UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSÉ ROBERTO FREITAS

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NOS QUATÉRNIOS DE HAMILTON

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2013

JOSÉ ROBERTO FREITAS

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NOS QUATÉRNIOS DE HAMILTON

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Ronie Peterson Dario, Dr.

CURITIBA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

F866 Freitas, José Roberto
Equações algébricas nos quatérnios de Hamilton / José Roberto Freitas. – 2013.
37 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Ronie Peterson Dario.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.
Bibliografia: f. 37.

1. Álgebra. 2. Quatérnios. 3. Hamilton, William Rowan, Sir, 1805-1865. 4. Matemática – Estudo e ensino. 5. Matemática – Dissertações. I. Dario, Ronie Peterson, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Campus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 008

"Equações algébricas nos quatérnios de Hamilton"

por

José Roberto Freitas

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 27 de agosto de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Maurício de Araujo Ferreira, Dr.
(UEFS)

Profa. Paula Olga Gneri, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

A Deus que permitiu a realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

- À minha namorada Evandra pela paciência e apoio nos momentos mais difíceis.
- À minha família, que sempre torceu por mais esta vitória.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao meu orientador professor Dr. Ronie Peterson Dario, por acreditar na minha capacidade e por sua importante disponibilidade durante a orientação.
- Aos professores do PROFMAT pelos valiosos ensinamentos.
- Aos colegas da Turma 2011, pela motivação e apoio.

RESUMO

FREITAS, José Roberto Freitas. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NOS QUATÉRNIOS DE HAMILTON. 37 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

A descoberta dos quatérnios pelo matemático britânico William Rowan Hamilton (1805-1865) permitiu uma nova abordagem na resolução de equações algébricas, fornecendo uma estrutura algébrica mais geral onde buscar soluções. Generalizando o caso clássico (sobre os complexos) apresentamos neste trabalho um tratamento da equação algébrica geral com coeficientes quatérnios. Verificamos que o número de raízes pode ser maior que o grau, e muitas vezes, pode mesmo ser infinito. Damos ênfase ao caso da equação quadrática, obtendo fórmulas para as raízes. Também nos detemos na obtenção de uma raiz enésima quatérnia de um quatérnio e de um número real.

Palavras-chave: Equações Algébricas, Quatérnios, Hamilton

ABSTRACT

FREITAS, José Roberto Freitas. EQUATIONS IN QUATERNIONS. 37 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

The discovery of quartenions by the mathematician Willian Rowan Hamilton (1805-1865) allowed a new approach regards solving algebraic equations, providing a broad algebraic structure to seek solutions. As a generalization of the classical case (about the complexes), here we present a treatment of the general algebraic equation with quaternions coefficients. We found that the number of roots can be greater than the degree and often can be infinite. We give emphasis to the case of the quadratic equation, obtaining its solution formulas. We also dealt with obtaining a quaternary root of a quaternion and a real number.

Keywords: Algebraic Equations, Quaternions, Hamilton

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

é a **equação algébrica geral de grau** n na indeterminada x, onde n pertence ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ e os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ são elementos de um anel, sendo $a_n \neq 0$.

Um anel é um conjunto fechado para operações de adição e multiplicação. A adição deve ser associativa, comutativa, admitir elemento neutro e inverso. A multiplicação deve ser associativa, e deve valer a distributividade da multiplicação em relação a adição. Se a multiplicação for comutativa, dizemos que o anel é comutativo. Se admitir elemento neutro, dizemos que é um anel com unidade.

Uma raiz da equação é um elemento (do anel ou de uma estrutura algébrica contendo o anel) que quando substituído em lugar de x satisfaz a equação. Boa parte da álgebra é voltada a resolver completamente a equação geral, no sentido de determinar a existência (ou não) das raízes, sua quantidade, e a maneira de encontrá-las, quando possível. Na história da matemática encontramos vários exemplos interessantes, divididos basicamente em duas formas de abordagem.

A primeira consiste em tratar os coeficientes em $\mathbb{Z}$ e buscar as soluções em $\mathbb{Q}$, tratando-se de um caso particular de equações diofantinas. Nesta linha, uma importante ferramenta é o Lema de Hensel, que encontra-se em (ENGLER, 2005, Teorema 4.1.3-p.87). Essencialmente, o Lema de Hensel permite que o problema seja reduzido, no sentido de resolver a mesma equação agora sobre um conjunto finito com p elementos, onde p é um número primo. Na sequência, obter a solução em $\mathbb{Q}$ por um processo de "levantamento" da raiz.

Por outro lado, há a teoria clássica das equações algébricas com coeficientes racionais. A história é muito rica neste sentido e foi iniciada muito antes do conhecimento sequer dos números negativos. Segundo (LIMA, 2006), textos babilônicos de aproximadamente quatro mil anos já continham exemplos envolvendo conhecer um número pela sua soma e o produto, que implicavam em estudar a equação quadrática. Observe que se temos dois números x e y, cuja soma é $s = x + y$ e cujo produto é $p = xy$, então podemos escrever $y = s - x$ e substituir o resultado na segunda igualdade, obtendo $p = x(s - x) = xs - x^2$, que implica na equação $x^2 - sx + p = 0$. Contudo, a utilização de uma fórmula para a resolução da equação quadrática surgiu somente no século XVI, com o matemático François Viète (1540-1603). Conforme (FRAGOSO, 2000), a fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para a equação quadrática geral

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a, b, c \in \mathbb{R} \text{ com } a \neq 0, \tag{1}$$

não foi criada pelo matemático indiano Bhaskara de Akaria, que foi um dos mais importantes matemáticos do século XII. Inclusive, o nome Bhaskara, aparentemente, é utilizado somente no Brasil.

A história da obtenção de fórmulas para equações de grau 3 e 4 aflorou na Itália do século XVI, quando Girolano Cardano (1501-1576) publicou sem autorização a fórmula devida a Niccoló Tartaglia (1499-1557) para a resolução da cúbica. Logo após, a equação geral de grau 4 foi resolvida, reduzindo-a à cública. Então, por muito tempo estudou-se a possibilidade de encontrar um método eficiente e semelhante para determinar as raízes de uma equação de grau 5. Porém, através da Teoria de Galois, provou-se que teríamos equações de grau maior ou igual a 5, sem soluções por radicais. Segundo (SANTOS, 1999), “a teoria de Galois dá uma resposta elegante à questão de saber se uma equação polinomial com coeficientes racionais, é ou não solúvel por radicais”.

No sentido da demonstração da existência de raízes de equações algébricas, um grande passo foi a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Foi o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em sua tese de doutorado (escrita aos 20 anos de idade) quem demonstrou o resultado. O teorema afirma que toda equação algébrica com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui uma raiz neste conjunto. Em termos mais rebuscados, $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado.

Com o avanço da matemática passou-se a considerar equações algébricas sobre outras estruturas algébricas mais gerais que os conjuntos numéricos já citados. Por exemplo, pode se considerar o problema de resolver uma equação algébrica sobre um anel comutativo com unidade.

Contudo, nosso interesse neste trabalho é em outra estrutura, diferente das já citadas. Nosso objetivo é estudar equações algébricas sobre a estrutura algébrica que, digamos, vem “logo depois” dos complexos: a álgebra dos quatérnios de Hamilton. Na sequência, faremos uma breve exposição sobre os quatérnios.

O matemático William Rowan Hamilton (1805-1865), foi responsável pela descoberta dos quatérnios em meados do século XIX. Seu objetivo era encontrar uma representação no espaço semelhante a representação feita no plano com números complexos. Procurava desenvolver o produto de duas triplas, buscando que este produto respeitasse a lei dos módulos: $|x|\,|y| = |xy|$, para todos x e y.

De início pensou em uma representação do tipo $x_0 + x_1 i + x_2 j$, com x_0, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Daí surgiu o problema em identificar qual seria o valor do produto ij. Suas primeiras tentativas incluíam admitir $ij = 1$, $ij = -1$ e $ij = 0$, mas para todas essas igualdades a lei dos módulos não era verificada. Um de seus maiores avanços foi quando admitiu a possibilidade de um produto não comutativo, onde $ij = -ji$. A partir desta suposição chegou finalmente a conclusão de que seria necessário um terceiro símbolo imaginário k, de natureza diferente de i e j, respeitando a propriedade $ij = -ji = k$. Assim, trabalhando em dimensão 4, a lei dos módulos é finalmente verificada.

Importante salientar que em um quatérnio $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, os termos i, j e k são associados aos três eixos dimensionais do espaço. Também é muito interessante um pequeno relato feito pelo próprio Hamilton sobre sua descoberta que encontramos em (MILIES, 2004):

> “... Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o arauto de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigido, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, que contém a solução do Problema.”

A ponte citada acima é conhecida hoje como “Quaternion Bridge”, e fica na cidade irlandesa de Dublin. Embora não tenhamos a anotação original citada por Hamilton, encontramos uma placa em homenagem a sua descoberta.

Formalmente, o conjunto dos quatérnios de Hamilton consiste de todas as combinações lineares formais dos elementos 1, i, j e k com coeficientes no corpo dos reais. Utilizaremos a notação

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Num quatérnio consideramos a_0 como sua parte real e $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ como sua parte pura. Assim chamamos de **quatérnio puro** qualquer elemento desse conjunto em que temos $a_0 = 0$ e pelo menos um dos elementos a_1, a_2, a_3 não nulo.

