

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO ENGENHARIA DE CONTROLE E  
AUTOMAÇÃO

FELIPE DA COSTA GOES

**CONTROLE E OPERAÇÃO EM SISTEMAS QUÂNTICOS  
FOTÔNICOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2017**

**FELIPE DA COSTA GOES**

**CONTROLE E OPERAÇÃO EM SISTEMAS QUÂNTICOS  
FOTÔNICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Graduação Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Graduando em Engenharia” – Área de Concentração: Controle.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Debarba

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2017**



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Elétrica**  
**Curso de Engenharia de Controle e Automação**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Felipe da Costa Goes**

### **Controle e operação em sistemas quânticos fotônicos**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 15:50hs do dia 30/11/2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Tiago Debarba - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - (Membro)

---

Prof(a). Me(a). Tiago Henrique Dos Reis - (Membro)

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que me concedeu a vida, a saúde e a capacitação para realizar este trabalho.

Família, amigos e a você vida. Infelizmente não estou perto, não posso partilhar dos sorrisos, dos seus lindos sorriso, da incrível presença. Venho só agradecer, confesso que havia preparado um belo discurso, com palavras que se desenvolveram na minha cabeça, mas deixei meu coração falar, amor a gente não define apenas deixa-o se expressar. Lhes dou o meu AMOR, é tudo que tenho, sei que não é "nada", mais é o de mais valioso que posso dar!

Ao Prof. Dr. Tiago Debarba por todo o apoio e suporte desde o início dos trabalhos de pesquisa à realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Aos Professores Me. Tiago Henrique Dos Reis da Silva e Dr. Cristiano Marcos Aguilhari, além das contribuições no trabalho, mas de tal importância as contribuições na minha formação acadêmica.

Em especial ao Renan Ap. Pelogia pelo apoio e pela desenvolvimento gráfico do trabalho (Figuras).

Aos colegas e amigos do curso de Engenharia de Controle e Automação e a todos que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

GOES, Felipe. CONTROLE E OPERAÇÃO EM SISTEMAS QUÂNTICOS FOTÔNICOS. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Graduação Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Neste trabalho são estudados conceitos de mecânica quântica aplicados a um dispositivo manipulador de fótons, cuja fase relativa obtida entre os caminhos ópticos é alterada pela variação no índice de refração em um guia de onda. O objetivo deste trabalho é projetar uma metodologia de controle através de uma modelagem do sistema físico estudado a fim de obter, pelas relações intrínsecas dos materiais, um controle de fase relativa em um sistema quântico fotônico .

**Palavras-chave:** Controle de sistemas quânticos, Interferômetro, metrologia quântica

## **ABSTRACT**

GOES, Felipe. CONTROL AND OPERATION IN PHOTONIC QUANTUM SYSTEMS. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Graduação Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

In this work the concepts of quantum mechanics on a photon device are studied. The variation in its relative phase is obtained through of the variation in the optical path, whtih is controlled through the refraction index of a waveguide. The main objective of the project is to construct the control from the parameters of a quantum system, aiming for the design construction of a control methodology, through subsequent relations of the measure on the phase of the system, in order to control the external parameters responsible for the phase variation.

**Keywords:** Control of quantum systems, Interferometer, quantum metrology

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Caminho óptico através de uma série de meios .....	14
FIGURA 2	– Reflexão e refração em uma fronteira de separação entre dois meios. ....	15
FIGURA 3	– Reflexão e refração em uma fronteira de separação entre dois meios. ....	16
FIGURA 4	– Geometria de um feixe refractado ilustrando o princípio de Fermat. ....	17
FIGURA 5	– Gráfico representando o caminho óptico à condições de reflexão, ilustrando (a) Máximo, (b) Estacionário e (c) Mínimo. ....	18
FIGURA 6	– Diagrama de um interferômetro de March Zehnder simples. ....	19
FIGURA 7	– Divisor de Feixe dois fótons. ....	21
FIGURA 8	– Funcionamento March Zehnder .....	23
FIGURA 9	– Controle em malha aberta. ....	31
FIGURA 10	– Controle em malha fechada. ....	32
FIGURA 11	– Relação na dinâmica do sistema. ....	35
FIGURA 12	– Ação de controle P e PI .....	38
FIGURA 13	– Ação de controle P e PD .....	41
FIGURA 14	– Modelo representativo das características térmicas do sistema .....	45
FIGURA 15	– Modelo representativo geral do dispositivo .....	45
FIGURA 16	– Interpolação linear resistência elétrica .....	47
FIGURA 17	– Esquemático do controlador. ....	49
FIGURA 18	– Comportamento em regime permanente da malha de controle. ....	50
FIGURA 19	– Relação de fase do manipulador. ....	52
FIGURA 20	– Relação de fase no manipulador. ....	53
FIGURA 21	– Representação de caminhos MZ. ....	54

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Analogia Elétrica Térmica .....	47
TABELA 2	– Método Skogestad .....	48



## LISTA DE SIGLAS

BS	Divisor de Feixe
PS	Phase Shifter
<i>H</i>	<i>Hadamard Gate</i>
MZ	March Zehnder

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Delta$	Caminho Óptico
$U_{bs}$	Unitária de transformação do Divisor de Feixe
$\sigma_X$	Operador de Pauli $X$
$\sigma_Y$	Operador de Pauli $Y$
$\sigma_Z$	Operador de Pauli $Z$
$\phi$	Fase Relativa

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	11
1.2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	11
1.3	OBJETIVOS	11
1.3.1	Objetivo Geral	11
1.3.2	Objetivos Específicos	12
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>13</b>
2.1	PROPRIEDADES ÓPTICAS	13
2.1.1	Índice de refração	13
2.1.2	Caminho Óptico	14
2.1.3	Leis de reflexão e refração	15
2.1.4	Princípio de Fermat	16
2.2	MARCH ZEHNDER	19
2.2.1	Descrição matricial do divisor de feixe	20
2.2.2	Aplicação no interferômetro March Zehnder	23
2.3	FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA	24
2.3.1	Formalismo de Pauli	25
2.4	MANIPULADOR DE ESTADOS QUÂNTICOS	25
2.5	METROLOGIA DE QUÂNTICA	29
2.6	CONCEITOS DE CONTROLE	30
2.6.1	Sistemas de controle: malha fechada <i>versus</i> malha aberta	31
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>34</b>
3.1	MATERIAIS E MÉTODOS	34
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DO CONTROLADOR</b>	<b>36</b>
4.1	CONTROLE PID	36
4.1.1	Controle Proporcional (P)	36
4.1.2	Controle Proporcional Integral (PI)	38
4.1.3	Controle Proporcional Derivativo (PD)	40
4.1.4	Controle Proporcional Integral Derivativo (PID)	41
4.2	MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS	42
4.2.1	Capacitância Térmica	42
4.2.2	Resistência Térmica	43
4.2.3	Modelagem do sistema	44
4.3	CONTROLE DO SISTEMA	47
4.4	DINÂMICA CARACTERÍSTICA DO MATERIAL	50
<b>5</b>	<b>METROLOGIA DO DISPOSITIVO</b>	<b>54</b>
5.1	LIMITE DE HEISENBERG	55
5.2	INFORMAÇÃO DE FISHER	57
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>61</b>
	REFERÊNCIAS	<b>63</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A informação quântica tem se mostrado uma interessante aplicação dos fenômenos da mecânica quântica, permitindo aperfeiçoar a performance de certas tarefas na comunicação, computação e metrologia (TÓTH; APELLANIZ, 2014). Contudo, a implementação destas tecnologias são um grande desafio, devido à dificuldade de controlar os sistemas quânticos e seus estados inerentemente frágeis (NIELSEN; CHUANG, 2002).

O controle de sistemas quânticos não é apenas um conceito, mas pode prover novas tecnologias através dos avanços científicos. A manipulação de sistemas quânticos, como os fótons por exemplo, fornece grande aprimoramento na segurança da comunicação (O'BRIEN et al., 2009), como a criptografia quântica, a distribuição de chaves quânticas e o teleporte quântico, proporcionando grandes promessas para computação quântica e a continuação do avanço fundamental da ciência (NIELSEN; CHUANG, 2002). As recentes aplicações em circuitos quânticos integrados demonstram ser a chave para grandes passos em direção a novas tecnologias, como a computação quântica. Estas tecnologias, baseadas no aproveitamento de fenômenos quânticos, requerem métodos para preparar e controlar com precisão o estado desses sistemas.

Neste trabalho é apresentado um sistema de manipulador de estados quânticos, utilizando o interferômetro March Zehnder (HOLBROW et al., 2002) (ZETIE et al., 2000), sendo a manipulação de fótons realizada através da transmissão e reflexão dos feixes até os respectivos detectores. Neste projeto deseja-se controlar a fase relativa entre dois caminhos ópticos, através da manipulação do índice de refração do meio, gerando assim um relação controlável entre a fase relativa e a característica dos materiais utilizados através deste dispositivo (MATTHEWS et al., 2009). A manipulação de um estado quântico codificado em um único fóton, através de uma superposição arbitrária de dois caminhos ópticos, no qual a condução natural para caminhos de onda requer o controle da fase relativa entre os caminhos.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O desenvolvimento da mecânica quântica e suas aplicações tornaram-se, de modo geral, a grande aposta para conquistar novas tecnologias, como é observado na corrida pela computação quântica universal (GROVER, 1996). A computação quântica traz inúmeros avanços ao estado atual da tecnologia, uma vez que quebra antigos paradigmas e fronteiras atribuídas à computação clássica, por exemplo, a complexidade computacional na solução de problemas (acredita-se na existência da *quantum speed up*, responsável por aumentar significativamente a taxa de processamento computacional), na codificação e decodificação de informações ou dados, grande capacidade de processamento de dados, (em 1996, Lov Grover da Bell Labs descobriu que um computador quântico é capaz de fazer a mesma tarefa com mil passos em vez de um milhão se comparado aos passos realizados por um computador clássico (GROVER, 1996)), entre outros (NIELSEN; CHUANG, 2002). A criação de métodos onde se possa realizar algum tipo de controle e/ou modificação em características sensíveis a quaisquer tipos de perturbação torna-se o grande desafio para avanço desta tecnologia (MATTHEWS et al., 2009).

## 1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Tendo em vista a necessidade de controlar parâmetros de um sistema regido pela mecânica quântica, este trabalho visa a construção de uma metodologia de controle, através de relações subsequentes à aferição de fase em um sistema manipulador de estados quânticos. Este mesmo é discutido por (MATTHEWS et al., 2009) no qual apresenta resultados empíricos, tendo em vista uma abordagem teórica distinta, utiliza-se neste trabalho, de ferramentas de engenharia para realização e construção deste sistema.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 OBJETIVO GERAL

Propor de maneira conceitual um projeto de controlador da fase relativa de um sistema quântico, garantindo, de maneira geral, que as propriedades quânticas do sistema não sejam perdidas.

### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar um sistema quântico que descreva fisicamente um qubit (bit quântico), a menor unidade de informação quântica;
- Estudar formas de implementar operações nesse sistema, simulando assim portas lógicas referentes à computação;
- Apresentar um modelo fisicamente implementável de sistema e operação;
- Propor um método de controle sobre os parâmetros físicos relacionados à implementação da operação;
- Realizar a metrologia quântica dessa operação, por meio de métodos de informação quântica.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão descritos de forma estrutural as relações, fundamentos e ferramentas utilizadas para realização do trabalho, a fim de se firmar teoricamente conceitos importantes abordados e adotados em seus aspectos físicos e matemáticos.

### 2.1 PROPRIEDADES ÓPTICAS

Nesta seção serão abordados conceitos fundamentais sobre visão óptica, de maneira a se compreender o comportamento de um feixe de luz através das leis naturais que o regem (JENKINS; WHITE, 1957).

#### 2.1.1 ÍNDICE DE REFRAATIVIDADE

O índice de refração de qualquer meio óptico é definido como a relação entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio:

$$\text{Índice refratividade} = \frac{\text{velocidade vácuo}}{\text{velocidade no meio}}; \quad (1)$$

representado algebricamente por

$$n = \frac{c}{v}, \quad (2)$$

onde  $c$  representa velocidade da luz no vácuo,  $v$  a velocidade no meio e  $n$  representa esta proporção. Alguns valores estabelecidos para o índice de refração são:

- vidro = 1,520;
- água = 1,333;
- ar = 1,000.

Vale notar a precisão adotada pois, o índice para o ar com temperatura ( $0^{\circ}C$ ) e a pressão de ( $760mmHg$ ) resulta em  $n = 1,000292$ .

### 2.1.2 CAMINHO ÓPTICO

Para derivar um dos princípios da geometria óptica é apropriado definir uma quantidade chamada *caminho óptico*. O caminho  $d$  de um feixe de luz em qualquer meio é proporcionado pelo produto da velocidade pelo tempo

$$d = vt. \quad (3)$$

Note que o caminho é análogo ao conceito de deslocamento à velocidade constante. Logo  $d$  é a distância percorrida no meio em um tempo  $t$ . Utilizando a Eq. (2), tem-se que

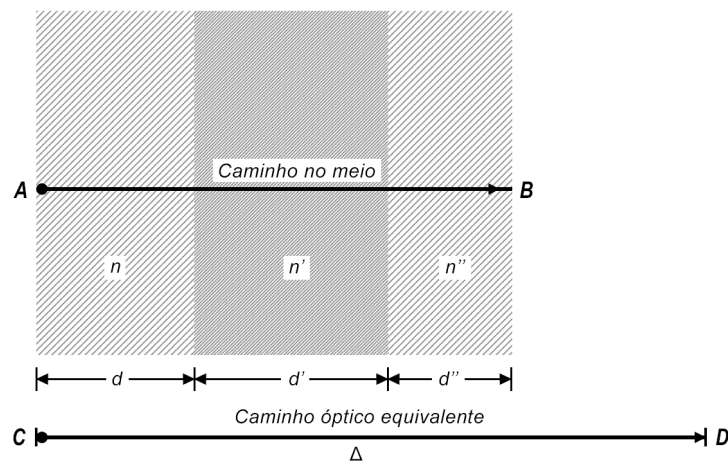
$$d = \frac{c}{n}t \quad \text{ou} \quad nd = ct; \quad (4)$$

o produto  $nd$  é chamado de caminho óptico  $\Delta$

$$\Delta = nd = ct. \quad (5)$$

O caminho óptico  $\Delta$  representa a distância em que a luz percorreria no vácuo no mesmo tempo em que percorre  $d$  no meio.

Um diagrama que ilustra o significado do percurso óptico é mostrado na Figura 1. Três meios de comprimento  $(d, d', d'')$ , com índices de refração  $(n, n', n'')$ , respectivamente, são mostrados. A linha  $AB$  mostra o comprimento do percurso de luz real através destes meios, enquanto a linha  $CD$  mostra a distância que o feixe de luz viajaria no vácuo no mesmo intervalo de tempo  $t$ .



