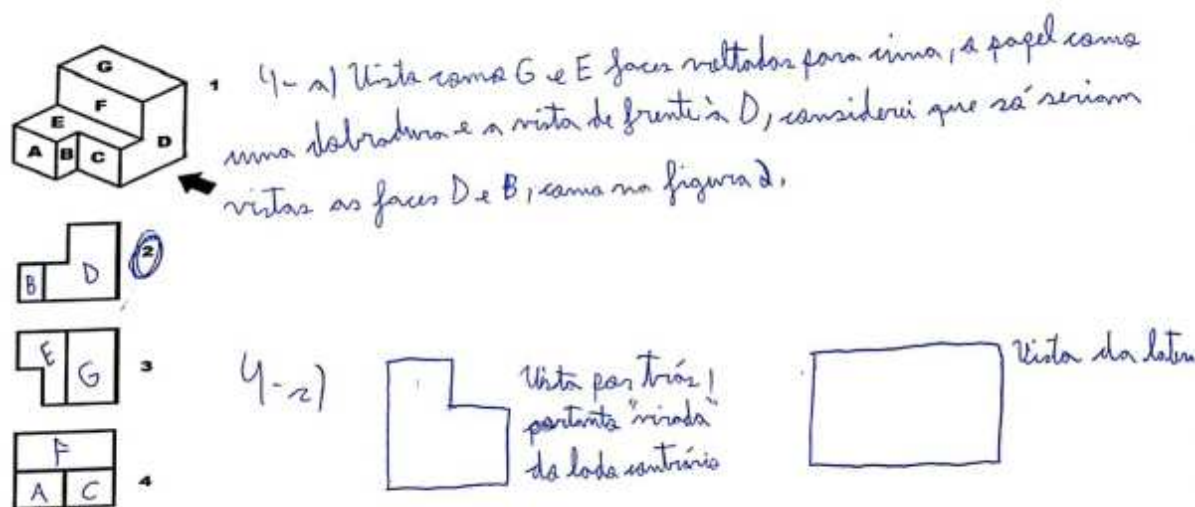
Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 52 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I5



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 53 – Resolução da Tarefa 4 pelo entrevistado I6



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Pelas observações realizadas e análise das produções orais dos entrevistados do GI, nota-se que estão em concordância com as produções escritas. Todos os integrantes do GI justificam suas respostas de modo perceptivo e intuitivo. Em suas falas, os sete que responderam satisfatoriamente o item **a** explicam que escolheram a figura 2 por imaginar (ou “pensar”) que estão olhando a peça de frente, sem se referir à comparação de formas ou alguma outra estratégia. Nas respostas os entrevistados usam termos como: “*essa parte é mais alta*” (I1, I2); “*aqui tem um degrau*” (I4); “*tem uma certa profundidade*” (I6); “*é como se dobrasse a folha*” (I6), para expressar que as faces da peça estão em profundidades e posições diferentes. Em sua resposta, I3, que apresentou maior dificuldade nos itens **a** e **b**, diz; “*eu pensei que como D está primeiro (no sentido de mais próximo do observador) ele teria que ser maior*”, se referindo à posição que a face D teria na vista frontal.

Em relação ao item **c**, as respostas orais são similares às escritas. No caso do GI, somente I4 identifica em sua fala que as faces ocultas têm o mesmo contorno das faces apresentadas nas figuras numeradas de 2 a 4.

Pode-se notar que todos os integrantes do GI constroem uma imagem mental da peça tridimensional representada pelo número 1 na figura dada, visto que nas respostas aos itens **a** e **b**, utilizam termos como “imaginando” e “pensando”. E I1, I2, I3, I4, I6, I7 e I8 dão indícios de produção de imagem mental ao citarem as faces ocultas da peça.

Houve, também, a utilização de representações externas nas resoluções por parte de todos os participantes do GI. As produções dos entrevistados evidenciam o uso da imagem dada para responder a tarefa e a produção de outras imagens (das faces ocultas).

Como seis entrevistados do GI, a partir da figura 1, identificam as vistas e completam as figuras de 2 a 4 com as letras correspondentes à cada parte da peça 3D, verifica-se a ação de interpretação da figura. Os dois entrevistados que tiveram dificuldade nessa identificação interpretam a figura para a confecção das faces da peça que não são vistas na imagem dada. Assim infere-se que houve a ação de interpretação da figura por parte dos integrantes do GI, embora quatro deles tenham demonstrado dificuldade na resolução da tarefa, que pode estar relacionada a dificuldades em relação a essa ação.

Observa-se que quatro integrantes do GI mobilizam as habilidades de percepção de relações espaciais, de posições espaciais, de discriminação visual e de conservação da percepção ao responder os itens da tarefa 4, relacionadas à capacidade de identificar corretamente as características das relações entre as vistas e a peça, a capacidade de relacionar a posição das vistas em relação à peça 3D e a si mesmo, a capacidade de comparar as vistas à peça identificando suas semelhanças e diferenças visualmente e a capacidade de reconhecer as três faces ocultas e seus formatos.

Os outros quatro participantes mobilizaram satisfatoriamente algumas das habilidades referidas, porém apresentaram dificuldade em uma delas. Dois entrevistados, I2 e I3, apresentaram dificuldade na mobilização das habilidades de percepção de relações espaciais, de posições espaciais e de discriminação visual. Os outros dois apresentaram dificuldade em relação a reconhecer as faces ocultas, sendo que I6 tem dificuldade em reconhecer uma das faces (a base) e I5 apresenta dificuldade em reconhecer as três faces e seus formatos, o que evidencia dificuldade na mobilização da habilidade de conservação da percepção.

Com respeito ao emprego da função heurística (que está relacionada à exploração das figuras, conseqüentemente à mobilização das habilidades para visualização) nesta tarefa, pode-se inferir pelo exposto que seu emprego ocorreu por parte de quatro dos entrevistados do GI, visto que para eles houve o reconhecimento das formas e reconfiguração, e que os outros quatro apresentaram dificuldades em relação ao emprego da função.

Observa-se que o emprego da função discursiva pelos integrantes do GI apresenta uma maior defasagem em relação ao observado no GJ. Nota-se nas produções dos integrantes do GI, ao justificarem o raciocínio empregado na resolução da tarefa, a falta de argumentos. Muitas vezes não sabem como justificar suas conclusões e têm maior dificuldade em escrever o que pensam. As poucas justificativas apresentadas são pautadas na percepção e intuição, o que nos leva a inferir que, embora haja o emprego da função discursiva, esta é pouco efetiva.

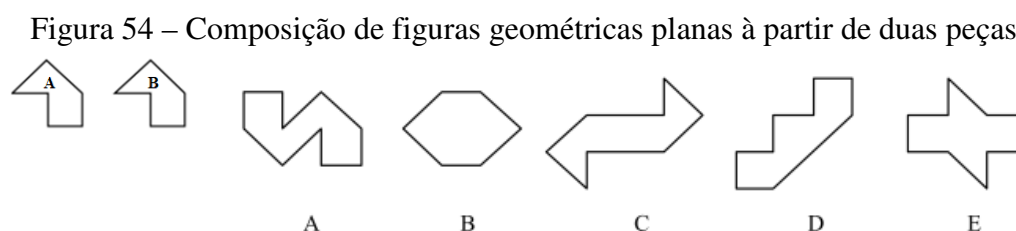
Como observado em relação ao GJ, também nas respostas dos entrevistados do GI, a dificuldade em relação à aplicação efetiva da função discursiva e da heurística dão indícios de

que, embora haja a passagem entre os registros figural e língua natural pela coordenação entre as funções heurística e discursiva, há dificuldades nessa conversão.

Pode-se observar que quatro integrantes do GI apresentam respostas que foram consideradas matematicamente aceitáveis à Tarefa 4, mesmo com dificuldades na justificação, por apresentarem as conclusões esperadas. Eles identificam que a figura 2 corresponde à vista frontal e completam as formas com as letras corretamente, reconhecem e apresentam as três faces ocultas da peça tridimensional. Os outros quatro apresentam dificuldade em pelo menos um dos itens da tarefa.

3.6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 5

Na Tarefa 5, é inquirido que se identifique dentre as figuras representadas por A, B, C, D e E aquelas que podem ser formadas pelas duas peças A e B, sem levantar nenhuma das peças da mesa.



Fonte: A autora, 2020.

3.6.1 Análise da Tarefa 5 referente ao grupo J

Pode-se notar pelas produções dos entrevistados do GJ referentes à tarefa 5 que quatro integrantes, J1, J4, J6 e J8, identificam que somente a figura representada pela letra D não pode ser formada segundo a hipótese do enunciado. As justificativas apresentadas são baseadas na utilização da rotação das peças e na decomposição das figuras representadas pelas letras A, B, C, D e E. Nas duas peças dadas, através do traçado das linhas que representam as interseções das peças. Por exemplo, J1 escreve: “D é a única que não pode ser formada. Cheguei a essa conclusão encontrando nas figuras a forma com que as peças se encaixam e verifiquei se era necessário apenas ‘rotacionar’ no plano ou se teria que levantá-las”. J4 escreve em sua explicação que “corta a figura C ao meio”; J6, embora tenha respondido corretamente, não

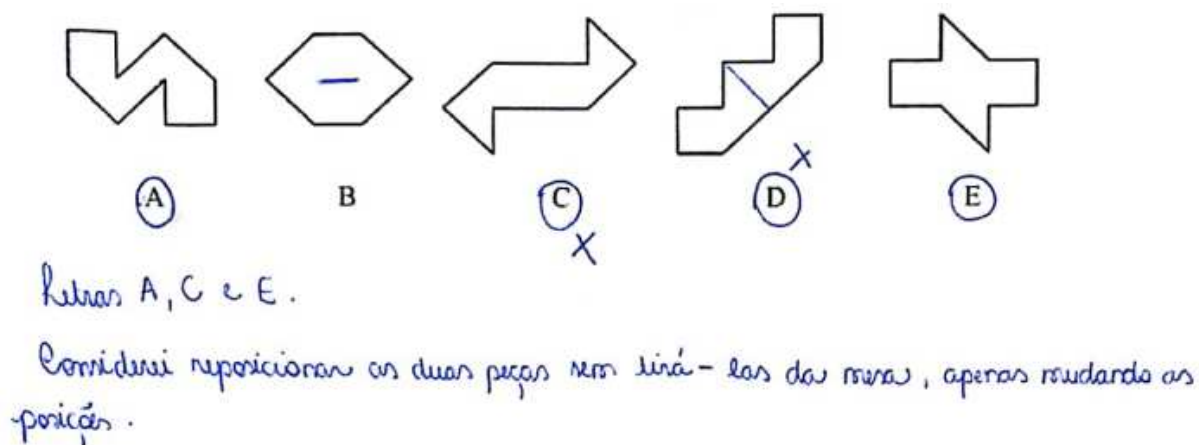
escreve a justificativa, e J8 explica escrevendo; “*tentei encaixar as figuras ... rotacionando*” as peças.

Os demais participantes apresentaram algumas dificuldades em reconhecer quais figuras poderiam ou não ser formadas segundo o enunciado. Os participantes J2 e J5 responderam que as cinco figuras poderiam ser formadas segundo o enunciado e justificam usando rotação, sendo que J2 usa a rotação frisando, em relação às peças “*mas sem levantá-las da mesa*”. O entrevistado J3 responde que as figuras que podem ser formadas segundo o enunciado são A, C e E, apresentando a rotação como justificativa. Já J7 também usa a rotação e escreve como resposta que as figuras B e E podem ser formadas segundo o enunciado, e que A não pode.

Observa-se que sete dos entrevistados do GJ (J1, J2, J4, J5, J7 e J8) utilizam a rotação como argumento em suas respostas escritas, e que seis integrantes do GJ (J1, J2, J4, J5, J6 e J8) utilizam a decomposição das figuras nas duas peças de modo ostensivo, ou seja, desenham os segmentos que identificam as duas peças em cada figura. Já J3 só decompõe a figura D, e J7 não decompõe as figuras nas duas peças de modo ostensivo.

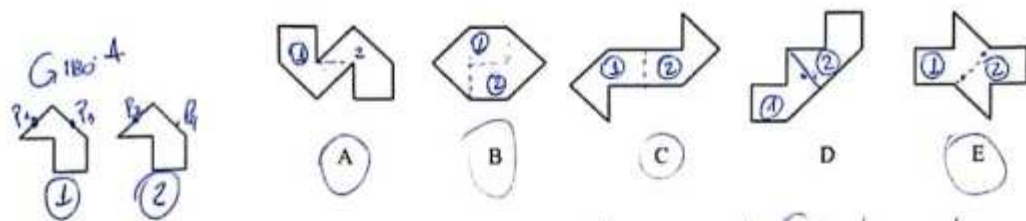
As figuras 56, 57, 58 e 59 ilustram as respostas de J3, J5, J7, J8, respectivamente:

Figura 55 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J3



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistado, 2020.

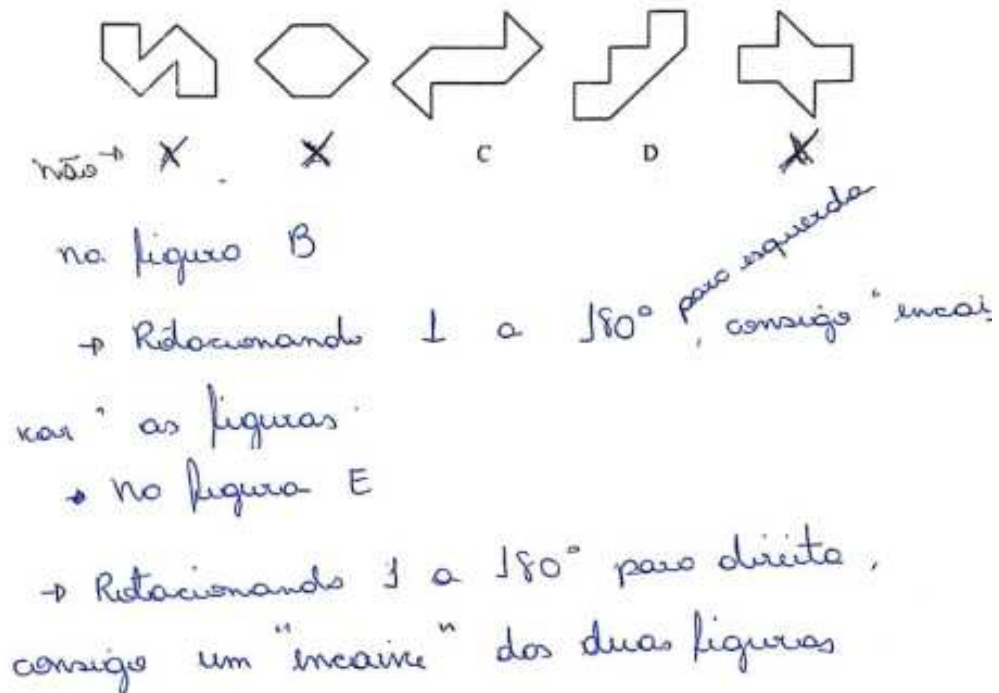
Figura 56 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J5



- A. Para obtermos a figura descrita na letra A basta girar a figura ① 180° para e encaixar na figura ②.
(No sentido anti-Horário).
- ⓑ Para obtermos a figura descrita na letra B, basta girar a figura ① em 90° (no sentido anti-Horário) e a figura ② (no sentido Horário) e unir a figuras como está traçado acima.
- ⓒ Basta, girar a figura ① 90° (no sentido anti-Horário) e a figura ② (no sentido Horário) e unir como está traçado acima.
- ⓓ Basta, girar as figura e unir os pontos P₁ e P₂ e irar formar a figura descrita na letra D.
- ⓔ Basta, girar as figura e unir os pontos B e P₁ e irar formar a figura descrita na letra E.

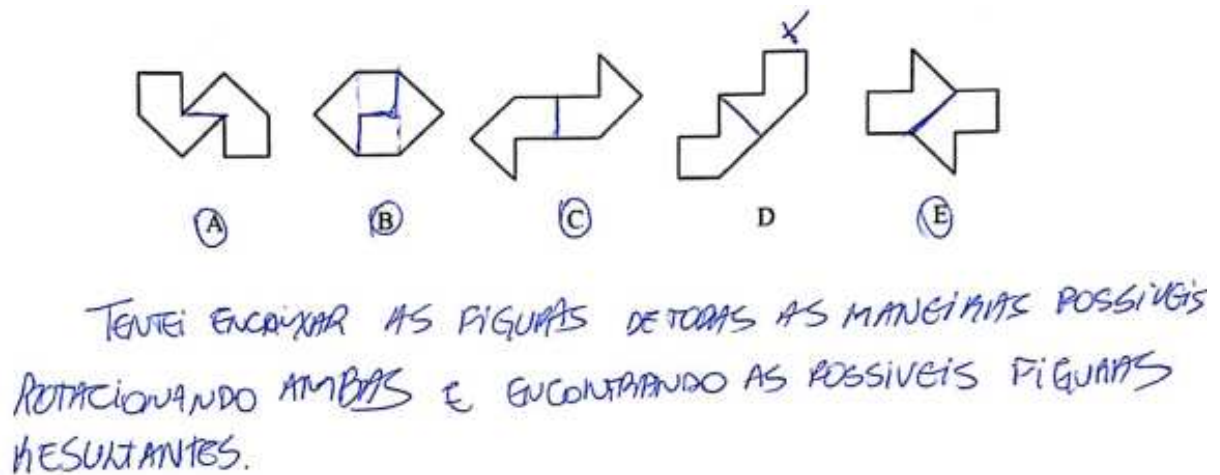
Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 57 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J7



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 58 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado J8



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

As produções orais dos entrevistados do GJ são coerentes com suas respostas escritas. Dentre os quatro integrantes que registram que somente a figura representada por D não poderia ser formada sem levantar pelo menos uma das peças da mesa, J6 não tinha escrito por extenso a justificativa para a resposta, mas a apresentou oralmente. Ele diz, por exemplo, que “*fez uma rotação de 180° para direita em uma das peças e encaixou na outra para formar a figura C*”. E diz ter feito o mesmo raciocínio para as outras figuras, variando o ângulo da rotação. Somente no caso da figura D que o entrevistado diz: “*a peça está espelhada, então não dá*”.

Pela observação notou-se que J2 e J8 fazem gestos com as mãos simulando a rotação das peças. Observou-se também que J1 olha para as figuras e tenta identificar as duas peças na formação de cada uma, como montando um quebra cabeças, verificando se é necessário tirar alguma peça da mesa. Essa estratégia é observada também nas resoluções de J2, J4, J5, J6 e J8, embora J2 e J5 não tenham percebido que no caso da figura representado por D é necessário inverter uma das peças.

Oralmente, em sua resposta, J2 comenta que “*levantar [a peça] seria inverter uma delas*”, diz que é possível formar todas as figuras e explica o raciocínio para cada uma usando “giro”, por exemplo, “*com meia volta forma C e três quartos de volta forma A*”. Diz também no caso da figura D: “eu inclino essa para cá e giro a outra”. Este entrevistado, embora entenda que não pode tirar as peças da mesa, não percebe que não há como “*inclin*ar” a peça e obter a figura D sem que haja a reflexão de uma dessas peças. O participante J5 fala que todas as figuras podem ser obtidas, deixa o reconhecimento da figura D por último, percebe-se que ele passou a se preocupar mais em dividir as figuras nas duas peças e isso tira seu foco em relação à restrição de não tirar nenhuma das peças da mesa.

Os entrevistados J3 e J7 identificam a impossibilidade da formação da figura representada por D, mas apresentam dificuldade em reconhecer a possibilidade de formação de outras figuras. Por exemplo, J3 diz identificar as duas peças nas figuras A, C e E, embora não trace os seguimentos de modo ostensivo (no papel), no caso da figura representada por D, diz: “*Na D teria que inverter uma delas*”, mas não comenta nada sobre a figura representada por B. Já J7 fala que B e E podem ser formadas e pensa em “*encaixar as peças ‘rotacionando-as’*”, e sobre a figura D, diz: “*eu tenho que levantar primeiro, mas não posso*”.

Pelos registros e a observação, pode-se notar que todos os entrevistados do GJ apresentam indícios de formação de imagem mental das peças utilizadas na formação das figuras dada no enunciado. Isso se evidencia pelo uso de gestos indicando a manipulação das peças (no caso de J2 e J8), pelas explicações orais e escritas de todos argumentando o uso da rotação (ou giro) para identificação da possibilidade de formação das figuras, assim como o encaixe das peças e a translação (citada por J7). Esses mesmos argumentos evidenciam também o uso das peças e figuras dadas no raciocínio de todos os entrevistados, que indica o uso de representações externas e também a produção delas no caso dos participantes que decompõe as figuras em duas peças de modo ostensivo (J1, J2, J4, J5, J6 e J8). Com respeito à ação de interpretação da figura, observa-se que quatro dos integrantes do GJ o fazem de modo satisfatório, os demais apresentam algumas dificuldades nesta ação.

Em relação às habilidades para a visualização, quatro dos integrantes do GJ dão indícios da mobilização das habilidades de discriminação visual (ao realizarem a comparação de figuras e peças identificando suas semelhanças e diferenças visualmente); percepção figura-fundo (ao reconhecerem as peças isolando-as de seu contexto em cada figura); constância perceptiva (ao reconhecerem que as peças mantêm certas propriedades, como sua forma ou tamanho, constantes mesmo que observadas de um ponto de vista diferente); percepção de relações espaciais (ao identificarem corretamente as características das relações entre as peças e figuras); de posições espaciais (ao relacionarem a posição de uma peça ou figura a outra) e de rotação mental (ao criarem imagens mentais dinâmicas na tentativa de formar as figuras utilizando as duas peças).

Já no caso dos quatro demais (J2, J3, J5 e J7), observa-se algumas dificuldades na mobilização de algumas dessas habilidades. No caso de J2 e J5, que respondem que a figura D pode ser formada nas condições do enunciado, infere-se, de acordo com Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), que há uma dificuldade no reconhecimento da simetria reflexiva presente na figura, pela confusão ao associá-la a um giro (sem notar que esse giro ocorre no espaço, e não no plano). Infere-se que isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual e/ou da percepção de posições espaciais.