Existe uma correspondência unívoca entre o corpo dos números reais e os quatérnios. Basta associar cada número real a_0 ao quatérnio $a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, onde temos $a_1=a_2=a_3=0$. Analogamente, cada número complexo a_0+a_1i é associado ao quatérnio $a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, onde temos $a_2=a_3=0$. Portanto, por abuso de linguagem e notação iremos sempre considerar o corpo dos números reais e o corpo dos números complexos como subconjuntos dos quatérnios.

Consideramos no nosso trabalho o problema de resolver em $\mathbb{H}$ a equação algébrica geral de grau n

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0, \quad a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{H}.$$

Nossos estudos foram feitos a partir dos trabalhos publicados pelo matemático Ivan Morton Niven [1] (1915-1999), que consistem na principal referência do tema. Outra referência para o caso de equações quadráticas nos quatérnios é (HUANG, 2002), embora também esteja baseada nos trabalhos de Niven.

Nosso trabalho não visa expor a resolução completa. Para se ter uma ideia, a demonstração da existência de uma raiz para a equação acima demandaria conteúdos de Topologia Algébrica (NIVEN I.; EILENBERG, 1944). Iremos abordar alguns casos particulares interessantes e discutir brevemente o caso geral.

No Capítulo 2 encontramos soluções para as equações quadráticas, mostrando a fórmula para encontrar raízes nos quatérnios. Veremos que podemos ter infinitas raízes nos quatérnios para uma equação quadrática com coeficientes reais. No Capítulo 3 encontramos as raízes de equações do tipo $x^n-\alpha=0$, separando em dois casos: com $\alpha\in\mathbb{H}$ e com $\alpha\in\mathbb{R}$. Finalmente, no Capítulo 4, a partir de (NIVEN, 1941), mostramos como encontrar as soluções para equação algébrica de qualquer grau no conjunto dos quatérnios. Dedicamos o último capítulo a dois importantes teoremas sobre a existência e o número de raízes nos quatérnios para a equação acima.

Apresentaremos a seguir as propriedades e definições básicas a respeito dos quatérnios de Hamilton, como norma e traço. Muitas destas propriedades e definições serão utilizadas ao longo do trabalho. A demonstração das propriedades pode ser vista em (MILIES, 2004).

A adição de quatérnios é feita de maneira análoga a adição com complexos, somando termo a termo. Assim, a soma dos quatérnios $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ e $b=b_0+b_1i+b_2j+b_3k$ é dada por $a+b=a_0+b_0+(a_1+b_1)i+(a_2+b_2)j+(a_3+b_3)k$.

[1] Niven foi professor na faculdade de Oregon nos Estados Unidos com pesquisas em teoria dos números. Entre 1983 e 1984, foi presidente da Mathematical Association of America (MAA), cujo objetivo era melhorar o ensino de matemática nas escolas de ensino fundamental e médio. Portanto, Niven gostaria do PROFMAT...

A adição é comutativa, associativa e admite elemento neutro $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$. O oposto de $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ é definido trocando a_i por $-a_i$, onde $i = 0, 1, 2, 3$. Deixamos a verificação destes fatos ao leitor.

O produto de dois quatérnios é definido de forma distributiva, através das regras básicas

$$i^2 = j^2 = -1 \quad \text{e} \quad ij = -ji = k,$$

e assumindo a comutatividade dos coeficientes com os símbolos i, j e k. Assim, a multiplicação dos quatérnios a e b acima é dada por $ab = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$, com

$c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \qquad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2,$

$c_2 = a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1$ e $\quad c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0.$

A multiplicação é associativa, distributiva (à direita e à esquerda) em relação à adição e admite elemento neutro $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$. Cada quatérnio não nulo admite inverso, que definiremos na sequência. Nos será particularmente útil a descrição do quadrado do quatérnio $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, dada por

$$a^2 = {a_0}^2 - {a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 + 2a_0(a_1 i + a_2 j + a_3 k), \tag{2}$$

a qual é obtida diretamente da definição da multiplicação.

Sejam a e b dois quatérnios, o segundo não nulo. Definimos a **fração** $\frac{a}{b}$ como o quatérnio $b^{-1}a$ (multiplicação do inverso à esquerda, padrão durante o nosso trabalho). Isso pode ser diferente de fazer ab^{-1}. Na nossa definição, vale o cancelamento

$$\frac{xa}{xb} = \frac{a}{b},$$

para todo quatérnio x. De fato, usando a igualdade (sempre válida num anel) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$,

$$\frac{xa}{xb} = (xb)^{-1}xa = b^{-1}x^{-1}xa = \frac{a}{b}.$$

O cancelamento não precisa valer se colocar o x a direita. Note também que

$$\frac{a}{b} = 1.\frac{a}{b} = \frac{x}{x}\frac{a}{b}.$$

Com isso, temos

$$\frac{xa}{xb} = \frac{x}{x}\frac{a}{b}.$$

O **conjugado** do quatérnio a é definido como $\overline{a} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$. Diretamente verifica-se que $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$, $\overline{\overline{a}} = a$ e $\overline{b^{-1}a} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$. Uma propriedade interessante que utilizaremos a frente é dada pela proposição abaixo, que também deixamos para o leitor verificar.

Proposição 1.1. *Dado dois quatérnios a e b, temos que* $\overline{a}b+\overline{b}a$ *é um número real.*

Dado um quatérnio a, chama-se **norma** de a, ao número real dado por $\mathrm{n}(a) = a\overline{a} = \overline{a}a = {a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2$. Segue imediatamente que $\mathrm{n}(a) \geq 0$ e $\mathrm{n}(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Outra propriedade importante é que a norma é multiplicativa, isto é, $\mathrm{n}(ab) = \mathrm{n}(a)\mathrm{n}(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{H}$. Supondo que o quatérnio a é não-nulo, definimos seu inverso como $a^{-1} = \dfrac{\overline{a}}{\mathrm{n}(a)}$. Com isto obtemos $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Finalmente, o **traço** de a é o número real dado por $\mathrm{tr}(a) = a + \overline{a} = 2a_0$. Um quatérnio só tem traço nulo se for igual a zero, ou se for um quatérnio puro (a parte real a_0 é nula). É importante salientar, que o traço de um quatérnio é uma transformação linear de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{R}$.

Diretamente verifica-se que todo quatérnio a satisfaz a equação

$$x^2 - \mathrm{tr}(a)x + \mathrm{n}(a) = 0, \tag{3}$$

que será frequentemente utilizada no nosso trabalho.

2 A EQUAÇÃO QUADRÁTICA NOS QUATÉRNIOS DE HAMILTON

Neste capítulo vamos estudar a equação quadrática geral

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{H}, a \neq 0,$$

no sentido de encontrar todas as suas soluções na álgebra dos quatérnios de Hamilton. Para simplificar nossos estudos e os próprios enunciados dos teoremas, faremos uma primeira redução do problema reescrevendo a equação quadrática acima após dividir os coeficientes a, b e c por a (manteremos, contudo, as mesmas letras para o coefiente de x e para o termo independente).

Deve-se observar que multiplicamos a equação acima por a^{-1} à esquerda. Deixamos ao leitor verificar que as soluções são as mesmas da Equação 4 abaixo

$$x^2 + bx + c = 0, \text{ com } b, c \in \mathbb{H}. \tag{4}$$

A resolução do problema passa por uma etapa preliminar, na qual admitimos que os coeficientes b, c são números reais. Para esse caso, provaremos o Teorema 2.1, que descreve as raízes. Em resumo, só há duas possibilidades. A primeira, quando o discrimante $\Delta = b^2 - 4c$ é positivo, coincide com o caso real, produzindo duas raízes reais (podendo coincidir quando $\Delta = 0$). Na segunda possibilidade, quando o discriminante é negativo, há uma mudança essencial: a equação tem infinitas soluções nos quatérnios.

Em seguida trataremos do caso geral, onde b e c podem ser quatérnios de Hamilton não reais. No Teorema 2.3 explicitamos a solução, verificando que a equação quadrática tem no máximo duas raízes em $\mathbb{H}$.

Consideremos então o problema de encontrar soluções em $\mathbb{H}$ para a equação

$$x^2 + bx + c = 0, \text{ com } b, c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Teorema 2.1. *Denotando $\Delta = b^2 - 4c$, as raízes da Equação 5 em $\mathbb{H}$ são*

1) Reais e iguais a $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, quando $\Delta \geq 0$.

2) Quatérnias e iguais a $y_1 i + y_2 j + y_3 k - \frac{b}{2}$*, onde* $y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 = -\frac{\Delta}{4}$*, se* $\Delta < 0$*.*

Demonstração: Completando quadrados na Equação 5 obtemos

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = 0.$$

Assim, podemos nos restringir a analisar a equação $y^2 - \frac{\Delta}{4} = 0$, onde $y = x + \frac{b}{2}$. Como buscamos raízes nos quatérnios, temos que existem $y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \in \mathbb{R}$ tais que $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$. Elevando y ao quadrado obtemos (veja Equação 2)

$$y_0{}^2 - y_1{}^2 - y_2{}^2 - y_3{}^2 + 2(y_0 y_1 i + y_0 y_2 j + y_0 y_3 k).$$

Assim, como $y^2 = \frac{\Delta}{4} \in \mathbb{R}$, podemos concluir que

$$y_0{}^2 - y_1{}^2 - y_2{}^2 - y_3{}^2 = \frac{\Delta}{4} \text{ e } y_0 y_1 = y_0 y_2 = y_0 y_3 = 0.$$

Se $\Delta > 0$, então da primeira igualdade temos $y_0 \neq 0$. Da segunda igualdade segue que $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Assim, as soluções são $y = y_0 = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2}$. No caso de $\Delta = 0$ temos apenas uma solução, $y = 0$. Portanto, as soluções para a Equação 5 para $\Delta \geq 0$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Agora, se $\Delta < 0$, então $y_0{}^2 < y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2$. Assim, devido a igualdade $y_0 y_1 = y_0 y_2 = y_0 y_3 = 0$ temos que $y_0 = 0$. Desta forma, encontramos infinitas soluções para as quais é válido que $y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 = -\frac{\Delta}{4}$. Portanto, temos que as raízes são da forma $x = y_1 i + y_2 j + y_3 k - \frac{b}{2}$, onde y_1, y_2 e y_3 atendem a igualdade $y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 = -\frac{\Delta}{4}$.