**Figura 1: Caminho óptico através de uma série de meios**

**Fonte: JENKINS; WHITE p. 11**



### 2.1.3 LEIS DE REFLEXÃO E REFRAÇÃO

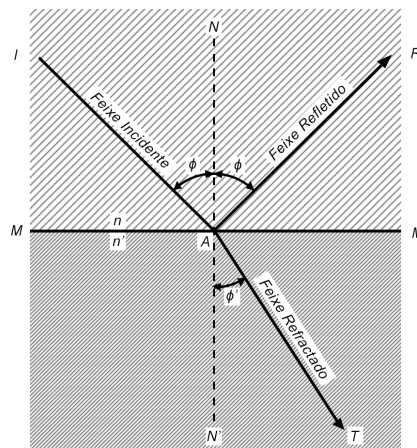
Quando um feixe de luz atinge uma fronteira separando dois diferentes meios, parte do feixe é refletido de volta através do primeiro meio e o restante sofre refração dentro do segundo meio. As possíveis direções tomadas pelos feixes podem ser descritos por duas leis da natureza: a lei de reflexão e refração. De acordo com estas leis, o ângulo no qual o feixe atinge a interface  $MM'$ , representado na Figura 2, é exatamente igual ao ângulo de reflexão gerado com a mesma interface. Usualmente, medem-se os ângulos incidente  $\phi$  e de refração  $\phi'$  em relação a uma linha  $NN'$  perpendicular à superfície (linha normal), como mostrado na Figura 2. Uma segunda lei estipula que o feixe refletido se situa no plano de incidência e oposto ao normal, sendo o plano de incidência definido pelo plano que contém o feixe de incidência e o normal. Em outras palavras, o feixe incidente, o normal e o feixe refletido estão no mesmo plano, que é perpendicular à interface que separa os dois meios. A segunda lei diz respeito aos feixes de luz incidente e refratados e afirma que o seno (representado pelo símbolo  $\sin \phi$ ) do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração tem uma razão constante, para todos ângulos de incidência, ou

$$\frac{\sin \phi}{\sin \phi'} = \text{constante.} \quad (6)$$

Observando que as constantes  $n$  e  $n'$  tem razão constante, podemos escrevê-la como

$$\frac{\sin \phi}{\sin \phi'} = \frac{n}{n'} \longrightarrow n \sin \phi = n' \sin \phi'. \quad (7)$$

Portanto, para incidência oblíqua do feixe, quando este passa de um meio com índice de refração menor para outro com maior, o raio luminoso aproxima-se da normal ( $NN'$ ).



**Figura 2: Reflexão e refração em uma fronteira de separação entre dois meios.**

**Fonte: JENKINS; WHITE p. 12**

### 2.1.4 PRINCÍPIO DE FERMAT

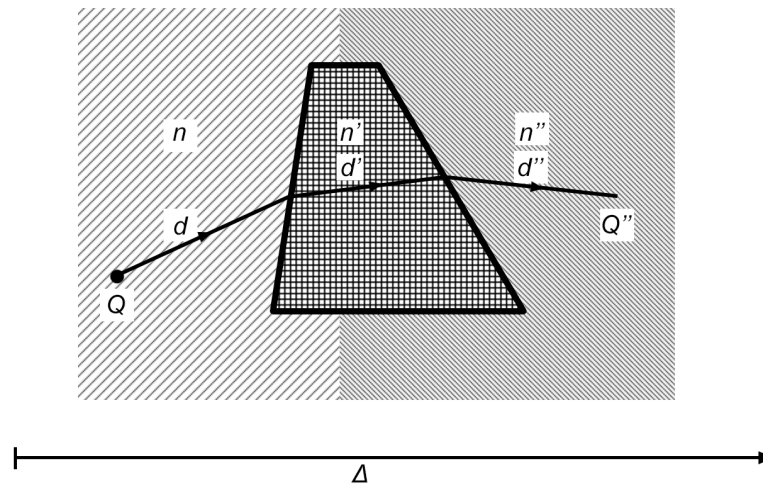
O termo “caminho óptico” foi introduzido na seção anterior, onde foi definido como um feixe de luz viaja no vácuo ao mesmo tempo que viaja de um ponto a outro, em uma distância específica, através de um ou mais meios ópticos. Sobre a forma como a luz é propagada, pode-se enunciar o Princípio de Fermat;

*“A trajetória percorrida pela luz ao propagar-se de um ponto a outro é tal que o tempo gasto para percorrê-la é estacionário a respeito das possíveis variações de trajetória”.*

Utilizando estes conceitos vamos analisar o caminho real de um feixe de luz, com meios de índice de refração diferentes de cada lado, como mostrado na Figura 3. O percurso a partir do ponto  $Q$  através dos meios de índice  $n$ ,  $n'$  e  $n''$  é dado por

$$\Delta = nd + n'd' + n''d'' . \quad (8)$$

Pode-se definir um caminho óptico em um meio de índice de refração continuamente variável através da incorporação de uma soma das variações infinitesimais dos índices, ou seja, a integral dos mesmos.



**Figura 3: Reflexão e refração em uma fronteira de separação entre dois meios.**

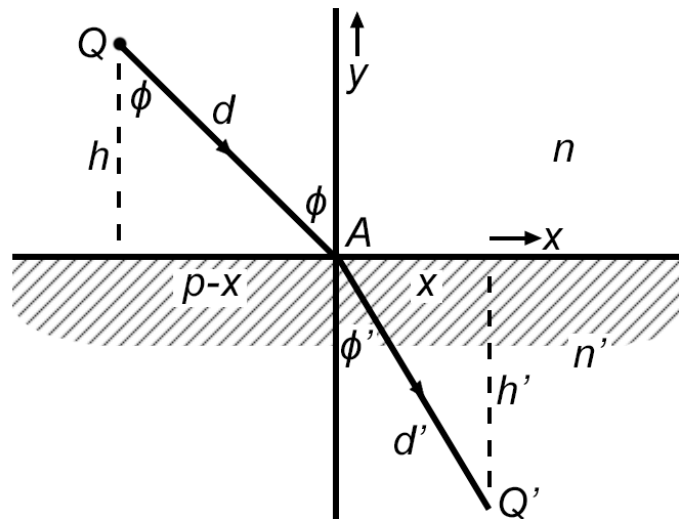
**Fonte: JENKINS; WHITE p. 15**

A Figura 4, que representa a refração de um feixe em uma superfície plana, pode ser usada para evidenciar a lei de refração dada na Eq.(7). O comprimento do percurso óptico entre o ponto  $Q$  no meio superior de índice  $n$  e outro ponto  $Q'$  no meio inferior de índice  $n'$  que passa

através de qualquer ponto  $A$  na superfície é

$$\Delta = nd + n'd';$$

onde  $d$  e  $d'$  representam as distâncias  $QA$  e  $AQ'$  respectivamente.



**Figura 4: Geometria de um feixe refractado ilustrando o princípio de Fermat.**

**Fonte: JENKINS; WHITE p. 17**

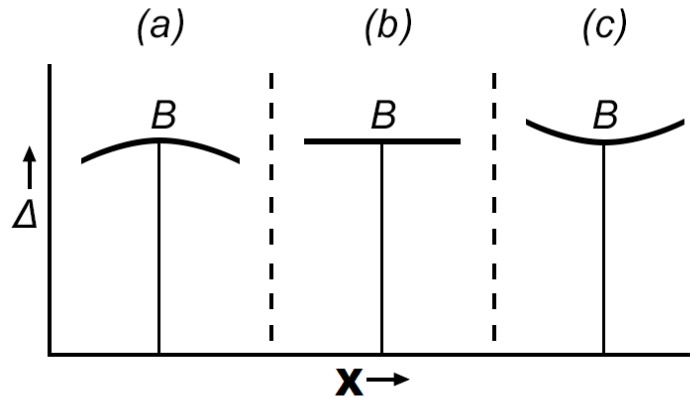
Tomando  $h$  e  $h'$  como a representação das distâncias perpendiculares à superfície e  $p$  o comprimento total da abscissa, interceptado por linhas perpendiculares, podemos utilizar do teorema pitagórico sobre triângulos retos e determinar as relações

$$d^2 = h^2 + (p-x)^2 \quad \text{e} \quad d'^2 = h'^2 + x^2, \quad (9)$$

substituindo os valores de  $d$  e  $d'$  Eq. (9) na Eq. (8) obtêm-se

$$\Delta = n[h^2 + (p-x)^2]^{\frac{1}{2}} + n'[h'^2 + x^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

De acordo com o princípio de Fermat, para um caminho real, a linha de separação dos meios  $A$  pode apresentar os cenários de um mínimo, um máximo ou estacionário. Um método para encontrar um mínimo ou máximo para o caminho óptico é traçar um gráfico, como na Figura 5, e descobrir em que valor de  $x$  no qual é possível encontrar uma tangente à curva paralela ao eixo.



**Figura 5:** Gráfico representando o caminho óptico à condições de reflexão, ilustrando (a) Máximo, (b) Estacionário e (c) Mínimo.

**Fonte:** JENKINS; WHITE p. 17

Analisando matematicamente, deve-se primeiramente diferenciar a Eq. (10) em relação a  $x$ , obtendo assim uma equação para inclinação da curva. Definindo essa equação e igualando a mesma a zero, encontramos assim o valor de  $x$  para o qual a curva possui valor de máximo, mínimo ou estacionário. Portanto

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{\frac{1}{2}n}{[h^2 + (p-x)^2]^{\frac{1}{2}}}(-2p+2x) + \frac{\frac{1}{2}n'}{(h'^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}2x = 0, \quad (11)$$

no qual

$$\frac{n}{[h^2 + (p-x)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{n'}{(h'^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

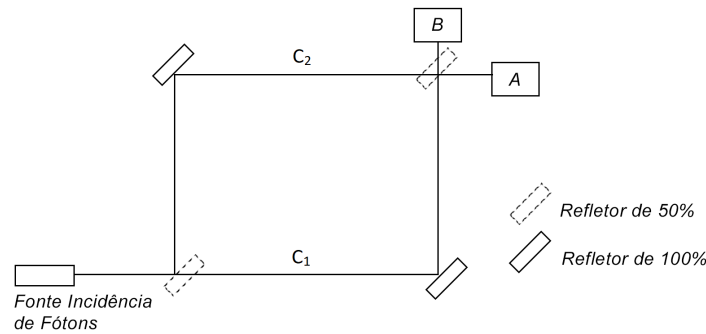
Simplificando, obtém-se

$$\frac{n(p-x)}{d} = \frac{n'x}{d'}. \quad (13)$$

Considerando a equação acima, é possível observar que para meios com índice de refração diferentes, é adicionada uma fase relativa ao meio, expressa pelo termo adicional. Na Figura 4, pode se observar, retomando o teorema pitagórico que, como expresso na Eq. (13), os termos  $\frac{(p-x)}{d}$  e  $\frac{x}{d'}$  são equivalentes, ao observar a Figura 4 ao sin do ângulo relativo ao triângulo retângulo, evidenciando os conceitos expressados na equação (7) (JENKINS; WHITE, 1957). Neste trabalho tem-se o interesse em controlar essa fase relativa utilizando de um guia de onda sob índice de refração variável.

## 2.2 MARCH ZEHNDER

Como ilustrado na Figura 6, considere um dispositivo tal que um feixe de luz percorre os caminhos deste, indicados pelas linhas contínuas, até encontrar na parte superior dois detectores A e B, de forma a detectar o padrão de interferência entre os feixes.



**Figura 6: Diagrama de um interferômetro de March Zehnder simples.**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

A cada divisor de feixe, ou espelho, o feixe sofre transmissão ou reflexão, adicionando ou não uma fase  $\pi$  respectivamente. Sendo assim, para o caminho que percorre da fonte até o segundo divisor de feixe; analisando o caminho inferior do dispositivo, o feixe sofre uma transmissão e uma reflexão com defasagem de  $\pi$ . No trajeto superior há duas reflexões com fase total de  $2\pi$ . Analisando a parte final do caminho, o feixe sofre uma reflexão para o detector B (caminho inferior) e uma transmissão para o detector A (caminho superior). Desta forma cada caminho tem fase total de  $2\pi$  e sofrem interferência construtiva. Analisando o caminho para o detector B, no trecho final, o caminho inferior sofre uma transmissão e o superior sofre uma reflexão, somando assim um deslocamento total de  $3\pi$ . Ocorre portanto uma diferença de deslocamento de fase entre os detectores (A,B).

Para descrever os caminhos superior e inferior de modo a obter a fase de cada um deles, são necessárias algumas definições  $l_1$  e  $l_2$  é o tamanho total do caminho percorrido pelo feixe, da fonte para o detector usando o caminho superior e inferior respectivamente. Quando a luz passa através do material utilizado no Beam Splitter (BS), como observa-se anteriormente, é adicionado a mudança de fase que é definido nesta sessão por  $2\pi \frac{d}{\lambda}$ . Note que  $\lambda$  está relacionado com o comprimento de onda e  $d$  está relacionado com o tamanho do caminho percorrido através meio entre os divisores de feixe (não com a espessura do beam splitter), no qual é considerado a distância atual percorrida e o índice de refração do material utilizado. Esse mesmo conceito foi introduzido na Seção 2.1.2. A fase total de cada caminho é calculada portanto como

- Caminho inferior ( $C_1$ ):  $\pi$  para primeira reflexão,  $\pi$  para segunda reflexão (100%),  $2\pi\frac{l_1}{\lambda}$  pela distância percorrida e  $2\pi\frac{d}{\lambda}$  fase extra por atravessar o material.
- Caminho superior ( $C_2$ ): (transmissão não altera fase),  $\pi$  para primeira reflexão (100%),  $2\pi\frac{l_2}{\lambda}$  pela distância percorrida e  $2\pi\frac{d}{\lambda}$  fase extra por atravessar o material.

A diferença de fase entre os dois caminhos, para o detector A, é dada por:

$$\left(2\pi + 2\pi\left(\frac{l_1 + d}{\lambda}\right)\right) - \left(2\pi - 2\pi\left(\frac{l_2 + d}{\lambda}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{l_1 - l_2}{\lambda}\right) = \phi, \quad (14)$$

onde  $\phi$  representa a diferença de fase entre os caminhos  $C_1$  e  $C_2$ .