No caso de J3, que identifica a possibilidade de formação das figuras representadas por A, C e E, a impossibilidade da formação da figura representada por D, só não identifica que a figura representada por B também pode ser construída segundo o enunciado. Pode-se inferir, segundo Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), que a forma da figura dificultou sua identificação. Infere-se que isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual.

A partir da dificuldade apresentada por J7 em identificar que as figuras representadas por A e C também podem ser formadas de acordo com o enunciado, infere-se, também pelo observado por Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), que o efeito óptico de ligeiro estreitamento, que é gerado ao unir as peças na formação da figura A, pode ter feito com que a percepção das duas peças que compõem A não seja igual àquelas dadas. Ou seja, infere-se que houve uma dificuldade na mobilização da conservação da percepção. E com respeito à figura representada por C, pelas justificativas escritas, o entrevistado aparenta ter uma ideia fixa sobre a possibilidade de rotação nessa tarefa, como movimentos possíveis somente rotações de 180° . Deste modo, infere-se que pode haver uma dificuldade por parte de J7 na mobilização da rotação mental.

Em relação à função heurística nesta tarefa, podemos inferir que esta foi empregada por quatro participantes do GJ, que em suas respostas apresentaram o reconhecimento das formas, as reconfigurações e o reconhecimento das figuras que poderiam ser formadas segundo o enunciado. Os quatro demais integrantes apresentaram dificuldades no emprego das funções que podem ser evidenciadas pelo exposto em relação às habilidades mobilizadas.

Pelas produções dos entrevistados do GJ, observa-se que o emprego da função discursiva para a justificação da resposta à tarefa ocorre, porém, observa-se muitas dificuldades em relação à formalização. As respostas são fortemente baseadas em argumentos intuitivos, e quando são utilizados conceitos matemáticos para a justificação, nota-se dificuldades na compreensão e emprego desses. Por exemplo, todos os integrantes do GJ utilizaram o termo ‘rotação’ em suas justificativas (alguns se referiram à rotação pela palavra “giro” ou a utilizaram como um verbo), alguns se referiram ao ângulo de rotação, e somente J5 especificou o sentido da rotação. Nota-se que a rotação não parece ser lembrada como uma transformação geométrica de um sistema de coordenadas, em que elementos como eixo e ângulo precisam ser considerados. O mesmo pode ser observado em relação ao emprego da translação (citado por J7).

Quanto à coordenação entre as funções heurística e discursiva, e com isso passagem de um registro de representação semiótico para outro, observa-se que esta ocorre, mas que as dificuldades no emprego das funções heurística e discursiva acarretam em dificuldades nas conversões entre os registros figural e língua natural, mesmo para os quatro integrantes, cujas respostas foram as esperadas.

As respostas de J1, J4, J6 e J8 foram consideradas matematicamente aceitáveis, embora não sejam elaboradas com base no formalismo matemático, por identificarem que a única figura que não pode ser formada de acordo com o enunciado é aquela representada pela letra D.

3.6.2 Análise da Tarefa 5 referente ao grupo I

Pelos registros escritos dos entrevistados, se pode notar pelas produções dos entrevistados do GI referentes à tarefa 5 que três integrantes, I1, I3 e I8, identificam que somente a figura representada pela letra D não pode ser formada segundo a hipótese do enunciado. As justificativas apresentadas são baseadas na utilização da translação e rotação das peças. Por exemplo, I1 escreve: “Ao transladar a peça e encaixar algumas de suas partes verifiquei que coincide com alguns desenhos acima”; I3 registra: “fui arrastando mentalmente as peças de acordo com o que as figuras indicam e vendo se era possível”; e I8 relata em sua produção

escrita: *“transladei e ‘rotacionei’ uma das peças tentando encaixá-la para obter as figuras A, B, C, E”*.

Os demais participantes apresentaram algumas dificuldades em reconhecer quais figuras poderiam ou não ser formadas segundo o enunciado. O entrevistado I6 respondeu que as cinco figuras poderiam ser formadas segundo o enunciado e justifica usando rotação e translação, e frisa: *“Sem levantar da mesa, apenas ‘rotacionando’ e ‘tranladando’ no plano da folha, é possível montar todas”*. Em sua resposta escrita, I2 não explica que A e E poderiam ser formadas e que somente D não poderia, segundo o enunciado, escreve: *“Transladei as duas figuras [peças], uma para cima e outra para baixo e cheguei na figura C. A mesma coisa para a imagem B”*.

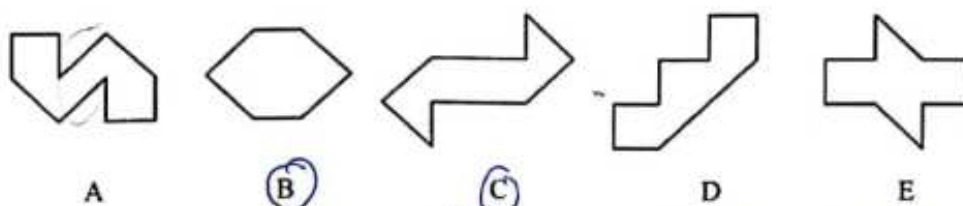
Observa-se na resposta escrita de I4 que identifica ser possível formar as figuras representadas por A, B e C e não é possível formar as figuras D e E, porém, não apresenta justificativa para a impossibilidade da formação das duas últimas figuras. I4 escreve: *“rotacionei as peças mentalmente e fui tentando fazer um encaixe entre elas para obter as figuras. Conclui que é possível montar as figuras A, B e C e não é possível montar as figuras D e E”*.

Também foi observado que I5 e I7 respondem por escrito que é possível formar três das cinco figuras e que não apresentam justificativa para a impossibilidade da formação das demais. O entrevistado I5 apresenta como resposta as figuras representadas por B, C e E, e I7 apresenta A, C e E. Eles justificam a formação das figuras do seguinte modo: I5: *“[...] pensamos nas peças que estão planejadas e não podemos levantá-las [...] e por eliminação obtive as respostas apresentadas”* e I7: *“Imaginei como eu poderia girar as peças para construir as figuras”*.

Observa-se que quatro dos entrevistados do GI (I4, I6, I7 e I8) utilizam a rotação como argumento em suas respostas escritas. Cinco integrantes do GI (I2, I3, I4, I5 e I8) não realiza a decomposição de todas as figuras nas duas peças de modo ostensivo, somente I6 o faz em relação a todas as figuras e dois integrantes do GI (I1 e I7) apresentam a decomposição de modo ostensivo das figuras representadas por A, C, D e E.

As Figuras 60, 61, 62, 63, 64 e 65 ilustram as respostas de I2, I3, I4, I5, I6 e I7, respectivamente:

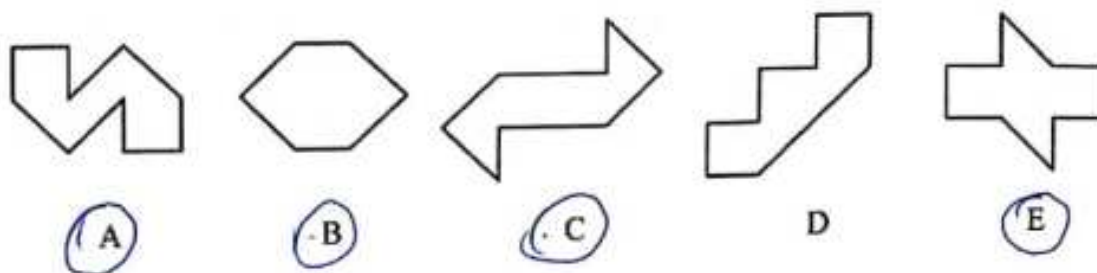
Figura 59 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I2



Transladei as duas figuras, uma para cima e outra para baixo e cheguei na figura C. A mesma coisa para a imagem B.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

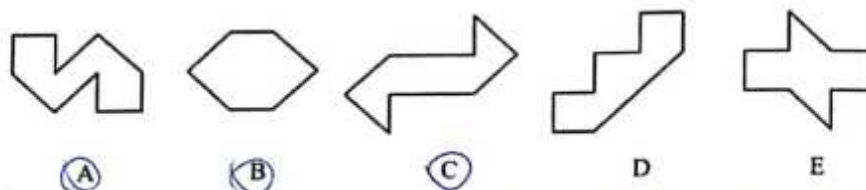
Figura 60 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I3



Fui ajustando mentalmente as figuras de acordo com que as figuras indicavam e vendo se era possível.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

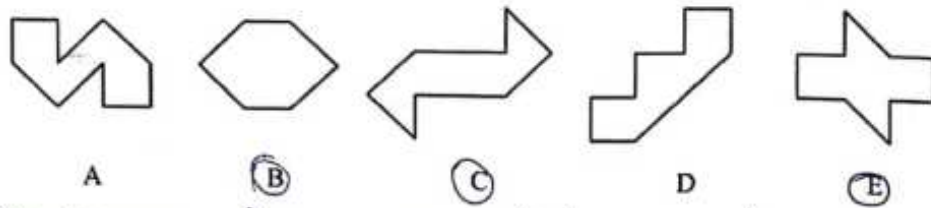
Figura 61 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I4



Eu rotacionei as duas peças (mentalmente) e fui tentando fazer um encaixe entre elas para obter as figuras. Concluí que é possível montar as figuras A, B, C e não é possível montar as figuras D e E.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

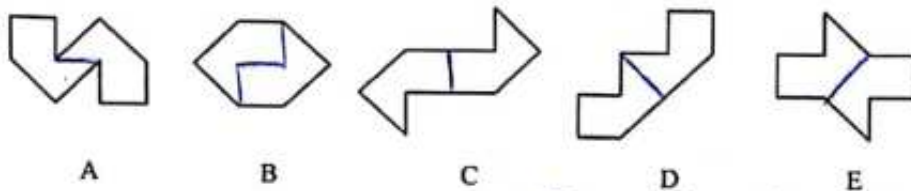
Figura 62 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I5



Ho imaginamos a figuras apresentadas e as duas peças que fazem propostas turnos como resposta as letras B, C, E, pois ao colocarmos nos peças que estão planificadas e não podemos levantar-las de sua plana obtemos as respectivas respostas. Como apresentado no desenho que fiz, pois imaginei os peças sendo movidas naquela direção, e por eliminação obtive as respostas apresentadas.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

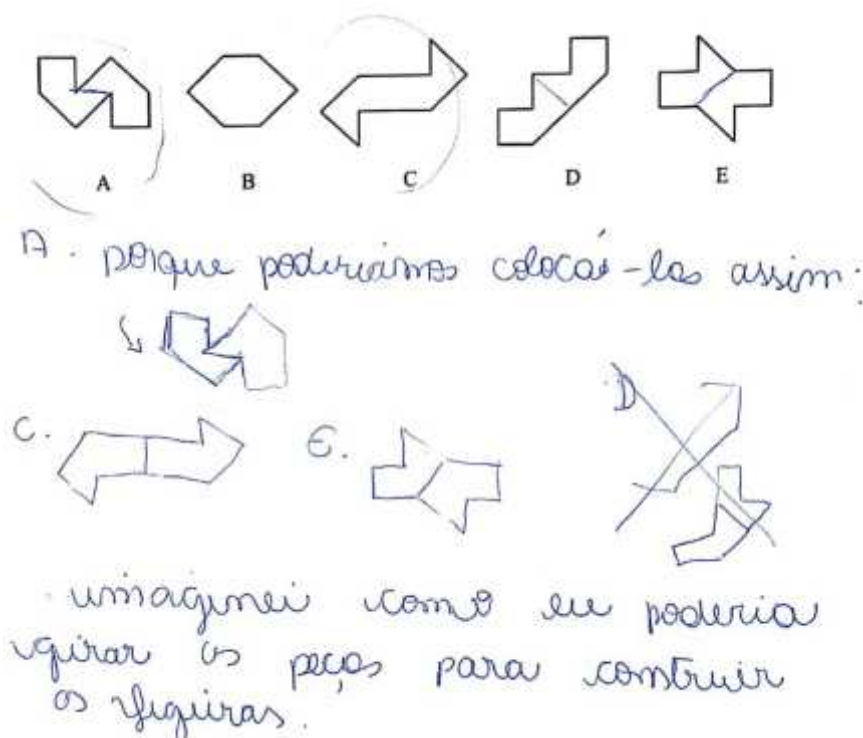
Figura 63 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I6



sem levantar da mesa, apenas rotacionando e trasladando no plano da folha, é possível montar todas as figuras acima.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 64 – Resolução da Tarefa 5 pelo entrevistado I7



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

As produções orais dos entrevistados do GI são coerentes com suas respostas escritas, algumas apenas complementam o que está escrito. Os participantes I1, I3 e I8 registram em suas produções escritas que somente a figura representada por D não poderia ser formada sem levantar pelo menos uma das peças da mesa. Em sua fala, I1 reforça a impossibilidade da formação da figura representada por D, dizendo: “*Essa não dá mesmo, tem que tirar da mesa*”. Os entrevistados I4, I5, I7 e I8 também frisam em suas falas que não teria como montar a figura D sem levantar uma das peças da mesa. No caso de I3, diz apenas: “*D acho que não, eu meio que arrastei, fui arrastando e montando de acordo com o que as figuras pareciam*”.

O entrevistado I2 fala com respeito à figura representada por A: “*Acho que não daria. Acho que essa parte aqui não daria*”, se referindo-se à parte mais estreita da figura A, quanto às demais, fala que é possível formar B e C, mas não explica o porquê não é possível formar as outras. O entrevistado I5 também não reconhece ser possível formar a figura representada por A, diz somente: “*Acho que essa não*”. O entrevistado I6 justifica oralmente o que pensou para formar cada peça, utilizando os termos ‘rotação’ e ‘translação’, em particular no caso da figura D, diz: “*fazendo uma rotação de 45° da primeira peça e de 180° da segunda*”, não percebendo que essa movimentação, se realizada no plano, não produz a figura em questão.

Oralmente, I7 evidencia sua estratégia: “*eu tô pegando a figura e vendo se eu consigo repartir ela nas duas peças*”, porém diz que além de não ser possível a formação da figura D, também não se pode formar a figura B segundo o enunciado. A estratégia de I8 é juntar as peças para a formação das figuras ao invés de partir das figuras para encontrar as peças, diz: “*Pensei em juntar essa parte com essa [os segmentos dos lados que formam um L] para formar B*”.

Pelos registros e a observação, pode-se notar que todos os entrevistados do GI, assim como os de GJ, apresentam indícios de formação de imagem mental das peças utilizadas na formação das figuras dada no enunciado. Isso se evidencia pelas explicações orais e escritas de todos argumentando, para identificação da possibilidade de formação das figuras, através dos termos: “*rotação ou giro*” (I2, I4, I6, I7, I8), “*translação*” (I1, I2, I6, I8), “*arrastando mentalmente*” (I3), “*pensando nas peças*” (I5). Esses mesmos argumentos evidenciam também o uso das peças e figuras dadas no raciocínio de todos os entrevistados, que indica o uso de representações externas e também a produção delas no caso dos participantes que decompõem as figuras em duas peças de modo ostensivo (I6 decompõe todas as figuras e I1 e I7 só não o fazem no caso da figura B). Com respeito à ação de interpretação da figura, observa-se que três integrantes do GI o fazem de modo satisfatório, os demais apresentam algumas dificuldades nessa ação.

Em relação às habilidades para a visualização, três entrevistados do GI dão indícios da mobilização das habilidades de discriminação visual (ao realizarem a comparação de figuras e peças, identificando suas semelhanças e diferenças visualmente); percepção figura-fundo (ao reconhecerem as peças isolando-as de seu contexto em cada figura); constância perceptiva (ao reconhecerem que as peças mantêm certas propriedades, como sua forma ou tamanho, constantes mesmo que observadas de um ponto de vista diferente); percepção de relações espaciais (ao identificarem corretamente as características das relações entre as peças e figuras); de posições espaciais (ao relacionarem a posição de uma peça ou figura a outra) e de rotação mental (ao criarem imagens mentais dinâmicas na tentativa de formar as figuras utilizando as duas peças).

Já no caso dos cinco demais (I2, I4, I5, I6 e I7), observa-se alguma dificuldade na mobilização de algumas dessas habilidades.

O entrevistado I2 apresenta dificuldade no reconhecimento da possibilidade de formar as figuras A e E. Assim, se pode inferir que há evidência de dificuldade na mobilização da rotação mental e/ou da discriminação visual, já que ele não consegue reconhecer a possibilidade de formar a figura E. Observa-se também I2 circula o encontro das peças na figura A, o que leva a crer que o efeito óptico de ligeiro estreitamento gerado na união das peças que formam

a figura representada por A, citado por Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), pode tê-lo levado à percepção de que as duas peças que compõem A não sejam iguais àquelas dadas, o que caracteriza dificuldade na mobilização da habilidade de conservação da percepção. O participante também não justifica a impossibilidade da formação da figura D, o que leva a inferir que também não reconheceu a simetria reflexiva na figura, e isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual e/ou da percepção de posições espaciais, condição também observada no caso de I6.

No caso de I6, que responde que a figura D pode ser formada nas condições do enunciado, infere-se, assim como no caso de I2, de acordo com Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), que há uma dificuldade no reconhecimento da simetria reflexiva presente na figura, pela confusão ao associá-la à um giro (sem notar que esse giro ocorre no espaço e não no plano). Infere-se que isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual e/ou da percepção de posições espaciais.

Observa-se na resposta de I4 dificuldades relacionadas à formação das figuras representadas por D e E. Assim pode-se inferir que há evidência de dificuldade na mobilização da rotação mental e/ou da discriminação visual, já que ele não consegue reconhecer a possibilidade de formar a figura E. Por não justifica a impossibilidade da formação da figura D, infere-se que também não reconheceu a simetria reflexiva na figura, o que pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual e/ou da percepção de posições espaciais.

Nota-se que I5 não considera possível formar as figuras A e D segundo o enunciado, ou seja, assim como I2, o efeito óptico de ligeiro estreitamento gerado na união das peças que formam a figura A pode ter levado à percepção de que as duas peças que compõem A não serem iguais àquelas dadas, o que caracteriza dificuldade na mobilização da habilidade de conservação da percepção. Por fim, a dificuldade de I7 em reconhecer a possibilidade da formação da figura representada por B pode ter relação com a forma da figura B, como observado em Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018). Assim, infere-se que isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual.

Em relação à função heurística nesta tarefa, podemos inferir que esta foi empregada por três participantes do GI que, em suas respostas, apresentaram o reconhecimento das formas, as reconfigurações e o reconhecimento das figuras que poderiam ser formadas segundo o enunciado. Os demais integrantes apresentaram dificuldades no emprego da função, que podem ser evidenciadas pelo exposto em relação às habilidades mobilizadas.

Pelas produções dos entrevistados do GI observa-se, assim como no caso do GJ, que o emprego da função discursiva para a justificação da resposta à tarefa ocorre, porém se observa

muitas dificuldades em relação à formalização. As respostas são fortemente baseadas em argumentos intuitivos, e quando são utilizados conceitos matemáticos para a justificação, nota-se dificuldades na compreensão e emprego desses. Assim como os integrantes do GJ, os membros do GI utilizaram o termo ‘rotação’ em suas justificativas, alguns se referiram à rotação pela palavra ‘giro’ ou a utilizaram como um verbo, e alguns se referiram ao ângulo de rotação. Nota-se que para os entrevistados do GI, também, a rotação não parece ser lembrada como uma transformação geométrica de um sistema de coordenadas em que elementos como eixo e ângulo precisam ser considerados. O mesmo pode ser observado em relação ao emprego da translação.

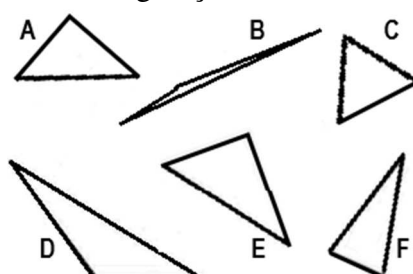
Quanto à coordenação entre as funções heurística e discursiva, e com isso passagem de um registro de representação semiótico para outro, do mesmo modo observado no GJ, nota-se que esta ocorre no caso do GI, mas que as dificuldades no emprego das funções heurística e discursiva acarretam dificuldades nas conversões entre os registros figural e língua natural, mesmo para os três integrantes, cujas respostas foram as esperadas.

As respostas de I1, I3 e I8 foram consideradas matematicamente aceitáveis, por identificarem que a única figura que não pode ser formada de acordo com o enunciado é a representada pela letra D, embora não sejam elaboradas com base no formalismo matemático.

3.7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA TAREFA 6

Na Tarefa 6 é dada uma figura inicial com vários triângulos (Figura 66) e pede-se: **a.** que sejam identificados os triângulos que podem ser considerados triângulos retângulos e **b.** que sejam identificadas as modificações que ocorreram na figura nova (apresentada posteriormente pela entrevistadora):

Figura 65 – Configuração inicial de triângulos



Fonte: A autora, 2018.

3.7.1 Análise da Tarefa 6 referente ao grupo J

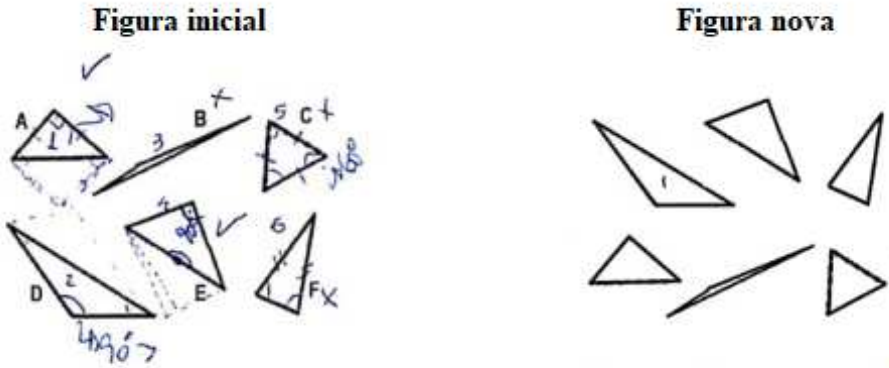
Pelas produções escritas dos entrevistados do GJ referentes à Tarefa 6, observa-se que sete deles identificaram que os triângulos representados pelas letras A e E podem ser considerados como representações de um triângulo retângulo. Todos os integrantes do GJ reconheceram as modificações que ocorreram na figura nova (apresentada após a retirada da figura inicial).