□

Corolário 2.2. *A Equação 5 tem raízes quatérnias não reais se, e somente se, tem raízes complexas não reais.*

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 2.1.

□

Vejamos como exemplo a equação $x^2 - 6x + 10 = 0$. Temos $\Delta = -4 < 0$. Portanto as raízes são quatérnias e iguais a $y_1 i + y_2 j + y_3 k + 3$, onde $y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 = 1$. Por exemplo, uma das soluções é obtida com $y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ e $y_3 = 0$, que nos dá o quatérnio $x = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}} i + \sqrt{\frac{1}{2}} j$. Perceba que as raízes complexas dessa equação quadrática são $3 + i$ e $3 - i$ e ambas verificam a igualdade $y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 = 1$, com $y_1 = \pm 1$ e $y_2 = y_3 = 0$.

2.1 EQUAÇÕES QUADRÁTICAS COM COEFICIENTES NÃO REAIS

Agora vamos encontrar soluções para a Equação 4 considerando que pelo menos um dos coeficientes b ou c seja um quatérnio não real. Provaremos que estas equações terão no máximo duas raízes nos quatérnios e mostraremos como encontrá-las.

Faremos uma primeira redução do problema ao caso em que o traço do coeficiente b é nulo. Pois caso $\mathrm{tr}(b) \neq 0$, podemos fazer a seguinte substituição.

Suponha $x^2 + bx + c = 0$, b, $c \in \mathbb{H}$ e $\mathrm{tr}(b) \neq 0$. Fazendo a substituição $x = y - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(b)$ obtemos a equação abaixo

$$y^2 + \left(\frac{2b - \mathrm{tr}(b)}{2}\right) y + \frac{(\mathrm{tr}(b))^2 - 4b\mathrm{tr}(b) + 16c}{16} = 0,$$

onde o traço do coeficiente de y é nulo.

A estratégia principal para a resolução é encontrar a norma e o traço das raízes.

Vamos assumir que a Equação 4 possui ao menos uma raiz x_0 em $\mathbb{H}$. No Capítulo 4, apresentaremos resultados que garantem a existência da raiz x_0. Denotamos $\mathrm{tr}(x_0) = t$ e $\mathrm{n}(x_0) = n$, traço e norma de x_0, respectivamente. Conforme vimos na Equação 3, x_0 é uma raiz de

$$x^2 - tx + n = 0. \tag{6}$$

Diretamente verifica-se que

$$x^2 + bx + c = x^2 - tx + n + (b+t)x + c - n.$$

Como $x = x_0$ é raiz das Equações 4 e 6, obtemos

$$(b+t)x_0 + c - n = 0.$$

Definindo $\alpha = b + t$ e $\beta = c - n$, temos

$$\alpha x_0 + \beta = 0.$$

Claro que $\alpha = 0$ implica $\beta = 0$. Neste caso, temos $x^2 + bx + c = x^2 - tx + n$, que implica $b = -t$ e $c = n$. Portanto b e c são números reais e voltamos ao caso tratado no Teorema 2.1. Podemos então assumir $\alpha \neq 0$, donde obtemos

$$x_0 = -\alpha^{-1}\beta = \frac{n-c}{b+t}. \tag{7}$$

Substituindo agora os quatérnios b e c por seus conjugados, encontramos $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$, que são os conjugados de α e β, respectivamente. Da Equação 7, e pela definição de fração para os quatérnios, obtemos $x_0 = -\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\alpha}\alpha}$. Devido as propriedades do conjugado de um quatérnio, temos que $\overline{x_0} = -\dfrac{\overline{\overline{\alpha}\beta}}{\overline{\overline{\alpha}\alpha}} = -\dfrac{\overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}$. Podemos agora obter a norma e o traço de x_0:

$$n = \overline{x_0}x_0 = \left(-\frac{\overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\alpha}\alpha}\right) = \frac{\overline{\beta}\beta}{\overline{\alpha}\alpha}, \qquad t = x_0 + \overline{x_0} = -\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\alpha}\alpha} + \left(-\frac{\overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}\right) = -\frac{\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}.$$

Obtemos assim as equações

$$n\overline{\alpha}\alpha - \overline{\beta}\beta = 0, \tag{8}$$

$$t\overline{\alpha}\alpha + \overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\alpha = 0. \tag{9}$$

Substituindo as definições de α e β nas Equações 8 e 9, encontramos

$$nt^2 + nb\overline{b} - c\overline{c} + n(c+\overline{c}) - n^2 + nt(b+\overline{b}) = 0,$$

$$t^3 + tb\overline{b} - 2nt + t(c+\overline{c}) + \overline{b}c + \overline{c}b + t^2(\overline{b}+b) - n(\overline{b}+b) = 0.$$

Veja que nestas duas equações aparece o termo $b+\overline{b}$, que é exatamente o traço de b. Como fizemos a redução para $\mathrm{tr}(b) = 0$, as equações ficam da seguinte forma

$$nt^2 + n(b\overline{b} + c + \overline{c}) - c\overline{c} - n^2 = 0, \tag{10}$$

$$t^3 + tb\overline{b} - 2nt + t(c+\overline{c}) + \overline{b}c + \overline{c}b = 0. \tag{11}$$

Vamos agora enunciar o teorema principal dessa seção pelo qual encontramos as raízes da Equação 4 com coeficientes quatérnios não reais. Observe que após a leitura do Teorema 2.1, na seção anterior, podemos ser levados a pensar de maneira equivocada que a Equação 4 com os coeficientes b ou c quatérnios não reais também pode conter casos com infinitas raízes. O teorema a seguir mostra que encontramos no máximo duas raízes para estas equações, mesmo número de raízes paras as equações quadráticas com coeficientes e raízes reais.

Teorema 2.3. *Considere a equação quadrática*

$$x^2 + bx + c = 0, \ \textit{com}\ b, c \in \mathbb{H}, \tag{12}$$

com b ou c não real e $\mathrm{tr}(b) = 0$. *Definimos*

$$A = b\overline{b} + c + \overline{c}, \qquad B = c\overline{c}, \qquad C = \overline{b}c + \overline{c}b, \qquad D = A^2 - 4B.$$

1) Se $C \neq 0$, então as raízes da Equação 12 são dadas por

$$x_1 = \frac{t^3 + At + C - 2ct}{2(bt + t^2)} \quad e \quad x_2 = \frac{t^3 + At - C - 2ct}{2(bt - t^2)},$$

onde $t = \sqrt{y} \neq 0$ e y é a raiz real positiva da equação cúbica $y^3 + 2Ay^2 + Dy - C^2 = 0$.

Suponha $C = 0$.

2) Se $D < 0$, então as raízes da Equação 12 são dadas por

$$x = \frac{t^2 + A - 2c}{2(b \pm t)},$$

onde $t = \sqrt{y} \neq 0$ e y é a raiz real positiva da equação quadrática $y^2 + 2Ay + D = 0$.

3) Se $D \geq 0$, então as raízes da Equação 12 são dadas por

$$x = \frac{A \pm \sqrt{D} - 2c}{2b}.$$

Demonstração: Pela Proposição 1.1 e definições do Capítulo 1, temos que A, B, C e D são todos reais. Com estas definições, é conveniente reescrever as Equações 10 e 11, obtendo

$$nt^2 + An - B - n^2 = 0, \tag{13}$$

$$t^3 + tb\overline{b} - 2nt + t(c + \overline{c}) + C = 0. \tag{14}$$

Lembramos que nas Equações 13 e 14, $t = \mathrm{tr}(x_0)$ e $n = \mathrm{n}(x_0)$, onde x_0 é uma raiz fixada da Equação 12. Vamos agora analisar em separado os casos onde $\mathrm{tr}(x_0) = 0$ e $\mathrm{tr}(x_0) \neq 0$.

Considerando $t = 0$, a Equação 14 nos fornece $C = \overline{b}c + \overline{c}b = 0$. Na Equação 13, obtemos a equação quadrática

$$n^2 - An + B = 0. \tag{15}$$

Temos interesse apenas nas raízes reais desta equação, pois norma é real. Caso a Equação 15 não tenha raízes reais, podemos concluir que a Equação 12 não possui raízes com traço nulo. Essa verificação é feita através do valor de D, que é o discriminante da Equação 15. Portanto, se $D \geq 0$, encontramos valores para n que subtituídos na Equação 7 (e lembrando que consideramos $t = 0$), nos fornecem como raiz da Equação 12

$$x_0 = \frac{A \pm \sqrt{D} - 2c}{2b}.$$

Para o caso em que $\mathrm{tr}(x_0) \neq 0$, precisaremos do seguinte lema auxiliar.