A relação anterior nos remete à medição no detector A, de forma análoga o cálculo da diferença de fase entre os caminhos para o detector B é dada por:

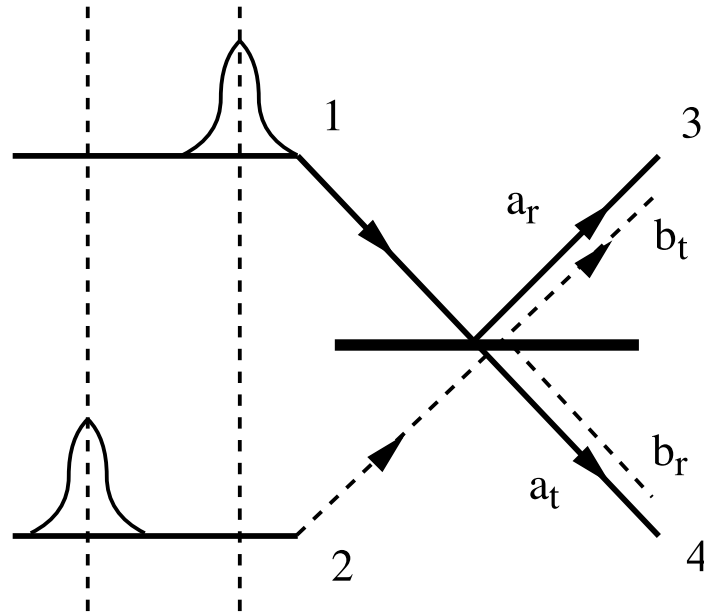
$$\left(2\pi + 2\pi\left(\frac{l_1 + d}{\lambda}\right)\right) - \left(\pi - 2\pi\left(\frac{l_2 + d}{\lambda}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{l_1 - l_2}{\lambda}\right) + \pi = \pi + \phi \quad (15)$$

Na prática, o divisor de feixe pode ter diferentes espessuras mas irá simplesmente adicionar uma diferença de fase fixa, como se um segundo divisor de feixe no sentido contrário fosse adicionado.

De maneira mais geral, ao adicionarmos espelhos ou alterarmos sua posição, iremos adicionar uma mudança na relação de fase entre dois caminhos, uma vez que estaríamos alterando os valores de  $l_2 - l_1$ . A mudança de fase causa uma variação na taxa de contagem em A, a variação ocorrerá flutuante a um ponto máximo ou mínimo, correspondendo a variação entre a interferência construtiva e destrutiva consecutivamente.

### 2.2.1 DESCRIÇÃO MATRICIAL DO DIVISOR DE FEIXE

Para descrição matemática do BS é utilizada a Figura 7. O principal ponto é reconhecer como podem ser representadas as duas possíveis entradas de um fóton através do BS. Um possível estado de entrada  $|ent\rangle$  é um fóton entrando pela porta 1; outra possibilidade é a de um fóton entrando pela porta 2.



**Figura 7: Divisor de Feixe dois fótons.**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Através desta configuração representada na Figura 7 as portas de entradas são representadas pelos vetores bases  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (caminho 1) e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (caminho 2). De maneira similar, são representada nas portas de saída, existência de um fóton na porta 3 como  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e a existência de um fóton na porta 4 como  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Descrevendo nestes termos, o BS realiza uma transformação linear, representada por  $U_{bs}$ , que transforma  $|ent\rangle$  em  $|saída\rangle$ , isto é,  $|saída\rangle = U_{bs}|ent\rangle$ . Note que, para uma reflexão ( $a_r$ ), uma transmissão ( $a_t$ ) e um estado de entrada  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , a saída será  $\begin{pmatrix} a_r \\ a_t \end{pmatrix}$ . De maneira análoga para os argumentos  $b_r$  e  $b_t$  para uma entrada  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , a saída será  $\begin{pmatrix} b_t \\ b_r \end{pmatrix}$ , ou seja

$$U_{bs} = \begin{pmatrix} a_r & b_t \\ a_t & b_r \end{pmatrix}. \quad (16)$$

A matriz  $U_{bs}$  é responsável por realizar a transformações de estados descritos acima.

Como o número de fótons que entra no BS deve ser igual ao que sai, a matriz  $U_{bs}$  deve

ser unitária. Essas relações resultam que o conjugado Hermitiano  $U_{bs}^{\dagger}$ <sup>1</sup> é igual a inversa  $U_{bs}^{-1}$ , de fato isto resulta em uma relação útil entre os elementos da matriz  $U_{bs}$ . A inversa de  $U_{bs}$ , como de qualquer matriz de mesma dimensão é a transposta do cofator da matriz dividido pelo determinante. Utilizando desta propriedade para comparar os termos de forma a obter a ação resultante da operação de transformação, tem-se

$$\frac{1}{a_r b_r - a_t b_t} \begin{pmatrix} b_r & -b_t \\ -a_t & a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r^* & a_t^* \\ b_t^* & b_r^* \end{pmatrix} \quad (17)$$

O determinante da matriz unitária tem módulo 1, desta forma  $a_r b_r - a_t b_t = e^{i\gamma}$ . Uma vez que o fator  $e^{i\gamma}$  multiplica todos elementos da matriz, isto não afetará a fase relativa entre os termos, portanto pode ser atribuído como um valor conveniente. Se escolhermos  $\gamma = 0$ , o fator  $a_r b_r - a_t b_t = 1$ .

Reformulando a Eq.(17) através do conjugado Hermitiano ( $U^{-1} = U^\dagger$ ), obtemos

$$a_r = b_r^* \quad (18)$$

$$a_t = -b_t^* \quad (19)$$

Reescrevendo estes fatores como exponenciais complexas,  $|a_r|e^{i\delta_{a_r}}$ ,  $|b_r|e^{i\delta_{b_r}}$ ,  $|a_t|e^{i\delta_{a_t}}$  e  $|b_t|e^{i\delta_{b_t}}$  dividido a Eq.(19) pela Eq. (18) obtêm-se

$$\frac{|a_t|}{|a_r|} e^{i(\delta_{a_t} - \delta_{a_r})} = -\frac{|b_t|}{|b_r|} e^{i(\delta_{b_t} - \delta_{b_r})} \quad (20)$$

A Eq. (18) demonstra que  $|t| = |t'|$  e  $|r| = |r'|$ , então estes termos podem ser simplificados na Eq. (20). Manipulando a Eq. (20) e utilizando o fato de que  $e^{i\pi} = -1$ , obtêm-se, vide (ZEILINGER, 1981).

$$\delta_{a_t} - \delta_{a_r} + \delta_{b_t} - \delta_{b_r} = \pi \quad (21)$$

Para um caso comum de um BS isto tem o mesmo efeito que um feixe incidente através da caminho 1, como um feixe incidente através da caminho 2, isto é, um BS simétrico,  $a_r = b_r$ ,  $a_t = b_t$  e  $\delta_{a_t} - \delta_{a_r} + \delta_{b_t} - \delta_{b_r} = \frac{\pi}{2}$  e a transmissão de onda conduz a onda refletida em  $\frac{\pi}{2}$ rad está relacionada a fase  $\frac{\pi}{2}$  resultante da ação do BS. Para este caso tem-se  $|a_r| = |a_t| = |b_r| = |b_t|$ . Da Eq. (16) segue que

$$U_{bs} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

<sup>1</sup>Conjugado Hermitiano é resultado da transposta pelo complexo conjugado da matriz  $A^\dagger = (A^*)'$



Vale ressaltar que para as equações (14) e (15), nesta seção e nas subsequentes, a fase relativa ( $\phi$ ) é definida como ( $\frac{\pi}{2}$ ) para o BS.

### 2.2.2 APLICAÇÃO NO INTERFERÔMETRO MARCH ZEHNDER

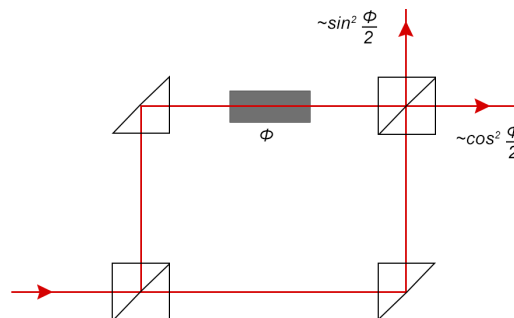
O interferômetro Mach Zehnder (MZ) consiste essencialmente de dois BS. O espelho pode ser ignorado, uma vez que seus efeitos no respectivo caminho se equilibram. É feito para funcionar como um interferômetro pela inserção de um *phase shift* (PS). Por exemplo, na Figura 6, o PS pode ser realizado apenas com a movimentação do espelho entre os caminhos, ou seja, ao movimentar estes espelhos é acrescentada uma mudança de fase no caminho. O PS pode ser representado matricialmente como

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Desta forma o interferômetro March Zehnder é representado matricialmente, considerando a  $|ent\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , por

$$\begin{aligned} |saida\rangle &= U_{bs}\Phi U_{bs}|ent\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= ie^{i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\phi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Desta forma a partir da saída e observando a Figura 6, o feixe incidente no detector A realiza uma interferência completamente destrutiva, enquanto no detector B ocorre uma interferência completamente construtiva (admitindo  $\phi$  como  $\frac{\pi}{2}$ ). Porém esta interferência é relativa à fase adotada, e isto depende do padrão de dispersão adotado.



**Figura 8: Funcionamento March Zehnder**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Observando a Figura 8 acima, pode-se perceber um aparato relativo a  $\Phi$ , que é responsável por adicionar a fase relativa entre os caminhos. Este pode ser obtido a partir da variação no caminho ótico de um dos braços do MZ, que por outro lado pode ser expresso por mudança no índice de refração desse braço (tomando um meio diferente e/ou variável dentro do mesmo), uma vez que alteraria o caminho ótico. Essa mudança no índice de refração pode ser realizada por um guia de onda, por exemplo.

### 2.3 FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA

Nesta seção estuda-se o formalismo da mecânica quântica aplicado ao sistema físico descrito. A física clássica é a física que descreve os fenômenos em escala macroscópica, como: mecânica newtoniana, termodinâmica, eletricidade, etc. Entretanto, no final do século 19, cientistas perceberam que alguns fenômenos em escala microscópica não poderiam ser descritos pelas leis usuais da mecânica clássica. Desta forma iniciaram estudos para descrever estes eventos, desenvolvendo um novo ramo na física: a Mecânica Quântica. Ela é um ramo fundamental da física, com vasta aplicação, que estuda sistemas físicos cujas dimensões são próximas ou abaixo da escala atômica, tais como moléculas, átomos, elétrons, prótons e de outras partículas subatômicas, porém não se limitando a estes aspectos.

Para mensurar parâmetros macroscópicos devemos utilizar técnicas específicas, que definem a metrologia deste parâmetro. Por exemplo, para medir temperatura podemos usar circuitos específicos e, utilizando métodos empíricos, obtemos os parâmetros mensurados. Em sistemas microscópicos o procedimento é parecido, no sentido que instrumentos específicos devem ser utilizados para tal aferição. Entretanto nem todas as grandezas descritas pela mecânica quântica são observáveis, dessa forma são necessários de procedimentos metrológicos específicos para cada parâmetro.

De modo geral, em sistemas físicos microscópicos regidos pelas leis da mecânica quântica, os parâmetros mensurados são chamados de observáveis. São normalmente descritos por operadores hermitianos, responsáveis pelas transformações realizadas nos estados, descritos por um vetor como  $|\text{estado}\rangle \in \mathbb{C}^n$ , normalizado  $\langle \text{estado} | \text{estado} \rangle = 1$ . A partir de procedimentos específicos para cada sistema, tomando  $M$  um operador qualquer, no laboratório mede-se o valor esperado desse operador hermitiano  $m = \langle \psi | M | \psi \rangle$ , em um determinado estado  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$ . Se  $|\psi\rangle$  for um autovetor do operador,  $m$  será um autovalor de  $M$ , portanto é possível caracterizar o observável  $M$ , medindo os valores esperados em cada autoestado da matriz  $M$ .

### 2.3.1 FORMALISMO DE PAULI

Primeiramente se faz necessário introduzir a noção de caminhos, conforme introduzido nas seções anteriores. Um indicador de caminho pode ser representado por  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  (FEYNMAN et al., 2015). Como esta propriedade é vetorial, possuindo apenas dois estados conforme descrito anteriormente, pode-se definí-los como

$$\text{Caminho superior} = |0\rangle \quad (25)$$

$$\text{Caminho inferior} = |1\rangle,$$

onde  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  definem uma base (ortonormal) para um espaço complexo de dimensão 2 ( $\mathbb{C}^2$ ), Figura 6. Este espaço descreve a cinemática do sistema.

Os observáveis são descritos por operadores hermitianos sobre esse mesmo espaço ( $\mathbb{C}^2$ ). Qualquer operador hermitiano sobre esse espaço pode ser escrito como combinação das matrizes de Pauli (SAKURAI et al., 1995). Na base escolhida acima essas matrizes podem ser representadas na forma:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

de forma que a base escolhida represente os autoestados do operador de Pauli  $\sigma_z$

$$\begin{aligned} \sigma_z|0\rangle &= + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z|1\rangle &= - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Dessa forma para propriedades de caminho, qualquer operador hermitiano que atua em ( $\mathbb{C}^2$ ) pode ser escrito como combinação de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , cuja ação sobre o espaço ( $\mathbb{C}^2$ ) é conhecida.

### 2.4 MANIPULADOR DE ESTADOS QUÂNTICOS

Primeiramente se faz necessário a introdução de um conceito, denominado *função exponencial matricial*, este conceito será utilizado nesta seção e nas subsequentes. Seja  $e^{Xt}$  a exponencial da matriz  $X$ , que pode ser expressa como (SAKURAI et al., 1995)

$$e^{Xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n t^n}{n!} \quad (28)$$

Para esta operação temos alguma propriedades:

- $\frac{d}{dt}e^{Xt} = Xe^{Xt}$
- $e^{Xt}e^{-Xt} = e^{X(t-t)} = \mathbb{I}$
- $e^{Xt}e^{Yt} = e^{(X+Y)t}$  se  $XY = YX$
- $e^{Xt}e^{Yt} \neq e^{(X+Y)t}$  se  $XY \neq YX$
- $e^{X(t+\lambda)} = e^{Xt}e^{X\lambda}$

Desta forma podemos expandir a exponencial matricial em uma série infinita de termos, a fim de encontrarmos uma aproximação resultante.

Utilizando os conceitos apresentados nas seções anteriores, é possível introduzir o objeto de estudo, um manipulador quântico de estados, utilizando o conceito de um *qubit* (menor unidade de informação quântica). Considere novamente a Figura 6, onde os estados são descritos como

$$C_1 = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$C_2 = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Desta forma, observando esta mesma figura, ao percorrer o caminho através de  $C_1$  e  $C_2$  o feixe sofre uma transformação, descrita na Seção 2.2.