Observa-se que os participantes J1, J2, J3, J4, J5, J6 e J8 identificam, através do uso de um pequeno quadrado desenhado na figura inicial nos triângulos representados pelas letras A e E, a posição dos ângulos retos de modo ostensivo. Poucos apresentaram justificativa, que em sua maioria, são breves e baseadas na identificação do ângulo reto. Como por exemplo, J1 escreve: “*O triângulo A creio que seja pelo ângulo \hat{D} que aparenta ser de 90° e no triângulo E seria o ângulo $\hat{A} = 90^\circ$ ”.* J3 escreve como justificativa: “*Considerarei os ângulos retos, levando em consideração retas perpendiculares entre si*”. Em sua resposta escrita, J7 diz: “*o triângulo E parece ser um triângulo retângulo*”, e argumenta: “*Esta suposição ficou mais forte quando girei a folha da questão*”, o que indica que seu argumento está baseado na percepção e na ideia de que um triângulo retângulo tem o ângulo reto formado entre os lados e que um desses lados adjacentes está na horizontal (em relação à folha).

Somente J8 descreve os triângulos representados pelas letras A, B, C, D e E por seus nomes relativos a seus lados e ângulos e levando em consideração a propriedade de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180° . Por exemplo, J8 escreve em relação ao triângulo A: “*A: aparentemente é um triângulo isósceles, porém pode ser retângulo*”, em relação a B, escreve: “*não é triângulo retângulo, pois possui um ângulo obtuso, isto é, maior que 90° e por consequência disso não podemos ter outro ângulo de 90° , por que assim a somas dos ângulos internos do triângulo seria maior que 180°* ”.

As figuras 67, 68 e 69 apresentam as respostas escritas à Tarefa 6, dadas pelos entrevistados J5, J7 e J8:

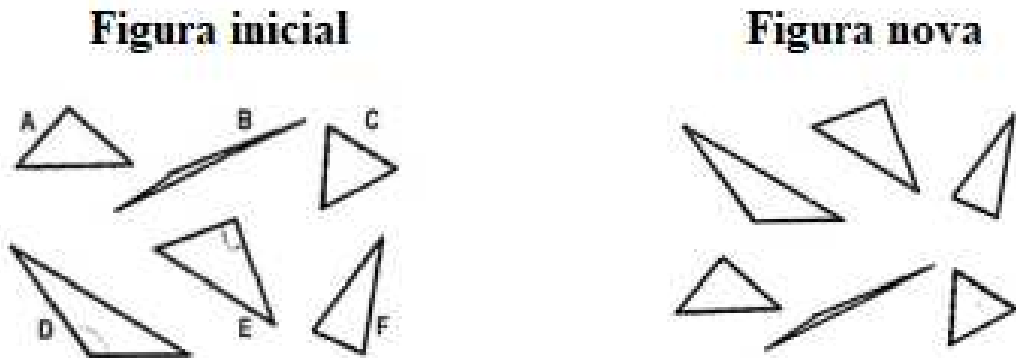
Figura 66 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado J5



Pode-se observar que as figuras foram trocadas de posição, a figura 1 com a 2, a figura 3 com 4 e a figura 5 com 6.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 67 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado J7

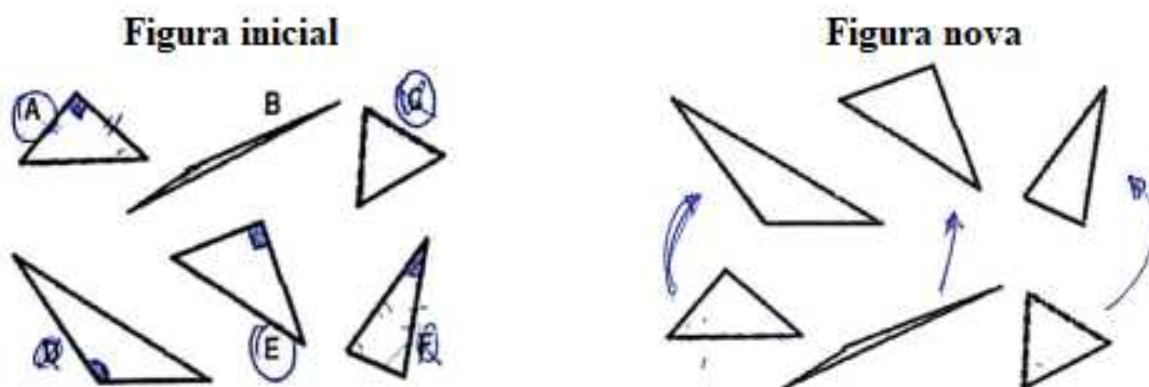


a) Em um primeiro momento olhando todos os ~~triângulos~~ triângulos, o que parecia ser um triângulo retângulo A e E. Esta suposição ficou mais forte quando girei o folho da questão.

b) Foram trocadas linhas de ABC com as de DEF.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 68 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado J8



- a)
- A: ~~é~~ aparentemente é um triângulo isósceles, porém pode ser retângulo.
- B: Não é triângulo retângulo pois possui um ângulo obtuso isto é, maior que 90° e por consequência disso não podemos ter outro ângulo de 90° , porque assim a soma dos ângulos internos do triângulo seria maior que 180° .
- C: todos os ângulos, aparentemente, são menores que 90° , assim o torna um triângulo acutângulo.
- D: não é triângulo retângulo pelo mesmo motivo do item B.
- E: Pode ser que seja um triângulo retângulo.
- b) As figuras A, B e C, trocaram de lugar com as figuras D, E e F, respectivamente.

Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Nas respostas orais dos entrevistados do GJ, observamos que todos identificam como um triângulo retângulo àquele triângulo em que um dos ângulos internos é reto. Observou-se também que durante o raciocínio, J1, J2, J5 e J7 giram a folha contendo a figura dada, buscando observar os triângulos de modo que fiquem com “base horizontal”. Nota-se que as respostas orais de J1, J2, J4 e J8 estão em conformidade com as produções escritas. Os entrevistados J3, J5, J6 e J7, em suas falas, argumentam mais sobre suas escolhas.

O participante J3 se refere aos triângulos pelas nomenclaturas relativas aos seus lados, por exemplo, diz: “*Este aqui é um triângulo isósceles*”, se referindo ao triângulo representado por F; “*Esse é escaleno*” se referindo a B. O participante J5 explicita sua estratégia, que consiste em completar os triângulos para formar um quadrilátero e verificar se o quadrilátero é um retângulo ou um quadrado, diz: “*O E seria, por que se eu prolongar esse segmento e esse, a diagonal do meu quadrilátero seria a hipotenusa*”. Em sua fala, J6 descreve os triângulos pelas nomenclaturas relativas aos lados e ângulos, e utiliza a propriedade da soma dos ângulos internos ser 180° , diz: “*Esse é obtusângulo*”, referindo-se a B e a D, “*Esse aqui parece ter dois ângulos iguais de 45° e aí o outro é 90°* ”, referindo-se a A. Em sua fala, J7 também cita as nomenclaturas relativas aos lados e ângulos, diz: “*esse parece obtusângulo*”, falando de B e D, “*esse é isósceles*”, mostrando F e A e “*esse é equilátero*”, se referindo a C. O que leva a inferir que para esse participante, um triângulo isósceles não pode ter um dos ângulos retos.

Nota-se nas produções dos entrevistados e pelas observações realizadas que os integrantes do GJ apresentam indícios de formação de imagem mental na resolução da Tarefa 6, visto que todos reconheceram as mudanças ocorridas na figura nova comparando-a com a figura inicial que já não estava mais disponível. Além disso, o conceito de triângulo e de triângulo retângulo apresentado por todos está muito relacionado à imagem do conceito, visto que quatro dos integrantes do GJ buscam girar a folha no intuito de observar os triângulos com “base horizontal” ou com o ângulo reto na “base do triângulo”, o que sabemos ser uma imagem conceitual errônea, por não representar de modo preciso o conceito matemático.

Observa-se o uso da figura dada nas respostas para a identificação dos triângulos retângulos por parte de todos os entrevistados do GJ. Nota-se também que os participantes J1, J2, J3, J4, J5, J6 e J8 identificam na figura inicial dada a posição dos ângulos retos desenhando um pequeno quadrado na posição do ângulo reto. J7 também desenha o símbolo representando o ângulo nos triângulos representados por D e E, e J5 desenha segmentos completando os triângulos retângulo para formar quadriláteros.

Nota-se a utilização da ação de interpretação da figura dada na identificação dos triângulos retângulos por parte de todos os integrantes do GJ, embora um deles tenha apresentado dificuldade no reconhecimento do triângulo representado pela letra A como possível.

Em relação às habilidades para a visualização, nota-se que sete integrantes do GJ (J1, J2, J3, J4, J5, J6, e J8) mobilizaram as habilidade de memória visual, percepção de posição espacial e discriminação visual, identificando A e E como possíveis triângulos retângulos e a posição que os triângulos ocupavam quando apresentada a nova figura e suprimida a inicial.

Visto que se lembraram, além da posição dos triângulos em relação à figura inicial, mas também as características visuais dos triângulos retângulos. Também relacionaram a posição dos triângulos entre si, identificaram corretamente as características das relações entre os triângulos e compararam os vários triângulos, identificando semelhanças e diferenças visualmente. Como o participante J7 não reconheceu o triângulo A como possível triângulo retângulo, infere-se que pode ter havido dificuldade na mobilização de algumas dessas habilidades. Infere-se também que a mobilização da habilidade de memória visual ocorreu nos integrantes J2, J3, J5, J6, J7 e J8 ao lembrarem de pelo menos algumas das características visuais dos triângulos isósceles, equilátero, escaleno, acutângulo e obtusângulo.

Pelo exposto, infere-se que o emprego da função heurística nesta tarefa ocorreu satisfatoriamente em sete dos entrevistados do GJ. Visto que eles mobilizam as habilidades para visualização, mostram reconhecer os triângulos retângulos, unidades figurais como segmentos perpendiculares, ângulos de medidas variadas e identificar as mudanças ocorridas na nova figura em relação à inicial. Só no caso de J7 infere-se que pode ter havido dificuldade no emprego dessa função pelo descrito no parágrafo anterior.

Quanto ao emprego da função discursiva para a justificação e formalização da resposta à tarefa, pode-se inferir que todos a utilizaram para responder a tarefa. Observa-se dificuldade na formalização matemática das justificativas, de modo geral. Os argumentos apresentados, principalmente por J1 e J4 são perceptivos e intuitivos. O participante J5 apresenta dificuldade em formalizar e escrever a justificativa apresentada oralmente. E embora os entrevistados J2, J3, J5, J6, J7 e J8 utilizarem argumentos relacionados a conceitos matemáticos como os de triângulos isósceles, equilátero, escaleno, acutângulo e obtusângulo, a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo serem 180° , pode-se inferir que suas respostas estão relacionadas mais às características visuais internalizadas dos conceitos (a imagem do conceito, abordada por Gutiérrez (1996b)).

Nota-se nas respostas nos integrantes do GJ a coordenação entre as funções heurística e discursiva e a conversões entre os registros figurais e língua natural ao responderem a tarefa. Porém, infere-se que há dificuldades nesse processo por conta de dificuldades em relação ao emprego das funções heurística por J7 e discursiva por parte de todos os membros do GJ, ou seja, nota-se que é necessário melhor trabalhar essas funções com os participantes para um resultado mais efetivo nas conversões.

Pelas respostas apresentadas, considerou-se na categoria de respostas matematicamente aceitáveis aquelas cujos participantes identificaram os triângulos representados por A e E como possíveis representações de um triângulo retângulo e identificaram as mudanças realizadas na

nova reconfiguração. Sendo assim, as respostas dos sete integrantes (J1, J2, J3, J4, J5, J6 e J8) foram consideradas respostas matematicamente aceitáveis, embora apresentem dificuldades na formalização, e apenas a resposta de J7 foi considerada matematicamente não aceitável.

3.7.2 Análise da Tarefa 6 referente ao grupo I

Pelas produções escritas dos entrevistados do GI referentes à Tarefa 6, observa-se que três deles identificaram, no item **a**, que os triângulos representados pelas letras A e E podem ser considerados como representações de um triângulo retângulo e, no item **b**, reconheceram as modificações que ocorreram na figura nova (apresentada após a retirada da figura inicial). Em relação aos cinco demais integrantes do grupo, dois (I3 e I4) apresentaram dificuldade em relação ao item **a** e os outros três (I2, I7 e I8) apresentaram dificuldade em relação aos dois itens. Nota-se que I1, I5, I6 e I7 identificam de modo ostensivo, com um pequeno quadrado, os ângulos retos e I1 completa os triângulos representados por A e E para formar um quadrilátero fazendo tracejados na figura.

Com respeito ao item **a**, observa-se que o participante I1 também cita a propriedade da soma dos ângulos internos de um quadrilátero ser 360° , mostra que observa também retas concorrentes e a forma das figuras. O que é evidenciado em sua escrita pela justificativa: *“Por as retas serem concorrentes, pelo formato visual do triângulo, se completarmos com outro triângulo, formaria um retângulo (quadrilátero), assim a soma dos ângulos internos são 360° , tem dos ângulos serem de 90° ”*. O entrevistado I5 utiliza como estratégia a exclusão, explicando as características dos triângulos B, C, D e F que os impossibilita de serem triângulos retângulos. Por exemplo, escreve: *“[...] B tem dois ângulos ‘pequenos’ e o que resta não dá um ângulo de 90° . [...] C tem todos os ângulos iguais, excluindo assim a possibilidade de ser triângulo retângulo [...]”*. Em sua resposta ao item **a**, I6 escreve que aparentemente os triângulos retângulos são A e E.

Na produção escrita de I3, observa-se somente que o triângulo E está circulado, indicando que é um triângulo retângulo solicitado no item **a**, e escreve *“os triângulos B e E trocaram de lugar”*, se referindo corretamente à resposta do item **b**. Já I4 escreve que nenhum dos triângulos é um triângulo retângulo e responde corretamente ao item **b**, identificando a mudança ocorrida.

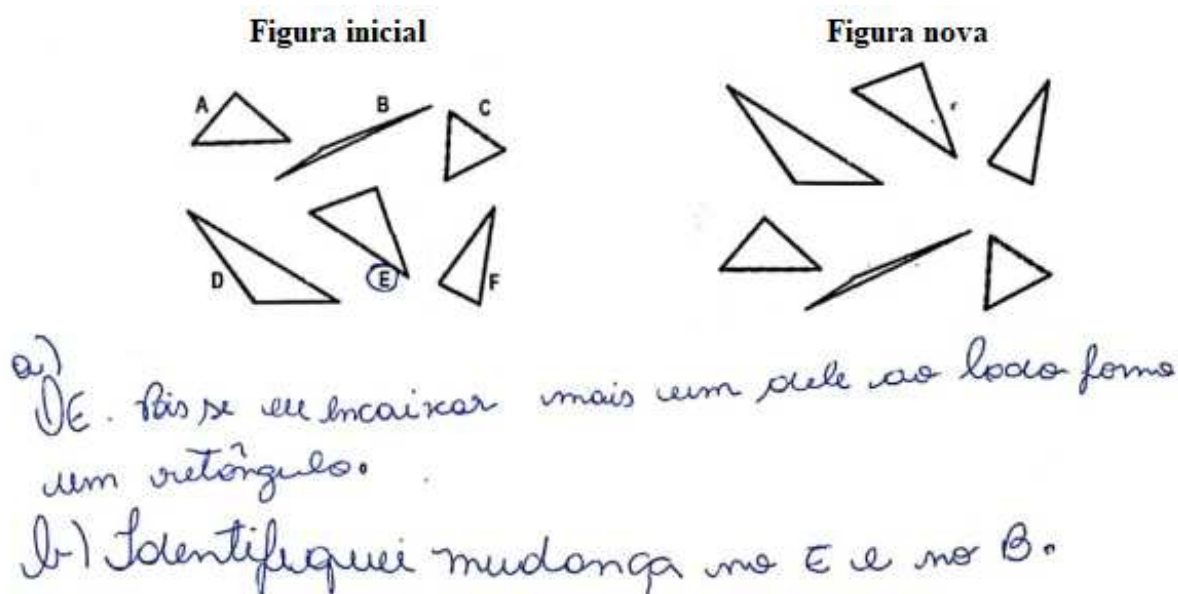
Em sua produção escrita, I2 responde no item **a** que o triângulo retângulo é o E, e escreve: *“Pois se eu encaixar mais um dele ao lado forma um retângulo”* e no item **b**, identifica mudança na posição dos triângulos E e B, porém na figura nova apresentada ao entrevistado a

mudança realizada foi a inversão das linhas referentes à posição dos triângulos, ou seja, foram trocadas as posições de A com D, de B com E e de C com F, não só a posição de B e E.

O participante I7 identifica no item **a** A, E e F como possíveis triângulos retângulos, justifica escrevendo: “*Imaginando elas, girando-as de outra forma, por visualização, localiza o ângulo reto*” e no caso do item **b**, escreve que C e F mudaram de posição, enquanto a mudança ocorrida foi apenas em relação ao triângulo F, que foi trocado pelo seu simétrico em relação ao eixo vertical. Já I8 apresentou como justificativa em relação ao item **a** a frase: “*Usei a tampa da caneta como comparação e no item b*”, escreve que ocorreram modificações na rotação e translação dos triângulos, sendo que a mudança ocorrida foi a troca do triângulo F pelo seu simétrico em relação ao eixo vertical.

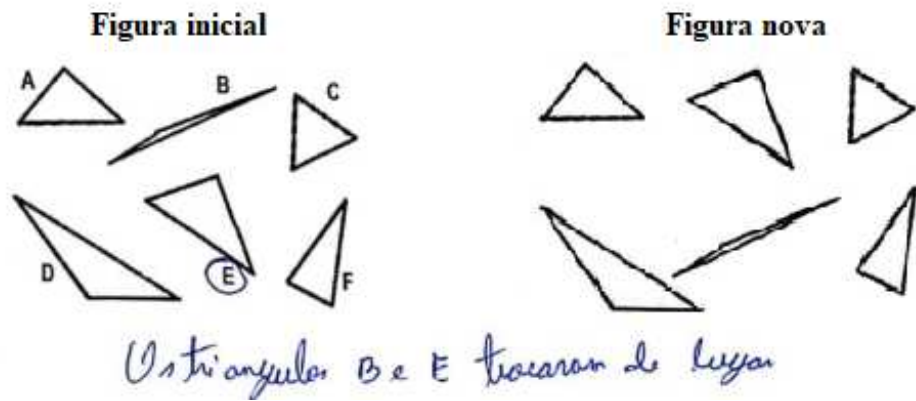
As Figuras 70, 71, 72, 73, 74 e 75 apresentam, respectivamente, as respostas escritas à Tarefa 6, dadas pelos entrevistados I2, I3, I4, I5, I7 e I8:

Figura 69 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I2



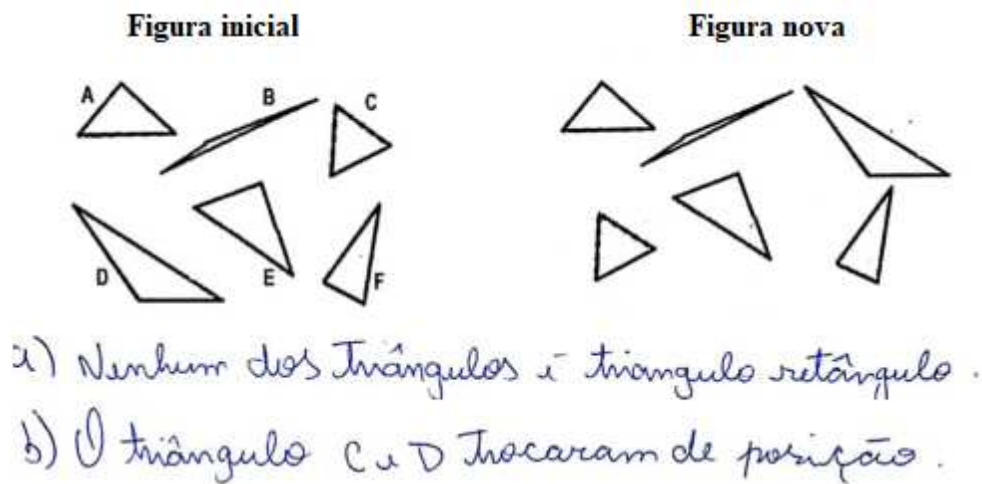
Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 70 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I3



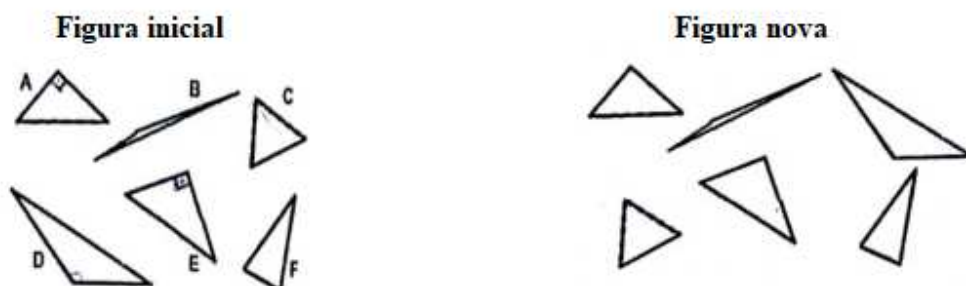
Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 71 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I4



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

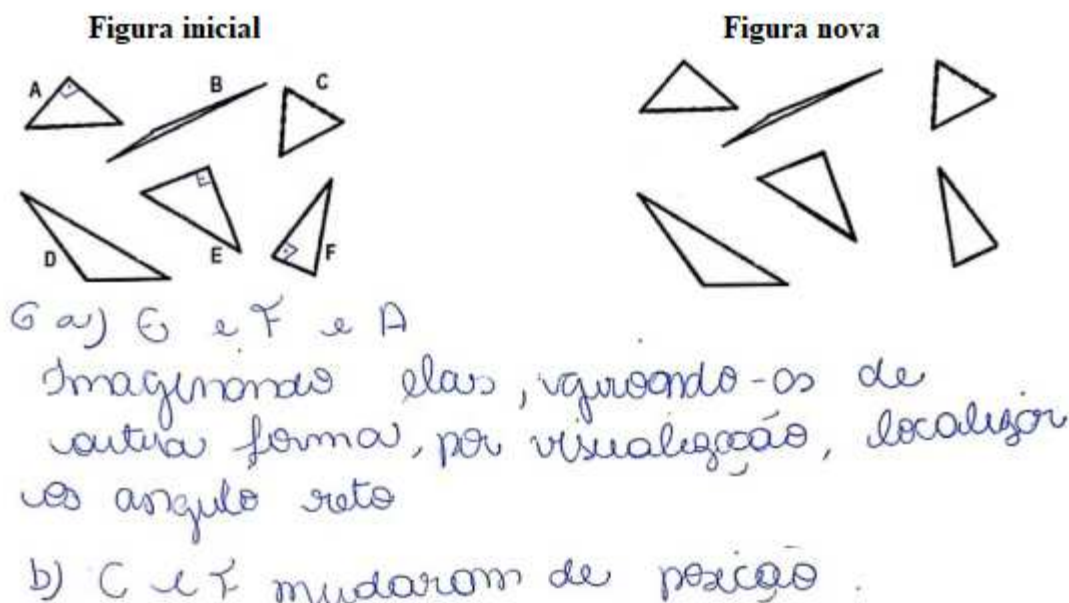
Figura 72 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I5



- a- Por exclusão temos que os triângulos B, C, D, F não são retângulos pois, o triângulo B tem dois ângulos "pequenos" e o que sobra não dá um ângulo de 90° .
 É o triângulo C tem todos os seus ângulos iguais, excluindo assim a possibilidade de ser triângulo retângulo.
 O triângulo D tem um ângulo obtuso, desse modo não pode ser um triângulo retângulo.
 E por último o triângulo F tem dois de seus ângulos iguais e o ângulo que sobra não é de 90° .
 Desse modo, os triângulos retângulos são A e E.
- b- Ao momento que a pesquisadora me apresentou a outra figura pude notar que os triângulos C e D mudaram de posição e os outros continuaram no mesmo local.