Lema 2.4. *Se A é negativo, então D também é negativo.*

Demonstração: Suponhamos que $A = b\overline{b} + c + \overline{c}$ seja negativo. Como $b\overline{b}$ é a norma de b e portanto um número positivo, segue que $c+\overline{c}$ é um número negativo. Temos que $D = A^2 - 4B = b\overline{b}A + b\overline{b}(c+\overline{c}) + (c-\overline{c})^2$. Perceba que $b\overline{b}A$ e $b\overline{b}(c+\overline{c})$ são negativos. Basta então verificar $(c-\overline{c})^2$. Se $c = 0$ então A é positivo, o que contraria a hipótese. Se c for um número real diferente de 0, então $(c-\overline{c})^2$ é igual a 0 e terminamos a demonstração. Se c for o quatérnio $c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$, então $(c-\overline{c})^2$ será $-4({c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2)$ e portanto negativo. $\square$

Continuando com a demonstração do teorema, isolamos n na Equação 14 e obtemos $n = \dfrac{t^3 + tA + C}{2t}$. Fazendo a substituição de n na Equação 13 obtemos $t^6 + 2At^4 + Dt^2 - C^2 = 0$. Se $C \neq 0$ então, fazendo a substituição $y = t^2$, temos a cúbica

$$y^3 + 2Ay^2 + Dy - C^2 = 0. \tag{16}$$

Pela Regra de Sinais de Descartes[1] e pelo Lema 2.4, essa equação tem uma raiz positiva. Fazendo a substituição em $y = t^2$ temos duas raízes reais para t. Substituindo os valores de n e t na Equação 7, obtemos

$$x_0 = \frac{t^3 + At + C - 2ct}{2(bt + t^2)}.$$

Como temos um valor positivo e outro negativo para t, as raízes da Equação 12 são dadas por

$$\frac{t^3 + At + C - 2ct}{2(bt + t^2)} \text{ e } \frac{t^3 + At - C - 2ct}{2(bt - t^2)}.$$

Se $C = 0$, a expressão para obter a norma se reduz a $n = \dfrac{t^2 + A}{2}$. Para determinar o valor de t precisamos resolver a equação $t^6 + 2At^4 + Dt^2 = 0$. Como o caso $t = 0$ já foi tratado anteriormente, podemos reduzir a análise para $t^4 + 2At^2 + D = 0$. Fazendo $y = t^2$, obtemos

$$y^2 + 2Ay + D = 0. \tag{17}$$

Procuramos por soluções reais positivas. Neste caso precisamos de $y = -A \pm \sqrt{A^2 - D} > 0$, que implica em $A^2 - D > A^2$. Portanto, temos apenas uma solução positiva para Equação 17. Podemos também concluir que $D < 0$. A solução positiva da Equação 17 nos fornece dois valores reais para t, dados por $\pm\sqrt{y}$. A substituição dos valores de n e t na Equação 7, resulta

[1] Seja $f(x) = 0$ uma equação polinomial de coeficientes reais escrita segundo as potências decrescentes de x. A Regra de Sinais de Descartes afirma que o número de raízes positivas da equação é igual ou menor ao número de variações de sinais apresentadas pelos coeficientes de $f(x)$. Se for menor, a diferença é um número positivo par. O número de raízes negativas é igual ou menor ao número de variações de sinal apresentadas pelos coeficientes de $f(-x)$. Se for menor, a diferença é um número positivo par. Contam-se m vezes uma raiz de multiplicidade m. Em (WANG, 2004) e (ALBERT, 1943), temos duas demonstrações para essa regra.

nas raízes da Equação 12, dadas por $x_0 = \dfrac{t^2 + A - 2c}{2(b \pm t)}$.

$\square$

Vamos agora resolver três exemplos de equações quadráticas com coeficentes em $\mathbb{H}$ utilizando o Teorema 2.3.

Para a equação quadrática $x^2 + (i + j)x + 1 = 0$, encontramos $A = 4$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = 12$. Como $C = 0$ e $D > 0$, pelo Teorema 2.3, as raízes da dessa equação quadrática são dadas por $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{12} - 2}{2(i + j)}$, que resulta em

$$x = \frac{(1 \pm \sqrt{3})(-i - j)}{2}.$$

Consideramos a equação quadrática $x^2 + 1 + i + j + k = 0$, temos $A = 2$, $B = 4$, $C = 0$ e $D = -12$. Devido a $C = 0$ e $D < 0$, pelo Teorema 2.3, vamos obter t através da raiz positiva da equação $y^2 + 4y - 12 = 0$. Resolvendo, encontramos $t = \sqrt{2}$. Portanto as raízes são

$$x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i - \sqrt{2}j - \sqrt{2}k}{\pm 2}.$$

Resolvendo a equação $x^2 + (i + j)x + 4 - 4i - 2j - 2k = 0$, obtemos $A = 10$, $B = 40$, $C = -12$ e $D = -60$. Como $C \neq 0$, precisamos da raiz positiva da equação $y^3 + 20y^2 - 60y - 144 = 0$, que é $y = 4$. Portanto, $t = 2$. Assim, pelo Teorema 2.3, as raízes são $1 + i + j + k$ e $-1 - \frac{8}{3}i - \frac{4}{3}j - \frac{1}{3}k$.

3 RAÍZES ENÉSIMAS NO CONJUNTO DOS QUATÉRNIOS

O objetivo deste capítulo é determinar as raízes enésimas de um quatérnio α na álgebra dos quatérnios de Hamilton. Isto significa determinar todos os $x \in \mathbb{H}$ que são soluções da equação

$$x^n - \alpha = 0, \, \alpha \in \mathbb{H}.$$

na qual assumimos $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Primeiramente precisamos lembrar de algumas definições no conjunto dos números complexos, que serão utilizados nas demonstrações desta seção.

Qualquer número complexo pode ser representado por um ponto no chamado **Plano de Argand-Gauss**, que é definido em analogia com o plano cartesiano: ao eixo das abcissas chamamos de eixo real, e ao eixo das ordenadas chamamos eixo imaginário. Assim, dado o número complexo $z = x + iy$, podemos representá-lo pelo ponto $P = (x, y)$ no plano, conforme a Figura 1.

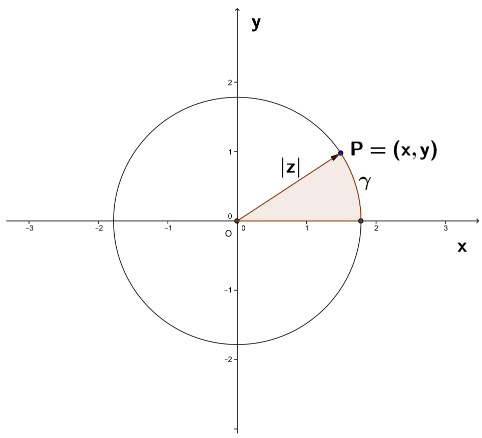

Figura 1: Plano de Argand-Gauss

Através da representação dos complexos no plano de Argand-Gauss determinamos a **forma trigonométrica** de um número complexo, também conhecida como **forma polar**. Uma representação vetorial do número complexo $z = x + iy$ é dada por $z = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do plano e $P = (x, y)$. O módulo é $|z| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$, que denotaremos por r.

O vetor $\overrightarrow{OP}$ forma com o eixo real um ângulo γ, que será denominado o **argumento** do número complexo z. Temos infinitos argumentos para z, pois podemos considerar $\gamma + 2q\pi$, com $q \in \mathbb{Z}$. Porém, o argumento que pertence ao intervalo $(0, 2\pi]$ é chamado de **argumento principal**. Destas observações e da Figura 1, conclui-se que $x = r\cos\gamma$ e $y = r\text{sen}\gamma$. Assim, a forma trigonométrica do número complexo z é dada por $z = r\cos\gamma + ir\text{sen}\gamma$.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos expressos na forma trigonométrica como $z_1 = r_1\cos\gamma_1 + ir_1\text{sen}\gamma_1$ e $z_2 = r_2\cos\gamma_2 + ir_2\text{sen}\gamma_2$. A **multiplicação** de z_1 e z_2 é obtida como

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left(\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \text{sen}\gamma_1\text{sen}\gamma_2 + i\left(\text{sen}\gamma_1\cos\gamma_2 + \text{sen}\gamma_2\cos\gamma_1\right)\right) \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(\gamma_1 + \gamma_2) + i\text{sen}(\gamma_1 + \gamma_2)\right). \end{aligned}$$

Utilizando a expressão acima n vezes para o número complexo $z = r\cos\gamma + ir\text{sen}\gamma$, obtemos a expressão

$$z^n = r^n\cos n\gamma + ir^n\text{sen}n\gamma.$$

Conhecida como a **Primeira Fórmula de Moivre**, devida ao matemático Abraham de Moivre (1667-1754).