Descrevendo matematicamente o manipulador quântico de estados, representado na Figura 8, o mesmo aplica a operação unitária

$$U_{MZ} = U_{bs}U_{\phi}U_{bs}, \quad (31)$$

onde  $U_{bs}$  são transformações lógicas de estados, e são descritas como

$$U_{bs}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \quad (32)$$

$$U_{bs}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle). \quad (33)$$

A fase ( $\phi$ ) é adotada como  $\frac{\phi}{2}$  (com 50% *splitting*, proporção de divisão e refletividade  $\eta = 0,5$ ) onde cada acoplamento direcional implementa a unitária

$$U_{bs} = ie^{-\frac{i\pi\sigma_z}{4}} He^{-\frac{i\pi\sigma_z}{4}}. \quad (34)$$

A porta *Hadamard*<sup>2</sup> ( $H$ ) é descrita por

$$H = \frac{(\sigma_X + \sigma_Z)}{\sqrt{2}}, \quad (35)$$

de forma que  $(\sigma_X, \sigma_Y$  e  $\sigma_Z)$  são operadores de Pauli, descritos na seção anterior, enquanto o controle relativo de fase  $\phi$  entre dois caminhos ópticos implementam uma fase de

$$U_\phi = e^{\frac{i\phi\sigma_Z}{2}}. \quad (36)$$

Exemplificando a ação de  $U_{MZ}$  em um qubit  $|0\rangle$  ( $C_{\text{sup}}$ ), tem-se que, da Eq. (31)

$$U_{MZ} = U_{bs} e^{\frac{i\phi\sigma_z}{2}} U_{bs},$$

utilizando a matriz de Pauli  $\sigma_z$  da seção (2.3.1), pode-se caracterizar  $e^{\frac{i\phi\sigma_z}{2}}$ , como

$$e^{-\frac{i\phi\sigma_Z}{2}} = \cos\frac{\phi}{2}\mathbb{I} - \sin\frac{\phi}{2}\sigma_Z = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

desta forma ao aplicarmos  $U_{bs}|0\rangle$  e  $e^{-\frac{i\phi\sigma_Z}{2}}|0\rangle$  tem-se que

$$U_{bs}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle),$$

$$U_{bs} e^{-\frac{i\phi\sigma_Z}{2}} |0\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U_{bs} e^{-\frac{i\phi\sigma_Z}{2}} |1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\phi} \end{pmatrix}.$$

Portanto, para o operador de MZ aplicado no estado  $|0\rangle$ ,  $U_{MZ}|0\rangle$  temos

$$\begin{aligned} U_{MZ} &= U_{bs} e^{\frac{i\phi\sigma_z}{2}} U_{bs}|0\rangle = U_{bs} e^{\frac{i\phi\sigma_z}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \right) \\ &= U_{bs} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\phi}{2}}|0\rangle + ie^{-i\frac{\phi}{2}}|1\rangle) \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\phi}{2}}U_{bs}|0\rangle + ie^{-i\frac{\phi}{2}}U_{bs}|1\rangle) \right) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Operador de transformação, porta lógica na Mecânica Quântica (NIELSEN; CHUANG, 2002).

$$= ie^{i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\phi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Desta forma, obteve-se o mesmo resultado da Eq. (24), porém utilizando conceitos de mecânica quântica.

Para Figura 8, o interferômetro MZ manipula o estado quântico, adicionando uma rotação  $\phi$  em torno do eixo  $z$ .

$$|\phi\rangle = \sin \frac{\phi}{2} |0\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |1\rangle \quad (39)$$

A partir da composição de fases como a descrita acima, pode-se descrever uma operação arbitrária em um qubit, como atestado pelo teorema a seguir:

**Teorema 1.** *Para quaisquer valores reais de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ , o operador arbitrário unitário de um qubit pode ser decomposto como*

$$U_{arb} = e^{\frac{i\phi_3\sigma_z}{2}} e^{\frac{i\phi_2\sigma_y}{2}} e^{\frac{i\phi_1\sigma_z}{2}}, \quad (40)$$

*uma base lógica e arbitrária de preparação é aplicada por*

$$U_{prep} = e^{\frac{i\phi_3\sigma_z}{2}} e^{\frac{i\phi_2\sigma_y}{2}}, \quad (41)$$

*se aplicarmos uma inversa ( $U_{prep}^\dagger$ ) nos proporciona uma medição (medição projetiva).*

O resultado geral é descrito em (NIELSEN; CHUANG, 2002).

O desenvolvimento da computação quântica criou uma nova ferramenta, começando com um conjunto de operações nos sistemas quânticos mais simples. Através desta ferramenta é possível universalizar a computação quântica, simplificando as operações em uma unitária de rotação descrita por

$$U = e^{i\phi} R_z(\phi_3) R_y(\phi_2) R_z(\phi_1) \quad \text{ou} \quad U = e^{\frac{i\phi_3\sigma_z}{2}} e^{\frac{i\phi_2\sigma_y}{2}} e^{\frac{i\phi_1\sigma_z}{2}}.$$

Percebe-se, portanto, que se implementar um conjunto de dispositivos de forma a controlar a fase de um de fóton de entrada em cada um destes é possível a realização de computação quântica, a rotação aplicada no dispositivo descrito nesta seção é sobre o eixo  $z$ . Da mesma maneira, se fossem descritos nos demais dispositivos realizando as rotações subsequentes pode-se realizar, portanto, qualquer operação possível sobre um qubit, ou seja, através da descrição de todas rotações no plano  $x, y$  e  $z$ , pode-se caracterizar todas os possíveis estados para um qubit.

## 2.5 METROLOGIA DE QUÂNTICA

Nessa seção veremos a aplicação da metrologia quântica, através da *Informação de Fisher* e da *cota de Cramer-Rao* (TÓTH; APELLANIZ, 2014). Vamos considerar o problema de estimação de um parâmetro  $\theta$  qualquer. A diferença entre estas abordagens está no método de estimativa da precisão desse parâmetro, que no caso de metrologia quântica utiliza-se ferramentas da teoria de informação quântica. Na metrologia quântica, utilizam-se um estado de sonda  $\rho_0$ , de forma que a evolução desse estado, sob a ação da operação  $U(\theta)$ , resulte em um estimativa para  $\theta$ . De posse do estado de sonda, a evolução do mesmo em função do parâmetro é descrito pela evolução:

$$\rho_\theta = e^{-i\theta A} \rho_0 e^{+i\theta A}, \quad (42)$$

onde  $\rho_0$  é o estado de sonda,  $\rho_\theta$  é o estado de evoluído e  $A$  é um operador Hermitiano. O operador  $A$  pode ser, por exemplo, uma componente do momento angular coletivo  $J_l$ .

Uma questão importante a ser considerada é: como podemos extrair uma estimativa de  $\theta$  através  $\rho_\theta$ ? Para tal, devemos realizar medições sobre o estado, a partir de algum conjunto completo de operadores de medida  $\{\Pi_x\}_x$ . Os operadores de medida  $\Pi_x$  são operadores positivos semi-definidos cuja soma é igual a identidade  $\mathbb{I}$ :  $\sum_x \Pi_x = \mathbb{I}$ . Os resultados desse processo de medição é expresso em elementos de um vetor de probabilidade  $\{f(x, \theta)\}$ , definidos na forma:

$$f(x, \theta) = \text{Tr}(\rho_\theta \Pi_x). \quad (43)$$

Note que os resultados da medição são funções de  $\theta$ . Essa função, para cada valor do parâmetro  $\theta$ , resulta na distribuição de probabilidade para os possíveis valores  $x$ .

Deve-se agora construir um estimador  $\hat{\theta}(x)$ , no qual para cada valor  $x$  resultará em uma estimativa para  $\theta$ . Esse estimador é definido de forma que o valor esperado de  $\hat{\theta}(x)$  seja igual a  $\theta$ :

$$0 = \int (\theta - \hat{\theta}(x)) f(x; \theta) dx. \quad (44)$$

Um estimador é dito ótimo se este minimizar sua variância com  $\theta$ . O caso perfeito é o descrito acima, onde essa variância é igual a zero.

De modo geral não é possível obter o valor exato de  $\theta$ , ou seja o estimador perfeito não existe, e a variância é diferente de zero. Sendo assim pode-se obter um limite inferior sobre a incerteza na estimativa do parâmetro. A sensibilidade de estimativa de fase, assumindo qualquer tipo de medição, é limitada inferiormente pela cota de Cramer-Rao (TÓTH; APELLANIZ,

2014):

$$(\Delta\theta)^2 \geq \frac{1}{F_q[\rho_0, A]}, \quad (45)$$

onde  $F_q$  é informação de Fisher para componentes quânticos. A informação de Fisher é uma função do estado de sonda  $\rho_0$  do operador  $A$  responsável pela evolução de  $\theta$ , definida pela expressão:

$$F_q[\rho_0, A] = 2 \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{\lambda_k + \lambda_l} |\langle k|A|l \rangle|^2, \quad (46)$$

onde  $\lambda_k$  são os autovalores de  $\rho_0$  e  $|k\rangle$  seus respectivos autovetores.

O problema se resume portanto a encontrar o estado de sonda cuja informação de Fisher seja a maior possível, de forma a diminuir a incerteza sobre as medidas do parâmetro. O próximo objetivo seria obter a melhor estratégia de medição a fim de alcançar o limite inferior da desigualdade, o que está vinculado com o teorema de Fisher. Este teorema atesta que, para um número assintoticamente grande de realizações de metrologia no sistema, o limite inferior da desigualdade de Cramer-Rao sempre pode ser alcançada pela estimativa de melhor verossimilhança (*maximum likelihood estimation*) [apud (BRAUNSTEIN, 1992)].

Uma consequência, em comparação à estimativa de parâmetro baseado na propagação de erro com a informação de Fisher, é obtido que para qualquer operador  $M$  utilizado na estimativa de parâmetros tem-se

$$\frac{(\Delta M)^2}{|\partial_\theta \langle M \rangle|^2} \geq \frac{1}{F_q[\rho, A]}. \quad (47)$$

Para a precisão na estimativa desses parâmetros são consideradas usualmente duas escalas: A primeira é o limite quântico padrão (SQL), ou limite *shot-noise* onde a informação de Fisher é constante e o erro é dado pela raiz quadrada da inversa do número de vezes que foi realizada a medição ( $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ). A segunda é o limite de *Heisenberg* (HOLLAND; BURNETT, 1993), o erro é delimitado pelo inverso dos recursos físicos utilizados ( $\frac{1}{N}$ ), expressos nesta seção como  $N$ , conjunto de caminhos tomados por um feixe de luz (fóton). (TÓTH; APELLANIZ, 2014).

## 2.6 CONCEITOS DE CONTROLE

A utilização de metodologias de controle vem resultando em um grande avanço da engenharia e da ciência. É crucial para realização de tarefas automáticas, ou nas quais é impossibilitada a interação humana. Por exemplo, o controle automático é de suma importância no comando numérico de máquinas e ferramentas das indústrias de manufatura, no projeto de

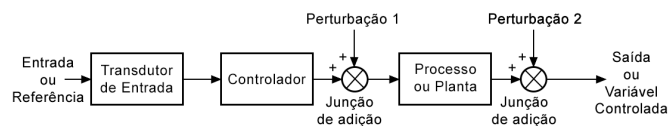


sistemas de comando automático da indústria aeroespacial e no projeto e produção na indústria automobilística. É ainda crucial nas tarefas operacionais industriais tais como: controle de pressão, temperatura, umidade, viscosidade e vazão nas indústrias de processo. O desenvolvimento teórico e prático do controle proporcionam formas de atingir um ótimo desempenho para sistemas dinâmicos, melhorando na produtividade, diminuindo o trabalho manual (por operações repetitivas e/ou perigosas), entre outras (NISE; SILVA, 2002).

### 2.6.1 SISTEMAS DE CONTROLE: MALHA FECHADA *VERSUS* MALHA ABERTA

Um exemplo de controle em malha aberta pode ser evidenciado pela Figura 9. O sistema é formado por um subsistema chamado transdutor de entrada, que converte a forma de entrada na forma utilizada pelo controlador. O controlador age sobre um processo ou planta. A entrada de controle (em boa parte das ocasiões) é chamada de referência, ao passo que a saída pode ser chamada de variável controlada. Sinais adicionais, como perturbações, são mostrados somados às saídas do controlador.

A característica que diferencia um sistema a malha aberta é que o mesmo não pode compensar a ação de quaisquer perturbações que sejam adicionadas ao sinal de atuação do controlador. Por exemplo, sendo o processo um controlador estabilizante de imagem, qualquer ruído adicionado na Perturbação 1 pode comprometer a ação de controle sobre o sistema, ocasionando em distorção ou não estabilização da imagem. A saída de um sistema a malha aberta é comprometida também pelas perturbações na saída (Perturbação 2 na Figura 9). Este tipo de sistema torna-se inapto, de mesma maneira, a corrigir estas perturbações. Os sistemas a malha aberta, portanto, não corrigem os efeitos de perturbações e são comandados unicamente com base na entrada. Em outras palavras, este sistema não é capaz de detectar quaisquer perturbações ocorridas na malha de controle, podendo assim ocasionar em erros não previstos.



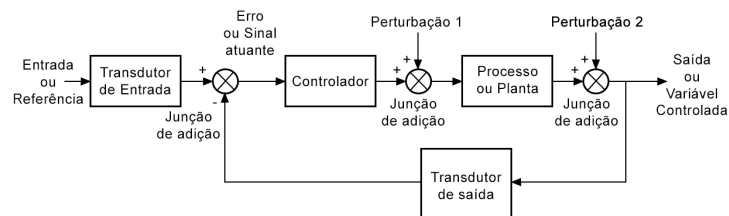
**Figura 9: Controle em malha aberta.**

**Fonte: NISE; SILVA p. 9**

Pode-se observar um exemplo genérico de um controle em malha fechada na Figura 10. De mesma forma que em um controle por malha aberta, utiliza-se de um transdutor para converter o sinal de entrada para o sinal utilizado no controlador, porém é acrescentado um

transdutor de saída, ou sensor, que mede a resposta de saída e a converte na forma usada pelo controlador. Para exemplificar esse procedimento, em um sistema de controle de nível, a entrada e a saída são convertidas em pulsos elétricos interpretados pelo controlador, ou seja, tanto a entrada de controle ou referência, quando a saída, a qual é representada pelo nível atual, são convertidos para pulsos elétricos.

Diferente do controle em malha aberta, o controle em malha fechada é capaz de perceber e prever perturbações e atuar de forma a atenuá-las ou eliminá-las (utilizando diversas modelagens de controle apropriadas). Este procedimento é realizado através da retroalimentação ou retroação, que é responsável de realimentar o sistema com a saída, ou seja, o sinal de saída, através do canal de retroação, é subtraído do sinal de entrada, proporcionando informações de erros referentes a perturbações no sistema.



**Figura 10: Controle em malha fechada.**

**Fonte: NISE; SILVA p. 9**

Um das vantagens de sistemas de controle a malha fechada é o fato de que o mesmo utiliza da retroalimentação, o que torna a resposta do sistema relativamente insensível a perturbações externas. Devido a este fato, é possível efetuar um controle preciso sobre um sistema, utilizando ferramentas e componentes relativamente baratos, o que em malha aberta se torna infactível. A estabilidade em sistemas de controle a malha fechada pode sofrer problemas se o controlador não for bem projetado, uma vez que o mesmo tem tendências em corrigir erros além do necessário, o que pode ocasionar oscilações.