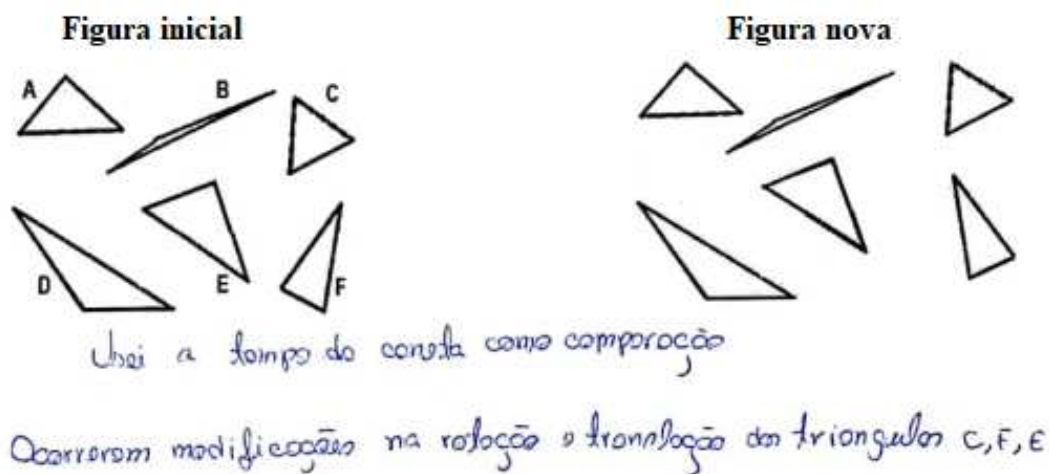
Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 73 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I7



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Figura 74 – Resolução da Tarefa 6 pelo entrevistado I8



Fonte: A autora, com base nas produções escritas dos entrevistados, 2020.

Nas respostas orais dos entrevistados do GI, observamos que sete deles identificam como um triângulo retângulo um triângulo quando um dos ângulos internos é reto, somente I2 relata não lembrar da definição, diz que identifica um triângulo retângulo fazendo um retângulo, fala: “é pegar um retângulo e traçar a diagonal e separar”. Observou-se também que, durante o raciocínio, I7 e I8 giram a folha contendo a figura dada buscando observar os triângulos, de modo que fiquem com “base horizontal”. Nota-se que as respostas orais de I1, I2, I3, I4 e I7

estão em conformidade com as produções escritas. Os entrevistados I5, I6 e I8, em suas falas, argumentam mais sobre suas escolhas.

O participante I5 apresenta uma descrição dos triângulos da figura inicial, baseada na percepção e intuição. Em relação ao triângulo representado pela letra C, diz: *“Esse aqui aparentemente tem todos os ângulos iguais”*, em relação ao D, fala: *“Esse aqui não é, porque o ângulo é mais aberto”*, fala do B: *“esse aqui acho que não porque está muito fechadinho”* e assim por diante.

Os argumentos utilizados por I6 abordam nomenclaturas relativa aos lados dos triângulos, a propriedades de que os ângulos internos de um triângulo equilátero são de 60° , mas ainda fortemente pautados na percepção. Por exemplo, diz para justificar que C não é um triângulo retângulo: *“No caso do C, parece um triângulo equilátero e os ângulos internos são 60° ”*, em relação ao, F fala: *“Fiquei na dúvida, parece um triângulo isósceles, aí não tem ângulo de 90° ”*. Em sua fala, observa-se indícios de que apresenta dificuldade em reconhecer que um triângulo isósceles pode ser também um triângulo retângulo.

O entrevistado I8, em sua fala, deixa claro que os triângulos retângulos são aqueles representados pelas letras A e E, diz: *“Explicar isso é bem estranho!”*, justifica dizendo que usa a tampa da caneta para prolongar os segmentos e identificar os ângulos de 90° , e fala: *“Os ângulos de 90° estão aqui”*, se referindo ao local dos ângulos nos triângulos A e E da figura dada. O que nos leva a inferir que ele completa os triângulos para verificar se formará quadrados ou retângulos. Observa-se que I8 não faz o prolongamento de modo ostensivo, ou seja, cria a imagem em sua mente.

Observa-se que no caso do GI, os argumentos predominantes são mais simples, intuitivos e perceptivos do que os utilizados pelos integrantes do GJ. Não há referência à nomenclatura relativa aos ângulos dos triângulos nem à triângulos escalenos ou à propriedade referente à soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° , embora um participante cite a soma dos ângulos internos de um quadrilátero como 360° .

Nota-se nas produções dos entrevistados e pelas observações realizadas que os integrantes do GI, assim como os do GJ, apresentam indícios de formação de imagem mental na resolução em questão. Sete integrantes do GI apresentam oralmente o conceito de triângulo retângulo que está muito relacionado à imagem do conceito, evidenciado pelo fato de que dois dos integrantes do GI buscam girar a folha no intuito de observar os triângulos com “base horizontal”. Cinco integrantes (I1, I3, I4, I5 e I6) reconheceram as mudanças ocorridas na figura nova, comparando-a com a figura inicial que já não estava mais disponível. Alguns dos entrevistados também utilizam termos que evidenciam tal produção, por exemplo, completar

ou prolongar segmentos (I1, I8), encaixar (I2), imaginando e girando (I7), completar o triângulo para formar um quadrilátero de modo não-ostensivo (I8).

Observa-se o uso da figura dada nas respostas para a identificação dos triângulos retângulos e das mudanças na figura nova por parte de todos os entrevistados do GI, embora alguns tenham apresentado dificuldade nas identificações. Nota-se também que os participantes I1, I5, I6 e I7 identificam na figura inicial dada a posição dos ângulos retos desenhando um pequeno quadrado na posição do ângulo reto, I1 também desenha segmentos completando os triângulos retângulo para formar quadriláteros.

Nota-se a utilização da ação de interpretação da figura dada por três integrantes do GI na identificação dos triângulos retângulos e no reconhecimento das mudanças na figura nova, os cinco demais entrevistados apresentaram dificuldades na interpretação da figura para responder de modo satisfatório a tarefa.

Em relação às habilidades para a visualização, nota-se que três integrantes do GI (I1, I5 e I6) mobilizaram as habilidades de memória visual, percepção de posição espacial e discriminação visual, identificando A e E como possíveis triângulos retângulos e a posição que os triângulos ocupavam quando apresentada a nova figura e suprimida a inicial. Visto que se lembraram, além da posição dos triângulos em relação à figura inicial, mas também as características visuais dos triângulos retângulos. Também relacionaram a posição dos triângulos entre si, identificaram corretamente as características das relações entre os triângulos e compararam os vários triângulos identificando semelhanças e diferenças visualmente.

Pode-se inferir que os cinco demais integrantes do grupo apresentam dificuldade na mobilização de uma ou mais destas habilidades: da memória visual, percepção de posição espacial e discriminação visual. No caso de I3 e I4 por apresentarem dificuldade em relação ao item **a**, visto que não reconheceram que A e E são representações de triângulos retângulos, no caso de I8 pela dificuldade em relação ao item **b**, visto que não lembrou da posição dos triângulos da figura inicial e não reconheceu as mudanças ocorridas na nova figura, e no caso dos entrevistados I2 e I7, que apresentaram dificuldade em relação aos dois itens.

Pelo exposto, infere-se que o emprego da função heurística nesta tarefa ocorreu satisfatoriamente em três dos entrevistados do GI, visto que eles mobilizaram as habilidades para visualização, mostraram reconhecer os triângulos retângulo, unidades figurais como segmentos perpendiculares, ângulos de medidas variadas e identificar as mudanças ocorridas na nova figura em relação à inicial. Sobre os cinco demais, infere-se que pode ter havido dificuldade no emprego desta função pelo descrito no parágrafo anterior.

Quanto ao emprego da função discursiva para a justificação e formalização da resposta à tarefa, pode-se inferir que todos a utilizaram, visto que não há tarefa em branco. Porém, observa-se dificuldade na formalização matemática das justificativas, ainda maior que a observada nas respostas do GJ. Os argumentos apresentados são, em sua maioria, perceptivos e intuitivos. Os participantes apresentam dificuldade em formalizar e escrever a justificativa. Embora alguns utilizem argumentos relacionados a conceitos matemáticos como os de triângulos isósceles, equilátero, a propriedade da soma dos ângulos internos de um quadrilátero serem 360° , pode-se inferir que suas respostas estão relacionadas mais às características visuais internalizadas dos conceitos (a imagem do conceito, abordada por Gutiérrez (1996b)).

Assim como no caso do GJ, nota-se nas respostas dos integrantes do GI a coordenação entre as funções heurística e discursiva e nas conversões entre os registros figural e língua natural ao responderem a tarefa. Porém, infere-se que há dificuldades ainda maiores nesse processo por parte dos integrantes do GI, pelas dificuldades em relação ao emprego das funções heurística e discursiva por parte de todos os membros do grupo, ou seja, nota-se que é necessário trabalhar melhor essas funções com os participantes para um resultado mais efetivo nas conversões.

Pelas respostas apresentadas considerou-se na categoria de respostas matematicamente aceitáveis aquelas, cujos participantes identificaram os triângulos representados por A e E como possíveis representações de um triângulo retângulo e identificaram as mudanças realizadas na nova reconfiguração. Sendo assim, as respostas dos três integrantes, I1, I5 e I6 foram consideradas respostas matematicamente aceitáveis, embora apresentem dificuldades na formalização, e as respostas de I2, I3, I4, I7 e I8 foram consideradas matematicamente não-aceitáveis.

4. DISCUSSÕES

Como apresentado anteriormente, a análise das produções escritas e orais dos entrevistados ao responderem a tarefa foi organizada em três blocos. Este capítulo apresenta uma discussão acerca da categorização referente a cada bloco analisado envolvendo as análises realizadas nas seis tarefas investigadas e traz considerações sobre as análises.

4.1 DISCUSSÃO ACERCA DAS CATEGORIAS ANALISADAS NO BLOCO 1

O Bloco 1 refere-se à análise cognitiva, pela verificação da mobilização e a coordenação dos quatro elementos que compõem a Visualização segundo Gutiérrez (1996a). A seguir, encontram-se as considerações relativas às análises da produção de imagens mentais, uso de representações externas, emprego das ações de interpretação de informação e da mobilização de habilidades para a visualização nas seis tarefas investigadas.

4.1.1 Produção de imagem mental

Quanto à produção de imagem mental, notou-se nas produções referentes à Tarefa 1 indícios de seu uso pelos membros dos dois grupos. O que é evidenciado pelas justificativas dos entrevistados em cada item, pois estas indicaram a ocorrência de aspectos do processo de visualização. Além disso, as respostas apresentadas por todos os participantes sobre o que é um quadrado, a ação de girar a folha contendo o enunciado e o uso dos termos “quadrado rotacionado” e “quadrado inclinado” por parte de alguns dos entrevistados são indícios de que eles têm uma imagem mental do conceito de quadrado, sendo que para a maioria dos participantes essa representação mental de quadrado é um tanto limitada do ponto de vista matemático, por não representar o conceito de modo global.

Em relação à Tarefa 2, notou-se indícios de produção de imagens mentais do cubo pelos integrantes dos dois grupos, o que é evidenciado pelas produções escritas, orais, pelo emprego de termos como: “imaginando”, “pensando”, “voltando para o cubo”, “dobrar a folha e formar o cubo”, “montando ou dobrando mentalmente o cubo” e por gestos de seis dos entrevistados do GJ e dois do GI, que realizaram movimentos com as mãos, como se estivessem manipulando o cubo, o que indica a produção de imagens cinestésicas e dinâmicas, como relatados na subseção anterior.

Na Tarefa 3, observa-se indícios de produção de imagens mentais, como da escada por pelo menos um ponto de vista pelos integrantes de ambos os grupos, de um prisma por J1, de um paralelepípedo por J7 e um cubo por I8. Notou-se também, tanto na escrita como na fala, o emprego de termos que indicam ações ocorridas na mente dos participantes, como: “*imaginando*”, “*girando a figura*”, “*rotacionando*”.

Pode-se notar pelas análises da Tarefa 4 que todos os participantes, de ambos os grupos, constroem uma imagem mental da peça tridimensional representada pelo número 1 na figura dada. Pode-se inferir isso pela utilização de pelo menos um dos termos nas respostas: “*pensando*” ou “*imaginando que estou na frente*”, “*rotacionando mentalmente a peça*” ao utilizarem a visão plana dos lados que compõe a peça e ao reconhecerem as três faces ocultas e suas formas.

No caso da Tarefa 5, pode-se notar que todos os entrevistados dos dois grupos apresentam indícios de formação de imagem mental das peças utilizadas na formação das figuras dadas no enunciado. Isso se evidencia pelas explicações orais e escritas de todos que, em seus argumentos, para identificação da possibilidade de formação das figuras, utilizam termos como: “*rotação ou giro*”, “*translação*”, “*arrastando mentalmente*”, “*pensando nas peças*”.

Na Tarefa 6, pelas produções dos entrevistados e observações realizadas, nota-se que os integrantes de ambos os grupos apresentam indícios de formação de imagem mental. O que é evidenciado pelo conceito de triângulo retângulo apresentado pelos membros dos grupos, que está muito relacionado à imagem do conceito, evidenciado pelo ato de girar a folha no intuito de observar os triângulos com “base horizontal” que alguns integrantes de ambos os grupos realizam. Como a maioria dos entrevistados reconheceu as mudanças ocorridas na figura nova, mesmo não tendo mais acesso a figura inicial, pode-se inferir que houve, também nesses casos, produção de imagens mentais. Outra evidência se baseia na utilização de termos como, por exemplo: “*completar ou prolongar segmentos*”, “*encaixar, imaginando e girando*”, “*completar o triângulo para formar um quadrilátero de modo não-ostensivo*”, empregados por alguns entrevistados.

Pelo exposto, pode-se inferir que a produção de imagens mentais esteve presente no raciocínio dos entrevistados para a resolução das seis tarefas estruturantes da entrevista. Visto que foi observado o uso de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais, como citado por Gutiérrez (1992, 1996a).

Foram notadas evidências do uso de imagens do conceito (no caso do quadrado e do triângulo retângulo), termo abordado por Gutiérrez (1996b), que esclarece que quando lemos

ou ouvimos o nome de um conceito conhecido, nossa memória é estimulada e evoca algo, que raramente é a sua definição, mas sim um conjunto de representações visuais, imagens, impressões ou experiências.

Há também nas produções analisadas, evidências do uso de imagens pictóricas (reais, concretas); imagens cinestésicas (em movimento através da ação corporal); imagens dinâmicas e representações mentais (citadas por Duval (2012b)), como crenças, ideias, concepções. Desse modo, pode-se inferir a presença do elemento imagem mental que segundo Gutiérrez (1996a), são os objetos criados, usados e transformados na atividade de Visualização, no raciocínio empregado pelos entrevistados para a resolução das tarefas propostas.

4.1.2 Utilização de representações externas

Em relação à utilização de representações externas, observou-se nas produções referentes à Tarefa 1, com respeito aos integrantes dos dois grupos, que estes utilizam a figura dada no enunciado para o reconhecimento do número de quadrados presentes na configuração. No caso do item **a**, no raciocínio e nas justificativas empregadas em todos os itens, evidenciando tal utilização.

Na Tarefa 2, nota-se que todos os integrantes dos dois grupos utilizam a figura dada no enunciado para realizar a criação ou mobilização da imagem mental do cubo 3D. Observa-se também que dois dos integrantes do GJ e três do GI desenham o cubo, o que evidencia também a produção, além da utilização de representações externas na resolução da tarefa.

Quanto à utilização de representações externas nas produções referentes à Tarefa 3, observa-se que todos os integrantes dos dois grupos utilizam a imagem dada ao relacionarem a figura à representação de uma imagem tridimensional de uma escada, ou com prismas ou paralelepípedos, e estabelecem relações entre as subfiguras, evidenciando tal uso.

Nota-se nas respostas da Tarefa 4 a utilização de representações externas por parte de todos os participantes dos dois grupos, evidenciada pelo uso da imagem dada para responder quais as vistas da peça dada. Observa-se, também, que os integrantes dos dois grupos desenham as faces ocultas da figura evidenciando a produção além do uso de representações externas.

No caso da Tarefa 5 a utilização, no raciocínio de todos os entrevistados de ambos os grupos, das figuras representadas por A, B, C, D e E e das duas peças dadas no enunciado indicam o uso de representações externas. Observa-se, também, a produção de representações externas no caso dos participantes que decompõe as figuras em duas peças de modo ostensivo ou fazem o desenho das representações das figuras ou peças.

Observa-se nas produções referentes à Tarefa 6 o uso da figura dada nas respostas para a identificação dos triângulos retângulos e das mudanças na figura nova, por parte de todos os entrevistados dos dois grupos, evidenciando o uso de representações externas. Nota-se, também, que alguns deles desenharam segmentos completando os triângulos retângulos para formar quadriláteros e símbolos representando o ângulo nos triângulos, que evidência a produção de representações externas.

Lembrando o que foi visto em Gutiérrez (1996a), que uma representação externa pertinente à Visualização como qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas etc., em folha de papel, com modelos concretos, ou outras. Pode-se inferir que o uso das representações externas ocorreu auxiliando no desenvolvimento do raciocínio dos entrevistados para a resolução das seis tarefas e na expressão para a comunicação do raciocínio, em conformidade com Gutiérrez (1996a), para o qual a representação externa é instrumento importante para expressar conhecimentos e ideias geométricas, ajudar a criar ou transformar imagens mentais e produzir raciocínio visual.

4.1.3 Realização de ações de interpretação de informação

Quanto à realização de ações de interpretação de informação, nota-se na Tarefa 1 que os entrevistados mostram, principalmente, indícios de uso de uma das ações de interpretação, a interpretação a partir da figura.

Pode-se observar que todos os integrantes do GJ e cinco do GI, no item **a**, apresentaram resposta matematicamente aceitável em relação ao número de quadrados. Evidenciando a ativação da ação de interpretação de informação.

No item **b**, ambas as turmas tiveram resultados próximos, os participantes demonstram ter noção dos conceitos de diagonal e segmentos paralelos e os reconhecem na figura. Nota-se que eles interpretam as informações obtidas a partir de imagens dadas, evidenciando a realização da ação de interpretação da figura, extraíndo os conceitos evocados.

No item **c**, observou-se que em ambos os grupos houve a identificação de características comuns aos quadriláteros AEOH, EBFO, OFCG e HOGD, evidenciando a ação de interpretação da figura.

No item **d**, pode-se observar que um número maior de integrantes do GJ, comparado aos do GI, teve melhor desempenho neste item. Dois integrantes do GJ apresentaram respostas pelas quais se pode inferir que houve a interpretação da figura dada. Os demais integrantes do GJ (J3, J4 e J7), assim como todos os participantes do GI, não deixam claro o conhecimento

sobre como seria uma demonstração nesse item. Nesses casos, não foi possível a identificação dos elementos que compõem a Visualização Geométrica, em particular a ação de interpretação da figura. Deste modo, há indícios do uso da ação de interpretação, porém observa-se que esta ação ainda precisa ser melhor trabalhada em relação aos dois grupos, principalmente no grupo I.

Em relação ao emprego das ações de interpretação de informação nas produções dos entrevistados referentes à Tarefa 2, nota-se que todos os entrevistados do GJ e cinco do GI apresentam indícios de uso da interpretação da figura, visto que identificam a partir da figura dada as faces opostas às faces indicadas pelas letras A, B e C e seus valores correspondentes segundo as hipóteses do enunciado. Três entrevistados do GI, dão indícios da mobilização da ação, porém apresentam dificuldades. Nota-se também que dois integrantes do GJ fazem o desenho do cubo satisfatoriamente a partir da interpretação das informações fornecidas pelo enunciado, e três do GI, também desenharam o cubo, porém têm dificuldade no reconhecimento das faces opostas.