A **Segunda Fórmula de Moivre** determina as raízes enésimas em $\mathbb{C}$ de um número complexo. Consideramos $z = r\cos\gamma + ir\text{sen}\gamma$ e $w = \rho\cos\theta + i\rho\text{sen}\theta$ uma **raiz enésima** de z, isto é, um elemento $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$. Utilizando a Primeira Fórmula de Moivre obtemos $\rho^n = r$, $\cos n\theta = \cos\gamma$ e $\text{sen}n\theta = \text{sen}\gamma$. Dessas igualdades, temos $\sqrt[n]{r} = \rho$ e $n\theta = \gamma + 2q\pi$ com $q \in \mathbb{Z}$, que implica em $\theta = \dfrac{\gamma + 2q\pi}{n}$. Substituindo na expressão original de w, obtemos assim a **Segunda Fórmula de Moivre**:

$$w = w_q = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\gamma + 2q\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\gamma + 2q\pi}{n}\right)\right).$$

A expressão acima depende de $q \in \mathbb{Z}$. Pela periodicidade das funções seno e cosseno, a fórmula produz apenas q números distintos, que correspondem aos valores de q pertencentes à $\{0, 1, ..., n-1\}$. Por exemplo, se $q = n + l$, $l \in \mathbb{Z}$, então

$$\cos\left(\frac{\gamma + 2q\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\gamma + 2(n+l)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\gamma + 2l\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\gamma + 2l\pi}{n}\right).$$

Fazendo $\gamma = 0$ e $r = 1$ na Segunda Fórmula de Moivre, obtemos as **raízes enésimas da unidade**: todos $\xi \in \mathbb{C}$ tais que $\xi^n = 1$. Assim,

$$\xi = \cos\left(\frac{2q\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2q\pi}{n}\right),\ q = 0, 1, ..., n-1.$$

Uma propriedade interessante das raízes enésimas da unidade é que a representação dessas raízes no plano complexo são os vértices de um polígono regular de n lados com centro na origem.

Se ξ é raiz enésima da unidade, e $\xi^q \neq 1$ para qualquer $q \in \{1, ..., n-1\}$, então ξ é chamada **raiz enésima primitiva da unidade**.

Uma caracterização importante das raízes enésimas da unidade, diferentes de 1, é que elas são as raízes do chamado **polinômio ciclotômico**

$$\phi_n(x) = x^{n-1} + ... + x + 1,\ n \geq 2.$$

Por exemplo, encontrar as raízes do polinômio ciclotômico de grau 3, corresponde a encontrar as raízes quárticas não triviais da unidade, pois $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x-1)\phi_4(x)$.

Observe que uma raiz quártica é $\xi = i$. As outras raízes são $\xi^2 = -1$, $\xi^3 = -i$ e $\xi^4 = 1$.

O exemplo acima será retomado nos quatérnios no final da Seção 3.2, que trata das raízes enésimas de um número real no conjunto dos quatérnios.

3.1 RAÍZES ENÉSIMAS QUATÉRNIAS DE UM QUATÉRNIO NÃO REAL

Lembramos que nosso objetivo neste capítulo é determinar as soluções em $\mathbb{H}$ da equação $x^n - \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{H}$, ou seja, nosso objetivo é encontrar as raízes enésimas quatérnias de um quatérnio α. Assim, dado $n \geq 2$ um número natural, queremos determinar todas as soluções nos quatérnios para

$$x^n - \alpha = 0,\ \alpha \in \mathbb{H}. \tag{20}$$

Como resultado dos dois lemas demonstrados na sequência, teremos que uma raiz da Equação 20 é da forma $c\alpha + d$, com $c, d \in \mathbb{R}$. Portanto, para obter todas as raízes enésimas basta encontrarmos todos estes possíveis números reais c e d.

Conforme já vimos, um quatérnio y pode ser escrito da forma $y = y_0 + y'$, onde $y_0 \in \mathbb{R}$ é sua **parte real** e y' é sua **parte pura**.

Lema 3.1. *Sendo y um quatérnio com $y' \neq 0$, qualquer potência de y tem parte pura $b_0 y'$, para algum $b_0 \in \mathbb{R}$ dado em termos dos coeficientes y_1, y_2, y_3, onde $y' = y_1 i + y_2 j + y_3 k$.*

Demonstração: Utilizaremos o primeiro princípio da indução sobre n. Para $n = 1$ é fácil verificar: $y = y_0 + 1.(y_1 i + y_2 j + y_3 k)$. Suponha que a afirmação é verdadeira para $n-1$. Pela hipótese da indução podemos escrever $y^{n-1} = a + b(y_1 i + y_2 j + y_3 k)$, para certos $a, b \in \mathbb{R}$. Agora, as igualdades abaixo concluem a demonstração do lema. A hipótese de indução é utilizada na segunda igualdade.

$$\begin{aligned} y^n &= (y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k)(a + b(y_1 i + y_2 j + y_3 k)) \\ &= y_0 a - b({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2) + (y_0 b + a)(y_1 i + y_2 j + y_3 k). \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Seja α um quatérnio não real. Suponha $\beta^n = \alpha$, com $\beta \in \mathbb{H}$. Existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\beta = c\alpha + d$.*

Demonstração: Seja β_0 a parte real e β_1 a parte pura de β. Pelo Lema 3.1, existem $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\beta^n = a_0 + b_0 \beta_1$. Segue que

$$\beta^n = a_0 + b_0(\beta - \beta_0) = a_0 - b_0 \beta_0 + b_0 \beta.$$

Logo, $b_0 \beta = \beta^n - a_0 + b_0 \beta_0$. Como $\alpha \notin \mathbb{R}$, temos $b_0 \neq 0$. Isso implica em $\beta = {b_0}^{-1} \beta^n - {b_0}^{-1}(a_0 - b_0 \beta_0)$. Portanto podemos escrever $\beta = c\alpha + d$, onde $c = b_0^{-1}$ e $d = -b_0^{-1}(a_0 - b_0 \beta_0)$.

□

Nosso problema agora se resume a encontrar todos os valores reais de c e d para os quais a equação abaixo tenha o quatérnio α como uma raiz.

$$(cx + d)^n - x = 0. \tag{23}$$

Para isto, precisamos lembrar da divisão euclidiana de polinômios e demonstrar um lema fundamental que reduzirá o problema a encontrar raízes complexas de uma equação quadrática.

Denotamos por $\mathbb{R}[x]$ o conjunto de todos os polinômios na variável x com coeficientes reais. Com as operações de adição e multiplicação usuais de polinômios, $\mathbb{R}[x]$ é um anel comutativo. O teorema a seguir encontra-se em (GARCIA, 2010, p.24).

Teorema 3.3 (Algoritmo da Divisão Euclidiana)**.** *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios em $\mathbb{R}[x]$. Existem únicos polinômios $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{R}[x]$, tais que*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

onde o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $g(x)$, ou $r(x) = 0$.

Na notação do Teorema 3.3, se $r(x) = 0$, então dizemos que g divide f.

Sejam $t_0, n_0 \in \mathbb{R}$, traço e norma de α respectivamente, e a equação com coeficientes reais satisfeita por α

$$x^2 - t_0 x + n_0 = 0. \tag{24}$$

Note que pelo Corolário 2.2, podemos afirmar que a Equação 24, sempre tem raízes complexas não reais.

Novamente na notação do Teorema 3.3, tomando $f(x)$ o polinômio do lado esquerdo da Equação 23 e $g(x)$ o polinômio do lado esquerdo da Equação 24, temos que g divide f. De fato, pelo Teorema 3.3, existe um polinômio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = g(x)q(x) + ax + b.$$

Como α é raiz de $g(x)$ e de $f(x)$, temos que $a\alpha + b = 0$. Agora, como α é não real, temos $a = b = 0$. Portanto, g divide f.

Assim, para resolver a Equação 23, precisamos encontrar todos os números reais c e d tais que g divida f. Neste sentido, utilizaremos o seguinte lema.

Lema 3.4. *Na notação acima estabelecida, g divide f se, e somente se, as raízes complexas não reais de g são raízes de f.*

Demonstração: Se $g(x)$ divide $f(x)$, então existe um polinômio $q(x)$ com coeficientes reais tal que $f(x) = g(x)q(x)$. Assim qualquer raiz de $g(x)$ também é raiz de $f(x)$. Reciprocamente, dividindo $f(x)$ por $g(x)$ encontramos $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, com $r(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Se x_0 é raiz complexa de $g(x)$ (e por hipótese também raiz de $f(x)$), então $r(x_0) = 0$, isto é, $ax_0 + b = 0$. Seque que $a = 0$ (caso contrário, $x_0 \in \mathbb{R}$). Logo $b = 0$. Portanto $r(x_0) = 0$ e g divide f.

□

O exposto até agora explica, finalmente, a estratégia para resolver o problema: considerar uma raiz complexa λ da Equação 24 e encontrar c e d reais tais que $(c\lambda + d)^n = \lambda$. Com isso, podemos agora demonstrar o teorema principal deste capítulo, que nos permite determinar as raízes enésimas da Equação 20.

Teorema 3.5. *Seja α um quatérnio não real e $n \geq 2$ um número natural. Considere n_0 e t_0 norma e traço de α, respectivamente. Na equação $x^2 - t_0x + n_0 = 0$, assuma que z_1 e $\overline{z_1}$ são suas raízes complexas de forma que $z_1 = r(\cos\gamma + isen\gamma)$, com $0 < \gamma < \pi$, tem coordenada imaginária positiva. Assim, as raízes enésimas de α são da forma $c\alpha + d$, com*

$$c = \frac{sen\left(\theta + \dfrac{2q\pi}{n}\right)}{sen\,(n\theta)}.\frac{1}{p^{n-1}},$$

$$d = p\cos\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right) - p\cot(n\theta)\,sen\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right),\ q = 0, 1, ..., n-1,$$

onde $p^n = r$, $n\theta = \gamma$ e o mesmo valor de q usado simultaneamente para c e d.