Vale notar que para sistemas onde as entradas são conhecidas anteriormente, e que possivelmente não sofram distúrbios, é conveniente a utilização de controle a malha aberta. Os sistemas de controle a malha fechada são habitualmente utilizados apenas quando estão presentes perturbações e/ou alterações imprevisíveis nos parâmetros de componentes do sistema. É cabível notar que a robustez de saída determina de forma direta o custo, o peso e as dimensões do sistema de controle. Percebe-se também, devido à maior complexidade de um sistema de controle a malha fechada, que os componentes utilizados para sua realização serão de maior

número se comparados a um controle a malha aberta. Uma consequência deste fato é de um alto valor de construção e/ou aquisição. Existem diversas técnicas de controle a malha fechada, qualificando a utilização do mesmo em diversas aplicações, tais quais existam restrições e/ou impossibilidades de utilização do controle a malha aberta. (OGATA; YANG, 1970).

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentadas as metodologias empregadas no projeto de forma a garantir um resultado final esperado, tendo em vista as características e conceitos abordados.

#### 3.1 MATERIAIS E MÉTODOS

As etapas para realização do projeto estão descritas a seguir:

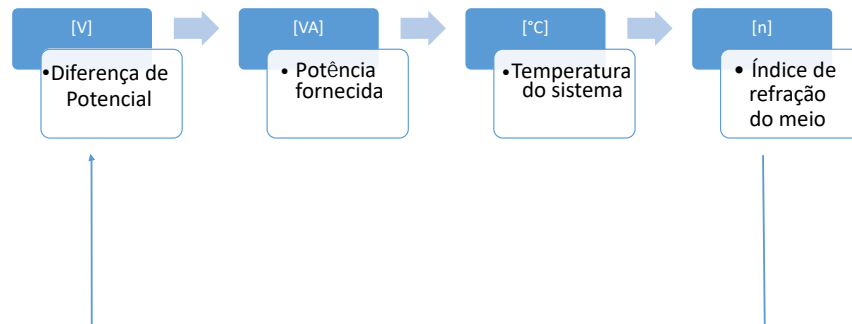
- Estudo e contextualização do sistema físico (MATTHEWS et al., 2009):

O sistema físico consiste em dois caminhos ópticos, a diferença entre estes produz uma fase relativa no sistema, desta forma é introduzido um guia de onda com índice de refração dinâmico sensível a variação de temperatura, proporcionando que esta fase relativa seja variável.

A caracterização e contextualização deste sistema garantirá informações importantes para aferição de metodologias específicas de manipulação no sistema, garantindo que o mesmo respeite as leis da mecânica quântica após a aplicação destas metodologias.

- Caracterização da metodologia de controle:

O autor (MATTHEWS et al., 2009) visa em seu artigo, no qual é baseado o sistema físico estudado, a caracterização de uma equação que descreve a relação entre a diferença de potencial introduzida no sistema, descrito no capítulo 4, com a alteração no índice de refração do guia de onda alterando, conseqüentemente, a fase relativa entre os caminhos de onda, conceito observado na Seção 2.2. Porém a equação final obtida é uma aproximação empírica do sistema, ou seja, é obtida experimentalmente, onde os resultados obtidos provêm de medições realizadas. Desta forma, utilizando metodologias específicas de controle, o objetivo deste projeto é realizar operação de controle de forma a automatizar este processo de obtenção de fase relativa no sistema.



**Figura 11: Relação na dinâmica do sistema.**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Como ilustrado na Figura 11, onde são expressas as relações diretas das dinâmicas deste sistema, o controle a ser realizado manipula os parâmetros da diferença de potencial, que a partir das relações intrínsecas dos materiais alteram o índice de refração do meio. Desta forma o objetivo da caracterização da metodologia de controle visa, de maneira geral, a obtenção das dinâmicas representadas e relação entre elas, garantindo uma metodologia de controle que melhor se adapta a estes parâmetros. O controle utilizado é modelado através de uma relação térmica do sistema, onde deste obtém-se uma função de transferência representando a dinâmica do mesmo, para que o controle seja realizado baseado na diferença de potencial aplicada nos terminais da camada resistiva. Para isso utiliza-se a relação eletro-térmica descrita na Sessão 4.3.

- Metrologia quântica da metodologia aplicada ao projeto:

Aplicação dos conceitos de metrologia quântica de forma a evidenciar a capacidade em estimar o parâmetro controlado, tal qual suas características quânticas após todo desenvolvimento e aplicação da metodologia de controle. Aplica-se a metrologia quântica na contagem de fótons no interferômetro Mach Zehnder.

## 4 DESENVOLVIMENTO DO CONTROLADOR

### 4.1 CONTROLE PID

Quando se faz necessário automatizar um processo, torná-lo acessível ou diminuir seu tempo de execução, uma das soluções mais utilizadas é a do controle do processo. Utilizando ferramentas computacionais para aplicação da metodologia de controle de processos, cujo o objetivo é de realizar operações cíclicas ou até mesmo fisicamente difíceis de serem realizadas devido a periculosidade de manuseio ou presença humana no ambiente do processo. Neste âmbito, o método de controle mais utilizado e mais comum é o PID (Proporcional Integral e Derivativo). Para exemplificar o funcionamento destes métodos separados e em conjunto, utiliza-se o cenário de um veículo a transitar por uma rodovia em uma determinada velocidade, a partir destas condições será aplicado os conceitos do controlador.

#### 4.1.1 CONTROLE PROPORCIONAL (P)

O controlador pode ser entendido como um dispositivo que realiza determinadas operações matemáticas e computacionais. Dado um sinal de erro  $e(t)$  dado pela saída e entrada do sistema, é aplicado o controle com o objetivo de produzir um sinal  $u(t)$  a ser aplicado na planta de forma a atingir o sinal de referência.

Para este controlador, o sinal de controle aplicado a cada instante à planta é proporcional à amplitude do valor do erro:

$$u(t) = K(e(t)). \quad (48)$$

Portanto, em um dado instante, o valor de saída pode assumir valores superiores ou inferiores ao valor da referência, ( $e(t) > 0$ ), ( $e(t) < 0$ ), sendo assim o sinal de controle será proporcional ao módulo de  $e(t)$ .

Pode-se observar na Figura 12 a resposta de um sistema considerando-se a aplicação

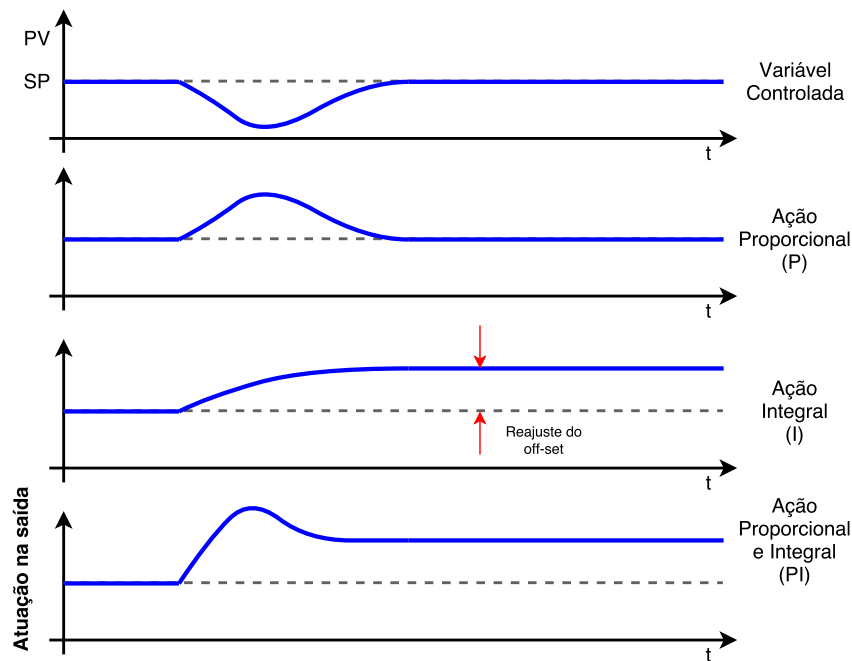
de uma ação proporcional. Vale notar que, quanto maior o ganho  $K$  menor o erro em regime permanente. Este erro pode ser proporcionalmente diminuído com o aumento do ganho, entretanto não é possível anulá-lo completamente. Em contrapartida, quanto maior o ganho, mais oscilatório será o comportamento transitório do sistema em malha fechada. Na maioria dos processos físicos, o aumento excessivo do ganho proporcional pode levar o sistema a instabilidade (JR; BAZANELLA, 2000).

É muito comum a utilização na indústria, ao invés de ser especificado diretamente o valor de  $K$ , especifica-se o valor da banda proporcional  $P_b$  em valor percentual. Note que, considerando-se  $u_{max} - u_{min} = 100\%$ , tem-se:

$$K = \frac{100}{P_b} \quad (49)$$

Na prática este controle proporcional irá realizar um ação proporcionalmente relativa ao desejado, ou seja, utilizando o cenário onde tem-se um veículo transitando em uma determinada rodovia, este mesmo deve manter uma distância  $x$  de um outro veículo que se encontra à sua frente. Desta forma o condutor inicia uma aceleração atingindo uma velocidade e se aproximando do veículo da frente, respeitando a distância desejada, o condutor diminui a velocidade do veículo, obtendo uma posição negativa em relação ao desejado, iniciando novamente o mesmo procedimento de aceleração e desaceleração.

A aceleração que é imprimida ao pisar no acelerador, para ganhar velocidade e alcançar o veículo, é denominada ganho ou proporcional em um controle PID. Note que se o ganho for alto, ultrapassa a referência (Setpoint) e então deve-se realizar uma correção. Por este motivo é comum ver uma oscilação (acima e abaixo do Setpoint) quando não se tem um ganho bem definido.



**Figura 12: Ação de controle P e PI**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

#### 4.1.2 CONTROLE PROPORCIONAL INTEGRAL (PI)

A formação do controle proporcional integral é dada por um módulo proporcional em conjunto à um módulo integrativo, uma vez que a junção dos módulos melhoram a resposta do controlador ao serem empregados separadamente.

A ação de controle integral é formada ao empregar um sinal de controle  $u(t)$  proporcional à integral do sinal de erro  $e(t)$ :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \quad (50)$$

onde  $T_i$  é denominado como tempo integral ou reset-time.

A ação integral funciona como uma armazenadora de energia. A partir de um tempo  $t$  qualquer, sendo o erro igual a zero,  $e(t) = 0$  em regime permanente, o sinal de controle  $u(t)$  irá se manter constante, proporcional a esta energia armazenada até o instante  $t$ . Portanto, em um sistema em malha fechada, é possível fazer com que o sistema siga uma determinada referência com erro nulo em regime permanente, pois a ação integral garantirá a aplicação ao processo de um sinal de controle constante de forma a ter-se  $r(t) = y(t)$ ,  $e(t) = 0$  (JR; BAZANELLA, 2000).



A função de transferência da ação integral é dada por:

$$G_c(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{1}{sT_i}. \quad (51)$$

Assim sendo, sob um ponto de vista matemático, a ação integral permite aumentar a ordem do sistema como consequência, a função de transferência resultante após a ação do controle será dada por  $G_c(s)G(s)$ , e possuirá um pólo a mais na origem, permitindo assim obter um erro nulo em regime permanente a determinadas referências, da forma  $\frac{1}{s^p}$ . Deste modo, a utilização de um controlador de ação integral possibilitará a rejeição assintótica de certas perturbações de carga na saída do processo da forma  $\frac{1}{s^p}$ . Esta ação integral está diretamente ligada a melhoria da precisão do sistema. Entretanto, a introdução de um pólo na origem na função de transferência em malha aberta, tende a piorar a estabilidade relativa do sistema em malha fechada ou mesmo torná-lo instável. (JR; BAZANELLA, 2000).

A ação integral aplicada de forma singular pode gerar instabilidade no sistema, devido este aspecto é usual a utilização deste em conjunto a ação proporcional construindo o controlador PI, representado por

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right). \quad (52)$$

O gráfico da Figura 12 ilustra a aplicação da ação integral conjuntamente com a ação proporcional, assim como a ação proporcional e integral de forma distinta.

Utilizando a transformada de Laplace na equação anterior obtém-se a função de transferência

$$G_{pi}(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{K(s + 1/T_i)}{s}. \quad (53)$$

Em relação ao exemplo adotado, a ação integral proporciona uma maior precisão em manter a distância  $x$  entre os veículos. Isso reduz o erro em regime, se comparado à ação proporcional. Sendo assim, esta ação é equivalente à estar a uma distância maior que  $x$  do veículo da frente e acelerar levemente o veículo alcançando exatamente à distância  $x$  e mantendo-a muito mais suave do que apenas proporcionalmente (desacelerando e acelerando gradualmente). Isto em um controle PID pode ser considerado o tempo integral do sistema.

### 4.1.3 CONTROLE PROPORCIONAL DERIVATIVO (PD)

Da mesma forma com que o controle proporcional integrativo, o controle proporcional derivativo é a junção de duas ações de controle: a proporcional e a ação derivativa. A ação derivativa corresponde a aplicação de um sinal de controle proporcional à derivada do sinal de erro:

$$u(t) = T_d \frac{d e(t)}{dt}$$

A função de transferência desta ação é dada por:

$$G_c(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = T_d s.$$

Este tipo de função de transferência proporciona aumento no ganho conforme o aumento da frequência, o que tornaria o sistema sensível a ruídos de alta frequência, tornando impossível sua implementação analógica. Devido a estes motivos a implementação da ação derivativa dá-se com a introdução de um pólo em alta frequência cuja finalidade é limitar o ganho em alta frequência. Desta forma a função de transferência é escrita como:

$$G_c(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = T_d \frac{sp}{s+p}.$$

A derivada em um ponto de uma função está diretamente relacionada a taxa de variação instantânea neste ponto. Isto posto, ao aplicar uma ação de controle com o sinal proporcional à derivada do sinal de erro equivale a aplicar uma ação derivativa baseada na tendência de evolução do erro. Esta ação é dita antecipatória ou preditiva e proporciona que o sistema reaja mais rapidamente. Utiliza-se deste fato para produzir respostas transitórias mais rápidas, ou seja, para a melhora do comportamento dinâmico do sistema em malha fechada. Vale notar que, em regime permanente, o sinal de erro constante a ação derivativa será igual a zero, desta forma, esta ação atua apenas durante a resposta transitória (JR; BAZANELLA, 2000). De maneira prática, a ação Derivativa pode melhorar a ação do controlador devido a predizer o que ainda está por acontecer ao projetar a taxa atual de mudança para o futuro.

