

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE GRADUAÇÃO E EDUCAÇÃO PROFISSIONAL
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

MARCELO MINORU YAMASHITA NAKAMURA

**CONTROLE ROBUSTO DE MANIPULADORES ROBÓTICOS COM
JUNTAS FLEXÍVEIS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

MARCELO MINORU YAMASHITA NAKAMURA

**CONTROLE ROBUSTO DE MANIPULADORES COM JUNTAS
FLEXÍVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina TCC 2, do curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Fabian Andres Lara Molina

Orientador: Prof. Dr. Edson Hideki Koroishi

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Elétrica
Curso de Engenharia de Controle e Automação



FOLHA DE APROVAÇÃO

Marcelo Minoru Yamashita Nakamura

Controle robusto de manipulador robótico com juntas flexíveis

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 17:30hs do dia 07/06/2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Fabian Andres Lara Molina - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Edson Hideki Koroish - (Coorientador)

Prof(a). Me(a). Conrado Di Raimo - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - (Membro)

A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação do curso.

AGRADECIMENTOS

Sou muito grato a Deus e minha família por me fornecer apoio espiritual e emocional para caminhar de cabeça erguida nesta fase da vida e todas as outras que se antecederam.

Agradeço aos professores Fabian Andres Lara Molina, Emerson Ravazzi Pires da Silva, Marcio Aurélio Furtado Montezuma e Edson Hideki Koroishi pela excelente orientação e pela fé em meu potencial como estudante.

Aos amigos colegas da faculdade, agradeço pelo ótimo companheirismo, amizade e trabalho em equipe.

Ainda em especial, agradeço aos amigos Matheus Anatrielo, Hugo Leonardo, Veridiana Contieri, Vinícius José, André Poletto, Aryeli Lex, Vitor Yagi, Ana Beatriz Sampaio, Amanda Moring, Bruno Luís, Marila Aguiar, Leonardo Hayashida, Hellen Ancelmo, Wagner Chaves e Thiago Dezaneti pelo carinho, apoio, risadas, companheirismo e por serem como uma família nesses anos de faculdade.

Agradeço também a todos os outros professores por compartilharem o conhecimento e fornecerem uma base sólida e qualificada para dar continuidade a uma nova fase da minha vida.

Cultive suas aptidões, estude e se torne mais sábio, fique mais habilidoso e aja sempre com respeito próprio. Quanto mais conhecimento temos, mais chances teremos de conquistar a vitória.

(O Homem Mais Rico da Babilônia)

RESUMO

NAKAMURA, Marcelo M.Y. **Controle Robusto de Manipuladores Robóticos com Juntas Flexíveis**. 61f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia de Controle e Automação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Este trabalho consiste em estudar o controle robusto de manipuladores robóticos com juntas flexíveis, especificamente, um manipulador planar e serial com dois graus de liberdade e flexibilidade nas juntas. O objetivo principal deste estudo é utilizar uma técnica de controle robusto chamada \mathcal{D} -estabilidade, para minimizar os efeitos sobre certas variáveis do sistema. A simulação do sistema de controle do manipulador robótico deverá fornecer um desempenho satisfatório para o sistema, mesmo com incertezas de modelagem presentes na representação do modelo da planta. Com este propósito, será utilizado os conceitos de Desigualdades Matriciais Lineares LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*). O projeto do controlador será baseado na formulação matemática do modelo dinâmico do manipulador com juntas flexíveis.

Palavras-chave: Manipuladores Robóticos com Juntas Flexíveis; Sistema de Controle; Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs); \mathcal{D} -estabilidade.

ABSTRACT

NAKAMURA, Marcelo M.Y. **Robust Control Manipulators With Flexible Joints**. 61f. Course Conclusion Work (Graduation) – Control and Automation Engineering. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

This work consists of studying the robust control of robotic manipulators with flexible joints, specifically a planar and serial manipulator with two degrees of freedom and joint flexibility. The main objective of this study is to use a robust control technique called \mathcal{D} -stability, to minimize the effects on certain variables of the system. The simulation of the robotic manipulator control system should provide a satisfactory performance for the system, even with modeling uncertainties present in the model representation of the plant. For this purpose, the concepts of Linear Matrix Inequalities (LMIs) will be used. The design of the controller will be based on the mathematical formulation of the dynamic model of the manipulator with flexible joints

Keywords: Robotic Manipulators With Flexible Joints; Control System; *Linear Matrix Inequalities (LMIs)*; \mathcal{D} -stability.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Comparação entre manipuladores rígidos e flexíveis.....	01
FIGURA 2 – Robô manipulador LBR IIWA 7 R800.....	02
FIGURA 3 – Representação esquemática de uma articulação rígida.....	09
FIGURA 4 – Cadeia cinemática aberta com disposição de motores e elos.....	10
FIGURA 5 – Representação esquemática de articulação flexível	11
FIGURA 6 – Representação esquemática em plano cartesiano do manipulador robótico.....	14
FIGURA 7 – Diagrama de blocos da simulação computacional.....	16
FIGURA 8 – Estado de equilíbrio estável.....	23
FIGURA 9 – Estado de equilíbrio assintoticamente estável.....	23
FIGURA 10 – Estado de equilíbrio instável.....	24
FIGURA 11 – Representação geométrica do teorema.....	26
FIGURA 12 – Região $\mathcal{D}(\gamma, r, \phi)$ para alocação de autovalores.....	28
FIGURA 13 – Região $\mathcal{D}(11, 390, 60^\circ)$ que contém os polos do sistema controlado $q_2=0^\circ$	32
FIGURA 14 – Região $\mathcal{D}(11, 390, 60^\circ)$ que contém os polos do sistema controlado $q_2=180^\circ$...	33
FIGURA 15 – Controle de regulação sobre as posições angulares dos motores e dos elos.	34
FIGURA 16 – Representação cartesiana de $q_2 = \pm 180^\circ$	35
FIGURA 17 – Representação cartesiana de $q_2 = 0^\circ$	35
FIGURA 18 – Função de transferência $G_{11}(s)$	36
FIGURA 19 – Função de transferência $G_{22}(s)$	36
FIGURA 20 – Função de transferência $G_{12}(s)$	37
FIGURA 21 – Função de transferência $G_{21}(s)$	37
FIGURA 22 – Frequências de bloqueio em função de q_2	38
FIGURA 23 – Largura de banda e frequência de $G_{11}(s)$ em $q_2 = 0^\circ$	39
FIGURA 24 – Largura de banda e frequência de $G_{11}(s)$ em $q_2 = 180^\circ$	40
FIGURA 25 – Representação de manipulador de dois graus de liberdade.....	46

LISTA DE SÍMBOLOS

n	Número de graus de liberdade do manipulador robótico
J_{mot}	Matriz de inércia do motor no corpo rígido
J_{red}	Matriz de inércia do estágio de redução no corpo rígido
M_{ii}	Matriz de inércia de carga no corpo rígido
θ	Vetor de posição angular do motor
q	Vetor de posição angular do elo
$\dot{\theta}$	Vetor de velocidade do motor
\dot{q}	Vetor de velocidade do elo
$\ddot{\theta}$	Vetor de aceleração do motor
\ddot{q}	Vetor de aceleração do elo
τ_{red}	Vetor de torque do motor após redução
M_q	Matriz de inércia dos elos e dos motores
M_T	Matriz de inércia total
M_L	Matriz de inércia dos elos do manipulador
M_R	Matriz de inércia dos motores
$C(q, \dot{q})$	Vetor das componentes de Coriolis e Centrífuga
τ_G	Vetor de torque gravitacional
τ_F	Vetor de torque de atrito
k	Rigidez da junta
L_i	Sistema de referência dos elos
R_i	Sistema de referência dos motores
θ	Conjunto de coordenadas generalizadas
S	Matriz de acoplamentos inerciais entre o rotor e o elo anterior
J	Matriz de inerciais dos rotores em torno do eixo de rotação
I_{zz}	Inércia dos rotores dos motores
h	Redução dos motores
τ_{fa}	Componente de torque de atrito nas juntas
τ_{fm}	Componente de torque de atrito dos motores
K	Matriz diagonal de rigidez das juntas
τ_1	Torque do motor 1
τ_2	Torque do motor 2
θ_1	Posição do motor 1
θ_2	Posição do motor 2