Demonstração: Na notação e estratégia anterior ao enunciado, seja λ uma raiz complexa da Equação 24. Se λ for a raiz com a coordenada imaginária positiva, em coordenadas polares podemos escrever $\lambda = r(\cos\gamma + i\text{sen}\gamma)$, com $0 < \gamma < \pi$. Por conveniência técnica, substituímos agora $r = p^n$ e $\gamma = n\theta$. Com isto

$$\lambda = p^n(\cos n\theta + i\text{sen} n\theta),\ 0 < n\theta < \pi. \tag{25}$$

Pela Equação 23 obtemos $(c\lambda + d)^n = \lambda$. A substituição no lado esquerdo da Equação 25 nos fornece $(cp^n(\cos n\theta + i\text{sen} n\theta) + d)^n = p^n(\cos n\theta + i\text{sen} n\theta)$, com $0 < n\theta < \pi$. Extraímos agora a raiz n desta equação utilizando a segunda Fórmula de Moivre para obter

$$cp^n(\cos n\theta + i\text{sen} n\theta) + d = p\left[\cos\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right)\right],\ q = 0, 1, ..., n-1. \tag{26}$$

Subtraindo os dois lados da Equação 26 pelos seus respectivos conjugados, teremos

$$2cp^n i\text{sen} n\theta = 2pi\text{sen}\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right), \text{com } q = 0, 1, ..., n-1$$

e com isso podemos encontrar os valores de c pois, $\text{sen} n\theta \neq 0$. Dessa forma, temos:

$$c = \frac{\text{sen}\left(\theta + \dfrac{2q\pi}{n}\right)}{\text{sen} n\theta}.\frac{1}{p^{n-1}},\ q = 0, 1, ..., n-1. \tag{27}$$

Substituindo o valor de c na Equação 26 chegamos ao valor de d que é dado por

$$\begin{aligned} d &= p\cos\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right) + pi\text{sen}\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right) - \frac{\text{sen}\left(\theta + \dfrac{2q\pi}{n}\right)}{\text{sen} n\theta}.\frac{1}{p^{n-1}}.p^n(\cos n\theta + i\text{sen} n\theta) \\ &= p\cos\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right) - p\cot n\theta\,\text{sen}\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right),\ q = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned}$$

Precisamos ainda provar que todos os $n-1$ valores encontrados para c e d são distintos. Se todos os valores de c na Equação 27 são diferentes, então os quatérnios $c\alpha + d$ também são. Suponhamos que dois valores de c são iguais. Assim temos que $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2h\pi}{n}\right) = \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right)$, com $h \neq q$. Desta forma teremos dois valores iguais para d. Isto implica $\cos\left(\theta + \frac{2h\pi}{n}\right) = \cos\left(\theta + \frac{2q\pi}{n}\right)$, com $h \neq q$. Como os dois ângulos estão entre 0 e 2π e possuem o mesmo cosseno, a soma dos dois é 2π. Isso implica em $n\theta = \pi(n-h-q)$. Porém, pela Equação 25, temos que $n\theta < \pi$. Chegamos assim a uma contradição. Portanto, para cada valor de q encontramos diferentes valores para c e d.

□

A seguir apresentamos dois exemplos resolvidos utilizando o Teorema 3.5.

Na equação $x^4 - \alpha = 0$, onde $\alpha = -8+8i+8j+8k$, temos $\mathrm{n}(\alpha) = 256$ e $\mathrm{tr}(\alpha) = -16$. A raiz complexa com coordenada imaginária positiva na equação quadrática $x^2+16x+256 = 0$ é $z = -8+8\sqrt{3}i$. Passando para a forma trigonométrica, obtemos $z = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$. Assim, $p = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$. Por exemplo, para $q = 0$ temos $c = \frac{1}{8}$ e $d = 0$, que nos fornece como solução $x = -1+i+j+k$.

Para $x^2 - \alpha = 0$, onde $\alpha = i+j+k$, temos $\mathrm{n}(\alpha) = 3$ e $\mathrm{tr}(\alpha) = 0$. Encontrando a raiz complexa com coordenada imaginária positiva na equação quadrática $x^2+3 = 0$, obtemos $z = \sqrt{3}i$, que corresponde à forma trigonométrica $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$. Assim, $p = \sqrt[4]{3}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Para $q = 0$, temos $c = \frac{\sqrt[4]{108}}{6}$ e $d = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$, que nos fornece $\frac{\sqrt[4]{12}}{2} + \frac{\sqrt[4]{108}}{6}(i+j+k)$ como raiz quadrada de α. E para $q = 1$, temos $c = -\frac{\sqrt[4]{108}}{6}$ e $d = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$, donde $x = \frac{\sqrt[4]{12}}{2} - \frac{\sqrt[4]{108}}{6}(i+j+k)$.

3.2 RAÍZES ENÉSIMAS QUATÉRNIAS DE UM NÚMERO REAL

Nesta seção queremos resolver a equação $x^n - \alpha = 0$ em $\mathbb{H}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Provaremos que esta equação possui exatamente duas raízes em $\mathbb{H}$ quando $n = 2$ e $\alpha > 0$. Caso contrário, teremos infinitas raízes nos quatérnios.

Teorema 3.6. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ e $r = \sqrt[n]{|\alpha|}$, com r real. Definimos*

$$A = \begin{cases} 0, & se\ \alpha > 0 \\ 1, & se\ \alpha < 0. \end{cases}$$

As raízes de $x^n - \alpha = 0$ em $\mathbb{H}$ são dadas por

$$x = r\cos\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right) + x_1 i + x_2 j + x_3 k,\ q = 0, 1, ..., n-1,$$

com x_1, x_2, x_3 satisfazendo a igualdade

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = r^2 - r^2\cos^2\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right),\ q = 0, 1, ..., n-1,$$

com os mesmos valores de q utilizados simultaneamente nas duas equações.

Demonstração: De início vamos considerar as equações

$$x^n - \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

$$x^2 - t_0 x + n_0 = 0. \tag{30}$$

Analogamente aos argumentos anteriores ao Teorema 3.5, procuramos pelos quatérnios cuja norma e traço sejam os valores de t_0 e n_0 que mantenham a divisibilidade do lado esquerdo da Equação 29 pelo lado esquerdo da Equação 30. Pelo Corolário 2.2, a Equação 30 possui raízes complexas, e através delas encontramos todos os valores para t_0 e n_0. Seja r raiz enésima de α. Portanto, temos que $r^n = |\alpha|$. Isso implica em $\alpha = r^n$ ou $\alpha = -r^n$. Consideramos então $\alpha = r^n \cos A\pi$, onde $A = 0$ ou $A = 1$, dependendo do sinal de α. Substituímos o valor de α na Equação 29 e obtemos

$$x^n = r^n \cos A\pi.$$

Da Segunda Fórmula de Moivre temos que $x = r\left(\cos\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right)\right)$, sendo $q \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Tomando o conjugado de x, encontramos o traço e a norma da Equação 30.

$$t_0 = 2r\cos\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right), q = 0, 1, ..., n-1, \tag{31}$$

$$n_0 = r^2. \tag{32}$$

Perceba que qualquer quatérnio não real raiz da Equação 30, tem o traço t_0 e a norma n_0, e portanto é da forma

$$x = r\cos\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right) + x_1 i + x_2 j + x_3 k, q = 0, 1, ..., n-1$$

e os valores x_1, x_2, x_3 devem satisfazer a igualdade

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = r^2 - r^2\cos^2\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right), q = 0, 1, ..., n-1.$$

com o mesmo valor de q utilizado simultaneamente nas duas equações. Entre as raízes da Equação 29 temos duas reais, r e $-r$, onde $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

$\square$

Perceba que a Equação 29 tem infinitas raízes, com excessão do caso mostrado na proposição a seguir.

Proposição 3.7. *A Equação 29 tem exatamente duas raízes quando $A = 0$ e $n = 2$.*

Demonstração: Para que a Equação 29 não tenha infinitas raízes, é necessário que $r^2 = r^2 \cos^2\left(\dfrac{A\pi + 2q\pi}{n}\right)$ para qualquer valor de q. Isso implica em

$$\cos^2\left(\frac{A\pi + 2q\pi}{n}\right) = 1, \text{ com } q = 0, 1, ..., n-1.$$

Assim, temos sempre $\dfrac{A\pi + 2q\pi}{n} = 0$ ou $\dfrac{A\pi + 2q\pi}{n} = \pi$. Se $A = 1$, temos $\dfrac{A\pi + 2q\pi}{n} = \dfrac{\pi + 2q\pi}{n}$. Tomando $q = 0$, ficamos com $\dfrac{\pi}{n}$, que obvialmente tira a possibilidade de termos $\dfrac{\pi}{n} = 0$. Como $n \geq 2$, não é possível ter $\dfrac{\pi}{n} = \pi$. Logo $A \neq 1$.
Se $A = 0$, temos $\dfrac{A\pi + 2q\pi}{n} = \dfrac{2q\pi}{n}$. Tomando $q = 0$, ficamos com $\dfrac{2q\pi}{n} = 0$. Com $q = 1$, só temos $\dfrac{2\pi}{n} = \pi$, se $n = 2$. Portanto, com $n = 2$ e $A = 0$, e utilizando o Teorema 3.6 encontramos exatamente duas raízes para Equação 29.