Na Tarefa 3, em relação ao emprego das ações de interpretação de informação, observou-se que todos os entrevistados dos dois grupos estabeleceram relações entre as subfiguras, identificando congruência, igualdade entre as formas das regiões A e B e fizeram relação entre as posições das duas regiões, o que são indícios de interpretação da figura.

Quanto ao emprego das ações de interpretação de informação, nas produções dos participantes na Tarefa 4 notou-se que todos interpretam as figuras em algum nível, já que responderam de modo esperado pelo menos um dos três itens da tarefa. Porém, pode-se inferir que dois entrevistados do GJ apresentaram dificuldade na interpretação das figuras para reconhecer as faces ocultas, e quatro do GI apresentaram dificuldade na interpretação das figuras em algum dos itens.

Com respeito ao emprego da ação de interpretação da figura, nas produções referentes à Tarefa 5, observa-se que quatro dos integrantes do GJ e três do GI o fazem de modo satisfatório, identificando que somente a figura representada pela letra D não pode ser formada nas condições do enunciado, os demais apresentam algumas dificuldades nesta ação.

Nota-se na Tarefa 6 a utilização da ação de interpretação da figura dada na identificação dos triângulos retângulos por parte de todos os integrantes do GJ, embora um deles tenha apresentado dificuldade no reconhecimento do possível triângulo retângulo representado pela letra A. Nota-se a utilização da ação de interpretação da figura dada por três integrantes do GI na identificação dos triângulos retângulos e no reconhecimento das mudanças na figura nova,

os cinco demais entrevistados do GI apresentaram dificuldades na interpretação da figura para responder de modo satisfatório a tarefa.

Segundo Gutiérrez (1992, 1996a), os processos de “interpretação visual de informações” para criar imagens mentais e a “interpretação de informações obtidas a partir de imagens” para gerar informações, realizados na Visualização, são ações físicas ou mentais em que imagens mentais estão envolvidas.

Pelo exposto, pode-se notar que o processo de interpretação de informações obtidas a partir de imagens foi o mais requerido nas tarefas escolhidas. Mas é possível observar, pelo uso das imagens mentais (que ocorreu em todas as tarefas), que o processo de interpretação para criar imagens mentais também esteve presente nas resoluções de todas as tarefas. As análises indicam que há dificuldades no emprego das ações de interpretação da informação em alguns casos, principalmente por parte dos integrantes do GI.

4.1.4 Mobilização de habilidades para a Visualização

Quanto à mobilização das habilidades para a visualização, se observou nas respostas dos entrevistados à Tarefa 1 que a mobilização das habilidades para a visualização esperadas, de modo geral, ocorreram. Visto que no item **a** os entrevistados mobilizaram a percepção figura-fundo e da discriminação visual, já que a contagem dos quadrados passa pelo reconhecimento das formas, a identificação das subfiguras por justaposição ou superposição e a comparação entre essas subfiguras. Observa-se que todos os integrantes do GJ e cinco do GI apresentaram resposta matematicamente aceitável em relação ao número de quadrados. Observou-se que três integrantes do GI apresentaram indícios de dificuldade na mobilização dessas habilidades por reconhecerem seis dos dez quadrados existentes na configuração. No item **b**, pôde-se notar em ambos os grupos que eles mobilizaram a habilidade de percepção de relações espaciais ao relacionar os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas. No item **c**, notou-se a utilização das habilidades de conservação da percepção e percepção de relações espaciais, visto que os entrevistados dos dois grupos reconheceram que propriedades do quadrado são independentes de tamanho ou posição, relacionaram os quadrados entre si e compararam outros elementos que compõem a figura, como ângulos, lados e vértices. Embora a rotação mental não tenha sido uma habilidade considerada necessária na estrutura estabelecida para a análise desta tarefa, observou-se nas respostas ao item **a**, que três integrantes do GJ, ao girar a folha de tarefa para ver os quadrados com lados opostos na horizontal, dão indícios de que a mobilização da rotação mental pode ser falha para eles.

Em relação à mobilização das habilidades para a visualização, notou-se nas respostas dos entrevistados à Tarefa 2 que a mobilização da habilidade de rotação mental ocorreu, visto a criação ou mobilização da imagem mental do cubo 3D. A mobilização da percepção de posições espaciais foi realizada por todos os participantes do GJ e por cinco dos entrevistados do GI, pois reconheceram as faces opostas. No caso dos três demais integrantes do GI, pode-se inferir que eles apresentaram dificuldade na mobilização da percepção de posições espaciais, nessa tarefa.

Na Tarefa 3, a mobilização das habilidades esperadas ocorreu nas respostas de todos os participantes da pesquisa, visto que relacionam as regiões contidas na figura dada consigo, por exemplo, identificando que a região A está mais próxima ou à frente da região B, que são indícios da mobilização da percepção de posições espaciais. Pode-se notar a mobilização da percepção de relações espaciais nas respostas de seis dos integrantes cada grupo, quando eles identificam que as áreas das regiões A e B são iguais, ou que essas têm a mesma forma, que são congruentes ou complementares. Foi observada ainda a mobilização da rotação mental por parte dos entrevistados J1 e J4 do GJ e de I8 do GI, que se referem à rotação da imagem que os levaram a pensar que as formas das regiões A e B eram iguais.

No que diz respeito à mobilização das habilidades para a visualização em relação às produções referentes à Tarefa 4, notou-se nas respostas de seis integrantes do GJ e quatro do GI a mobilização das habilidades de percepção de relações espaciais, de posições espaciais, de discriminação visual e de conservação da percepção ao responder os itens da tarefa, visto que identificaram corretamente as características das relações entre as vistas e a peça, relacionaram a posição das vistas em relação a peça 3D e a si mesmo, mobilizaram a capacidade de comparar as vistas à peça identificando suas semelhanças e diferenças visualmente e reconheceram as três faces ocultas e seus formatos. Os demais participantes mobilizaram satisfatoriamente algumas das habilidades referidas, porém apresentaram dificuldade em uma delas.

Na Tarefa 5, em relação às habilidades para a visualização, observa-se que quatro dos integrantes do GJ e três do GI dão indícios da mobilização das habilidades de discriminação visual (ao realizarem a comparação de figuras e peças identificando suas semelhanças e diferenças visualmente); percepção figura-fundo (ao reconhecerem as peças isolando-as de seu contexto em cada figura); constância perceptiva (ao reconhecerem que as peças mantêm certas propriedades, como sua forma ou tamanho, constantes mesmo que observadas de um ponto de vista diferente); percepção de relações espaciais (ao identificarem corretamente as características das relações entre as peças e figuras); de posições espaciais (ao relacionarem a

posição de uma peça ou figura a outra) e de rotação mental (ao criarem imagens mentais dinâmicas na tentativa de formar as figuras utilizando as duas peças).

Já no caso dos quatro membros do GJ (J2, J3, J5 e J7) e dos cinco do GI (I2, I4, I5, I6 e I7), observa-se algumas dificuldades na mobilização de algumas dessas habilidades. No caso de I6, J2 e J5, que respondem que a figura D pode ser formada nas condições do enunciado, infere-se, de acordo com Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), que há uma dificuldade no reconhecimento da simetria reflexiva presente na figura, pela confusão ao associá-la à um giro (sem notar que esse giro ocorre no espaço, e não no plano). Infere-se que isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual e/ou da percepção de posições espaciais.

No caso de J3, que identifica a possibilidade de formação das figuras representadas por A, C e E, a impossibilidade da formação da figura representada por D, só não identifica que a figura representada por B também pode ser construída segundo o enunciado, pode-se inferir, segundo Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), que a forma da figura dificultou sua identificação. Infere-se que isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual.

A dificuldade apresentada por J7 em identificar que as figuras representadas por A e C também podem ser formadas de acordo com o enunciado. Assim, infere-se, também pelo observado por Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), que o efeito óptico de ligeiro estreitamento, que é gerado ao unir as peças na formação da figura A, pode ter feito com que a percepção das duas peças que compõem A não seja igual àquelas dadas. Ou seja, infere-se que houve uma dificuldade na mobilização da conservação da percepção. E com respeito à figura representada por C, pelas justificativas escritas, o entrevistado aparenta ter uma ideia fixa sobre a possibilidade de rotação nessa tarefa, como movimentos possíveis somente rotações de 180°. Desse modo, infere-se que pode haver uma dificuldade por parte de J7 na mobilização da rotação mental.

O entrevistado I2 apresenta dificuldade no reconhecimento da possibilidade de formar as figuras A e E. Assim, pode-se inferir que há evidência de dificuldade na mobilização da rotação mental e/ou da discriminação visual, já que ele não consegue reconhecer a possibilidade de formar a figura E. Se observa também que I2 circula o encontro das peças na figura A, o que leva a crer que o efeito óptico de ligeiro estreitamento gerado na união das peças que formam a figura representada por A, citado por Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018), pode tê-lo levado à percepção de que as duas peças que compõem A não sejam iguais àquelas dadas, o que caracteriza dificuldade na mobilização da habilidade de conservação da percepção.

O participante também não justifica a impossibilidade da formação da figura D, o que leva a inferir que também não reconheceu a simetria reflexiva na figura, e isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual e/ou da percepção de posições espaciais, condição também observada no caso de I6.

Na resposta de I4 é possível identificar dificuldades relacionadas à formação das figuras representadas por D e E. Assim, pode-se inferir que há evidência de dificuldade na mobilização da rotação mental e/ou da discriminação visual, já que ele não consegue reconhecer a possibilidade de formar a figura E. Por não justifica a impossibilidade da formação da figura D, infere-se que também não reconheceu a simetria reflexiva na figura, o que pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual e/ou da percepção de posições espaciais.

Pode-se notar que I5 não considera possível formar as figuras A e D segundo o enunciado, ou seja, assim como I2, o efeito óptico de ligeiro estreitamento gerado na união das peças que formam a figura A pode ter levado à percepção de as duas peças que compõem A não serem iguais àquelas dadas, o que caracteriza dificuldade na mobilização da habilidade de conservação da percepção. Por fim, a dificuldade de I7 em reconhecer a possibilidade da formação da figura representada por B pode ter relação com a forma da figura B, como observado em Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018). Assim, infere-se que isso pode estar associado a uma dificuldade no emprego da discriminação visual.

Em relação à mobilização das habilidades para a visualização nas produções dos entrevistados referentes à Tarefa 6, nota-se que sete integrantes do GJ (J1, J2, J3, J4, J5, J6, e J8) e três do GI (I1, I5 e I6) mobilizaram as habilidade de memória visual, percepção de posição espacial e discriminação visual, identificando A e E como possíveis triângulos retângulos e a posição que os triângulos ocupavam quando apresentada a nova figura e suprimida a inicial. Visto que se lembraram, além da posição dos triângulos em relação à figura inicial, também as características visuais dos triângulos retângulos. Também relacionaram a posição dos triângulos entre si, identificaram corretamente as características das relações entre os triângulos e compararam os vários triângulos, identificando semelhanças e diferenças visualmente.

Como o participante J7 não reconheceu o triângulo A como possível triângulo retângulo, infere-se que pode ter havido dificuldade na mobilização de algumas dessas habilidades. Infere-se também que a mobilização da habilidade de memória visual ocorreu nos integrantes J2, J3, J5, J6, J7 e J8 ao lembrarem de pelo menos algumas das características visuais dos triângulos isósceles, equiláteros, escalenos, acutângulos e obtusângulos.

Pode-se inferir que cinco integrantes do GI (I2, I3, I4, I7 e I8) apresentam dificuldade na mobilização de uma ou mais destas habilidades: da memória visual, percepção de posição espacial e discriminação visual. No caso de I3 e I4, por apresentarem dificuldade em relação ao item **a**, visto que não reconheceram que A e E são representações de triângulos retângulos. No caso de I8, pela dificuldade em relação ao item **b**, visto que não lembrou da posição dos triângulos da figura inicial e não reconheceu as mudanças ocorridas na nova figura. E no caso dos entrevistados I2 e I7, que apresentaram dificuldade em relação aos dois itens.

Segundo Gutiérrez (1996a), as habilidades para visualização são capacidades que “um sujeito deve adquirir e desenvolver para realizar os processos necessários, com as imagens mentais específicas de um dado problema” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 10). Pode-se observar pelas análises realizadas que, embora as habilidades sejam mobilizadas a contento por parte de alguns dos participantes, são necessárias estratégias para a promoção do seu uso e desenvolvimento nos estudantes, principalmente nos membros do GI, pois elas são essenciais para a exploração das imagens mentais ou externas para um processo efetivo de Visualização.

4.2 DISCUSSÃO ACERCA DAS CATEGORIAS ANALISADAS NO BLOCO 2

O Bloco 2 refere-se à análise cognitiva, pelo emprego das funções heurística, de suporte e discursiva. E também a coordenação entre elas, levando as conversões de registros de representação semióticas segundo Duval (2015). Na sequência encontram-se as considerações relativas às análises destas quatro categorias.

4.2.1 Emprego da função heurística

Quanto à utilização da função heurística para responder a Tarefa 1, pode-se observar evidências do seu uso pela exploração visual das figuras para o reconhecimento de formas, pela mobilização das habilidades para visualização, entre outras ações. No item **a**, houve o reconhecimento dos dez quadrados por todos os membros do GJ e por cinco membros do GI. Além disso, houve o reconhecimento de outras unidades figurais, a identificação das subfiguras por justaposição ou superposição e a comparação entre essas subfiguras. No item **b**, pôde-se notar, ao relacionar os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas, que os participantes de ambos os grupos utilizaram a função em questão, que eles mobilizaram a habilidade de percepção de relações espaciais. No item **c**, a comparação entre os quadriláteros e outros elementos que compõem a figura, como ângulos, lados e vértices dão indícios do uso

da função. No item **d**, pôde-se identificar o uso da função nas respostas de cinco integrantes do GJ, sendo que dois apresentaram respostas matematicamente aceitáveis e os outros três apresentaram respostas incompletas. Já em outros três entrevistados do GJ e todos os do GI, não foi possível a identificação do uso da função em decorrência da dificuldade expressa nas produções dos entrevistados em responder o item, o que nos leva a inferir que possam haver dificuldades no uso da função heurística e discursiva por parte deles.

Na Tarefa 2 a utilização da função heurística é evidenciada pela mobilização das habilidades para visualização, que permitiram o reconhecimento das faces e seus valores, nas produções dos entrevistados de todos os membros do GJ e de cinco membros do GI. Sendo, também, identificadas dificuldades quanto à função heurística por três dos entrevistados do GI, por apresentarem dificuldade em identificar as faces opostas do cubo.

Em relação às produções da Tarefa 3, a utilização da função heurística pode ser observada pela mobilização da percepção e reconhecimento de formas (como das regiões A e B), das suas posições, da identificação de subfiguras, de segmentos e da aplicação das habilidades para visualização. Evidências observadas nas produções dos participantes de ambos os grupos.

Quanto ao uso da função heurística na Tarefa 4, pode-se inferir pelas análises que seu emprego ocorreu por parte de seis entrevistados do GJ e por quatro do GI, visto que para eles houve o reconhecimento das formas e reconfiguração, e que os demais apresentaram dificuldades em relação ao emprego da função.

Em relação ao uso da função heurística na Tarefa 5, podemos inferir que esta foi empregada por quatro participantes do GJ e por três participantes do GI, que em suas respostas apresentaram o reconhecimento das formas, as reconfigurações e o reconhecimento das figuras que poderiam ser formadas segundo o enunciado. Os demais integrantes de ambos os grupos apresentaram dificuldades no emprego da função que podem ser evidenciadas pelo exposto em relação às habilidades mobilizadas.

Pela análise das produções referentes à Tarefa 6, infere-se que o emprego da função heurística nesta tarefa ocorreu satisfatoriamente em sete dos entrevistados do GJ e em três dos entrevistados do GI, visto que eles mobilizam as habilidades para visualização, mostram reconhecer os triângulos retângulos, unidades figurais como segmentos perpendiculares, ângulos de medidas variadas e identificar as mudanças ocorridas na nova figura em relação à inicial. No caso de J7 e dos cinco demais do GI, infere-se que pode ter havido dificuldade no emprego dessa função pelo descrito no parágrafo anterior.

Visto que, segundo Duval (2015), a função heurística está relacionada ao reconhecimento de formas e modificações na figura, já que esta é um campo de exploração visual para resolver problemas, e que essa exploração exige o reconhecimento de formas, de unidades figurais e, além disso, geralmente, que "enriqueçamos" a figura dada, acrescentando tramas que "levarão a ver" outras formas do que aquelas inicialmente vistas na figura inicial. Assim, entende-se que o emprego das habilidades para visualização compõe ou fazem parte da exploração heurística das figuras.

Infere-se pelas análises que, assim como no caso das habilidades para visualização, que são capacidades a serem desenvolvidas, o uso da função heurística também necessita de estratégias para a promoção do seu uso e desenvolvimento nos estudantes. Pelas análises, nota-se que essa necessidade é acentuada em relação aos membros do GI, tendo vista sua importância para um processo efetivo de Visualização.

4.2.2 Emprego da função suporte

Segundo Duval (2015), o uso da função suporte está relacionado à característica das figuras geométricas ligada ao fato de serem instrumentalmente construídas, sendo assim, refere-se à medições e cálculos. Talvez por conta da natureza das seis tarefas investigadas, o emprego da função de suporte foi observado somente na Tarefa 3, nas produções de três integrantes do grupo GJ. Nota-se que utilizam medição em suas justificativas, por dividirem a figura em unidades quadradas e um deles recorre ao cálculo das áreas das regiões representadas por A e B, o que são indícios da mobilização da função suporte. Pode-se inferir que a natureza das tarefas possa não ter favorecido o emprego da função suporte.

4.2.3 Emprego da função discursiva

Notou-se maior dificuldade por parte dos participantes da pesquisa quanto ao emprego da função discursiva nas produções referentes à Tarefa 1. Tal dificuldade está relacionada principalmente no que diz respeito à apresentação de justificativas matematicamente coerentes e a realização de demonstração.

Com respeito ao conceito de quadrado, observou-se que seis dos integrantes do GJ têm uma ideia do conceito de quadrado matematicamente aceitável, sendo que cinco dos oito integrantes do GJ e todos do GI apresentam dificuldade relacionada aos termos ligados à linguagem.

Em relação aos itens **b**, **c** e **d**, também se observou que os integrantes do GI apresentaram maior dificuldade na apresentação das justificativas. No item **d**, pôde-se identificar o uso da função discursiva, assim como da heurística, nas respostas de cinco integrantes do GJ, sendo que dois apresentaram respostas matematicamente aceitáveis e os outros três apresentaram respostas incompletas. Já em outros três entrevistados do GJ e todos do GI, não foi possível a identificação do uso da função pela dificuldade expressa nas produções dos entrevistados em responder o item, o que nos leva a inferir que possa haver dificuldade no uso da função heurística e discursiva por parte deles. Assim, o emprego da função discursiva precisa ser melhor trabalhado nos integrantes dos dois grupos, mas principalmente nos integrantes do GI.

Assim como observado na Tarefa 1, nota-se dificuldade por parte dos participantes dos dois grupos no emprego da função discursiva na Tarefa 2. A maior parte dos entrevistados apresentam respostas sucintas e/ou sem justificativa, muitos apenas registraram que montaram o cubo e disseram os valores correspondentes às faces A, B e C.

Na Tarefa 3, a utilização da função discursiva é observada nas produções dos entrevistados de ambos os grupos, porém também apresentam dificuldade em formalizar a resposta, que em geral são pautadas em argumentos perceptivos e intuitivos. No caso do GI essa dificuldade é um pouco maior, nota-se que as respostas orais são mais ricas em termos de inferências do que seus registros escritos e, de modo geral, as análises levam a inferir que os membros de ambos os grupos apresentam dificuldade em relação ao emprego da função discursiva.

Com respeito à utilização da função discursiva na Tarefa 4, observa-se emprego nas produções dos integrantes do GJ ao justificarem o raciocínio empregado na resolução da tarefa, porém nota-se dificuldade na justificação e formalização das respostas que, em geral, são pautadas na percepção e intuição. Pelas análises, nota-se também que o emprego dessa função pelos integrantes do GI apresenta uma maior defasagem em relação ao observado no GJ. Observa-se maior dificuldade em justificar o raciocínio, falta de argumentos, muitas vezes não sabem como justificar suas conclusões e têm maior dificuldade em escrever o que pensam.

Na Tarefa 5, pelas produções dos entrevistados dos dois grupos, observa-se que o emprego da função discursiva para a justificação da resposta à tarefa ocorre, porém muitas dificuldades em relação à formalização são observadas. As respostas são fortemente baseadas em argumentos intuitivos, e quando são utilizados conceitos matemáticos para a justificação, nota-se dificuldade na compreensão e emprego destes. Por exemplo, assim como os integrantes do GJ, os membros do GI utilizaram o termo “rotação” em suas justificativas, alguns se referiram à rotação pela palavra “giro” ou a utilizaram como um verbo, e alguns se referiram

ao ângulo de rotação. Nota-se que a rotação não parece ser lembrada como uma transformação geométrica de um sistema de coordenadas, em que elementos como eixo e ângulo precisam ser considerados. O mesmo pode ser observado em relação ao emprego da translação.

Quanto ao emprego da função discursiva para a justificação e formalização das respostas à Tarefa 6, pode-se inferir que todos os membros dos dois grupos utilizaram para responder a tarefa. Observa-se dificuldade na formalização matemática das justificativas de modo geral, como nas demais tarefas. Nota-se em relação a ambos os grupos que os argumentos apresentados são, em sua maioria, perceptivos e intuitivos. Os participantes apresentam dificuldade em formalizar e escrever a justificativa. Embora alguns utilizem argumentos relacionados a conceitos matemáticos como os de triângulos isósceles, equilátero, a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° e no caso de um quadrilátero a soma ser 360° , pode-se inferir que suas respostas estão relacionadas mais às características visuais internalizadas dos conceitos (a imagem do conceito, abordada por Gutiérrez (1996b)).