q_1	Posição do elo 1
q_2	Posição do elo 2
k_1	Rigidez da junta 1
k_2	Rigidez da junta 2
m	Massa do elo
m_m	Massa do motor
l	Comprimento do elo
g	Aceleração da gravidade
z	Vetor que contém os valores de q e θ
u	Vetor do sinal de saída do controle
K_T	Matriz de rigidez total das juntas
A	Matriz de estados da representação em espaços de estados
B	Matriz de entrada da representação em espaços de estados
C	Matriz de saída da representação em espaço de estados
D	Matriz de transmissão direta da representação em espaço de estados
x	Vetor de estados
y	Vetor de saída
G	Matriz de transferência global
$G_{11}(s)$	Função de transferência que relaciona a entrada 1 com a saída 1
$G_{12}(s)$	Função de transferência que relaciona a entrada 1 com a saída 2
$G_{21}(s)$	Função de transferência que relaciona a entrada 2 com a saída 1
$G_{22}(s)$	Função de transferência que relaciona a entrada 2 com a saída 2
s	Variável de Laplace
q_d	Posição angular de referência do elo
θ_d	Posição angular de referência do motor
\dot{q}_d	Velocidade angular de referência do elo
$\dot{\theta}_d$	Velocidade angular de referência do motor
ω_1	Frequência de bloqueio da junta 1
ω_2	Frequência de bloqueio da junta 2
t	Torque genérico proveniente de um motor
f	Força genérica proveniente de um motor
E_{cin}	Energia cinética
E_{pot}	Energia potencial
a	Comprimento de um elo
ϕ	Fator de amortecimento mínimo

γ	Taxa de decaimento exponencial mínima
r	Limitante do tempo de subida durante o regime transitório
ζ	Fator de amortecimento
ω_n	Frequência natural não amortecida

LISTA DE SIGLAS

<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequality</i> -Desigualdade Matricial Linear
<i>FRF</i>	<i>Função de Resposta em Frequência</i>
\mathcal{D}	Região $\mathcal{D}(\gamma, r, \phi)$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	01
1.1 PROBLEMA.....	03
1.2 JUSTIFICATIVA	03
1.3 OBJETIVOS.....	04
1.3.1 Objetivo geral.....	04
1.3.2 Objetivos específicos	05
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	05
2 MATERIAIS E MÉTODOS	07
3 MODELAGEM DO MANIPULADOR ROBÓTICO	08
3.1 MODELAGEM DINÂMICA DE MANIPULADORES ROBÓTICOS	08
3.1.1 Modelo Dinâmico de Manipulador Robótico Rígido	08
3.1.2 Modelo Dinâmico Completo de Manipulador Robótico com Juntas Flexíveis...09	
3.1.3 Modelo Dinâmico de Manipulador Robótico com Dois Graus de Liberdade ...13	
3.1.4 Modelo Dinâmico Reduzido para Simulação Computacional.....15	
3.1.5 Modelo Dinâmico Simplificado para o Projeto do Controlador	17
4 PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE	20
4.1 CONTROLE E REGULAÇÃO	20
4.2 ESTRATÉGIA DE CONTROLE UTILIZANDO DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	21
4.2.1 Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov e Projeto do Controlador via LMIs	21
4.2.1.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov.....	21
4.2.2 \mathcal{D} -Estabilidade	26
4.2.2.1 Condições para a \mathcal{D} -Estabilidade	26
5 RESULTADOS E ANÁLISE	30
5.1 CONTROLE E REGULAÇÃO NO MODELO SIMPLIFICADO UTILIZANDO A \mathcal{D} -ESTABILIDADE	31
5.2 FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA NAS CONDIÇÕES CRÍTICAS DE POSIÇÃO ANGULAR DO ELO 2	34
5.3 FREQUÊNCIAS DE BLOQUEIO	38
6 CONCLUSÃO	41
REFERÊNCIAS	42
ANEXO A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA DO MANIPULADOR	44

1 INTRODUÇÃO

Os robôs manipuladores são constituídos por cadeias de corpos, chamados de elos. Os elos são interligados por juntas que podem executar movimentos de translação ou rotação. Na extremidade de cada junta, há uma ferramenta fixada com o propósito de executar tarefas específicas. O movimento da ferramenta é produzido por meio da movimentação dos atuadores, monitorados via sensores de posição e velocidade. Estes atuadores podem ser hidráulicos, elétricos ou pneumáticos (TAKANO, 2016).

Robôs manipuladores rígidos possuem elos e transmissões constituídos de elementos rígidos. Para este tipo de manipulador, o movimento do atuador é proporcional ao movimento das juntas. No entanto, no caso de robôs manipuladores com elos e juntas flexíveis, as flexibilidades são geradas por meio de transmissões flexíveis como correias, cabos de aço e polias. Com relação ao movimento, o deslocamento entre a posição dos elos e a posição dos atuadores é variante no tempo, ou seja, a medição da posição do atuador não é suficiente para a medição da posição dos elos (CHANG; YEN, 2001).

Na Figura 1 pode ser observado uma representação esquemática de um manipulador flexível comparado com um manipulador rígido.

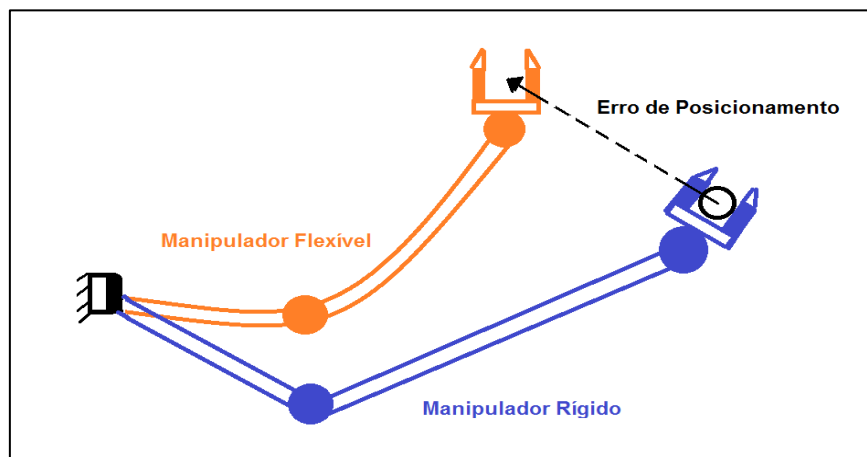


Figura 1 – Comparação entre manipuladores rígidos e flexíveis
Fonte: Adaptado de (TAKANO, 2016).

Os robôs manipuladores flexíveis são aplicados em áreas que necessitam de uma relação mecânica suave entre o manipulador robótico e sua função de aplicação. A importância desta relação está na precisão do posicionamento, na manipulação e na interação com humanos e materiais frágeis.

A inovação na robótica com robôs manipuladores flexíveis abre novas áreas de aplicação quando se busca segurança, economia de espaço e transportabilidade. O robô manipulador LBR IIWA 7 R800 (Figura 2), desenvolvido pela empresa KUKA é um exemplo deste tipo de inovação. Ele possui alta sensibilidade e permite um ambiente de trabalho que oferece segurança para humanos e para os materiais que são manipulados (BENOSMAN e LE VEY, 2008).



Figura 2 - Robô manipulador LBR IIWA 7 R800
Fonte: KUKA (2016).

Além disso, robôs manipuladores flexíveis dotados deste tipo de tecnologia, são utilizados para realizar tarefas nocivas para a saúde do homem como, por exemplo, a limpeza de tanques com resíduos em áreas nucleares como abordado no trabalho de (KRESS et al., 1997).