A estrutura básica do controlador PD é dada por:

$$u(t) = K \left( e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right). \quad (54)$$

Considerando-se que  $e(t + T_d)$  pode ser aproximado por

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (55)$$

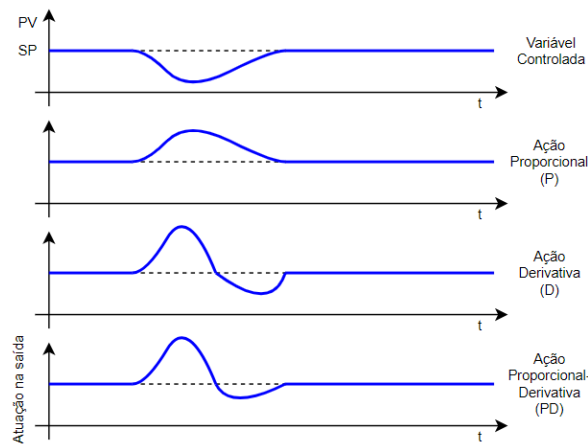
tem-se que  $u(t) \approx Ke(t + T_d)$ , ou seja, o sinal de controle é proporcional a estimativa do erro de controle  $T_d$  unidades de tempo a frente. De outra forma, a predição é realizada excedendo o valor do erro pela reta tangente a curva do erro no instante  $t$ .

A função de transferência do controlado PD é dada então por:

$$G_{pd} = \frac{u(s)}{r(s)} = K \left( 1 + \frac{spT_d}{s+p} \right) = \frac{K(1 + T_dp) \left( s + \frac{p}{1+pT_d} \right)}{(s+p)}. \quad (56)$$

De maneira prática no controle PID, a derivada é usada para eliminar um erro acumulado na integral. No cenário utilizado dos veículos, o condutor percebe o crescimento ou decréscimo da distância  $x$  e impede que esta diferença fique maior. O controle derivativo age de forma a diminuir a oscilação em torno do Setpoint tornando-a o menor possível.

A Figura 13 representa o funcionamento dos controladores PD.



**Figura 13: Ação de controle P e PD**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

#### 4.1.4 CONTROLE PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO (PID)

Utilizando das vantagens dos controladores apresentados nas seções anteriores, combinando proporcional integral e proporcional derivativo produz-se o controlador denominado Proporcional Integral Derivativo (PID). A ação integral está diretamente ligada à precisão do sistema produzindo a capacidade de erro nulo em regime permanente. Em contrapartida a esta

capacidade de erro nulo o controlador proporcional integral produz um efeito desestabilizador, que é contrabalançado pela ação derivativa que tende a aumentar a estabilidade relativa do sistema ao mesmo tempo que torna a resposta do sistema mais rápida (JR; BAZANELLA, 2000).

A função de transferência do controlador PID é dada por:

$$G_{PID} = \frac{u(s)}{r(s)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{s p T d}{s + p} \right) = K \left( \frac{s^2 + \frac{1+T d T_i}{T_i} s + \frac{p+T_i p}{T_i}}{s(s+p)} \right).$$

## 4.2 MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS

Para aplicar os conceitos de controle introduzidos na seção anterior se faz necessário a caracterização e modelagem do sistema de forma geral, alcançando assim um modelo matemático capaz de representar a dinâmica do sistema e sua evolução temporal. Utiliza-se deste modelo para resposta em regime permanente da ação de controle, portanto garantir uma modelagem matemática representativa é crucial para o controle do processo.

### 4.2.1 CAPACITÂNCIA TÉRMICA

É possível caracterizar uma relação entre a temperatura de um corpo físico e o calor nele armazenado, considerando que não ocorram distúrbios e que a mesma seja linear. Sendo assim, considerando  $q_i(t)$  o fluxo de calor que entra em um corpo e  $q_0(t)$  o fluxo de calor que sai do mesmo corpo, o calor armazenado no corpo entre dois instantes de tempo  $t_0$  e  $t$  é dado por

$$\int_{t_0}^t [q_i(\varepsilon) - q_0(\varepsilon)] d\varepsilon \quad (57)$$

onde  $\varepsilon$  é uma variável muda usada na integração.

O calor armazenado durante esse intervalo de tempo é dado por

$$\int_{t_0}^t [q_i(\varepsilon) - q_0(\varepsilon)] d\varepsilon = C [T(t) - T(t_0)] \quad (58)$$

onde  $T(t_0)$  é a temperatura do corpo no instante de referência  $t_0$  e a constante  $C$  é definida como a capacitância térmica do corpo, dada em  $\left[\frac{J}{K}\right]$ . A Eq.(58) pode ser escrita como

$$T(t) = T(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t [q_i(\varepsilon) - q_0(\varepsilon)] d\varepsilon. \quad (59)$$

Para um corpo de massa  $M$  e calor específico  $c$ , a capacitância térmica é dada por

$$C = Mc, \quad (60)$$

para  $M$  em  $[kg]$  e  $c$  em  $\left[\frac{J}{kg.K}\right]$  (INCROPERA et al., 2000). Derivando os termos da Eq. (59), obtemos

$$T(t) = \frac{1}{C} [q_i(t) - q_0(t)]. \quad (61)$$

#### 4.2.2 RESISTÊNCIA TÉRMICA

A resistência térmica  $R$  pode ser definida pela variação na diferença de temperatura pela variação na taxa de fluxo de calor. Para a transferência de calor por condução, a Lei de *Fourier* estabelece que o fluxo de calor  $q(t)$  entre dois corpos com temperatura  $T_1(t) > T_2(t)$ , separados por um meio condutor, é dado por

$$q(t) = \alpha A \frac{T_1(t) - T_2(t)}{d}. \quad (62)$$

Reescrevendo a Eq. (62) como

$$q(t) = \frac{1}{R} [T_1(t) - T_2(t)], \quad (63)$$

onde a resistência térmica é dada em função do material e das dimensões do meio condutor, sendo dada por

$$R = \frac{d}{A\alpha}, \quad (64)$$

onde

- $\alpha$  = condutividade térmica do material condutor  $\left[\frac{J}{m.s.K}\right]$  ou  $\left[\frac{W}{m.K}\right]$  (tabelada)
- $A$  = área normal ao fluxo de calor  $[m^2]$
- $d$  = espessura do condutor  $[m]$

Vale ressaltar que a Eq. (63) é utilizada quando não ocorre armazenamento de energia térmica no meio condutor, em contrapartida se faz necessário incluir a capacitância térmica do meio condutor no modelo, para obter um modelo representativo do sistema próximo ao real (INCROPERA et al., 2000), (OGATA; YANG, 1970).

### 4.2.3 MODELAGEM DO SISTEMA

Utilizando dos conceitos apresentados anteriormente, o sistema representado Figura 14 é composto por um material semiconductor, de forma que represente a troca de calor realizado no sistema geral, onde o fluxo de calor  $q_0$  entra por um dos contatos do semiconductor que é envolto por uma região quimicamente isolada, impedindo a troca de calor externa ao sistema. Utilizando a Eq.(63), e para  $T_a$  a temperatura externa do sistema, temos

$$q_0(t) = \frac{1}{R}[T(t) - T_a] \quad (65)$$

Substituindo na Eq.(61)

$$\dot{T}(t) = \frac{1}{C} \left[ q_i(t) - \frac{1}{R}(T(t) - T_a) \right] \quad (66)$$

podendo ser reescrita como

$$RC\dot{T}(t) + T(t) = Rq_i(t) + T_a \quad (67)$$

onde observa-se uma equação diferencial ordinária linear (EDOL), com duas entradas  $q_i(t)$  e  $T_a$  e saída  $T(t)$ .

Escrevendo em termos das variáveis

$$\begin{aligned} \hat{T}(t) &= T(t) - \bar{T} \\ \hat{q}_i(t) &= q_i(t) - \bar{q}_i \end{aligned} \quad (68)$$

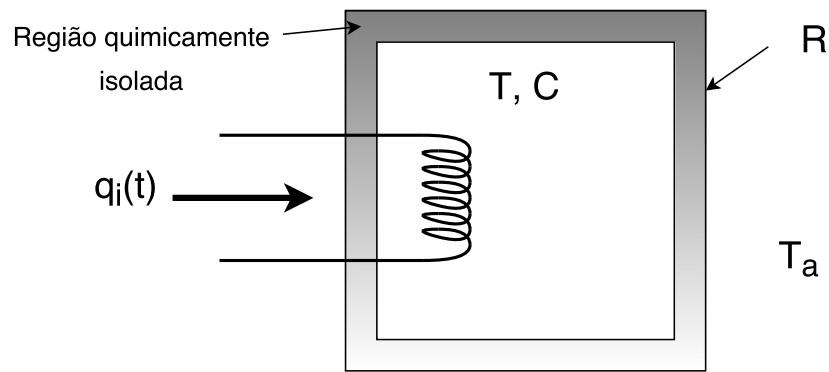
tornando-se possível obter o modelo matemático

$$RC\dot{\hat{T}}(t) + \hat{T}(t) = R\hat{q}_i(t) \quad (69)$$

A função de transferência, utilizando da transformada de Laplace, relacionando  $\hat{T}$  e  $\hat{q}_i$  é dada por

$$\frac{T(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}. \quad (70)$$

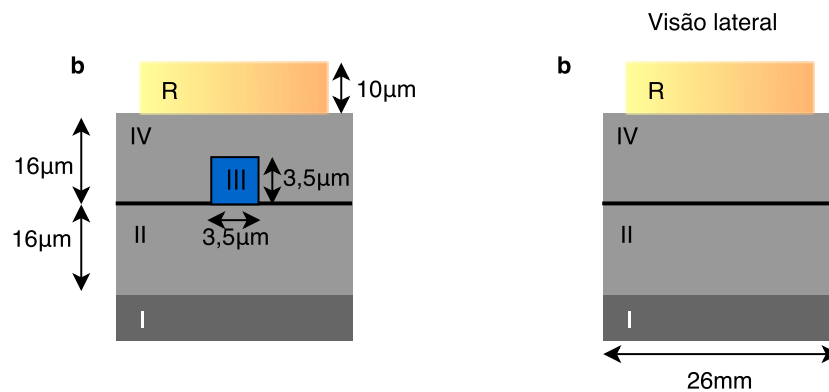
Desta forma, obtém-se um modelo matemático representativo do sistema (OGATA; YANG, 1970).



**Figura 14: Modelo representativo das características térmicas do sistema**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

A modelagem do sistema é realizada através das características térmicas gerais do sistema, levando em consideração nas características dos materiais subsequentes, descritas a seguir



**Figura 15: Modelo representativo geral do dispositivo**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

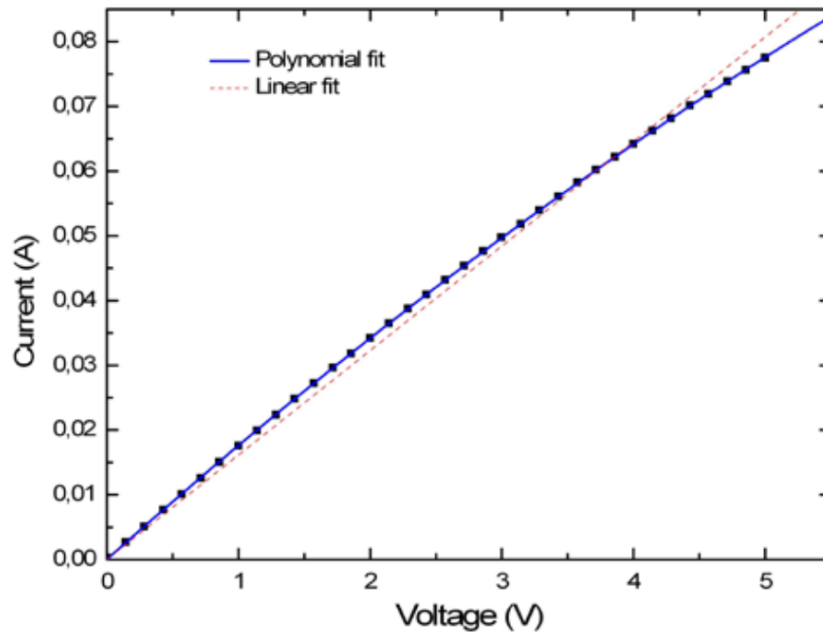
Dadas suas características físicas representadas nas Figuras 14 e 15, especifica-se suas dimensões e propriedades dos materiais utilizados, separadas pelas camadas, como

- Camada R:
  - Material Resistivo;
  - \* Características:
    - Dimensões:  $10\mu m \times 10\mu m \times 26mm$ .
- Camada IV:

- Material: Fósforo e sílica dopada (MATTHEWS et al., 2009);
  - \* Características:
    - Dimensões:  $16\mu m \times 16\mu m \times 26mm$ .
- Camada III:
  - Material: Quartzo (MATTHEWS et al., 2009);
    - \* Características:
      - Condutividade térmica ( $\alpha$ ):  $1,3 \left[ \frac{W}{m \cdot K} \right]$ ;
      - Calor específico ( $c$ ):  $753,9 \left[ \frac{J}{Kg \cdot K} \right]$ ;
      - Densidade ( $\delta$ ):  $2,203 \left[ \frac{g}{cm^3} \right]$ ;
      - Dimensões:  $3,5\mu m \times 3,5\mu m \times 26mm$ .
- Camada II:
  - Material: Sílica (MATTHEWS et al., 2009);
    - \* Características:
      - Dimensões:  $16\mu m \times 16\mu m \times 26mm$ .
- Camada I:
  - Material: Silício *Wafer* (MATTHEWS et al., 2009);
    - \* Características:
      - Dimensões:  $10,1cm \times 16\mu m \times 26mm$ .

A resistência elétrica  $R_e$  do material é dada pelo coeficiente angular da interpolação linear, representado pela Figura 16





**Figura 16: Interpolação linear resistência elétrica**

Fonte: MATTHEWS et al., Supplementary Information.

#### 4.3 CONTROLE DO SISTEMA

O modelo apresentado na seção anterior expressa a relação de temperatura ( $T$ ) e fluxo de calor ( $q$ ), porém o objetivo final das relações das características dinâmicas do sistema é uma relação tensão ( $V$ ) e fase relativa ( $\phi$ ), para isso se faz necessário utilizar uma relação no modelo matemático, denominada relação eletrotérmica, onde os comportamentos de componentes elétricos são correlacionados a componentes térmicos de forma a obter um modelo relacionando tensão ( $V$ ) e corrente ( $i$ ). A tabela a seguir representa tais correlações (CINDRA; TEIXEIRA, 2005).

**Tabela 1: Analogia Elétrica Térmica**

Sistema elétrico	Sistema térmico
Tensão ( $V$ )	Temperatura ( $\Theta$ )
Corrente elétrica ( $i$ )	Fluxo de calor ( $q$ )
Resistência elétrica ( $R$ )	Resistência térmica ( $R$ )
Capacitância ( $C$ )	Capacitância térmica ( $C$ )

Desta forma obtém-se o modelo representativo do sistema, levando em consideração

as características físicas descritas Figura 15.

$$\frac{V(s)}{i(s)} = \frac{50}{0,2159s + 1} \quad (71)$$

Utilizando o modelo representado por Eq.(71), é aplicada uma ação de controle Proporcional Integral (PI) devido a necessidade do sistema, e para realizar a sintonia dos parâmetros do controlador utiliza-se do método de *Skogestad* (HAUGEN, 2004).