Lembrando que, de acordo com Duval (2015), a associação e subordinação das figuras geométricas a instruções que determinam propriedades ligadas à teoria matemática requerem mais que o reconhecimento perceptivo desses objetos. É necessário o emprego da função discursiva para relacionar as figuras geométricas à teoria, às hipóteses e, no caso de seu uso para resolução de tarefas, relacioná-las e submetê-las às condições estabelecidas no enunciado. Pelas análises realizadas, infere-se que o emprego da função discursiva precisa ser melhor trabalhado nos estudantes de ambos os grupos, mas principalmente nos membros do GI.

4.2.4 Realização de conversões

Quanto à realização de conversões, o observado nas análises das produções referentes às seis tarefas é que todos os entrevistados realizam a conversão entre os registros de representação semióticos figural e língua natural.

Pela natureza das tarefas, assim como citado na discussão do bloco anterior no caso das ações de interpretação da informação, observou-se maior emprego da conversão no sentido do registro figural para língua natural.

Em todas as tarefas nota-se que, embora haja a conversão nas produções dos participantes dos dois grupos, eles apresentam dificuldades nesse processo. As evidenciadas são pela dificuldade na formalização e no emprego de justificativas pautadas em conceitos e propriedades matemáticas, e não em argumentos intuitivos e perceptivos.

Observa-se que nos entrevistados do GI, as dificuldades nesse processo são ainda maiores do que as apresentadas pelos membros do GJ, o que evidencia a necessidade em se trabalhar melhor esses registros, seus tratamentos e as conversões entre eles com os estudantes do curso de licenciatura.

As dificuldades observadas têm fundamento, haja vista que, segundo Duval (2004), a atividade em Geometria utiliza registros multifuncionais, o figural e a língua natural. Além disso, Duval (2008) salienta que os tratamentos nesses registros podem ter um grau maior de dificuldade por não serem algoritmizáveis, e que a conversão entre eles nem sempre é simples, pelo fato de ambos os registros serem multifuncionais.

De acordo com Duval (2005), o registro figural (que tem forma não discursiva) requer a visualização de formas para representar o espaço e o registro língua natural (tem forma discursiva) requer o uso da linguagem e conhecimento da teoria para inferir propriedades e deduzir novas. O autor chama a atenção para o fato de que a Geometria é um campo de conhecimento que requer a articulação cognitiva desses dois registros representacionais muito diferentes.

Observa-se que, embora haja a passagem entre os registros figural e língua natural pela coordenação entre as funções heurística e discursiva, há dificuldades nessa conversão nas respostas dos integrantes de ambos os grupos. Para Duval (2015) a conversão entre os registros figural e discursivo depende da mobilização da apreensão discursiva e essa conexão pode conduzir à apreensão sequencial. De acordo com Duval (2012b), a apreensão sequencial se dá na descoberta ou descrição da ordem de uma determinada construção e está relacionada à estrutura didática. Isso nos leva a inferir que essa conversão não está ocorrendo de modo efetivo nas respostas dos integrantes de ambos os grupos.

Esse tipo de interpretação é “explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura” (DUVAL, 2012a, p. 119). A não consolidação na apreensão sequencial explica e pode estar relacionada à dificuldade na formalização das respostas. Desse modo, reforça-se a inferência de que as funções heurísticas e discursivas precisam ser melhor trabalhadas, bem como as conversões entre os registros figural e língua natural, nos dois sentidos, nos estudantes de ambos os grupos, mas principalmente nos membros do GI.

4.3 DISCUSSÃO ACERCA DAS CATEGORIAS ANALISADAS NO BLOCO 3

O Bloco 3 refere-se à análise Matemática, em conformidade com Duval (2008), em que foi feita a verificação de se as justificativas e respostas são matematicamente aceitáveis ou não. Esperava-se, nas respostas matematicamente aceitáveis, o uso de argumentos teóricos, como conceitos, propriedades, o uso adequado do simbolismo matemático para a formalização do raciocínio. Porém, dificuldades em relação a essas características foram observadas nas análises das seis tarefas. Desse modo, considerou-se na categoria de respostas que são matematicamente aceitáveis aquelas que apresentaram as conclusões esperadas em cada tarefa.

4.3.1 Respostas matematicamente aceitáveis

Na Tarefa 1, foram consideradas na categoria de respostas matematicamente aceitáveis aquelas em que os conceitos e resultados matemáticos foram empregados corretamente e que seguem uma estrutura formal em relação à matemática. Desse modo, relativo ao conceito de quadrado, apenas um integrante do GJ forneceu uma resposta nesta categoria. No item **a**, todos os entrevistados do GJ e cinco do GI apresentaram respostas matematicamente aceitáveis (reconheceram os dez quadrados). No item **b**, seis integrantes do GJ e sete do GI forneceram respostas matematicamente aceitáveis, embora possamos inferir que todos tenham noção dos conceitos evocados e da resposta. No item **c**, três participantes do GJ apresentaram a relação de congruência em suas respostas, que era o esperado. No item **d**, dois entrevistados do GJ apresentaram uma resposta matematicamente aceitável. Analisando a tarefa como um todo, observa-se um melhor desempenho do GJ nas respostas, embora aspectos como a formalização sejam pontos para melhoria.

Quanto à Tarefa 2, foram consideradas nessa categoria as respostas de todos os integrantes do GJ e de cinco do GI, as quais apresentaram os lados opostos do cubo identificando-os corretamente, sendo marcados os valores 5, 6 e 4 nas faces do cubo representadas pelas letras A, B e C, respectivamente.

Na Tarefa 3, todas as respostas foram identificadas na categoria de respostas matematicamente aceitáveis, por se tratar de uma tarefa de exploração.

As respostas matematicamente aceitáveis em relação à Tarefa 4 como um todo foram as apresentadas por seis integrantes do GJ e quatro do GI. São aquelas em que houve a identificação da figura 2 como a vista frontal da peça tridimensional, em que foram completadas as formas correspondentes com as letras corretamente e houve o reconhecimento das três faces ocultas e suas formas.

No caso da Tarefa 5, quatro respostas do GJ e três do GI, estão na categoria de respostas matematicamente aceitáveis, por identificarem que a única figura que não pode ser formada de acordo com o enunciado, é aquela representada pela letra D.

Na tarefa 6, sete respostas do GJ e três do GI foram consideradas na categoria de respostas matematicamente aceitáveis. Nessas respostas, os participantes identificaram os triângulos representados por A e E como possíveis representações de um triângulo retângulo e identificaram as mudanças realizadas na nova figura sem poder olhar a figura inicial para realizar a comparação.

Pelas análises, pode-se inferir que os entrevistados do GI aparentam maior dificuldade em apresentar respostas com as conclusões esperadas em cada tarefa.

4.3.2 Respostas matematicamente não aceitáveis

Na Tarefa 1 foram consideradas na categoria de respostas matematicamente não aceitáveis aquelas cujas respostas não apresentavam as conclusões esperadas e além disso, que não apresentavam uma estrutura formal em relação à Matemática, com dificuldades no uso de termos, simbologia, propriedades e conceitos matemáticos. Desse modo, em relação ao conceito de quadrado, sete integrantes do GJ e todos do GI tiveram respostas nesta categoria. No item **a**, três dos entrevistados do GI não reconheceram todos os quadrados da configuração dada. No item **b**, dois integrantes do GJ e um do GI forneceram respostas em que foram identificadas dificuldades no uso de termos e simbologia matematicamente aceitáveis, embora tenham dado indícios de compreensão dos conceitos evocados e da resposta. No item **c**, cinco participantes do GJ e todos do GI, apresentaram várias características comuns aos quadriláteros citados no enunciado, porém não fazem menção a relação de congruência. No item **d**, cinco entrevistados do GJ e todos do GI apresentaram uma resposta matematicamente não aceitável. Sendo assim, como já dito na discussão da categoria anterior, considerando a tarefa como um todo, observa-se um melhor desempenho do GJ nas respostas.

Na Tarefa 2 foram consideradas respostas matematicamente não aceitáveis as respostas de três participantes do GI em que foram identificadas dificuldades na identificação dos lados opostos do cubo e na identificação dos valores correspondentes às faces A, B e C.

Em relação à Tarefa 3, não foram categorizadas respostas como matematicamente não aceitáveis, por se tratar de uma tarefa de exploração.

Na Tarefa 4, foram consideradas respostas matematicamente não aceitáveis as respostas apresentadas por dois entrevistados do GJ e quatro do GI. Por apresentarem dificuldade em pelo

menos um dos itens da tarefa, como na identificação da figura 2, sendo a vista frontal da peça tridimensional ou ao completarem as formas correspondentes com as letras corretamente ou ainda no reconhecimento das três faces ocultas e suas formas.

No caso da Tarefa 5, quatro respostas do GJ e cinco do GI estão na categoria de respostas matematicamente não aceitáveis, por não identificarem que a única figura que não pode ser formada de acordo com o enunciado é aquela representada pela letra D.

Na tarefa 6, uma resposta do GJ e cinco do GI foram consideradas na categoria de respostas matematicamente não aceitáveis. Nessas respostas os participantes tiveram dificuldade em identificar os triângulos representados por A e E como possíveis representações de um triângulo retângulo e identificar as mudanças realizadas na nova figura sem poder olhar a figura inicial para realizar a comparação.

Pelas análises, assim como exposto na categoria anterior, infere-se que os entrevistados do GI apresentam maior dificuldade em apresentar respostas com as conclusões esperadas em cada tarefa, em relação aos integrantes do GJ.

4.4 DISCUSSÃO GERAL

Pelo exposto, pode-se notar que os elementos que compõe a Visualização Geométrica foram mobilizados e coordenados pela maior parte dos entrevistados. Nota-se que os membros do GI apresentaram mais dificuldades que os do GJ, principalmente em relação à mobilização das categorias de realização de ações de interpretação de informação, mobilização de habilidades para visualização, emprego da função heurística, emprego da função discursiva e respostas matematicamente aceitáveis. Pode-se inferir pela análise que a Visualização Geométrica ocorreu para parte dos entrevistados, mas ainda requer mais atenção e condições que favoreçam melhor compreensão e emprego dos elementos que a compõe, para que a ação seja mais efetiva.

Observou-se que a natureza das seis tarefas investigadas pode ter contribuído para a não aplicação da função suporte, relacionada a medições e cálculos, envolvendo os registros figural e algébrico. Notou-se também que a natureza das tarefas pode ter influenciado nos tipos de ações de interpretação da informação mobilizada e no sentido da conversão entre os registros. Desse modo, para o emprego de estratégias de ensino que favoreçam a Visualização Geométrica e para pesquisas futuras sobre o tema, esses são pontos a serem considerados.

Com esta pesquisa, evidencia-se a necessidade da busca de estratégias que promovam o conhecimento, o manuseio e a aplicação dos elementos que compõe a Visualização Geométrica,

em especial as duas ações de interpretação da informação, as habilidades de visualização, as funções heurística e discursiva, para que a Visualização seja de fato efetiva e contribua como ferramenta que favoreça a aprendizagem em Geometria.

Pelos estudos realizados, infere-se que, para contribuir com a promoção da Visualização Geométrica, não só no ensino superior, mas em todos os níveis, são necessárias ações como a aplicação de tarefas que promovam a exploração das figuras geométrica em seus três aspectos, de acordo com Duval (2015), considerando o fato de elas serem instrumentalmente construídas, subordinadas a declarações que determinam as propriedades e como campo de exploração visual podem ser de grande contribuição. Assim como aplicação de tarefas que favoreçam a exploração heurística das figuras, através do reconhecimento de formas, unidades figurais 1D e 2D, reconfigurações, mobilização de habilidades de visualização, entre outros. Tarefas que promovam também a exploração de tratamentos referentes a medições e cálculos, além do emprego da função discursiva. Além disso, trabalhar com atividades que promovam as conversões (nos dois sentidos) entre os registros figural (em suas variadas representações) e o da língua natural.

A aplicação de tarefas de investigação, em que sejam requeridos o uso de imagens mentais, a produção de representações externas e o diálogo entre os estudantes, contribuem para o aperfeiçoamento da Visualização Geométrica.

Acredita-se, assim como em Guillén *et al* (1992), que a promoção de momentos para que os alunos dialoguem entre eles, com intervenções do professor quando e se necessário, favoreça com que experiências adquiridas se unam aos símbolos linguísticos e que os estudantes aprendam a se expressar com precisão. Segundo Guillén *et al* (1992), outro objetivo é fazer com que os estudantes reflitam “em voz alta” sobre o que estão fazendo, suas soluções, dificuldades, métodos etc. De acordo com os autores, esse debate enriquece o conhecimento de cada estudante, pois os obriga a organizarem suas ideias e expressá-las com rigor.

Neste estudo foi realizada uma investigação em que se buscou analisar as produções de dois grupos, dos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática e dos que concluíram as disciplinas de Geometria desse curso, com o intuito de verificar se havia diferenças nas suas atividades de visualização e se os conceitos geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados nos dois grupos. O tempo para a realização da pesquisa não permitiu que analisássemos os mesmos indivíduos nesses dois momentos, e entende-se que essa é uma limitação deste estudo. Essa é uma ideia, de realizar a pesquisa com os mesmos participantes nos dois momentos, iniciando e terminando o curso, e que fica em suspenso aqui para pesquisas futuras.

CONSIDERAÇÕES

A partir de leituras desenvolvidas no grupo de pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG sobre visualização, a curiosidade nos levou à busca de novos materiais sobre o assunto. Dentre os materiais encontrados e estudados estão os trabalhos de Duval (1999b, 2012, 2015), Fernández Blanco (2011), Fernández Blanco, Godino e Diego-Mantecón (2018) e Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b, 2018), entre outros.

Com esses estudos, pôde-se notar que a visualização vem sendo considerada um fator de grande importância para o ensino e a aprendizagem da Matemática, em particular da Geometria, e tema de muitas pesquisas ligadas à Educação Matemática. Os estudos sobre o tema evidenciaram a pluralidade de significados e mecanismos relacionados ao termo Visualização em Matemática, as várias perspectivas existentes e suas potencialidades no ensino e na aprendizagem.

Pautados nos estudos de Duval (1999b, 2012, 2015) e Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b, 2018), por entender que as perspectivas de ambos autores são complementares e que fornecem uma concepção de Visualização Geométrica mais densa, optou-se por adotar metodologicamente neste trabalho a Visualização como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, na qual são articuladas imagens mentais, representações externas, ações de interpretação para a visualização e as habilidades para a visualização, de modo que proporcione a integração entre as funções heurística e discursiva.

Os estudos realizados levaram às indagações: Como acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade no Brasil resolvem tarefas de Geometria Euclidiana em que a visualização é requerida? Como se dá a atividade de Visualização nesse público? Há diferenças na atividade de Visualização de alunos ingressantes e de concluintes? Os conceitos Geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para eles?

Assim, com o intuito de buscar respostas às questões apresentadas, a presente pesquisa foi proposta como um estudo diagnóstico com dois grupos de acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná. O grupo dos ingressantes e o grupo daqueles que concluíram as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do referido curso. Formulou-se, também, o seguinte objetivo geral: Investigar a atividade de Visualização na resolução de tarefas de Geometria, em especial a mobilização de imagens mentais, das ações de interpretação de informações e das habilidades

mobilizadas para visualização, bem como a coordenação entre as funções heurística e discursiva pelos integrantes de dois grupos de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná, o grupo de ingressantes no curso e o grupo daqueles que concluíram as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do referido curso.

Para alcançar este objetivo, foram estabelecidos objetivos específicos. O primeiro deles foi identificar a produção de imagens mentais, o uso das representações externas, o emprego das ações de interpretação de informações e a mobilização das habilidades para visualização pelos participantes de ambos os grupos, GI e GJ, por meio de uma categorização realizada sobre as respostas escritas e orais aos questionamentos realizados a cada participante durante a realização de entrevistas e resolução das tarefas propostas.

Pela análise realizada, concluiu-se que os elementos que compõe a Visualização Geométrica elencados nas categorias *a priori* foram mobilizados pela maior parte dos entrevistados.

Pode-se inferir que a produção de imagens mentais esteve presente no raciocínio dos entrevistados dos dois grupos para a resolução das seis tarefas estruturantes da entrevista, visto que foram observados o uso de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade, de imagens do conceito (no caso do quadrado e do triângulo retângulo), de imagens pictóricas (reais, concretas), imagens cinestésicas (em movimento através da ação corporal), imagens dinâmicas e representações mentais (citadas por Duval (2012b)), como crenças, ideias, concepções.

O uso das representações externas ocorreu auxiliando no desenvolvimento do raciocínio de todos os entrevistados para a resolução das seis tarefas e na expressão para a comunicação do raciocínio.

Pôde-se notar também que o processo de interpretação de informações obtidas a partir de imagens foi o mais requerido nas tarefas escolhidas, mas pode-se observar, pelo uso das imagens mentais (que ocorreu em todas as tarefas), que o processo de interpretação para criar imagens mentais também esteve presente nas resoluções de todas as tarefas. Nota-se pelas análises que há dificuldades no seu emprego das ações de interpretação da informação em alguns casos, principalmente por parte dos integrantes do GI.

Observou-se que, embora as habilidades tenham sido mobilizadas como esperado em cada tarefa por parte de alguns dos participantes dos dois grupos, são necessárias estratégias para a promoção do seu uso e desenvolvimento, principalmente nos membros do GI.

O segundo objetivo específico refere-se a identificar se os conceitos Geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para ambos os grupos.

Por meio das análises realizadas, pode-se inferir que, principalmente nas Tarefas 1 e 6, quanto aos conceitos de quadrado e de triângulo retângulo, que a maioria dos entrevistados de ambos os grupos mobilizam a chamada imagem do conceito²⁹ ao invés de evocarem o conceito em si. Isso é evidenciado pelo fato de somente um integrante do GJ apresentar uma definição de quadrado matematicamente aceitável. Seis deles mostraram ter uma ideia do conceito, porém com dificuldade na formalização e um apresentar dificuldade em relação a características que definem um quadrado em sua exposição do conceito.

No caso dos integrantes do GI, todos apresentaram dificuldades relacionadas às características e à linguagem formal, porém todos os entrevistados mostraram ter uma imagem do conceito. Observou-se em algumas respostas que a imagem do conceito utilizada por eles é um tanto limitada do ponto de vista matemático, por não representar o conceito de modo preciso, visto que, por exemplo, “veem” o quadrado com “base horizontal”.

No caso do conceito de triângulo retângulo requerido na tarefa 6, observamos que todos os entrevistados do GJ e sete do GI identificam como um triângulo retângulo aquele triângulo em que um dos ângulos internos é reto. Um dos integrantes do GI relata que não se lembra da definição de triângulo retângulo, porém o identifica como metade de um retângulo dividido por uma diagonal.

Notou-se que o conceito de triângulo retângulo apresentado por todos está muito relacionado à imagem do conceito, visto que quatro dos integrantes do GJ buscam girar a folha no intuito de observar os triângulos com “base horizontal” ou com o ângulo reto na “base do triângulo”, o que sabemos ser uma imagem conceitual imprecisa desse conceito matemático.

Outros conceitos que foram evocados nos enunciados e resoluções foram: segmentos paralelos, diagonal do quadrilátero, faces opostas e rotação. Quanto à segmentos paralelos e diagonais, pode-se observar que os entrevistados compreendem e os identificam nas figuras, como evidenciado nas respostas ao item **b** da Tarefa 1. No caso de faces opostas, nas respostas à Tarefa 2 notou-se que todos integrantes do GJ e cinco do GI as identificam, o que nos leva a inferir que três membros do GI podem apresentar dificuldade quanto ao entendimento do conceito.

²⁹ Gutiérrez (1996b) esclarece que quando lemos ou ouvimos o nome de um conceito conhecido, nossa memória é estimulada e evoca algo, que raramente é a sua definição, mas sim uma imagem do conceito, ou seja, um conjunto de representações visuais, imagens, impressões ou experiências.

Em relação à rotação, verificou-se que os membros de ambos os grupos utilizaram o termo “rotação” (ou “giro”) como um verbo em suas justificativas, e alguns se referiram ao ângulo de rotação. Nota-se que a rotação não parece ser lembrada por eles como uma transformação geométrica, em que elementos como eixo e ângulo precisam ser considerados. O mesmo pode ser observado em relação ao emprego da translação.

O terceiro objetivo específico foi identificar, também por meio das categorias estabelecidas *a priori*, se houve a coordenação, pelos pesquisados, das funções heurística e discursiva (segundo Duval (2015)).

O que se observou por meio das análises referentes à coordenação das funções heurística e discursiva é que ambas as funções são empregadas nas resoluções das seis tarefas e que a coordenação entre elas ocorre. Porém, observa-se que o emprego dessas funções pode ser melhorado, visto que são observadas dificuldades principalmente em relação ao emprego da função discursiva por parte dos integrantes dos dois grupos, e que essas dificuldades são acentuadas nas produções dos membros do GI.

Em todas as tarefas nota-se que, embora haja a conversão nas produções dos participantes dos dois grupos, eles apresentam dificuldades nesse processo. Isso é evidenciado pela dificuldade na formalização e no emprego de justificativas pautadas em conceitos e propriedades matemáticas, e não em argumentos intuitivos e perceptivos.

Observa-se que, embora haja a passagem entre os registros figural e língua natural pela coordenação entre as funções heurística e discursiva, há dificuldades nessa conversão nas respostas dos integrantes de ambos os grupos.

O quarto objetivo visou buscar indícios de possíveis contribuições do ensino no curso de licenciatura que possibilitassem o desenvolvimento das habilidades para a visualização.

O que se pode observar é que os integrantes do GJ tiveram um melhor desempenho em suas respostas do que os membros do GI. Dessa forma, infere-se que o curso pode ter contribuído para o desenvolvimento de elementos que compõe a Visualização, embora entenda-se que o curso poderia oferecer maiores contribuições e também que mais pesquisas são necessárias para se afirmar sobre essas contribuições. Além disso, se pode notar a necessidade de melhorias em relação a estratégias que possibilitem melhor compreensão e desenvolvimento da Visualização nas disciplinas, principalmente nas de Geometria do curso.