Quando falamos em controle de manipuladores flexíveis, os quatro principais objetivos que devem ser levados em consideração são: i) regulação da posição final do efetuador; ii) posição de descanso do efetuador em um tempo estipulado; iii) rastreamento de trajetória no espaço das juntas e iv) rastreamento de trajetória no espaço operacional (BENOSMAN e LE VEY, 2008).

1.1 PROBLEMA

Robôs manipuladores flexíveis apresentam muitas vantagens por serem mais leves, exigirem atuadores menores, serem manobráveis e transportáveis, além de consumirem menos energia e apresentarem menor custo se comparado aos manipuladores mecânicos de braço rígido. Por outro lado, sua flexibilidade pode gerar resultados inesperados como ressonância torcional de vibração, aumento no tempo de acomodação e gerar erros de posicionamento principalmente em movimentações de alta velocidade do manipulador robótico. É importante salientar que, caso a dinâmica das juntas flexíveis não seja levada em consideração no projeto do sistema de controle, os efeitos das flexibilidades podem causar instabilidades (READMAN,1994). Esta condição também pode prejudicar a resposta dinâmica e a precisão. Por estas razões a flexibilidade deve ser considerada na lei de controle a fim de atenuar o efeito das oscilações indesejadas (KARKOUB; TAMMA,2011).

O algoritmo de controle de um robô manipulador flexível se assemelha ao de um robô manipulador fixo somente quando os movimentos nas juntas e nos elos são lentos e as forças ou momentos de interação entre o manipulador e o ambiente são desprezíveis (DE LUCA; BOOK, 1988).

Este trabalho aplica uma técnica de controle robusto baseada em *LMI's* conhecida da literatura como \mathcal{D} -estabilidade, que permite posicionar os autovalores do sistema em malha fechada numa certa região do semiplano complexo negativo. Isso, além de assegurar a estabilidade, certifica os requisitos de desempenho do sistema (CHILALI and GAHINET, 1996).

1.2 JUSTIFICATIVA

O desempenho dos manipuladores robóticos com juntas flexíveis, mesmo com incertezas de modelagem, pode ser aprimorado aplicando-se técnicas de controle avançado. O método de controle adaptativo (YANG; LIAN; FU, 1995) e o

controle pelo uso de redes neurais (ISOGAI; ARAI; FUKUDA, 1999) (QIU; MA; ZHANG, 2012) são dois exemplos.

Da literatura, (PARK et al., 2001) utiliza um controlador *fuzzy* alternativo *Takagi-Sugeno* baseado em controle adaptativo de um manipulador flexível de um grau de liberdade e, como conclusão, é observado que o controle proposto foi efetivo ao seguimento de trajetória mesmo com perturbações no sistema.

No artigo de (ZHU e SUN, 2011) a lógica de controle abordada utiliza um banco de dados (baseado em experimentos) em que uma rede neural *fuzzy* calcula os parâmetros necessários do controlador com base neste banco de dados off-line. Foi demonstrado que a lógica de controle utilizada é capaz de cancelar as vibrações do sistema e efetuar um posicionamento preciso do manipulador.

No trabalho de (SILVA et al., 2011), a técnica de controle baseada em *LMI's*, chamada de \mathcal{D} -estabilidade, foi utilizada em um sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser®. O uso desta técnica permitiu posicionar os autovalores do sistema em malha fechada em uma região \mathcal{D} do semiplano complexo esquerdo assegurando a estabilidade. Além disso, as técnicas baseadas em *LMI's* permitem trabalhar com a inclusão de incertezas politópicas.

Para este trabalho, no projeto do sistema de controle de posição do manipulador robótico com juntas flexíveis, será realizado através do controle robusto baseado em *LMI's*, especificamente, usa-se a \mathcal{D} -estabilidade aplicada com o intuito de garantir a estabilidade e desempenho do sistema de controle realimentado.

1.3 OBJETIVOS

Nesta seção, são descritos os objetivos geral e específicos deste trabalho com base na justificativa e introdução apresentados anteriormente.

1.3.1 Objetivo geral

Projetar um sistema de controle de posição do manipulador flexível por meio do controle robusto via LMI's e garantir o desempenho do sistema, mesmo com incertezas de modelagem presentes.

1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos estabelecidos para este trabalho são:

- Revisar a literatura;
- Representar matematicamente a modelagem dinâmica do manipulador com juntas flexíveis;
- Projetar o sistema de controle do manipulador robótico flexível via LMI's (*Linear Matrix Inequalities*) e utilizar a técnica de \mathcal{D} -estabilidade para encontrar um controlador que garanta a estabilidade e desempenho do sistema.
- Apresentar os resultados obtidos a partir de simulações no *software* Matlab®;

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este documento está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 1 são apresentados a introdução, a justificativa e os objetivos gerais e específicos do tema abordado no trabalho. No Capítulo 2, apresenta-se os materiais e métodos, que resumem a metodologia utilizada neste trabalho. No Capítulo 3, apresenta-se a modelagem dinâmica de manipuladores rígidos e, detalhadamente, a modelagem dos manipuladores robóticos com flexibilidade nas juntas. No Capítulo 4 é apresentado o projeto do sistema de controle utilizando Desigualdades Matriciais Lineares e a técnica de \mathcal{D} -estabilidade. No Capítulo 5 é feita a análise dos resultados das simulações computacionais via *software* Matlab e no Capítulo 6, são apresentados as

considerações finais sobre o trabalho e indicações para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

O desenvolvimento do estudo do controle robusto de manipuladores robóticos com juntas flexíveis, será realizado a partir de uma pesquisa bibliográfica baseada em teses, livros e artigos científicos.

A modelagem do manipulador robótico a ser utilizada será semelhante à modelagem utilizada na tese de (TAKANO, 2016), sendo que, para avaliar quantitativamente os efeitos vibratórios, serão utilizadas considerações presentes em (DE LUCA; BOOK, 1988) e para o equacionamento por Lagrange da modelagem será utilizado como referência (LEWIS; DAWSON; ABDALLAH, 2003).

Para o projeto do sistema de controle, será encontrada uma lei de controle que estabilize assintoticamente o sistema com preferência a soluções globais válidas para qualquer estado inicial (DE LUCA; BOOK, 1988).

Para o projeto do controlador robusto, será utilizada uma técnica que utiliza *LMI's*, chamada \mathcal{D} -estabilidade (ou estabilidade regional), que permitirá posicionar os autovalores do sistema em malha fechada localizados em uma região \mathcal{D} do semi-plano complexo negativo. Assim sendo, além de assegurar a estabilidade, pode garantir requisitos de desempenho do sistema realimentado (CHILALI and GAHINET, 1996).

A simulação computacional do modelo dinâmico considerado é feita utilizando-se o software Matlab® com os pacotes computacionais SeDuMi (STURM, 2003) e Yalmip (LÖFBERG, 2004). Esta simulação é importante para o projeto de controle do manipulador e posteriormente simular o comportamento do robô (CRAIG, 2012).

3 MODELAGEM DO MANIPULADOR ROBÓTICO

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos necessários para a formulação do modelo dinâmico do manipulador robótico com juntas flexíveis. Primeiro, é apresentado o modelo dinâmico de um manipulador rígido. Em seguida, o modelo dinâmico completo de um manipulador com flexibilidade nas juntas e seu modelo dinâmico reduzido. Por fim, apresenta-se o modelo dinâmico reduzido para o caso de um manipulador com dois graus de liberdade e flexibilidade nas juntas, seguido por sua representação em espaço de estados.

3.1 MODELAGEM DINÂMICA DE MANIPULADORES ROBÓTICOS

O modelo dinâmico é responsável por relacionar as posições, velocidades e acelerações das juntas do robô, com os torques aplicados pelos atuadores, de acordo com a tarefa a ser executada, considerando as características de massa, geometria e inércia do sistema.

3.1.1 Modelo Dinâmico de Manipulador Robótico Rígido

Nesta subseção é considerado um manipulador robótico com n graus de liberdade e n juntas rígidas. A Figura 3 apresenta o modelo esquemático de uma junta rígida, onde: \mathbf{J}_{red} é a matriz de inércia do estágio de redução do corpo rígido, \mathbf{M}_{ii} é a matriz de inércia de carga no corpo rígido.