$\square$

Vamos agora resolver quatro exemplos utilizando o Teorema 3.6. O terceiro exemplo mostra o caso em que $A = 0$ e $n = 2$, que pelo Lema 3.7, a equação tem exatamente duas raízes. Perceba que o último exemplo foi resolvido anteriormente para os complexos, quando determinamos as raízes do polinômio ciclotômico de grau 3 utilizando as raízes da unidade para $n = 4$.

Vamos determinar as raízes cúbicas de 8 nos quatérnios, isto é, resolver a equação $x^3 - 8 = 0$. Temos $A = 0$, $n = 3$ e $r = 2$. Com $q = 0$ temos como raiz $x = 2$. Com $q = 1$ e $q = 2$, temos como raízes $x = -1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, onde ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 3$. Por exemplo, uma das raízes é $-1 + i + j + k$.

Da mesmo forma que fizemos no exemplo anterior, determinar a raiz quadrada do número -9, equivale a resolver a equação quadrática $x^2 + 9 = 0$. Temos $A = 1$, $n = 2$ e $r = 3$. Com $q = 0$ e $q = 1$, temos como raízes $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, onde ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 9$. Por exemplo, uma das raízes é $\sqrt{3}i + \sqrt{3}j + \sqrt{3}k$. Note que podemos resolver este exemplo através do Teorema 2.1, presente no Capítulo 2, para o caso em que $\Delta < 0$.

Este terceiro exemplo refere-se ao caso tratado na Proposição 3.7. Vamos determinar a raiz quadrada do número 9, encontrando as raízes da equação $x^2 - 9 = 0$. Obtemos $A = 0$, $n = 2$ e $r = 3$. Com $q = 0$ temos como raízes $x = 3 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, onde ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 0$. Com $q = 1$ temos como raízes $x = -3 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, onde ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 0$. Desta forma as únicas raízes são 3 e -3. Novamente podemos utilizar o Teorema 2.1 do Capítulo 2. Neste caso, $\Delta = 36 > 0$, e as raízes são encontradas através da fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.

Vamos utilizar o Teorema 3.6 para encontrar as raízes quatérnias do polinômio ciclotômico de grau 3, dado por $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Pelo Teorema 3.6, temos $A = 0$, $n = 4$ e $r = 1$. Para $q = 0$, deixamos para o leitor verificar que a raiz é $x = 1$. Para $q = 1$ e $q = 3$, encontramos como raiz $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, onde ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$. Para $q = 2$, encontramos como raiz $x = -1$. Portanto, nos quatérnios, o polinômio ciclotômico de grau 3 possui infinitas raízes. Uma delas é $x = -1$, e as outras são $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, onde ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$. Note que todas as raízes complexas não reais do polinômio ciclotômico de grau 3 (por consequência as raízes quárticas da unidade), estão entre as raízes que encontramos nos quatérnios.

4 UMA BREVE DISCUSSÃO DO CASO GERAL

Nos capítulos anteriores estudamos algumas equações algébricas particulares: a equação quadrática no Capítulo 2 e a equação envolvendo raízes enésimas no Capítulo 3. Neste capítulo, apresentaremos uma generalização importante destes estudos, tratando a equação algébrica geral

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0 = 0,\ a_0, a_1, ..., a_{m-1} \in \mathbb{H}, \tag{33}$$

citada na introdução do nosso trabalho.

É importante mencionar que a Equação 33 não é a equação algébrica sobre $\mathbb{H}$ mais geral possível em uma variável. Como estamos considerando uma estrutura algébrica não comutativa, poderíamos ter, por exemplo, termos do tipo $axbxcxd$. Contudo vamos considerar apenas os casos como a Equação 33. Existe uma versão do Teorema Fundamental da Álgebra para polinômios sobre os quatérnios, demonstrada por Niven em (NIVEN I.; EILENBERG, 1944, Teorema 1-p.246), que garante a existência de raízes, mesmo no caso geral. A demonstração deste teorema envolve topologia algébrica e foge do escopo do nosso trabalho. No caso da Equação 33, veremos uma demonstração da existência de raízes no Teorema 4.2. Contudo, não será possível apresentá-la totalmente, pois depende de um Teorema de Ore, demonstrado em (ORE, 1933, Teorema 18-p.507).

Teorema 4.1 (Ore)**.** *Qualquer fatoração de um polinômio de $\mathbb{R}[x]$ em fatores irredutíveis sobre $\mathbb{H}$ é dada em fatores lineares.*

Podemos agora enunciar e demonstrar o teorema que garante a existência de raízes na Equação 33. Este resultado sobre a existência de raízes suporta os estudos feitos nos capítulos anteriores, pois resolvemos as equações partindo do pressuposto de que existiam raízes.

Denotaremos por $p(x)$ o polinômio que é o lado esquerdo da Equação 33.

Teorema 4.2. *A Equação 33 admite uma raiz em $\mathbb{H}$.*

Demonstração: Consideramos o polinômio $\overline{p}(x)$, substituindo os coeficientes de $p(x)$ por seus conjugados. Fazendo a multiplicação de $p(x)$ por $\overline{p}(x)$ obtemos o polinômio $\wp(x)$. Todos os coeficientes de $\wp(x)$ são reais, pois são sempre traço ou norma de algum coeficiente de $p(x)$. Ou ainda, são expressões do tipo $x\bar{y}+\bar{y}x$, com $x,y \in \mathbb{H}$. Lembre que pela Proposição 1.1, tratam-se de números reais. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado em (PASCU, 2005), o polinômio $\wp(x)$ admite uma raiz complexa, que denotaremos por z_1. A seguir, dividimos $\wp(x)$ por $x-z_1$. Seguindo este processo, vamos obter que $\wp(x)$ pode ser fatorado em um produto de fatores lineares do tipo $x-z_i$, onde $\wp(z_i)=0$ e $z_i \in \mathbb{C}$. Um fator irredutível de $p(x)$ é também um fator de $\wp(x)$. Portanto, faz parte de uma fatoração particular de $\wp(x)$. Pelo Teorema 4.1, os fatores de $p(x)$ são também lineares. Logo, o fator irredutível de $p(x)$ é também linear. Vamos denotá-lo por $x-w$ e assim obtemos $p(x)=\left(x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_0\right)(x-w)$, para certos $b_0,\ldots,b_1 \in \mathbb{H}$. Assim, tomando $x=w$, temos que w é uma raiz da Equação 33.

□

A próxima etapa é mostrar o método para determinar as raízes da Equação 33. Como vimos nos capítulos anteriores, podemos determinar todas as soluções estudando apenas o traço e a norma das mesmas. Para isso, é necessário resolver um sistema de duas equações, que envolvem termos, muitas vezes de grau elevado. Isto pode tornar o processo nada trivial.

Seja x_0 uma raiz da Equação 33, com $\mathrm{tr}(x_0)=t$ e $\mathrm{n}(x_0)=n$, traço e norma de x_0, respectivamente. Como já vimos, a equação quadrática a seguir tem x_0 como raiz

$$x^2-tx+n=0. \tag{34}$$

A divisão euclidiana para polinômios com coeficientes quatérnios está definida em (ORE, 1933, p.483). Trata-se do caso não comutativo, que difere da divisão euclidiana mostrada no Teorema 3.3. Tem-se que considerar o lado pelo qual é feita a divisão. Por exemplo, $p(x)=q(x)g(x)$, pode ser diferente de $p(x)=g(x)q(x)$. Utilizaremos o primeiro caso, considerando a divisão pela direita.

Divindo o lado esquerdo da Equação 33 pelo lado esquerdo da Equação 34 obtemos

$$p(x)=q(x)(x^2-tx+n)+\alpha(x)+\beta, \tag{35}$$

onde α e β são funções de t e n envolvendo os coeficientes da Equação 33.

Podemos agora enunciar o teorema principal deste capítulo, no qual assumimos $\alpha \neq 0$.

Teorema 4.3. *As raízes da Equação 33 são da forma*

$$x_0=-\frac{\beta}{\alpha}, \tag{36}$$

onde β e α são funções de t e n, traço e norma das raízes da Equação 33, respectivamente. Os *números t e n são determinados através do sistema de equações*

$$\begin{cases} n\overline{\alpha}\alpha - \overline{\beta}\beta = 0, \\ t\overline{\alpha}\alpha + \overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\alpha = 0. \end{cases}$$

Demonstração: Como x_0 é raiz da Equação 33 e da Equação 34, temos que $\alpha(x_0) + \beta = 0$. Vamos assumir $\alpha \neq 0$. Assim obtemos $x_0 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$. Trocando os coeficientes da Equação 33 por seus conjugados, obtemos $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$, que são os conjugados de α e β. Seque que $x_0 = -\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\alpha}\alpha}$ e $\overline{x_0} = -\dfrac{\overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}$. Podemos agora obter a norma e o traço de x_0

$$n = \frac{\overline{\beta}\beta}{\overline{\alpha}\alpha},$$

$$t = -\frac{\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}.$$

Como $\alpha \neq 0$, basta resolver o sistema de equações abaixo para determinar os valores de t e n.

$$\begin{cases} n\overline{\alpha}\alpha - \overline{\beta}\beta = 0, \\ t\overline{\alpha}\alpha + \overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\alpha = 0. \end{cases}$$

□

No início da demonstração do teorema, obtemos $\alpha(x_0) + \beta = 0$. Assim, no caso em que $\alpha = 0$, temos $\beta = 0$. Consequentemente, $p(x) = q(x)(x^2 - tx + n)$. Portanto, basta encontrar todas as soluções da equação quadrática $x^2 - tx + n = 0$, e teremos as raízes da Equação 33.