Observou-se que dentre as quatro disciplinas ofertadas no curso de Licenciatura em Matemática, o qual fazem parte os membros dos grupos pesquisados, apenas uma, Geometria Euclidiana, traz um dos objetivos relacionado à visualização, como pode ser observado no Quadro 11 do Apêndice B. Tal constatação leva a inferir que não se pode esperar resultados

mais efetivos em relação as contribuições do curso no desenvolvimento de habilidades para a visualização ou da atividade de Visualização em si.

O quinto objetivo específico refere-se a verificar se os argumentos apresentados nas respostas das tarefas apresentam variações quanto ao uso das habilidades para a visualização pelos participantes dos dois grupos.

Pelas análises, pode-se inferir que os argumentos apresentados nas respostas das tarefas pelos participantes do GI são mais sucintos, perceptivos e intuitivos quando comparados aos apresentados pelos membros do GJ. Embora também se observe argumentos perceptivos e intuitivos nas respostas deste grupo. Quanto ao uso das habilidades para a visualização, infere-se pelas análises que os membros do GJ apresentam mais facilidade na mobilização das habilidades para a visualização, o que os leva a melhores resultados se comparados aos participantes do GI.

Desse modo, pode-se concluir, em relação aos participantes que compõe as unidades de análise deste estudo, que a atividade de Visualização como entendida nesta pesquisa, ocorreu na resolução das tarefas de Geometria investigadas, embora foram percebidas algumas dificuldades no processo evidenciando que este requer melhorias. Lembrando que como a presente pesquisa seguiu a abordagem qualitativa, entende-se que os resultados e conclusões evidenciadas são particulares a este trabalho.

Espera-se que os resultados deste estudo contribuam para a tomada de consciência de que as figuras geométricas, como observado por Duval (2015), têm particularidades (instrumentalmente construídas, subordinadas a declarações que determinam as propriedades e campo de exploração visual) que requerem formas distintas de exploração e tratamento.

Espera-se ainda, que a temática da Visualização em cursos de Licenciatura em Matemática seja discutida e levada em consideração, para que haja a promoção e o entendimento da Visualização como uma atividade que auxilie no ensino, em especial de Geometria.

Anseia-se que este trabalho contribua para a busca de estratégias que promovam o conhecimento, o manuseio e a aplicação dos elementos que compõe a Visualização Geométrica, como entendida nesta pesquisa, em especial as duas ações de interpretação da informação, as habilidades para a visualização, as funções heurística e discursiva.

Que possam ser revistos os programas das disciplinas ofertadas no curso de Licenciatura em Matemática, com o intuito de dar maior destaque em seus objetivos à promoção e ao desenvolvimento da atividade de Visualização Geométrica. Em particular, que haja nos objetivos das disciplinas direcionamento para a exploração das figuras, das funções e elementos

que compõe a Visualização, bem como para as conversões entre os registros de representação semióticos. Possibilitando que essas disciplinas sejam trabalhadas de modo a promover a Visualização e proporcionar mais meios que favoreçam o entendimento da Geometria.

Ao pensar na possibilidade de pesquisas futuras na perspectiva desta pesquisa, sugere-se investigações com os mesmos participantes nos dois momentos, iniciando e terminando o curso de Licenciatura em Matemática, além da escolha de mais tarefas de investigação em que sejam requeridas a exploração de tratamentos referentes a medições e cálculos, além do emprego das funções heurística e discursiva, e que favoreçam as conversões nos dois sentidos entre os registros figural e o da língua natural.

Enfim, na perspectiva da Educação Matemática, apontamos que mais investigações devam ser realizadas com respeito à formação de futuros professores de Matemática e a Visualização em Geometria, em sua multiplicidade de entendimentos, na busca por estratégias que favoreçam o ensino e a aprendizagem em Geometria.

REFERÊNCIAS

- BISHOP, A. J. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, ERIC Journal, v.11, n 1, p 170–176, 1989.
- BISHOP, A. J. Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *In*: CLARKSON, P.; PRESMEG, N. (eds.). **Critical Issues in Mathematics Education: Major Contributions of Alan Bishop**, New York: Springer, p. 71- 81, 2007.
- BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos **Zetetiké**, Campinas, SP, v.25, n. 3, p.364-387, set./dez. 2017.
- BRESSAN, A. M; BOGISIC, B.; GREGO, K. **Razones para enseñar geometría en la educación básica**: Mirar, construir, decir y pensar. Novidades Educativas. Buenos Aires, 2010.
- BROCARDO, A. M. *et al.* **Livro de atas do encontro de investigação em educação matemática (EIEM 2014)**. Sesimbra: ESE Setúbal, 2014. Disponível em: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/13646/1/ATAS-EIEM2014.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2018.
- BURATTO, I. C. **Historicidade e visualidade**: proposta para uma nova narrativa na educação matemática. Orientador: Cláudia Regina Flores. 2012. 241 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/101029>. Acesso em: 11 mar. 2018.
- BURATTO, I. C. F.; FLORES, C. R.; SZTAJN, P. Visualização matemática na formação inicial de professores. **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/390/502 . Acesso em: 20 fev. 2020.
- COSTA, C. Visualização, veículo para a educação em geometria. **Encontro de investigação em educação matemática**, Fundão, ano 9, n.1, p. 157-184, mai., 2000. Disponível em: <http://docplayer.com.br/7355343-Visualizacao-veiculo-para-a-educacao-em-geometria.html>. Acesso em: 20 fev. 2020.
- COUTINHO, C. M. **Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas**: Teoria e Prática. 2. ed. Coimbra: Almedina S.A., 2015.
- CYRINO, M. C. C. T.; JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v20n3/1516-7313-ciedu-20-03-0751.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2018.
- DUVAL, R. Geometry from a cognitive point of view, *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (eds.), **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 37–52, 1998.
- DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticos y Aprendizajes

intelectuales. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1999a.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In*: HITT, F.; SANTOS, M. (ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, p. 3-26, oct., 1999b.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasbourg, França, vol. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 4. ed., Campinas, São Paulo: Papirus, p. 11-33, 2008.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar**: os registros de representação semióticas. (Org.). Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mérciles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012a.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mérciles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p.118-138, 2012b.

DUVAL, R. Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. *In*: BAILLÉ, J.; LIMA, J. (ed.). 2015. **Du mot au concept. Figure**. Grenoble: Presses Universitaires, p. 147-182, 2015.

DUVAL, R. Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. *In*: DUVAL, R.; SAÉNZ-LUDLOW, A. **Comprensión y aprendizaje en matemáticas**: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, p. 13-60, 2016.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática**: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERNÁNDEZ BLANCO, M. T. **Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial**. Orientador: José Antonio Cajaraville Pegito; Juan Díaz Godino.

2011. 465 f. Tesis doctoral. Santiago de Compostela. Universidad de Santiago de Compostela, Espanha, 2011. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernández_tesis.pdf. Acesso em: 04 out. 2017.

FERNÁNDEZ BLANCO, M. T. La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. *In*: BERCIANO ALCARAZ, A. *et al* (eds.). **Investigación en Educación Matemática XVII**. Espanha, Bilbao: SEIEM. p. 19-42, 2013. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5063587> . Acesso em: 04 out. 2017.

FERNÁNDEZ BLANCO, M. T. Atendiendo habilidades de visualización en la Enseñanza de la geometría. Universidad de Santiago de Compostela. **IX Festival Internacional de Matemática**, Quepos, Puntarenas, Costa Rica, 12 a 14 de jun., 2014. p. 21 – 33. Disponível em: <http://revistas.tec.ac.cr/index.php/memorias/article/view/2505/2293>. Acesso em: 13 mar. 2018.

FERNÁNDEZ BLANCO, M. T.; GODINO, J. D.; DIEGO-MANTECÓN, J.M. Análisis epistémico y cognitivo de una tarea de visualización en el espacio bidimensional. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, v.7, n. 3, p. 251-279, oct. 2018. Disponível em: <http://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/2463/pdf>. Acesso em: 03 abr. 2019.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3.ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FLORES, C. R. **Geometria e visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração**. Orientador: Regina Flemming Damm. 1997. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/77119>. Acesso em: 24 abr. 2019.

FLORES, C. R. Cultura Visual, Visualidade, Visualização Matemática: balanço provisório, propostas cautelares. **Revista Zetetiké**, Unicamp, v. 18, p. 277–300, 2010. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646665/13567>. Acesso em: 24 abr. 2019.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na Educação Matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/8008/6827>. Acesso em: 24 abr. 2019.

FLORES C. R. Iconografia militar e práticas do olhar: ressonâncias na visualização matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 87–104, abr., 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000100006 . Acesso em: 20 fev. 2020.

FLORES, C. R. Descaminhos: potencialidades da Arte com a Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 502-514, ago. 2016. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0103-

636X2016000200502&lng=pt&nrm=i&tlng=pt. Acesso em: 20 fev. 2020.

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G.; BASTOS, L. C. Contribuições da Geometria Dinâmica na Introdução ao Estudo de Perspectiva para Alunos do Ensino Médio. **Bolema**. Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 790-810, ago. 2019. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n64/1980-4415-bolema-33-64-0790.pdf> . Acesso em: 20 fev. 2020.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GODOY, A. S. Introdução a pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar./abr. 1995. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n2/a08v35n2.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2017.

GODINO, J. D. *et al.* Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. **Enseñanza de las Ciencias**, [S. l], v. 30, n. 2, p. 109-130, 2012. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/13319844.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2019.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The ontosemiotic approach to research in mathematics education. **ZDM-The International Journal on Mathematics Education**. [S. l], v. 39, p. 127–135, 2007.

GUTIÉRREZ, A. Procesos y habilidades en visualización espacial. *In: Memorias del 3er Congreso Internac. sobre Investig. en Educ. Mat. (Valencia, 1991)*, Universidad de Valencia. Valencia. 1992. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 11 dez. 2017.

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework**. University of Valence, Spain, 1996a. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 11 dez. 2017.

GUTIÉRREZ, A. The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. *In: BATTURO, A. R. (ed.), 1996. New directions in geometry education*, Brisbane, Austrália, p. 23-32, 1996b. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96a.pdf>. Acesso em: 11 dez. 2017.

GUTIÉRREZ, A. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. **Revista EMA**, Bogotá, v. 3, n. 3, p. 193 - 220, jul. 1998. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98a.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2020.

GUTIÉRREZ, A. *et al.* Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. *In: Mix, K. S. S.; Battista, M. T. (Eds.). Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought*. Cham, Switzerland: Springer, p. 309-337, 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/329497886_Visualization_abilities_and_complexity_of_reasoning_in_mathematically_gifted_students%27_collaborative_solutions_to_a_visualization_task_a_networked_analysis . Acesso em: 20 fev. 2020.

GUILLÉN, G. *et al.* La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B., **Memoria final del**

proyecto de investigación, Valencia: Institución Valenciana de Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”, 1992. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 11 dez. 2017.

HAN, F. *et al.* Geometric Visualization Interaction System Based on Augmented Reality. Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Information Science (EEEIS 2017), **Atlantis Press**, Advances in Engineering Research (AER), v. 131, p. 473-478, 2017. Disponível em: <https://www.atlantispress.com/proceedings/eeeis-17/25884620> Acesso em: 20 fev. 2020.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do Maple, **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0465.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2018.

KAWAMOTO, M. **Habilidades de visualização em Geometria Espacial**: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio. Orientador: Vera Helena Giusti de Souza. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-Graduação – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3824010. Acesso em: 01 dez. 2017.

KORTENKAMP, U. Developments in Interactive Visualization and Physics Simulation with Cinderella (Study of Mathematical Software and Its Effective Use for Mathematics Education). **数理解析研究所講究録**, Kyoto University, v. 2022: p. 17-28, 2017. Disponível em: <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/231762/1/2022-03.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2020.

KROCHIN, A. L. Visual metaphor of mathematical abstractions and their visualization through newly uprised pdf-document facilities. **Publishing house Ural University press**, Yekaterinburg, Russia, p. 52-62, 2017. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/2b67/d7382d263ed57f9f455b2a98c110b704a539.pdf?_ga=2.55624299.1987108688.1586324568-1269137407.1568231833. Acesso em: 20 fev. 2020.

LEBOW, V.; BERNHARDT-BARRY, M.; DATTA, J. Improving Spatial Visualization Abilities using 3D Printed Blocks. **Civil Engineering Undergraduate Honors Theses**, v. 45, p. 1-15, 2018. Disponível em: <https://scholarworks.uark.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1043&context=cveguht>. Acesso em: 20 fev. 2020.

LIED, R. **Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos**: uma Proposta dinâmica aliada a Teoria de Registros de Representação Semiótica. Orientador: Inês Farias Ferreira. 2016. 94 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2016. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3838751. Acesso em: 01 dez. 2017.

LOVIS, K. A. *et al.* Um estudo comparativo sobre as habilidades geométricas de um grupo de alunos da educação básica. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.20, n.1, p. 110-127, 2018.

Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31775>. Acesso em: 20 fev. 2020.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. Geometry and geometry-teaching through the ages. *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century**: An ICMI study. Kluwer Academic Publishers: Springer, 1998. p.1-4.

MANCOSU, P. Visualization in logic and mathematics. *In*: MANCOSU, P.; JORGENSEN, K.F.; PEDERSEN, S. A. (eds.). **Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics**. Synthese Library, Dordrecht: Springer, v. 327, 2005, p. 13-30.

MATOS, J. F.; CARREIRA, S. P. Estudos de caso em Educação Matemática - problemas atuais. **Quadrante**, Portugal, v.3, n.1, p. 19-53, 1994. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/411/353>. Acesso em: 11 mai. 2020.

MÁXIMO, L. S. **Conhecimentos de visualização espacial**: tarefas de representações visuais com uso de recursos físicos e virtuais. Orientador: Paula Moreira Baltar Bellemain. 2016. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/31343/1/DISSERTAÇÃO%20Luciana%20da%20Silva%20Máximo.pdf> . Acesso em: 20 fev. 2020.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de Geometria que envolvem figuras. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.17, n.3, p.597-616, 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/25673/pdf>. Acesso em: 20 mar. 2018.

MOTA, J. F.; LAUDARES, J. B. Um estudo de planos, cilindros e quádras, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 497-512, ago. 2013. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2013000300011&script=sci_abstract&tlng=pt . Acesso em: 20 fev. 2020.

MOURA, L. K. J. **Visualização dinâmica no ensino da Geometria**. Orientador: André Krindges. 2018. 265 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciência e Matemática - Programa de Doutorado da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, MT, 2018. Disponível em: <https://www1.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/79e8b3001f7fa62cca2acd55627e3a.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2020.

MUNA, N.; PATTERSON A. E. Simple 3-D Visualization of Some Common Mathematical Minimal Surfaces using MATLAB. **IDEALS**: University of Illinois at Urbana-Champaign, p. 1-11, 2018. Disponível em: https://www.ideals.illinois.edu/bitstream/handle/2142/101899/Muna_Patterson_Minimal_Surfaces_Matlab_TechRep_V1.pdf?sequence=2&isAllowed=y . Acesso em: 20 fev. 2020.

NOBRE, S.; MANRIQUE, A. L. Análise de uma sequência didática envolvendo conteúdos de Geometria. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.21, n.5, p. 134-150, 2019. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45646> . Acesso em: 20 fev. 2020.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J. C.P. Visualização e Representação Geométrica com suporte

na Teoria de Van Hiele. **Ciência e Natura**, v.39, n.1, p. 108-117, 2017.

PACHEMSKA, T. A. *et al.* Visualization of the geometry problems in primary Math Education - needs and challenges. **Istraživanje Matematičkog Obrazovanja**, v.8, p. 33-37, 2016. Disponível em:

http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo_vol_8__br_15/imo_vol_8_br_15_33_37.pdf . Acesso em: 20 fev. 2020.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em Geometria**

Dinâmica. Orientador: Maria José Ferreira da Silva. 2013. 74 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=576689. Acesso em: 01 dez. 2017.

PARZYSZ, B. "Knowing" vs "Seeing": Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, Paris, v.19, n. 1, p. 79-92, feb. 1988.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et enformation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, Universidade de Palermo, Italia, v. 17, p. 128-151, 2006. Disponível em:

http://www4.pucsp.br/pensamentomatematico/quad17_BParzysz_06.pdf. Acesso em: 22 mar. 2018.

PASSOS, C. M. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a Geometria na sala de aula**. Orientador: Lucila Diehl Tolaine Fini. 2000. 348 f. Tese de doutorado

(Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de educação), Campinas, São Paulo, 2000. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253367>. Acesso em: 23 abr. 2018.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Tradução: Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Tradução: Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PRESMEG, N. Visualization in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Quebec, Canada, v. 6, n. 3, p. 42-46, 1986.

PRESMEG, N. Research on Visualization in Learning an Teaching Mathematics. *In*: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future**, Holanda: Sense Publishers, p. 205-235, 2006.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/242643133_Gestao_curricular_em_Matematica. Acesso em: 29 abr. 2019.

POSSANI, J. F. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular**. Orientador: Saddo Ag Almouloud. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2012. Disponível em:

<https://repositorio.pucsp.br/handle/11362/44444>. Acesso em: 29 abr. 2019.

<https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10935/1/Jose%20Fernando%20Possani.pdf> . Acesso em: 04 out. 2019.

RIVAL, I., Picture Puzzling: Mathematicians are Rediscovering the Power of Pictorial Reasoning. **The Sciences**. New York Academy of Sciences, p. 41-46, Jan./Feb., 1987. Disponível em: http://www.ivanrival.com/docs/picturepuzzling_2.pdf . Acesso em: 04 out. 2019.

SANTOS, A. H. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática**: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. Orientador: José Carlos Cifuentes. 2014. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2014. Disponível em: http://www.exatas.ufpr.br/portal/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/045_AlessandraHendidosSantos.pdf: Acesso em: 01 dez. 2017.

SANTOS, A. H.; MIKUSKA, M. I. S. Visualização Matemática e suas relações. *In*: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 13., 2019, Cuiabá – MT. **Anais...** Cuiabá: SBEM-Mato Grosso, 2019. Disponível em: <https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/2000/1832> . Acesso em: 01 fev. 2020.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed. Florianópolis: UFSC, 2005.

SOUZA, W. R. S. **Representações planas de figuras tridimensionais**: um estudo envolvendo visualizações. Orientador: Vera Helena Giusti de Souza. 2010. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, SP, 2010. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/3681/1/WILSON%20ROBERTO%20SOLUNA%20DE%20SOUZA.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2020.

SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T.; ALMOULOU, S. A. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 21, n.1, p. 322-346, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39101> . Acesso em: 20 fev. 2020.

UTOMO, E. S.; JUNIATI, D.; SISWONO, T. Y. E. Mathematical visualization process of junior high school students in solving a contextual problem based on cognitive style. **The International Conference on Research, Implementation, and Education of Mathematics and Science** (4th ICRIEMS), 2017. Disponível em: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4995138>. Acesso em: 20 fev. 2020.

UTOMO, E. S.; JUNIATI, D.; SISWONO, T. Y. E. Exploring aspects of mathematical visualization of junior high school student in a problem-solving task. **Malaysian Journal of Mathematical Sciences**, v. 12, n. 3, p. 421–436, 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/330349779_Exploring_Aspects_of_Mathematical_Visualization_of_Junior_High_School_Student_in_a_Problem-Solving_Task Acesso em: 20 fev. 2020.

VAN GARDEREN, D. Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. **Journal of Learning Disabilities**, v. 39, n. 6, p. 496-506, 2006.

VON GAGERN, M. *et al.* CindyJS Plugins - Extending the mathematical visualization framework. *In*: GREUEL, G. M.; KOCH, T.; PAULE, P.; SOMMESE, A. (eds). **Mathematical Software – ICMS 2016**. ICMS 2016, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham, v. 9725, 2016. p. 227-334.

WAGNER, D. R. **Arte, técnica do olhar e educação matemática: o caso da perspectiva central na pintura clássica**. Orientador: Cláudia Regina Flores. 2012. 124 f. Dissertação (Curso de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99277> . Acesso em: 20 fev. 2020.

YIN. R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

ZABALZA, M. **Diários de aula: um instrumento de pesquisa e desenvolvimento profissional**. Porto Alegre: Artmed, 1994.

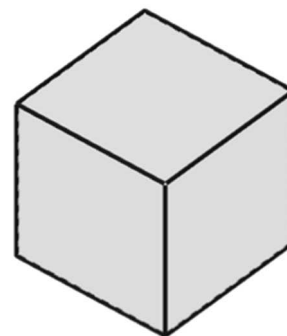
ZAGO, H. S.; FLORES C. R. Uma proposta para relacionar arte e educação matemática. **Relime**, México, v.13, n. 3, p. 337-354, 2010. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000300005 . Acesso em: 20 fev. 2020.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? *In*: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**, Washington: MAA., p. 1-7, 1991. Disponível em: http://www.hitt.uqam.ca/mat7191_fich/Zimmermann_Cunningham_1991.pdf. Acesso em: 20 fev. 2020.

APÊNDICE A - TAREFAS DE APROXIMAÇÃO

Figura 75 – Tarefa de Aproximação 1- Completando o cubo

1. O desenho da figura ao lado representa um cubo. Com esta informação, responda:
 - a. Quantos vértices do cubo não estão visíveis? Dê nome a todos os vértices deste cubo, utilizando letras maiúsculas (exemplo: A, B, C etc.).
 - b. Quantas arestas do cubo não estão visíveis? Desenhe estas arestas na figura.
 - c. Utilize os nomes dados aos vértices e escreva que vértice(s) está(ão) mais próximo(s) à você? E o(s) mais distantes? Explique.
 - d. Você tem arestas que pertencem a retas reversas? Se sim, indique essas arestas utilizando os nomes dos vértices dados em **a**.
 - e. Existem faces opostas? Se sim, utilize os nomes dos vértices para representá-las.



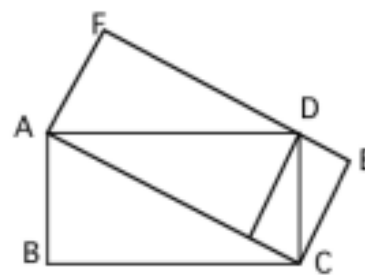
Fonte: A autora, baseada em uma tarefa proposta em Kawamoto (2016, p. 58), 2018.