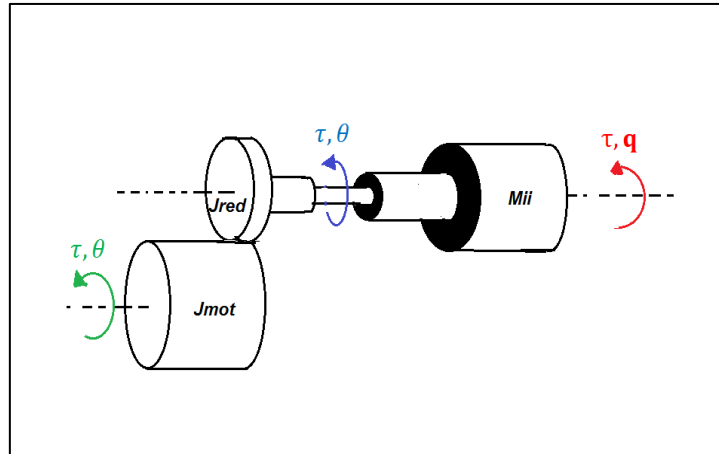


Figura 3 - Representação esquemática de uma articulação rígida
Fonte: Adaptado de TAKANO (2016).

Para uma junta rígida e sem estágio de redução, temos que: $\theta = q$. Considerando-se n juntas do manipulador, temos: $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são os torques dos motores; $\theta \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são as posições angulares dos motores e $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são as posições angulares dos elos.

O modelo dinâmico inverso pode ser obtido a partir da equação de Lagrange, apresentado na equação (1), deduzida no anexo A.

$$\mathbf{M}_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}_G(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_f = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}, \quad (1)$$

Onde:

$\mathbf{M}_q(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_L(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_R$ é a matriz de inércia dos elos e dos motores;

$\mathbf{M}_L(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia dos elos do manipulador;

$\mathbf{M}_R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia dos motores, onde $\mathbf{M}_R = \text{diag}(J_{\text{mot}_2}, \dots, J_{\text{mot}_{n-1}})$;

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das forças de Coriolis e centrífuga;

$\boldsymbol{\tau}_G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torque gravitacional;

$\boldsymbol{\tau}_f \in \mathbb{R}^n$ é o vetor da força de atrito;

$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torque externo;

J_{mot} é a inércia do motor.

3.1.2 Modelo Dinâmico Completo de Manipulador Robótico com Juntas Flexíveis

Diferentemente dos manipuladores rígidos, a dinâmica de movimentação do motor θ e do elo q nos manipuladores robóticos com flexibilidade nas juntas não podem ser consideradas iguais.

A modelagem geométrica do sistema e os eixos de referência tanto do manipulador rígido, quanto dos manipuladores flexíveis, podem ser obtidos utilizando-se o método de *Denavit-Hartenberg (D-H)*.

De acordo com (DE LUCA; BOOK, 1988) os modelos dinâmicos para os robôs manipuladores com flexibilidade nas juntas são utilizados para avaliar quantitativamente os efeitos vibratórios sobrepostos sobre o movimento rígido.

Para realizar a modelagem, considera-se o braço robótico como uma cadeia cinemática aberta contendo $n + 1$ corpos rígidos, base, n elos interconectados por n juntas sujeitos à deflexão e atuação de n drivers (sistemas de acionamento do braço robótico). Na Figura 4 observa-se a representação esquemática da cadeia cinemática descrita anteriormente.

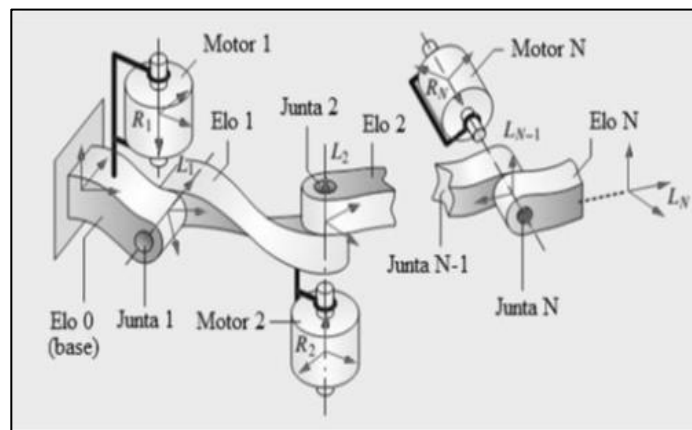


Figura 4 - Cadeia cinemática aberta com disposição de motores e elos
Fonte: De Luca e Book (1988).

Nesta configuração, cada motor é considerado um corpo rígido adicional e todas as juntas são consideradas flexíveis.

A flexibilidade de cada junta i é modelado como uma mola de rigidez $k_i > 0$. A Figura 5 representa o esquema de uma articulação flexível, sendo τ , o torque do

motor, θ é a posição angular do motor após a redução, k é a rigidez da mola e q é a posição angular do elo.

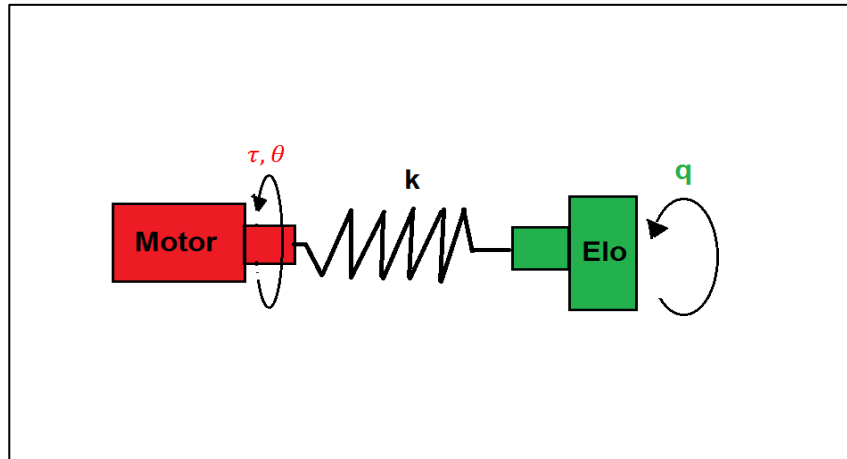


Figura 5 - Representação esquemática de articulação flexível
 Fonte: Autoria Própria.

Ao iniciar os estudos de modelagem dinâmica, são feitas três considerações em (DE LUCA e BOOK, 1988):

- i.* As deflexões nas juntas são pequenas, portanto os efeitos da flexibilidade são considerados limitados ao domínio da elasticidade linear;
- ii.* Os atuadores dos rotores são modelados como corpos uniformes com centro de massa no eixo de rotação;
- iii.* Cada motor é considerado localizado no braço robótico em uma posição que precede os elos.

A primeira consideração implica que a matriz de inércia e o termo de gravidade do sistema são independentes das posições angulares dos motores. A segunda consideração é desejável por considerar uma vida útil longa do motor. Esta consideração também implicará que o termo de gravidade e a matriz de inércia do modelo dinâmico do robô serão independentes da posição angular dos motores.

A análise cinemática e a análise dinâmica do sistema são feitas considerando $2n$ sistemas de referência ligados à $2n$ corpos rígidos móveis (elos e motores) na cadeia cinemática do robô.

Os sistemas de referência dos elos são representados por L_i e os sistemas de referência dos motores por R_i , para $i = 1, \dots, n$, conforme indicado na Figura 4. Para

obter L_i , pode ser utilizada a convenção padrão *Denavit–Hartenberg* e para obter R_i , considera-se o sistema de referência passando pelo eixo do motor com um eixo z de mesma direção de rotação do motor. Assim, são necessárias $2n$ coordenadas.