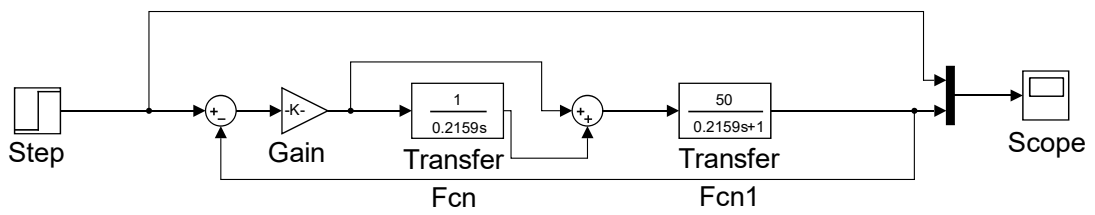
Inicialmente proposto por GARCIA e MORARI (1982), o modelo de controle interno foi demonstrado em 1986 por D. E. Rivera, M. Morari e S. Skogestad, que a partir do modelo do processo e de uma especificação de desempenho, obtém-se uma sintonia adequada dos parâmetros.

Desta forma os valores dos parâmetros do controlador PID na forma série ( $K_p s$ ,  $T_i s$  e  $T_d s$ ) sugeridos por Skogestad para diversos tipos de processos  $G(s)$  são apresentados na (Tabela 2).

**Tabela 2: Método Skogestad**

$G(s)$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
$\frac{K}{s}$	$\frac{1}{KT_c}$	$k_1 T_c$	0
$\frac{K}{Ts+1}$	$\frac{1}{KT_c}$	$\min [T; k_1 T_c]$	0
$\frac{K}{s(Ts+1)}$	$\frac{1}{KT_c}$	$k_1 T_c$	$T$
$\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1 > T_2$	$\frac{1}{KT_c}$	$\min [T; k_1 T_c]$	$T_2$
$\frac{K}{s^2}$	$\frac{1}{4K(T_c)^2}$	$4T_c$	$4T_c$

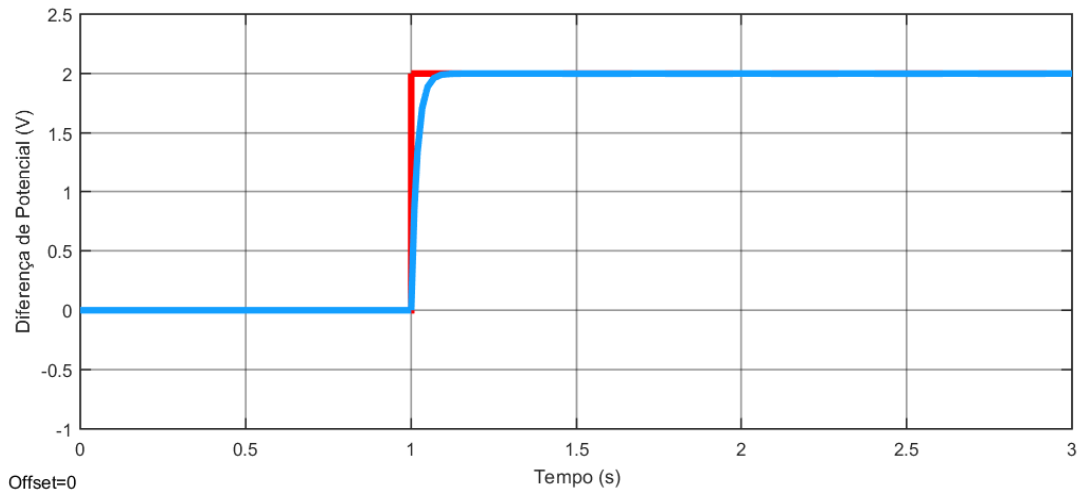
Para simulação computacional do controlador no sistema, foi utilizado o *software* MATLAB-Simulink, utilizando da Figura 14 representados no modelo Eq.(71) é expresso a seguir



**Figura 17: Esquemático do controlador.**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

onde Gain é a ação proporcional ( $K_p$ ), Transfer Fcn é a ação integrativa ( $T_i$ ) e Transfer Fcn1 é a função de transferência do sistema



**Figura 18: Comportamento em regime permanente da malha de controle.**

**Fonte: Elaborada pelo autor (MatLab- Simulink).**

Atraves do método de *Skogestad* obtém-se  $K_p = 0,25096$  e  $T_i = 0,2159$  (valores do controlador, adimensional), com a aplicação de um controlador PI Figuras 17 e 18, pode-se observar que as referências dadas foram atingidas com um tempo relativamente curto, sem a presença de sobres sinal ou oscilações, caracterizando resultados satisfatórios e demonstrando a eficácia do controlador.

#### 4.4 DINÂMICA CARACTERÍSTICA DO MATERIAL

Através das dinâmicas características do material ilustrado no sistema Figura 15, utilizando das propriedades dos materiais relacionados para obter relação de  $V \rightarrow \phi$  (tensão e fase relativa). Tomando um cenário ideal onde toda energia elétrica se converte em energia térmica (ou que a energia dissipada é ínfima em um aspecto geral) podemos obter a igualdade desta conversão.

Sendo a variação do trabalho em função da temperatura Eq.(65) como

$$\Delta T = R_t P_e, \quad (72)$$

e sendo  $R_t$  a resistência térmica,  $P_e = \frac{V^2}{R_e}$  a potência elétrica é dada por

$$\Delta T = \frac{R_t}{R_e} V^2, \quad (73)$$

onde  $V^2$  é a diferença de potencial e  $R_e$  a resistência elétrica. Para os valores de  $R_e$ , pela Figura

16, temos

$$R_e = 50[\Omega].$$

Utilizando das dimensões da camada III,  $3,5\mu m \times 3,5\mu m \times 26mm$ , e sendo a resistividade do material  $\alpha = 1,3 \left[ \frac{W}{m \cdot K} \right]$ , obtém-se

$$R_t = R = \frac{d}{A\alpha} = 29,6 \left[ \frac{W}{K} \right].$$

As propriedades ópticas da guia de onda dependem da temperatura do sistema, e tal dependência é expressa na forma

$$\Delta\eta = 1 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{1}{K} \right]. \quad (74)$$

Como descrito na Seção 2.2, a diferença de caminho óptico implica em uma diferença de fase entre os caminhos Eq.(14) e (15)

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{\delta}{\lambda} \right), \quad (75)$$

onde  $\delta = \Delta\eta d$  é a diferença de caminho óptico, e  $d$  é a diferença de caminho físico, desta forma

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{d}{\lambda} \right) \Delta\eta. \quad (76)$$

Substituindo a Eq. (74) obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= 1 \cdot 10^{-5} \Delta T, \\ \Delta\phi &= \left( 2\pi \frac{d}{\lambda} 1 \cdot 10^{-5} \right) \Delta T. \end{aligned} \quad (77)$$

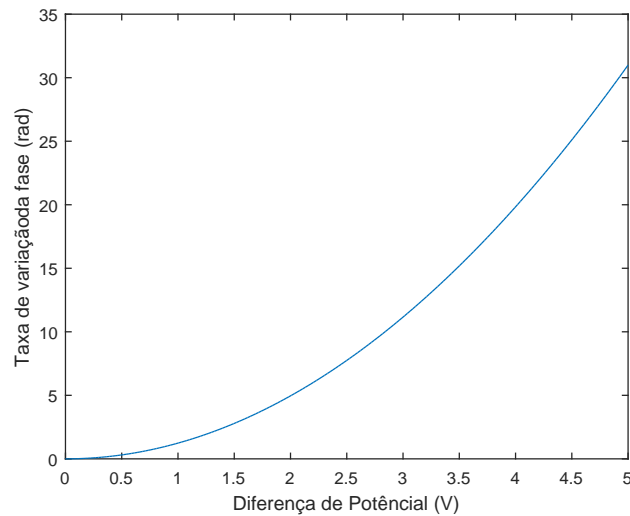
Essa aproximação é válida uma vez que as características de índice de refração do material têm uma variação constante para uma faixa de temperatura, tendo em vista que estas variações para o sistema são pequenas. Para isto obtém-se

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{d}{\lambda} \right) 1 \cdot 10^{-5} \frac{R_t}{R_e} V^2. \quad (78)$$

Utilizando a características do material descrito na Seção 4.3.3, obtém-se

$$\Delta\phi = 1,2398 \cdot V^2, \quad (79)$$

este resultado é expresso na Figura 19

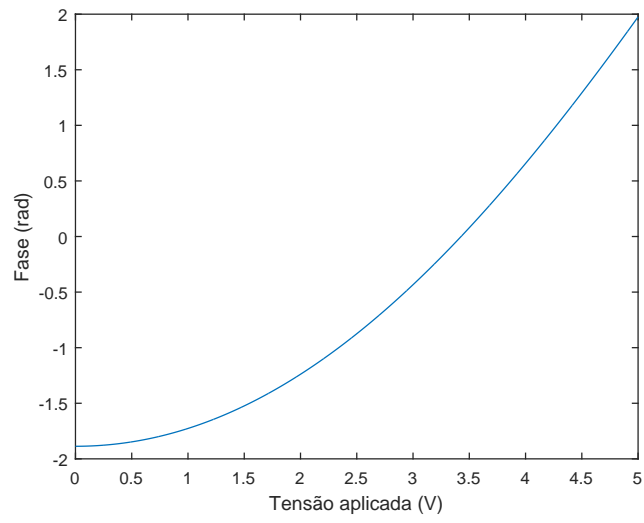


**Figura 19: Relação de fase do manipulador.**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Este resultado expressa a taxa de variação da fase para cada valor de tensão aplicado no sistema, e pode ser comparado com o método empírico empregado por MATTHEWS et al. expresso na Figura 20. Observa-se que em âmbito geral a característica polinomial foi obtida pela modelagem empregada, porém o coeficiente do polinômio obtido, que caracteriza a amplitude de evolução da taxa de variação na fase, apresenta uma ordem grandeza diferente, sendo esse aspecto justificável pela característica da modelagem. Existem diversas maneiras de modelar um sistema, sua eficácia em representar o mesmo aumenta sua complexidade principalmente se é levado em consideração métodos específicos descritos pela mecânica quântica, como por exemplo a forma como a luz irá interagir com cada material.

Percebe-se que há uma dificuldade empírica em modelar esse sistema devido a complexidade da caracterização dos materiais. Algumas propriedades e/ou características de um material são específicas para o mesmo: se forem realizadas dopagens, tratamentos térmicos ou fundir materiais diferentes, algumas destas características serão modificadas. A modelagem empregada depende destas características, e a quantidade de variáveis e aproximações específicas torna o resultado sensível a qualquer variação desses parâmetros. Possivelmente para obter um resultado mais próximo das medidas experimentais, devem-se levar em conta as características específicas, à reflectividade e refração de cada material.



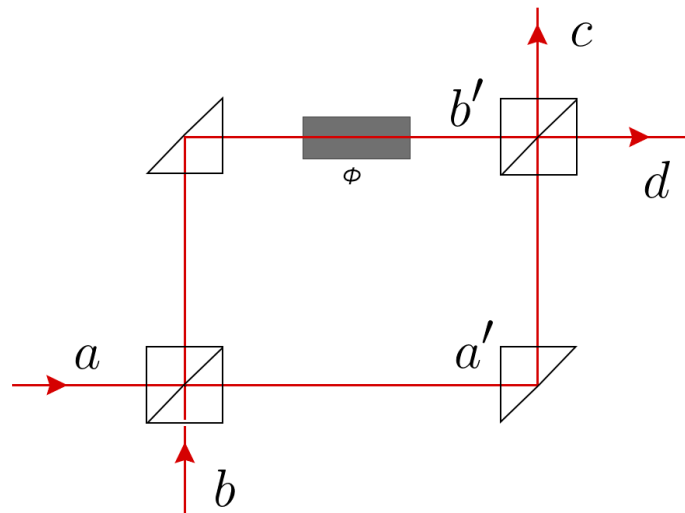
**Figura 20: Relação de fase no manipulador.**

**Fonte: MATTHEWS et al., pág 347.**

## 5 METROLOGIA DO DISPOSITIVO

Como apresentado na Seção 2.5, o principal objetivo deste trabalho é encontrar a melhor estimativa para o parâmetro estudado  $\phi$ . Para esse parâmetro é apresentada a análise sobre a precisão em sua estimativa a partir de dois métodos: propagação de erro e informação de Fisher.

Primeiramente se faz necessário introduzir uma notação utilizada neste capítulo a fim de facilitar as relações algébricas e entendimento físico do processo (NIELSEN; CHUANG, 2002). Para obter a estimativa do parâmetro, utilizando da ferramenta de propagação de erros ou a informação de Fisher, se faz necessária a descrição dos operadores e estados utilizados. Para isto, considere a Figura 21 para uma descrição análoga de caminhos, dados matematicamente por



**Figura 21: Representação de caminhos MZ.**

**Fonte: Elaborada pelo autor.**



$$a' \equiv \frac{(a + ib)}{\sqrt{2}}, \quad (80)$$

$$b' \equiv \frac{(ia + b)}{\sqrt{2}}, \quad (81)$$

$$c \equiv \frac{(a' + ie^{i\phi}b')}{\sqrt{2}}, \quad (82)$$

$$d \equiv \frac{(ia' + e^{i\phi}b')}{\sqrt{2}}, \quad (83)$$

onde  $a'$ ,  $b'$  são os caminhos percorridos pelo feixe de luz e  $c$ ,  $d$  os detectores no final de cada caminho.

O operador  $a^\dagger$  é definido como operador de criação de um fóton no modo  $a$  e de mesma maneira,  $b^\dagger$  é o operador de criação de um fóton no modo  $b$ , e são expresso como

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (84)$$

$$b^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle,$$

onde  $|n\rangle$  representa um estado contendo  $n$  fótons. Os modos  $a$  e  $b$  representam por exemplo os caminhos de entrada do fóton no BS, rotulados por  $a$  e  $b$ . De maneira similar, o operador de aniquilação de fóton atuando no modo  $a$  é expresso como

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (85)$$

O funcionamento do dispositivo nas seções anteriores permanecem as mesmas, sendo aplicadas quando necessárias utilizando da notação apresentada anteriormente.

## 5.1 LIMITE DE HEISENBERG

Como expresso na Seção 2.2, são descritas de maneira algébrica as operações realizadas em cada caminho percorrido pelo feixe. No final do interferômetro, detectores são montados para medir a taxa de fótons que chega pelo caminho  $c$  e  $d$ . Podemos representar a diferença na contagem de fótons nos pontos  $c$  e  $d$  pelo seguinte operador

$$M \equiv d^\dagger d - c^\dagger c = (a^\dagger a - b^\dagger b) \cos \phi + (a^\dagger b + b^\dagger a) \sin \phi. \quad (86)$$

Vale notar que  $a^\dagger a$  é um operador número de fótons no modo  $a$ , desta forma se atuar  $a^\dagger a$  em  $|n\rangle$

$$a^\dagger a |n\rangle = a^\dagger (a |n\rangle).$$

Utilizando da Eq.(84) e (85), tem-se

$$\begin{aligned} a^\dagger a|n\rangle &= \sqrt{n}(a|n-1\rangle) \\ &= \sqrt{n}\sqrt{n}|n\rangle \\ &= n|n\rangle, \end{aligned}$$

esse operador é responsável por contar o número de fótons no modo  $a$ , essa relação é desenvolvida analogamente para  $d^\dagger d, c^\dagger c$  e  $b^\dagger b$ .