Do Teorema 4.3, vimos que o método para resolver a Equação 33 está essencialmente baseado na resolução do sistema de duas equações que aparece na última demonstração. Suas soluções produzem norma e traço das raízes, com as quais calcula-se as próprias raízes através da expressão $x = \alpha^{-1}\beta$. Como já citamos, casos particulares foram tratados nos Capítulos 2 e 3, para a equação quadrática e para o cálculo de uma raiz nos quatérnios, respectivamente.

Em alguns casos, a fatoração de um polinômio antes da aplicação direta do método pode complicar as contas. Por exemplo, aplicando diretamente o Teorema 4.3 na equação ciclotômica $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} n\left(1 - n + t + t^2\right)^2 - (1 - n - nt)^2 = 0, \\ t\left(1 - n + t + t^2\right)^2 + 2\left(1 - n + t + t^2\right)(1 - n - nt) = 0. \end{cases}$$

Contudo, é mais prático encontrar diretamente as raízes para o polinômio $x^4 - 1$ pelo método mais específico apresentado no Capítulo 3, donde decorre que as raízes são $x = -1$ e $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, onde ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$.

Por fim, vamos apresentar um outro importante teorema do trabalho de Niven, que decorre principalmente sobre a quantidade de raízes na Equação 33. Não faremos sua demonstração, que encontra-se em (NIVEN, 1941, Teorema 3-p.658), e demanda o estudo de resultados acima dos objetivos do nosso trabalho.

Teorema 4.4. *A Equação 33 possui infinitas raízes se $p(x)$ for divisível por $x^2 - tx + n$ (ver Equação 34), com os valores reais de t e n satisfazendo a inequação $t^2 < 4n$. Se o número de raízes for finito, então a Equação 33 tem no máximo $(2m-1)^2$ raízes.*

De acordo com o Teorema 4.4, uma equação cúbica, por exemplo, pode ter até 25 raízes se o polinômio associado não for divisível por $x^2 - tx + n$. Vejamos o método para a cúbica e vamos estudar um caso particular, buscando primeiramente as raízes cujo traço é 0. Em seguida, fazendo a fatoração através da raiz encontrada, podemos utilizar o método desenvolvido no Capítulo 2 na equação quadrática resultante.

Consideramos a equação

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{H}. \tag{37}$$

Seguindo o processo desenvolvido neste capítulo, encontramos os valores para α, β e seus conjugados, conforme abaixo

$$\begin{aligned} \alpha &= b - n + at + t^2, \\ \overline{\alpha} &= \overline{b} - n + \overline{a}t + t^2, \\ \beta &= c - an - nt, \\ \overline{\beta} &= \overline{c} - \overline{a}n - nt. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, vamos considerar $\mathrm{tr}(a) = A$, $\mathrm{tr}(b) = B$, $\mathrm{tr}(c) = C$, $\mathrm{n}(a) = D$, $\mathrm{n}(b) = E$, $\mathrm{n}(c) = F$, $\overline{b}a + \overline{a}b = G$, $\overline{c}a + \overline{a}c = H$ e $\overline{b}c + \overline{c}b = I$. Aplicando o Teorema 4.3 para Equação 37, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} n^3 + (-B - 2At - 3t^2 - D)n^2 + (E + Gt + Bt^2 + Dt^2 + At^3 + t^4 + H + Ct)n - F = 0, \\ (A + 3t)n^2 + (-2Bt - 3At^2 - 4t^3 - G - C - 2Dt)n + Gt^2 + Bt^3 + Et + At^4 + I + t^5 + \\ + Ht + Ct^2 + Dt^3 = 0. \end{cases}$$

Vejamos o que ocorre para a equação $x^3 + ix + \sqrt{2}j = 0$. Neste caso, encontramos $A = B = C = D = G = H = I = 0$, $E = 1$ e $F = 2$. Fazendo as devidas substituições no sistema de equações acima, temos

$$\begin{cases} n^3 - 3t^2n^2 + (1+t^4)n - 2 = 0, \\ 3tn^2 - 4t^3n + t + t^5 = 0. \end{cases}$$

Usando $t = 0$ nas equações chegamos ao problema de obter as soluções reais da equação $n^3 + n - 2 = 0$. Neste caso, só existe $n = 1$. Portanto, temos uma solução do sistema com $t = 0$ e $n = 1$. Logo, $\alpha = i - 1$ e $\beta = \sqrt{2}$. Pelo Teorema 4.3 uma raiz da equação $x^3 + ix + \sqrt{2}j = 0$ é $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}j + \sqrt{2}k}{2}$.

Dividindo o polinômio $x^3 + ix + \sqrt{2}j$ por $x - x_0$ obtemos o polinômio

$$x^2 + x_0x + (i-1).$$

Seguindo o método apresentado no Capítulo 2 para equação

$$x^2 + x_0x + (i-1) = 0,$$

encontramos $A = -1$, $C = 0$ e $D = -7$. Resolvendo a equação $y^2 - 2y - 7 = 0$, encontramos $t = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$. Assim, encontramos duas raízes para esta equação quadrática, que também são raízes da equação $x^3 + ix + \sqrt{2}j = 0$, dadas por

$$\frac{2(1 + \sqrt{2} - i)}{\pm 2\sqrt{1 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{2}j + \sqrt{2}k}.$$

5 CONCLUSÃO

Através do nosso trabalho pudemos apresentar métodos eficazes para determinar raízes de equações algébricas sobre os quatérnios de Hamilton. No Capítulo 2, tratamos das equações quadráticas. Primeiramente, fizemos uma abordagem a respeito das equações quadráticas com coeficientes reais, obtendo duas situações distintas. A primeira, onde o número de raízes é no máximo duas. A segunda situação, onde encontramos infinitas raízes nos quatérnios, incluindo as duas raízes complexas não reais. Ainda no Capítulo 2, observamos que a equação quadrática envolvendo traço e norma de uma raiz é a ideia principal na resolução de uma equação de grau qualquer.

No Capítulo 3, encontramos as raízes quatérnias de um número real e de um quatérnio não real, resolvendo a equação $x^n - \alpha = 0$. Encontramos três casos distintos. Quando $\alpha \in \mathbb{H}$, temos exatamente n raizes. Se $n = 2$, e o parâmetro A presente no Teorema 3.6 for nulo, temos exatamente duas raízes. E finalmente, para $\alpha \in \mathbb{R}$, quando encontramos infinitas raízes.

No Capítulo 4, discutimos o tratamento da equação mais geral, $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0 = 0$, com os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$ em $\mathbb{H}$. Apresentamos importantes resultados a respeito destas equações algébricas nos quatérnios, incluindo o método para determinar suas raízes e o teorema de Niven sobre a quantidade de raízes.

Não abordamos neste trabalho equações sobre os chamados **quatérnios generalizados**. Para definí-los considera-se um corpo F de característica diferente de 2 e dois elementos não nulos u e v de F. Então, a álgebra dos quatérnios generalizados $\mathbb{H}_F(u,v)$ é o F-espaço vetorial das combinações lineares formais $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ e $\{1, i, j, k\}$ é a base de $\mathbb{H}_F(u,v)$. A multiplicação é definida distributivamente a partir das seguintes regras: $i^2 = u$, $j^2 = v$ e $ij = -ji = k$. Outro estudo interessante a ser considerado é o trabalho com equações em anéis de quatérnios racionais $(F = \mathbb{Q})$.

Concluímos citando uma frase do matemático húngaro George Pólya (1887-1985): "A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar."

REFERÊNCIAS

ALBERT, A. A inductive proof of descartes rule of signs. **The American Mathematical Monthly**, v. 50, n. 3, p. 178–180, 1943.

ENGLER, A. J. A. P. e. a. **Valued Fields**. 1. ed. Berlin: Springer, 2005.

FRAGOSO, W. C. Uma abordagem histórica da equação do segundo grau. **Revista do Professor de Matemática**, n. 43, p. 20–25, 2000.

GARCIA, A. e. a. **Elementos da Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

HUANG, L. Quadratic formulas for quaternions. **Applied Mathematics Letters**, v. 15, n. 5, p. 533–540, 2002.

LIMA, E. L. e. a. **A Matemática no Ensino Médio - v. 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MILIES, C. P. **Anéis com Divisão: Uma Introdução através de sua História**. 1. ed. São Paulo: EDUSP, 2004.

NIVEN, I. Equations in quaternions. **The American Mathematical Monthly**, v. 48, n. 10, p. 654–661, 1941.

NIVEN I.; EILENBERG, S. The “fundamental theorem of algebra”for quaternions. **Butlletin of the American Mathematical Society**, v. 50, n. 4, p. 246–248, 1944.

ORE, O. Theory of non-commutative polynomials. **Annals of Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 480–508, 1933.

PASCU, M. N. A probabilistic proof of the fundamental theorem of algebra. **American Mathematical Society**, v. 133, n. 6, p. 1707–1711, 2005.

SANTOS, C. A. M. **Calculando os Grupos de Galois sobre os Racionais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 1999.

WANG, X. A simple proof of descartes rule of signs. **The American Mathematical Monthly**, v. 111, n. 6, p. 525–526, 2004.