O conjunto θ de coordenadas generalizadas é dado pela equação (2).

$$\theta = \begin{pmatrix} q \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (2)$$

Segundo De Luca e Book (2008), utilizando-se este conjunto de coordenadas encontram-se três vantagens:

- i.* O modelo será independente das taxas de redução do motor;
- ii.* As variáveis de posição possuirão uma faixa de variação de valores dinâmicos similar e;
- iii.* A cinemática do robô será uma função apenas das variáveis dos elos, portanto a cinemática direta e inversa iguala-se ao caso dos robôs rígidos.

Utilizando as equações de *Lagrange*, obtemos a equação dinâmica completa do modelo, conforme apresentado na equação (3), referenciada e deduzida no Anexo A.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_q(\mathbf{q}) & \mathbf{S}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) & \mathbf{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{fa} \\ \tau_{fm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_G(q) + \mathbf{K}(\mathbf{q} - \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Onde:

$\mathbf{M}_q(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia dos elos e dos motores;

$\mathbf{S}(\mathbf{q})$ é a matriz triangular superior dos acoplamentos inerciais entre rotor e o elo anterior;

$\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz diagonal constante obtida a partir dos componentes inerciais dos rotores em torno do eixo de rotação, sendo $\mathbf{J} = \mathbf{diag}(\mathbf{I}_{zz_1} \mathbf{x} \mathbf{h}_1^2, \dots, \mathbf{I}_{zz_n} \mathbf{x} \mathbf{h}_n^2)$;

I_{zz} é a inércia dos rotores dos motores;

h é a redução dos motores;

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ e $\mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ são as contribuições das forças inercial de Coriolis e centrífuga;

$\tau_{fa} \in \mathbb{R}^n$ é o torque relacionado à força de atrito das juntas;

$\tau_{fm} \in \mathbb{R}^n$ é o torque relacionado à força de atrito dos motores;

$\tau_G(q) \in \mathbb{R}^n$ é o torque gravitacional; e

$\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ é a matriz diagonal de rigidez das juntas;

$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torque do motor.

Os dois modelos dinâmicos da equação (3), estão acoplados pela componente elástica k e pelos acoplamentos inerciais $\mathbf{S}(\mathbf{q})$. Para simplificar o modelo, considera-se que a energia cinética dos rotores é influenciado apenas pela sua própria rotação o que permite desconsiderar o acoplamento de inércia entre os motores e os segmentos do robô, portanto $\mathbf{S}(\mathbf{q}) = 0$.

Conseqüentemente, a equação dinâmica simplificada obtida pode ser observada nas equações (4) e (5). Estas duas equações são acopladas apenas pelo torque elástico.

$$\mathbf{M}_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}_G(\mathbf{q}) + \tau_{fa} + \mathbf{K}(\mathbf{q} - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \tau_{fm} - \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_{red}, \quad (5)$$

Onde:

$\boldsymbol{\tau}_{red}$ é o vetor de torque do motor após a redução.

A equação (4) está relacionada ao modelo dinâmico dos elos e a equação (5) está relacionada com o modelo dinâmico dos motores. Ambos os modelos estão acoplados pela componente elástica k .

Analisando as equações para valores muito altos de $k(k \rightarrow \infty)$ obtemos $(\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{q})$, ou seja, o comportamento do robô como rígido, e torque elástico $\tau_m = k(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{q}) \rightarrow \boldsymbol{\tau}$.

3.1.3 Modelo Dinâmico de Manipulador Robótico com Dois Graus de Liberdade e Juntas Flexíveis

Na Figura 6 pode ser observado o modelo esquemático em um plano cartesiano de um manipulador com dois graus de liberdade e juntas flexíveis, onde: m é a massa dos elos, l é o comprimento dos elos, $\boldsymbol{\tau}_{red} = \{\tau_1 \ \tau_2\}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é o torque dos motores após redução, $\boldsymbol{\theta}_{red} = \{\theta_1 \ \theta_2\}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é a posição angular dos motores após a redução, $\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2\}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é a posição angular dos elos e $\mathbf{k} = \{k_1 \ k_2\}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é rigidez das juntas.

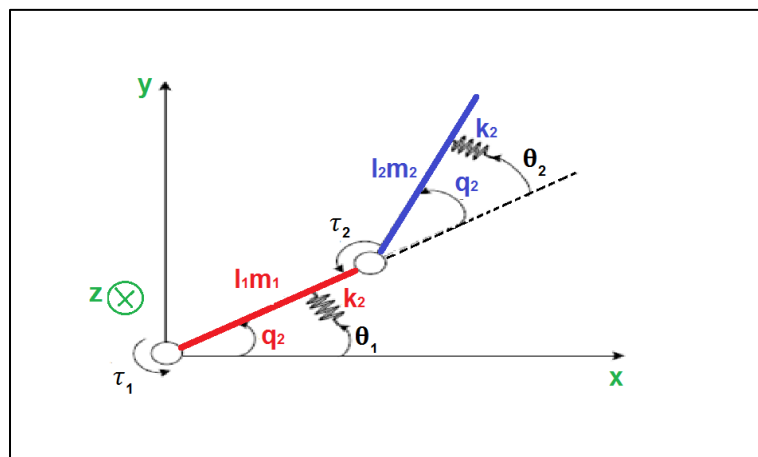


Figura 6 - Representação esquemática em plano cartesiano de manipulador robótico de 2 graus de liberdade com juntas flexíveis
Fonte: Adaptado de TAKANO (2016).

Nas equações (6) a (11) são definidos os termos da equação dinâmica do manipulador apresentada nas equações (4) e (5). Os termos $\mathbf{M}_q(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e $\boldsymbol{\tau}_G(\mathbf{q})$ da equação (4) correspondem aos termos da equação dinâmica dos elos, lembrando que $\mathbf{M}_q(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_L(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_R$. A equação dos elos foi obtida no anexo A utilizando o Princípio de Lagrange como mostra (LEWIS; DAWSON; ABDALLAH, 2003).

$$\mathbf{M}_L(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2\cos(q_2) & m_2l_2^2m_2l_1l_2\cos(q_2) \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2\cos(q_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Onde:

m_i é a massa do elo;

l_i é o comprimento do elo.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} m_{m2}l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Onde:

m_{m2} é a massa do motor.

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\text{sen}(q_2) \\ m_2l_1l_2\dot{q}_1^2\text{sen}(q_2) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\tau}_G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g(m_1 + m_2)l_1\cos(q_1) + gm_2l_2\cos(q_1 + q_2) \\ gm_2l_2\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Onde:

g é a aceleração da gravidade.

$$\boldsymbol{\tau}_{fa} = \boldsymbol{\tau}_{fm} = \begin{bmatrix} v_1\dot{q}_1 + d_1\text{sgn}(\dot{q}_1) \\ v_2\dot{q}_2 + d_2\text{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}, \text{ onde } \text{sgn}(i) = \begin{cases} +1 \text{ para } i > 0 \\ \text{indeterminado para } i = 0 \\ -1 \text{ para } i < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Onde:

v é o atrito viscoso;

d é o atrito de Coulomb.

$$\mathbf{J} = \text{diag}(I_{zz_1}h_1^2, I_{zz_2}h_2^2), \quad (11)$$

Onde:

I_{zz} é a inércia do rotor;

h é a redução do motor.

3.1.4 Modelo Dinâmico Reduzido para Simulação Computacional

O principal objetivo é integrar as equações dinâmicas (4) e (5), assumindo como sinal de entrada o torque τ_{red} para obter como resultado os sinais de saída θ e q .

Pode-se reescrever as equações (4) e (5) na forma matricial conforme equação (12).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_q(q) & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}(q, \dot{q}) \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_G(q) \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{fa} \\ \boldsymbol{\tau}_{fm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}(q - \theta) \\ \mathbf{K}(\theta - q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \boldsymbol{\tau}_{red} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

A equação (12) ainda pode ser escrita no formato indicado na equação (13).

$$\mathbf{M}_T(q)\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_T(q, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\tau}_{G_T}(q) + \boldsymbol{\tau}_{f_T}(q) + \mathbf{K}_T\mathbf{z} = \mathbf{u}, \quad (13)$$

Onde:

$\mathbf{z} = \{q \ \theta\}^T$ é a matriz transposta de saída com as posições angulares do elo e do motor;

$\mathbf{u} = \{0_{1 \times 2} \ \tau\}^T$ é a matriz transposta de entrada.