Através deste operador pode-se escrever a propagação de erros para a fase  $\phi$ , como

$$\Delta\phi^2 = \frac{\Delta M^2}{|\delta_\phi \langle M \rangle|^2} \quad (87)$$

onde a variância  $\Delta M^2$  é definida por

$$\Delta M^2 = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \quad (88)$$

e  $\langle M \rangle$  é o valor esperado sobre o operador  $M$ , que é medido pela contagem da diferença da taxa de detecção entre os detectores inferior e superior  $c$  e  $d$  respectivamente. Definindo operadores para  $A$  e  $B$  como

$$A = a^\dagger a - b^\dagger b$$

$$B = a^\dagger b + b^\dagger a,$$

e sua variância é descrita como

$$\Delta A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (89)$$

$$\Delta B^2 = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2. \quad (90)$$

Através do Formalismo de Pauli, Seção 2.3.1, é possível realizar um mapeamento dos estados para serem representados pelas matrizes de Pauli. Neste caso específico, pode-se escrevê-las fazendo analogia com entre as matrizes  $\sigma_Z$  e  $\sigma_X$ , ou seja

$$A = a^\dagger a - b^\dagger b = \sigma_Z \quad (91)$$

$$B = a^\dagger b + b^\dagger a = \sigma_X. \quad (92)$$

O valor esperado de cada operador é descrito como

$$\langle A \rangle = \sum_{n=1}^N \langle 0 | \sigma_Z | 0 \rangle = N \quad (93)$$

$$\langle A^2 \rangle = \langle 0 | \left( \sum_{n=1}^N \sigma_Z \right)^2 | 0 \rangle = N^2, \quad (94)$$

onde  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Da mesma maneira pode-se descrever valor esperado dos operadores

$$\langle B \rangle = \langle 0 | \left( \sum_{n=1}^N \sigma_X \right) | 0 \rangle = 0 \quad (95)$$

$$\langle AB \rangle = \langle BA \rangle = 0 \quad (96)$$

Assim, substituindo as Eq.(89) a (95) nas Eq.(86), (88) e (87) respectivamente (DOWLING, 1998), obtém-se

$$\Delta\phi^2 = \frac{\Delta A^2 \cos^2 \phi - (\langle AB \rangle - 2\langle A \rangle \langle B \rangle + \langle BA \rangle) \sin \phi \cos \phi + \Delta B^2 \sin^2 \phi}{|\langle A \rangle \sin \phi + \langle B \rangle \cos \phi|^2}. \quad (97)$$

Simplificando a equação, tem-se

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{N \sin^2 \phi}{|N \sin \phi|^2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (98)$$

Através deste resultado é possível obter a menor estimativa do parâmetro  $\phi$ ,  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  definido pelo Limite de Heisenberg, limite de precisão clássica, utilizando a ferramenta de propagação de erros.

## 5.2 INFORMAÇÃO DE FISHER

Utilizando do desenvolvimento do dispositivo expresso na Seção 2.2, pode-se descrever o funcionamento do interferômetro de MZ nas notações introduzidas neste capítulo, representando feixe no modo  $a$  passando pelos caminhos até os detectores  $c$  e  $d$ , onde é representado a ação do BS, PS e o segundo BS respectivamente (THOMAS-PETER, 2012), para um estado

$|0\rangle$  temos

$$\begin{aligned}
|0\rangle &\xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + b^\dagger)|0\rangle, \\
&\xrightarrow{PS} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi}a^\dagger + b^\dagger)|0\rangle, \\
&\xrightarrow{BS} \frac{1}{2} \left[ (e^{i\phi} + 1)a^\dagger + (e^{i\phi} - 1)b^\dagger \right] |0\rangle.
\end{aligned} \tag{99}$$

Para o cálculo da informação de Fisher, as probabilidades associadas para as possíveis saídas podem ser obtidas em função de  $\phi$ , como expresso na Seção 2.5. Os operadores de medida  $\Pi_x$ , aplicados ao dispositivo são denominados  $\Pi_a$  e  $\Pi_b$ , para sua distribuição de probabilidade (THOMAS-PETER, 2012), são representado como

$$\Pi_a = |1, 0\rangle\langle 1, 0| \rightarrow \text{Detectores em } a, \tag{100}$$

$$\Pi_b = |0, 1\rangle\langle 0, 1| \rightarrow \text{Detectores em } b, \tag{101}$$

onde  $|x, y\rangle$  denota um estado com  $x$  fótons no modo  $a$  e  $y$  fótons no modo  $b$ , respeitando a distribuição de probabilidade  $\sum_{x,y} \Pi_{x,y} = \mathbb{I}$ , onde  $\mathbb{I}$  é operador identidade nesse espaço. As probabilidades de cada estado em função do parâmetro  $\phi$ , descritos na Seção 2.2.2, são

$$p_a(\phi) = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi), \tag{102}$$

$$p_b(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi). \tag{103}$$

A informação de Fisher através da dispersão de probabilidades pode ser descrita como (THOMAS-PETER, 2012)

$$F(\phi) = \sum_i \frac{1}{p_i(\phi)} \left( \frac{\delta p_i(\phi)}{\delta \phi} \right)^2, \tag{104}$$

levando em consideração que o quadrado da derivada de  $p_a$  e  $p_b$  é dada por  $\frac{\sin^2 \phi}{4}$ . Portanto

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 + \cos \phi} + \frac{1}{1 - \cos \phi} \right] \sin^2 \phi = 1.$$

Assim, se realizarmos esse experimento  $k$  vezes para  $N$  fótons, o resultado da informação de Fisher será  $F_N(\phi) = N$  (PEARL et al., 2009), (THOMAS-PETER, 2012), para eventos independentes, ou seja, esta precisão pode ser alcançada ao realizarmos o experimento  $k$  vezes, enviando um conjunto não correlacionado de fóton, no modo  $a$ . A precisão sobre a estimativa

da fase, no caso do estado de entrada  $|0\rangle$ , será

$$\begin{aligned}(\Delta\phi)^2 &\geq \frac{1}{F_N(\phi)}, \\ (\Delta\phi) &\geq \frac{1}{\sqrt{N}},\end{aligned}\tag{105}$$

que é o limite clássico, como descrito anteriormente.

A informação de Fisher obtida representa a relação de limite clássica apresentada acima, para o cálculo da informação quântica de Fisher (QFI), representado em função do parâmetro  $\phi$  por  $F_q(\phi)$ , existem três classes de estados nos quais são explorados o uso da metrologia quântica, a aqui estuda-se a classe denominada estado  $N00N$  (THOMAS-PETER, 2012), (DOWLING, 1998), este pode ser descrito como

$$|\psi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle_{a,b} \pm |0, N\rangle_{a,b}),\tag{106}$$

representa um estado correlacionado em uma superposição de caminhos para uma combinação linear de  $N$  fótons no modo  $a$ , 0 fótons no modo  $b$  e 0 fótons no modo  $a$ ,  $N$  fótons no modo  $b$ . Desta forma é representado um conjunto de  $N$  fótons sendo descritos pelos modos de entrada no interferômetro, análogos as representações da seção (2.5), ou seja, os caminhos apresentados são descritos por modos de entrada no interferômetro, tais quais  $\binom{N}{0}$  no modo  $a$  e  $\binom{0}{N}$  no modo  $b$ . Para estes a probabilidade de cada parâmetro em função de  $\phi$  é descrita como

$$p_{\pm}(\phi) = \frac{1}{2}(1 \pm \cos N\phi).\tag{107}$$

Substituindo na Eq.(104) obtém-se

$$F_q(\phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 + \cos N\phi} + \frac{1}{1 - \cos N\phi} \right] N^2 \sin^2 N\phi = N^2.\tag{108}$$

Desta forma é possível obter  $F_q(\phi) = N^2$  (THOMAS-PETER, 2012), que é limitada inferiormente pela cota de Cramer-Rao

$$\begin{aligned}(\Delta\phi)^2 &\geq \frac{1}{F_q(\phi)}, \\ (\Delta\phi) &\geq \frac{1}{N}.\end{aligned}\tag{109}$$

Para a precisão na estimativa do parâmetro  $\phi$  através da informação de Fisher quântica, o erro é delimitado pelo inverso dos recursos físicos utilizados ( $\frac{1}{N}$ ), expressos como  $N$ , conjunto de caminhos tomados por um feixe de luz, para o limite de Heisenberg o erro obtido é dado por

$\frac{1}{\sqrt{N}}$ , pela cota de Cramer-Rao temos,  $(\Delta\phi)^2 \geq \frac{1}{F_q(\phi)}$ , pelos resultados obtidos,  $\frac{1}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{N}$ .

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada proposta de implementação de uma metodologia de controle através de uma modelagem do sistema a fim de obter, pelas relações intrínsecas dos materiais, um controle de fase relativa em um sistema quântico fotônico. A principal meta deste trabalho foi construir um modelo de um sistema com propriedades quânticas e a partir deste modelo construir uma metodologia de controle de fase, através de relações das características do mesmo.

Pode se observar na Seção 4.3, através do modelo obtido, que o controle possui um desempenho satisfatório, tendo em vista sua capacidade e tempo necessário para chegar na referência determinada, tal como tempo de subida  $T_r = 0,033s$  e tempo de acomodação  $T_s = 0,06s$ , ao analisar a Figura 18. Como desenvolvido na seção (4.2), o controle é realizado através de um resistor posicionado na região superior do dispositivo estudado, o modelo foi prescrito pelas características térmicas, porém através de analogias eletrotérmicas, foi possível projetar o controle pela diferença de potencial aplicada nos extremos deste resistor. Como o sistema é de primeira ordem, foi suficiente a aplicação de um controlador PI, onde pelo método de Skogestad, permitiu obter a sintonia dos parâmetros deste controlador.

Através da modelagem empregada para o dispositivo estudado foi possível, obter em âmbito geral, a característica polinomial pelas relações das características dos materiais (seção 4.2.3), porém o coeficiente do polinômio obtido, que caracteriza a amplitude de evolução da taxa de variação na fase, apresenta uma ordem de grandeza diferente, que nesse aspecto é justificável pela característica da modelagem. Como não é possível caracterizar com precisão o material utilizado, devido a algumas propriedades e características de um material, que são específicas para o mesmo, estarem modificadas por tratamento térmico ou dopagem. Como a modelagem empregada depende, em primeira instância, destas características, a relação encontrada é proporcional a uma diferença de amplitude e deslocamento característico do material e do método de medição da fase. Para a precisão na estimativa do parâmetro  $\phi$  através do limite de *Heisenberg*, o erro é delimitado pela raiz quadrada do inverso dos recursos físicos utilizados ( $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ), expressos como  $N$ , conjunto de caminhos tomados por um feixe de luz. A cota de

Cramer Rao determina que a precisão sobre a fase é limitada pelo inverso da informação de Fisher, a partir dessa cota os resultados obtidos, via propagação de erro e pelo cálculo da informação de Fisher, respectivamente, foram:  $\frac{1}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{N}$ . Este resultado garante que a estimativa da fase será mais precisa que a modelagem clássica para o dispositivo MZ. De fato, quando é possível modelar e controlar a fase deste dispositivo, é garantida uma melhor estimativa quântica em comparação a clássica, ou seja, se for possível controlar a fase, a partir da diferença de potencial, a abordagem quântica garante uma precisão na estimativa desse parâmetro.

De acordo com os objetivos expressos neste trabalho foi possível desenvolver um estudo a cerca do sistema e aplicar metodologias de controle pertinente ao mesmo, obtendo uma estimativa de parâmetro relacionada às suas características quânticas.



## REFERÊNCIAS

- BRAUNSTEIN, S. L. Quantum limits on precision measurements of phase. **Physical review letters**, APS, v. 69, n. 25, p. 3598, 1992.
- CINDRA, J. L.; TEIXEIRA, O. P. B. A evolução das ideias relacionadas aos fenômenos térmicos e elétricos: algumas similaridades. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 22, n. 3, p. 379–399, 2005.
- DOWLING, J. P. Correlated input-port, matter-wave interferometer: Quantum-noise limits to the atom-laser gyroscope. **Physical Review A**, APS, v. 57, n. 6, p. 4736, 1998.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat**. [S.l.]: Basic Books, 2015.
- GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: ACM. **Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing**. [S.l.], 1996. p. 212–219.
- HAUGEN, F. **PID control**. [S.l.]: Tapir, 2004.
- HOLBROW, C.; GALVEZ, E.; PARKS, M. Photon quantum mechanics and beam splitters. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 70, n. 3, p. 260–265, 2002.
- HOLLAND, M.; BURNETT, K. Interferometric detection of optical phase shifts at the heisenberg limit. **Physical review letters**, APS, v. 71, n. 9, p. 1355, 1993.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L. **Fundamentos de Transferência de Calor E de Massa**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- JENKINS, F. A.; WHITE, H. E. **Fundamentals of optics**. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 1957.
- JR, J. M. G. S.; BAZANELLA, A. S. **Ajustes de Controladores PID**. WEB-UFRGS, 2000. Acessado 01-09-2017. Disponível em: <<http://www.ece.ufrgs.br/jmgomes/pid/Apostila/apostila/apostila.html>>.
- MATTHEWS, J. C. et al. Manipulation of multiphoton entanglement in waveguide quantum circuits. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 3, n. 6, p. 346–350, 2009.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: AAPT, 2002.
- NISE, N. S.; SILVA, F. R. da. **Engenharia de sistemas de controle**. [S.l.]: LTC, 2002.
- O'BRIEN, J. L.; FURUSAWA, A.; VUCKOVIĆ, J. Photonic quantum technologies. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 3, n. 12, p. 687–695, 2009.

OGATA, K.; YANG, Y. Modern control engineering. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1970.

PEARL, J. et al. Causal inference in statistics: An overview. **Statistics surveys**, The author, under a Creative Commons Attribution License, v. 3, p. 96–146, 2009.

SAKURAI, J. J.; TUAN, S.-F.; COMMINS, E. D. **Modern quantum mechanics, revised edition**. [S.l.]: AAPT, 1995.

THOMAS-PETER, N. Quantum enhanced precision measurement and information processing with integrated photonics. 2012.

TÓTH, G.; APELLANIZ, I. Quantum metrology from a quantum information science perspective. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 47, n. 42, p. 424006, 2014.

ZEILINGER, A. General properties of lossless beam splitters in interferometry. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 49, n. 9, p. 882–883, 1981.

ZETIE, K.; ADAMS, S.; TOCKNELL, R. How does a mach-zehnder interferometer work? **Physics Education**, IOP Publishing, v. 35, n. 1, p. 46, 2000.