A Tarefa de Aproximação 1, baseada em uma tarefa aplicada em Kawamoto (2016), visa identificar se o participante: sabe os conceitos de vértice, aresta, face, cubo, retas reversas, faces opostas; se sabe as regras matemáticas para desenhar uma representação tridimensional (por exemplo, que as arestas não visíveis são representadas com pontilhado); é capaz de reconhecer o vértice mais próxima dele e mais distante.

Visando identificar, também, a mobilização das habilidades de percepção figura-fundo (ao identificar que as unidades figurais), de percepção de relações espaciais (identificar corretamente as características das relações entre as várias unidades figurais e subfiguras), de percepção de posições espaciais (de relacionar a posição de um objeto (unidades figurais e subfiguras) a si mesmo (o observador) ou a outro objeto) e constância perceptiva (ao reconhecer que um objeto mantém certas propriedades, como sua forma ou tamanho, constantes mesmo que não sejam vistas total ou parcialmente, ou ainda, sejam observadas de um ponto de vista diferente).

Figura 76 – Tarefa de Aproximação 2- Comparando áreas

2. Observe a figura ao lado e responda:
- Quais figuras geométricas você consegue visualizar?
 - Quantas figuras geométricas diferentes você identifica no desenho?
 - Escreva a quantidade de figuras geométricas de cada tipo destacadas por você no item **b**.
 - Compare a área da figura geométrica ABCD com a área da figura geométrica ACEF. Como você pensou para dar esta resposta.

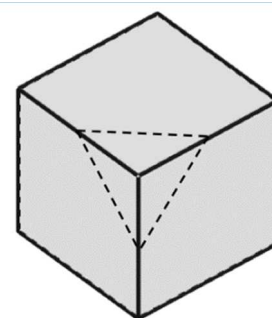


Fonte: A autora, baseada em uma tarefa proposta em Duval (2015, p. 3), 2018.

A Tarefa de Aproximação 2 foi baseada em uma tarefa aplicada em Duval (2015), e visa identificar se o participante reconhece figuras geométricas como: retângulo, triângulo, pentágono, trapézio, bem como se conhece o conceito de área de retângulo. Visa, também, identificar a mobilização de habilidades como: percepção figura-fundo (para identificar as subfiguras (unidades 1D e as formas 2D)), percepção de relações espaciais (ao identificar corretamente as características das relações entre as subfiguras) e a discriminação visual (ao relacionar as subfiguras para identificar semelhanças e diferenças entre elas).

Figura 77 – Tarefa de Aproximação 3- Cubo cortado

3. Considere um cubo com arestas medindo 2 cm. Corte todos os seus cantos a uma distância de 1cm, como indicado na figura ao lado por meio da linha tracejada. Quantos vértices o sólido obtido, após todos os cortes possíveis, possui? Você conhece o sólido obtido? Mesmo que não conheça, você tem um nome que gostaria de dar para ele?



Fonte: A autora, baseada em uma tarefa proposta em Fernández Blanco (2011, p. 163), 2018.

A Tarefa de Aproximação 3 foi baseada em uma tarefa aplicada em Fernández Blanco (2011). Visa identificar se o participante sabe conceitos como: vértices, arestas, sólidos geométricos, poliedros etc., visando identificar também a mobilização das habilidades de: percepção de relações espaciais (posta em prática ao estabelecer a relação entre o plano que faz o corte a uma certa distância do vértice e as bordas do cubo que ele corta), identificação visual (aplicada para poder reconhecer a figura ou os elementos do cubo que permanecem, uma vez que os oito cortes foram feitos -mentalmente- ao cubo inicial).

Figura 78 – Tarefa de Aproximação 4- Simetria

4. Considerando a figura ao lado, assinale com X, nos itens abaixo, qual é o menor número de quadrados que precisam ser pintados para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria? Indique no desenho que quadrados seriam.
- a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5



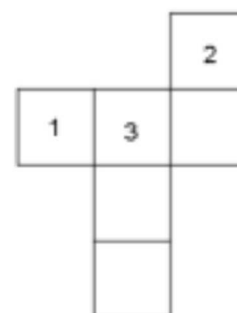
Fonte: A autora, baseada em uma tarefa proposta em Fernández Blanco (2011, p. 164), 2018.

Baseada em uma tarefa aplicada em Fernández Blanco (2011), a Tarefa de Aproximação 4 visa identificar se o participante sabe conceitos como: quadrado, simetria, eixo de simetria.

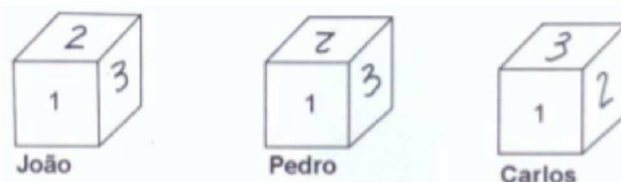
Visa identificar também a mobilização das habilidades como: discriminação visual (para comparar as possíveis formações da figura obtidas variando-se os eixos de simetria), reconhecimento de relações espaciais (é necessária para construir partes que são simétricas às que são dadas e obter uma figura com pelo menos um eixo de simetria) e rotação mental (necessária para realizar a ação de dobrar a figura ou girar partes dela para obter a simetria pedida).

Figura 79- Tarefa de Aproximação 5- Cubo

5. A figura ao lado representa uma das possíveis planificações de um cubo. Para completar um dado, as faces devem ser numeradas de 1 a 6. Se os números em faces opostas devem somar 7, complete a figura com os possíveis números. Se tiver mais que uma resposta, reproduza a figura e dê as outras respostas possíveis. Explique como você pensou.



Ainda em relação ao cubo, o professor pediu para João, Pedro e Carlos desenharem o cubo montado. Observe os desenhos deles e diga qual(is) o(s) correto(s). Explique sua resposta.



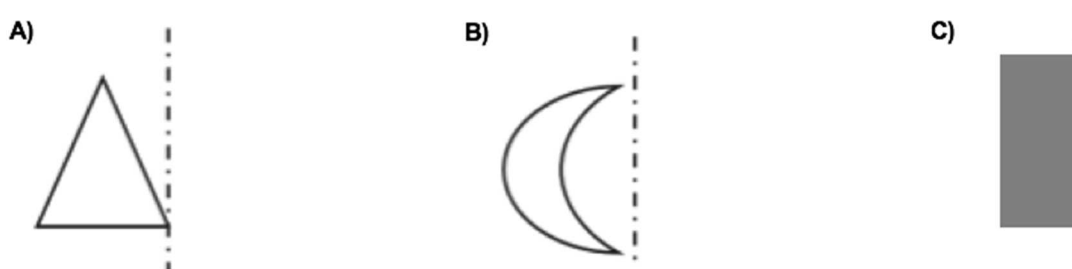
Fonte: A autora, baseada em uma tarefa proposta em Kawamoto (2016, p. 67), 2018.

A tarefa de Aproximação 5 foi baseada em uma tarefa aplicada em Kawamoto (2016). Visa identificar se o participante sabe conceitos como: arestas, lados opostos, planificação do cubo.

Visando identificar também a mobilização das habilidades de rotação mental (para a formação da imagem do cubo em 3D, a partir da planificação), discriminação visual (para comparar as faces do cubo e identificar as opostas), reconhecimento de relações espaciais (é necessária também na identificação das posições de cada face do cubo, das faces opostas, das letras e números escritos nas faces) e reconhecimento de posições espaciais (necessária na identificação das posições de cada letra e número escritos nas faces).

Figura 80 – Tarefa de Aproximação 6 - Simetria

6. Desenhe, aproximadamente, quais corpos obteremos girando as seguintes figuras em relação aos eixos indicados.



Fonte: A autora, baseada em uma tarefa proposta em Fernández Blanco (2011, p. 174), 2018.

A tarefa de Aproximação 6 foi baseada em uma tarefa aplicada em Fernández Blanco (2011). Visa identificar se o participante sabe conceitos como: rotação, eixo de rotação, superfícies, superfícies de revolução.

Visando identificar também a mobilização das habilidades de rotação mental (para a formação da representação da superfície em 3D, a partir da rotação das figuras dadas em torno do eixo de rotação e visualizar a configuração em movimento), reconhecimento de posições espaciais (é necessária também na identificação das posições que o objeto que sofreu rotação irá ocupar, dependendo do ângulo de rotação) e constância perceptiva (para reconhecer que o objeto (figura) em que foi aplicada a rotação mantém propriedades como a forma, tamanho, independente das posições ocupadas durante o movimento).

Respostas das tarefas:

Tarefa de Aproximação 1: O cubo representado no enunciado possui sete vértices visíveis.

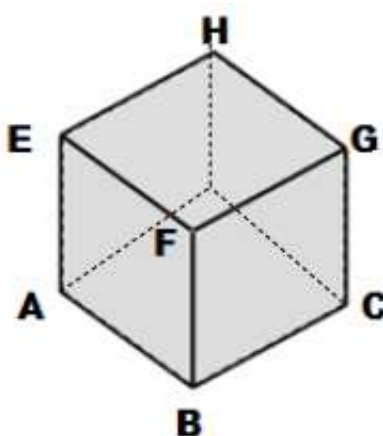
Na figura a seguir, cada vértice está representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

As três arestas não visíveis são representadas na figura abaixo por segmentos pontilhados, indicando que estão “atrás” na representação tridimensional. Considerando que o observador está olhando o cubo de frente à aresta BF, pelo fato de F estar na parte superior do cubo, pode-se considera-lo como o vértice mais próximo do observador, e o vértice D, o mais distante (A resposta pode ser diferente dependendo da posição do observador.)

Há várias arestas no cubo que podem ser consideradas como estando sobre retas reversas. Todas aquelas que são ortogonais e estão em faces opostas, por exemplo: AB e DH, AB e CG, entre outras.

As faces opostas são aquelas que não têm arestas em comum. Por exemplo: ABCD é oposta à EFGH, ABFE é oposta à CDGH, BCFG é oposta à ADEH.

Figura 81 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 1 – Completando o cubo



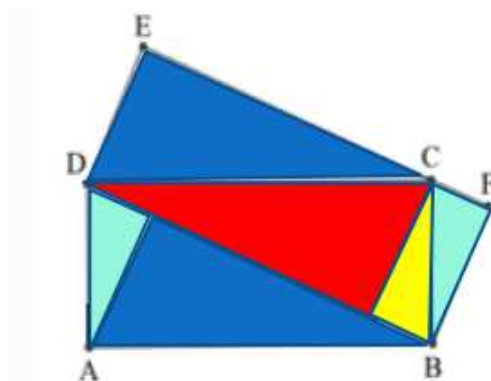
Fonte: A autora, 2018.

Tarefa de Aproximação 2: Em relação aos itens **a**, **b** e **c**, dentre as figuras geométricas que podem ser elencadas estão: 2 pentágonos; 4 retângulos; 2 trapézios; 6 triângulos. Um

exemplo de solução para o item **d**, do problema proposto parte da identificação dos três retângulos (unidades 2D) contidos na figura inicial e suas diagonais (unidades 1D) (ou seja, aplicação da função heurística). Ligando essas informações à propriedade que uma diagonal divide um retângulo em dois triângulos iguais (aplicação função discursiva), pode-se concluir, aplicando esta propriedade às três diagonais que compartilham, respectivamente, os três retângulos da figura dada, que as áreas dos retângulos ABCD e ACEF são iguais.

Outro exemplo de resposta é pelo tratamento figural apresentado na Figura 83. Observando pela utilização das cores, em que o triângulo vermelho é congruente aos triângulos azuis escuro e o triângulo amarelo é congruente aos azuis claro.

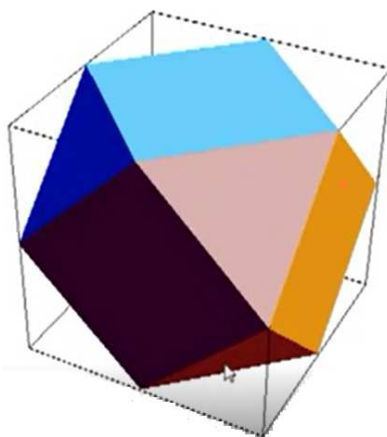
Figura 82 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 2 – Comparação de áreas



Fonte: A autora, 2018.

Tarefa de Aproximação 3: A figura 84 ilustra o sólido obtido após os cortes realizados no cubo, indicados no enunciado. O sólido obtido possui 12 vértices. É um sólido de Arquimedes, conhecido como: Cuboctaedro ou cubo truncado.

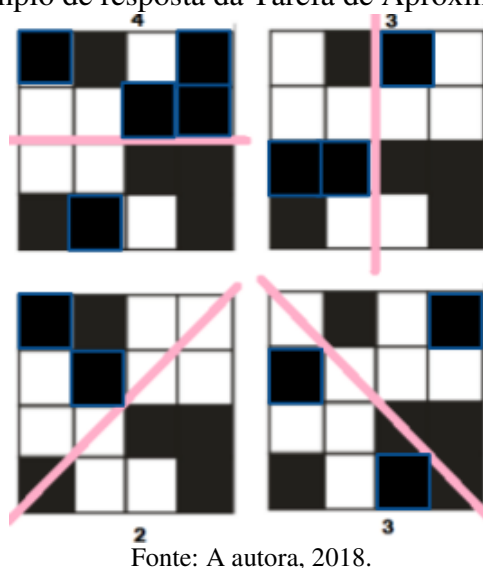
Figura 83 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 3 – Cubo cortado



Fonte: A autora, 2018.

Tarefa de Aproximação 4: A figura a seguir, ilustra os possíveis eixos de simetria que podem ser considerados. Pode-se observar que o menor número de quadrados que precisam ser pintados para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria é 2.

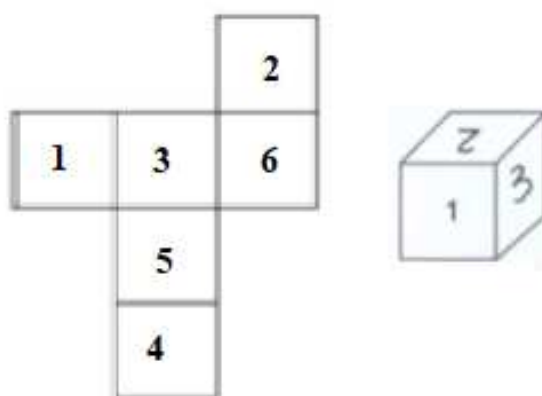
Figura 84 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 4 – Simetria



Fonte: A autora, 2018.

Tarefa de Aproximação 5: A figura 86 apresenta a resposta à tarefa. A partir da planificação, criando uma imagem mental e/ou uma representação externa (desenho), pode-se pensar na montagem do cubo, permitindo a identificação das faces opostas, a posição dos números escritos nas faces e os valores correspondentes a cada uma, de acordo com o enunciado.

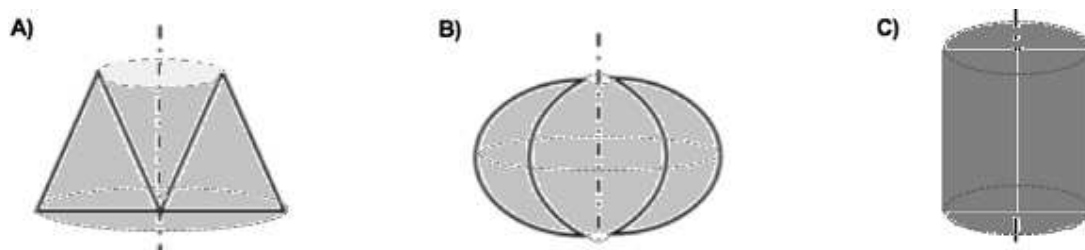
Figura 85 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 5 - Dado



Fonte: A autora, 2018.

Tarefa de Aproximação 6: A figura 87 exemplifica a solução, contendo a representação das superfícies obtidas girando as figuras em torno dos eixos indicados.

Figura 86 – Exemplo de resposta da Tarefa de Aproximação 6 - Superfícies de revolução



Fonte: A autora, 2018.

APÊNDICE B - DISCIPLINAS DE GEOMETRIA OFERTADAS NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Quadro 11 – Disciplinas de Geometria ofertadas no curso de Licenciatura em Matemática

Disciplina	Seriação/ Semestre	Carga horária	Ementa	Objetivo
Geometria Analítica (2872)	1ª / 1	102 h	Álgebra vetorial, Retas e plano, Cônicas e Superfícies Quádricas	Possibilitar ao aluno a compreensão de entes geométricos através do estudo de equações associadas aos mesmos. Dar ao acadêmico a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento de outras disciplinas. Possibilitar ao aluno desenvolver habilidades para o formalismo matemático.
Geometria Euclidiana (2831)	2ª / 2	102 h	A Geometria Euclidiana como modelo de sistematização da Matemática: origem e história.	Compreender a importância da axiomática na construção de teorias matemáticas, em especial da consistência da Geometria Euclidiana. Desenvolver o raciocínio matemático através do exercício de indução e dedução de conceitos geométricos. Desenvolver a capacidade de visualização de objetos planos e espaciais. Desenvolver o raciocínio geométrico.
Construções Geométricas (2884)	3ª / 1	68 h	Construções geométricas com régua e compasso, a Geometria e a estética e padrões geométricos.	Aprofundar os conhecimentos de Geometria euclidiana plana. Desenvolver o raciocínio geométrico. Desenvolver habilidade para resolução de problemas por meio de métodos geométricos. Desenvolver a criatividade e o senso estético.
Introdução À Geometria Não-Euclidiana (2895)	4ª / 1	68 h	Espaços com produto interno. Isometrias. Geometria Euclidiana. Grupos Ortogonais. Geometria Esférica e Elíptica. Trigonometria Esférica. Geometria Hiperbólica. Trigonometria Hiperbólica.	Possibilitar ao aluno o entendimento da Geometria como um estudo do espaço a partir de sua estrutura métrica. Em particular apresentar as Geometrias Euclidiana, Esférica e Hiperbólica.

Fonte: A autora, com base em <http://www.dma.uem.br/novapagina/programas/> Acesso em: 20 set. 2019, 2020.

APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Gostaríamos de convidá-lo a participar da pesquisa intitulada **HABILIDADES DE VISUALIZAÇÃO EM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA**, que faz parte do curso de Doutorado e é orientada pelo prof. Dr. Valdeni Soliani Franco, da Universidade Estadual de Maringá. O objetivo da pesquisa é analisar as habilidades de visualização em Geometria dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, ao ingressar e ao concluir o curso. Para isto, a sua participação é muito importante, e ela se daria por meio de sua participação em uma entrevista, na qual você responderá questões e argumentará sobre assuntos referentes à pesquisa. Informamos que poderão ocorrer os riscos/desconfortos a seguir: cansaço, desconforto ou constrangimento ao responder as perguntas durante a entrevista devido às gravações de áudio e vídeo. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você: recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo a sua pessoa. Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Os benefícios esperados são possíveis contribuições ao ensino, crê-se que a discussão em turmas de formação de professores, sobre os resultados dessa pesquisa, favorecerá o aprendizado e a preparação destes profissionais e dos demais que tiverem acesso à pesquisa, despertando-os para a necessidade de um aprimoramento de suas práticas de ensino, da didática e a necessidade da inserção dos conteúdos de Geometria que ainda não estão totalmente presentes nas aulas de matemática nos níveis de Ensino Fundamental e Médio, ou passam por defasagens. Caso você tenha mais dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM, cujo endereço consta neste documento. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e por você, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você, como sujeito ou responsável pelo sujeito de pesquisa) de tal forma a garantir o acesso ao documento completo.

Eu,
declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da
pesquisa coordenada pela Prof. Raquel Polizeli.

_____ Data: 20 de fevereiro de 2018.
Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, Raquel Polizeli, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de
pesquisa supra-nominado.

_____ Data: 20 de fevereiro de 2018.
Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador,
conforme o endereço abaixo:

Nome: Raquel Polizeli
Endereço: R. João Luiz Dias 459.
(telefone/e-mail): (44) 99849-1647 / raquelpolizeli.rp@gmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com
o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no
endereço abaixo:

COPEP/UEM
Universidade Estadual de Maringá.
Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.
Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.
CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel.: (44) 3261-4444
E-mail: copep@uem.br

APÊNDICE D - TERMO DE CONSENTIMENTO PARA REALIZAÇÃO DE PESQUISA

Eu, _____, coordenador(a) do curso de Matemática da Universidade Estadual, de Maringá, localizada na cidade de Maringá/PR, CEP: _____, brasileira, inscrita no CPF: _____, por intermédio do presente, autorizo a realização da pesquisa, com os acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática, tendo como título “**HABILIDADES DE VISUALIZAÇÃO EM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA**”. Autorizo a entrada da pesquisadora Raquel Polizeli, portadora do RG: 12 988 555-6 SSP/Paraná e inscrita no CPF: 310.492.608-56, na sala de aula do curso de Matemática para a realização da pesquisa no período de março a dezembro de 2018.

A pesquisadora acima citada fica conseqüentemente autorizada a utilizar, divulgar e publicar, para fins acadêmicos e culturais, os trechos e dados obtidos nos depoimentos, no todo ou em parte, editado ou não, bem como permitir a pessoas ou instituições acadêmicas o acesso ao mesmo para fins idênticos, com a ressalva de garantia, por parte dos referidos terceiros, da integridade do seu conteúdo.

Declaro que tenho conhecimento e que concordo plenamente que a participação que representa se dá a título gratuito, não recebendo, portanto, nenhum honorário ou gratificação referente ao projeto de pesquisa.

Concordo com a possibilidade de as informações relacionadas no estudo serem inspecionadas pelo Orientador, prof. Dr. Valdeni Soliani Franco e pelos membros do Comitê de Ética em Pesquisa da UEM.

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador, conforme o endereço abaixo:

Nome: Raquel Polizeli

Endereço: R. João Luiz Dias 459.

(telefone/e-mail): (44) 998491647 / raquelpolizeli.rp@gmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. UEM-PPG-sala 4.

CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3011-4444

E-mail: copep@uem.br

Maringá, 23 de fevereiro de 2018.

Coordenador(a) do curso de Matemática