A equação (14) é utilizada na simulação computacional e tem por objetivo obter sua solução e para isto podem ser aplicadas técnicas de integração das acelerações para calcular velocidades e posições.

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}_T(q)^{-1}[\mathbf{u} - \mathbf{C}_T(q, \dot{\mathbf{z}})] - \boldsymbol{\tau}_{G_T}(q) - \boldsymbol{\tau}_{f_T}(q) - \mathbf{K}_T\mathbf{z}. \quad (14)$$

O diagrama de blocos, apresentado na Figura 7, representa a integração da equação (14).

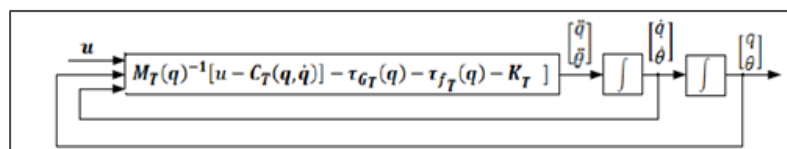


Figura 7 - Diagrama de blocos da simulação computacional
Fonte: Adaptado de (TAKANO, 2016)

3.1.5 Modelo Dinâmico Simplificado para o Projeto do Controlador

Conforme representação observada na Figura 6, a aceleração da gravidade \mathbf{g} é orientada ao longo do eixo $-z$, portanto seus efeitos são ignorados no modelo dinâmico da equação (4), ou seja $\tau_G(q) = 0$. O modelo dinâmico apresentado nas equações (4) e (5) é reduzido a fim de obter um modelo simplificado para o projeto do controlador. Desta forma, duas considerações são assumidas para simplificar o modelo:

- i. O manipulador é considerado em configuração constante: $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$; e
- ii. É considerado o caso mais crítico em que o manipulador não tem amortecimento: $\tau_{fa} = \tau_{fm} = 0$, portanto:

$$\mathbf{M}_T(q)\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_T\mathbf{z} = \mathbf{u} , \quad (15)$$

Onde:

$\mathbf{z} = \{q_{1x2} \ \theta_{1x2}\}^T$ é a matriz transposta da posição angular dos elos e dos motores;

$\mathbf{M}_T(q) = \begin{bmatrix} M_q(q) & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & J_{2x2} \end{bmatrix}$ é a matriz de inércia total;

$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}$ é a matriz de rigidez das juntas total;

$\mathbf{u} = \{0_{1x2} \ \tau_{red1x2}\}^T$ é a matriz transposta de entrada.

A matriz de inércia total $\mathbf{M}_T(q)$, apresentada na equação (15), depende do valor da posição angular do elo \mathbf{q} , especificamente de q_2 , conforme pode ser observado no Anexo A, o qual apresenta a dedução destas equações.

A representação em espaço de estados, do modelo apresentado na equação (15), é apresentada na equação (16), onde os estados $x_1 = z$ e $x_2 = \dot{x}_1$, e portanto $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2\}^T = \{q_1 \ q_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2\}^T$.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_{8 \times 8} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ -\mathbf{M}_T(q)^{-1} \mathbf{K}_T & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4,4} \\ \mathbf{M}_T(q)^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{1,2} \\ \boldsymbol{\tau}_{red} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} &= [\mathbf{I}_{8 \times 8}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

A matriz de inércia total $\mathbf{M}_T(q)$ depende da matriz $\mathbf{M}_q(q)$, ou seja, depende da configuração do robô, especificamente da posição do elo q_2 , conforme visto nas equações (5) e (6), portanto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}(q_2)x + \mathbf{B}(q_2)u, \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u, \end{aligned} \quad (17)$$

Onde:

\mathbf{A} é a matriz ($n \times n$) de estados da representação em espaço de estados;
 \mathbf{B} é a matriz ($n \times r$) de entrada da representação em espaço de estados;
 \mathbf{C} é a matriz ($m \times n$) de saída da representação em espaço de estados;
 \mathbf{D} é a matriz ($m \times r$) de transmissão direta da representação em espaço de estados;
 \dot{x} equação de estados;
 y é a equação de saída.

Baseado na representação de espaço de estados apresentado na equação (17), considerando o torque dos atuadores $\boldsymbol{\tau}$ como sinal de entrada do sistema e as posições dos motores $\boldsymbol{\theta}$ como sinal de saída pode ser obtida a matriz de transferência \mathbf{G} para valores específicos de q_2 , conforme apresentado na equação (18).

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1(s) \\ \boldsymbol{\theta}_2(s) \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}(q_2)] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1(s) \\ \boldsymbol{\tau}_2(s) \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

Onde:

$$[\mathbf{G}(q_2)] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}(s) & \mathbf{G}_{12}(s) \\ \mathbf{G}_{21}(s) & \mathbf{G}_{22}(s) \end{bmatrix};$$

Sendo que função de transferência $\mathbf{G}_{ij}(s)$ representa a influência da entrada τ_1 na saída θ_j .

O primeiro par de zeros das funções de transferências $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$ corresponde a uma frequência denominada frequência de bloqueio do sistema. Estas frequências de bloqueio, denominadas ω_1 e ω_2 estão relacionadas respectivamente às juntas 1 e 2, sendo utilizadas como parâmetros para sintonizar o controlador de regulação. Portanto devem ser consideradas no projeto do controlador.

A frequência de bloqueio pode ser analisada em uma única junta flexível como na Figura 5. Considera-se o caso crítico no qual os efeitos dissipativos são desconsiderados ($\tau_f = 0$). Assim, a função de transferência da junta com entrada τ e com saída θ , apresentada na equação (19), permite obter a partir do par de zeros a frequência de bloqueio.

$$\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{ms^2 + k}{[mbs^2 + (m + b)k]s^2} \quad (19)$$

Onde:

k é o parâmetro relacionado à rigidez da mola;

m é o parâmetro relacionado à massa;

b é o parâmetro relacionado ao coeficiente de atrito.

Para o caso de uma única junta flexível, a frequência de bloqueio pode ser admitida conforme a equação (20), que ocorre quando o motor está bloqueado ($\theta = 0$).

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20)$$

A fim de alcançar amortecimento suficiente em um sistema controlado de malha fechada, a largura de banda deve ser limitada, como regra geral, a um terço da frequência de bloqueio.

4 PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

4.1 CONTROLE E REGULAÇÃO

No controle e regulação, considera-se o problema de controle de movimento de um manipulador robótico com juntas flexíveis em uma configuração constante, ou seja, velocidade angular nula nos motores, assim $\dot{\theta} = 0$. Neste tipo de abordagem, não é considerado uma trajetória de referência, apenas deve ser encontrada uma lei de controle que estabilize assintoticamente o sistema com preferência a soluções globais válidas para qualquer estado inicial (DE LUCA; BOOK, 1988).

O objetivo da lei de controle é determinar o posicionamento dos polos em malha fechada que permita atender requisitos de resposta transitória e/ou regime (VON ZUBEN, 2010).

Neste trabalho, devido à presença de elasticidade nas juntas do manipulador, a lei de controle pode depender de quatro variáveis: $\dot{\theta}, \theta, q$ e \dot{q} .

A lei de controle apresentada na equação (21) estabiliza assintoticamente, e de forma global o sistema: $q = \theta = \theta_d$ e $\dot{q} = \dot{\theta} = 0$.

$$u = -Kx \quad (21)$$

Onde:

$u = [0 \ 0 \ \tau_1 \ \tau_2]$ é o vetor de torque dos motores;

$x = \{x_1 \ x_2\}^T = \{q \ \dot{q} \ \theta \ \dot{\theta}\}^T$ é o vetor de estados.

A representação em espaço de estados do controle de regulação da equação (21) é apresentada na equação (22). Esta representação considera o controle de regulação da equação (21) e o modelo dinâmico reduzido do manipulador.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A(q) - B(q)K]x \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (22)$$

Lembrando que a matriz dinâmica $\mathbf{A}(q)$ na equação (22) depende da configuração do manipulador definido pela posição da junta dos elos \mathbf{q} , especificamente de q_2 .

No entanto, a implementação da lei de controle não será executada neste trabalho.

4.2 ESTRATÉGIA DE CONTROLE VIA DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Atualmente, as LMI's são aplicadas em áreas como: controle de sistemas contínuos e discretos no tempo (ELGHAUI & NICULESCU, 2000), controle robusto (VANANTWERP & BRAATZ, 2000), controle de sistemas não-lineares, teoria de filtros robustos (PALHARES, 1998) e controle usando modelos *fuzzy* (TEIXEIRA, PIETROBOM & ASSUNÇÃO, 2000).

Neste trabalho, as LMI's serão utilizadas para encontrar os ganhos do controlador robusto com incertezas politópicas de cada um dos dois modelos locais do manipulador robótico de dois graus de liberdade com juntas flexíveis.

O sistema em malha fechada atenderá requisitos de desempenho desde que os valores do controlador permitam a alocação dos polos dentro de uma região \mathcal{D} .

4.2.1 Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov e Projeto do Controlador via LMI's

Analisar a estabilidade de um sistema e projetar controladores de sistemas lineares são partes de uma área de pesquisa bem explorada no ramo de controle. A função de Lyapunov é muito utilizada para certificar a estabilidade do sistema e o projeto do controlador é feito por meio de desigualdades matriciais lineares (BOYD et al., 1994).

4.2.1.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Considere um sistema dinâmico linear autônomo (relaxado), ou seja:

$$\dot{x} = Ax . \quad (23)$$

Um estado de equilíbrio é alcançado quando $\dot{x} = 0$. Todas as derivadas nulas significa que os estados não estão variando no tempo e portanto, são indicados como estados em equilíbrio ou ponto de equilíbrio x_e .

Para verificar a estabilidade no sentido de Lyapunov é necessário definir primeiramente uma região esférica de raio k em torno do estado de equilíbrio x_e por:

$$\|x - x_e\| \leq k . \quad (24)$$

Sendo que $\|x - x_e\|$ é chamada de norma Euclidiana e é definida por:

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{\frac{1}{2}} . \quad (25)$$

Seja $\mathcal{S}(\delta)$ a região que consiste em todos os pontos tais que

$$\|x - x_e\| \leq \delta . \quad (26)$$

Sendo x_0 o estado inicial, e seja $\mathcal{S}(\xi)$ a região que consiste em todos os pontos para os quais

$$\|x - x_e\| \leq \xi, \forall t > 0 . \quad (27)$$

A estabilidade pode ser interpretada de três formas distintas.

Um estado de equilíbrio x_e do sistema (23) é dito estável no sentido de Lyapunov se, correspondendo a cada $\mathcal{S}(\xi)$ existir um $\mathcal{S}(\delta)$ tal que as trajetórias iniciadas em $\mathcal{S}(\delta)$ não deixem $\mathcal{S}(\xi)$ à medida que t cresce, conforme está representado na Figura 8.

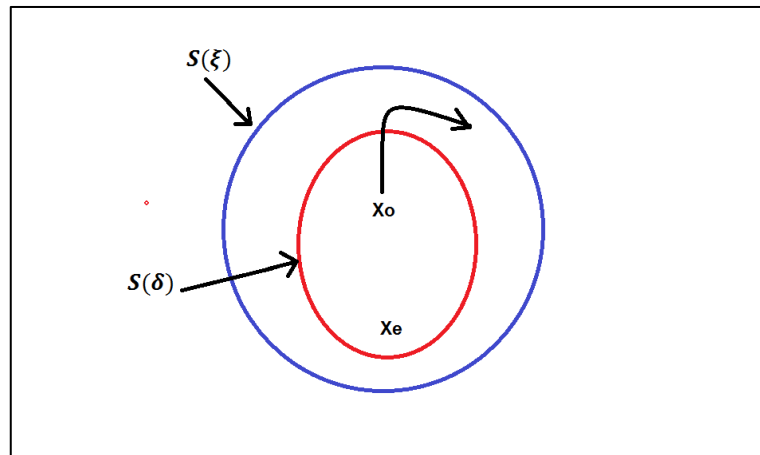


Figura 8 - Estado de equilíbrio estável
Fonte: Autoria Própria.

Um estado de equilíbrio x_e do sistema (23) é dito assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em $S(\delta)$ converge para x_e , sem deixar $S(\xi)$, à medida que t cresce, conforme está representado na Figura 9.

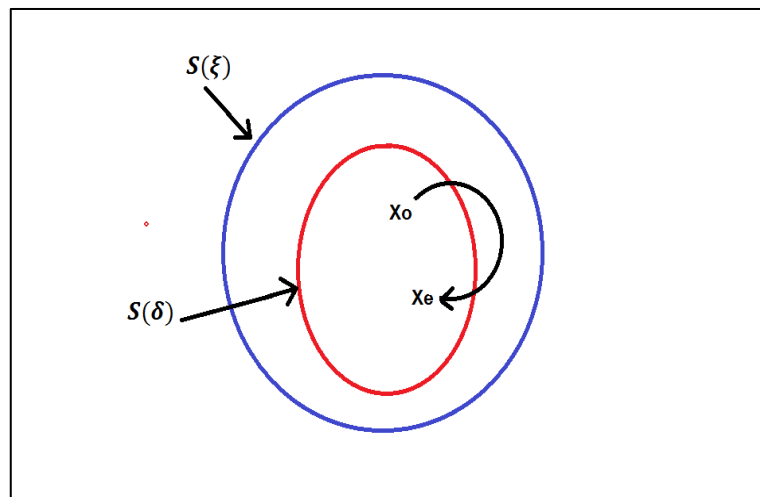


Figura 9 - Estado de equilíbrio assintoticamente estável
Fonte: Autoria Própria.

Um estado de equilíbrio x_e do sistema (23) é dito instável se, para algum número real $\xi > 0$ e todo número real $\delta > 0$, não importando quão pequeno ele seja, há sempre um estado x_0 em $S(\delta)$ tal que a trajetória, começando neste estado deixa a região $S(\xi)$, conforme está representado na figura 10.

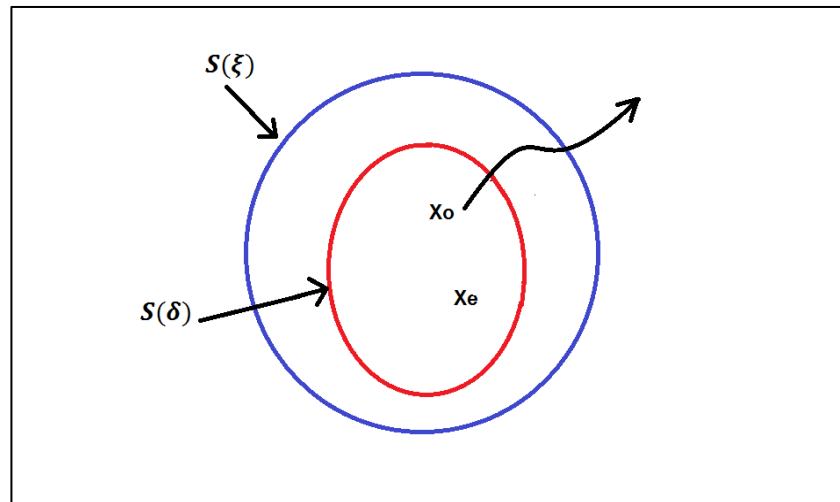


Figura 10 - Estado de equilíbrio instável
Fonte: Autoria Própria.

Para o estudo da estabilidade, algumas definições são necessárias:

Uma função escalar $V(x)$ é dita positiva definida em uma região Ω se $V(x) > 0$ para todos os estados não nulos x na região Ω e $V(0) = 0$.

Uma função escalar $V(x)$ é dita negativa definida se $-V(x)$ for positiva definida.

Uma função escalar $V(x)$ é dita positiva semidefinida se for positiva em todos os estados de uma região Ω , exceto na origem e em outros estados onde seu valor é zero, $V(x) \geq 0$.

Uma função escalar $V(x)$ é dita negativa semidefinida se $-V(x)$ for positiva semidefinida.

Uma forma quadrática constitui uma classe de funções escalares que desempenham um papel importante na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, a forma geral é encontrada na equação (28).

$$V(x) = x^T P x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (28)$$

A definição positiva da forma quadrática ou forma hermitiana $V(x)$ pode ser determinada com o estudo dos autovalores de P . Se os autovalores de P forem todos positivos então pode concluir-se que P é positiva definida.

Definindo-se uma função de Lyapunov para o sistema descrito na equação (23), temos:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0 \text{ (positiva definida)}. \quad (29)$$

A derivada em relação ao tempo é:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}. \quad (30)$$

Como $V(\mathbf{x})$ foi escolhida sendo definida positiva, para ter estabilidade assintótica é necessário que $\dot{V}(\mathbf{x})$ seja definida negativa:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ (definida negativa)}. \quad (31)$$

Então, para a estabilidade da equação (23) é necessário que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (32)$$

Teorema 1: Considere o sistema autônomo descrito pela equação (23):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} .$$

Sendo que \mathbf{x} é um vetor de estado e \mathbf{A} é uma matriz nxn constante e não singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ seja assintoticamente estável é que, exista uma matriz \mathbf{P} positiva definida, simétrica, tal que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (34)$$

Geometricamente o teorema é expresso na Figura 11.

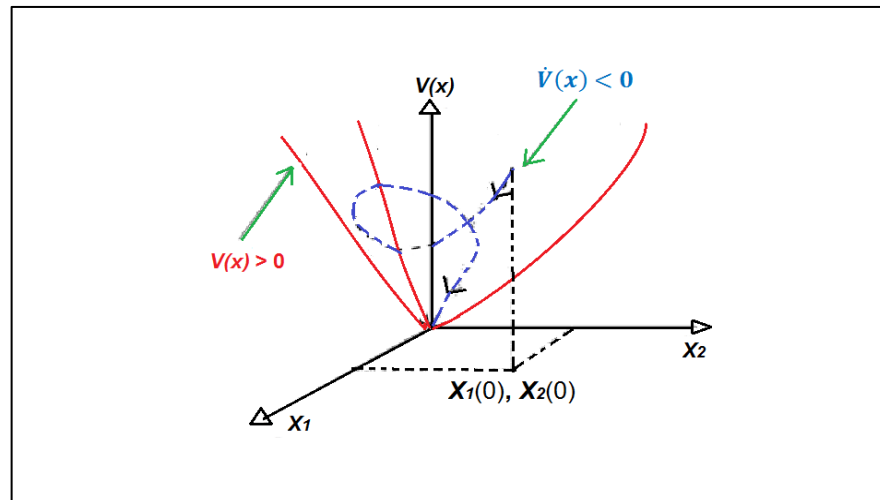


Figura 11 - Representação geométrica do teorema
Fonte: Autoria Própria.

4.2.2 \mathcal{D} -Estabilidade

Uma importante ferramenta matemática para o estudo de sistemas descritos em espaço de estados e para o projeto de controladores robustos são chamadas Desigualdades Matriciais Lineares *LMI's* (BOYD et al. 1994).

Dentre as diversas técnicas que utilizam *LMI's*, a \mathcal{D} -estabilidade (ou estabilidade regional), por exemplo, que permite posicionar os autovalores do sistema em malha fechada localizados em uma região \mathcal{D} do semiplano complexo negativo. Assim sendo, além de assegurar a estabilidade, garante também certos requisitos de desempenho do sistema realimentado (CHILALI and GAHINET, 1996).

4.2.2.1 Condições para a \mathcal{D} -estabilidade

Considere um sistema linear controlável, descrito na forma de variável de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) \end{aligned} \quad (35)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, matrizes que representam a dinâmica do sistema, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada de controle.

O objetivo é encontrar uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que, ao realimentar o sistema (35) com a entrada de controle

$$u(t) = -Kx(t), \quad (36)$$

torne o sistema em malha fechada estável e com comportamento transitório satisfatório. Logo, o sistema em malha fechada pode ser representado da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \quad (37)$$

Da teoria de controle é conhecido que o comportamento transitório está relacionado diretamente com a localização dos autovalores no semiplano complexo negativo. Alocando os autovalores dentro de uma região \mathcal{D} adequada, é possível obter certos índices de desempenho, por exemplo, uma taxa de decaimento exponencial mínima γ , um fator de amortecimento mínimo ϕ e um r , que limita o tempo de subida durante o transitório que indiretamente pode restringir a norma do controlador, este assegura que nenhum autovalor do sistema em malha fechada tenha parte real muito negativa ($\lambda \rightarrow \infty$). Essa situação é desejável quando se pretende implementar um controlador projetado (SILVA et al. 2011).

Para a formulação *LMI*, considere as seguintes substituições de variáveis (CHILALI and GAHINET, 1996): $r = \omega_n$, $\zeta = \cos(\phi)$ e $\gamma = \zeta\omega_n$. A região de interesse para a alocação robusta é a região denominada \mathcal{D} de números complexos $x + yj$ que satisfazem:

$$\mathcal{D}(\gamma, r, \phi) = \begin{cases} x < -\gamma < 0, & (a) \\ |x + yj| < r, & (b) \\ \tan(\phi) x < -|y|, & (c) \end{cases}$$

Sendo que, a restrição (a), representa um semi-plano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto $(-\gamma, 0)$, com $\gamma > 0$; a restrição (b), representa um disco centrado na

origem de raio r e a restrição (c) limita o argumento ϕ dos elementos do conjunto. A região $\mathcal{D}(\gamma, r, \phi)$ pode ser vista na Figura 12.

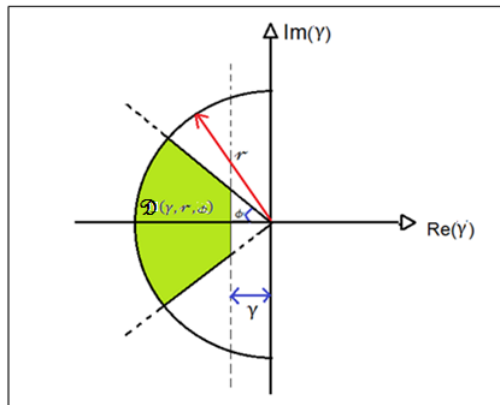


Figura 12: Região $\mathcal{D}(\gamma, r, \phi)$ para alocação de autovalores
Fonte: (DA SILVA, E. R. P., ASSUNÇÃO, E., TEIXEIRA, C. M. and BUZACHERO, L. F. S., 2012).

A técnica de alocação de autovalores apresentada, utiliza o conceito de \mathcal{D} -estabilidade. Esse conceito permite que restrições de projeto tais como porcentagem de overshoot $PO\%$, tempo de subida t_s e tempo de estabelecimento t_e sejam caracterizados por *LMIs* (CHILALI and GAHINET, 1996; EBIHARA and HAGIWARA, 2004).

(CHILALI and GAHINET, 1996) demonstraram que certas regiões convexas no plano complexo podem ser representadas por *LMIs*. Neste trabalho, explora-se os resultados que garantem a \mathcal{D} -estabilidade de sistemas lineares incertos na região $\mathcal{D}(\gamma, r, \phi)$.

Lema 1. Dado as constantes positivas γ, r e ϕ . Se existir uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfazendo as *LMIs*:

$$\begin{aligned}
 X &> 0, & (I) \\
 A(\alpha)X - B(\alpha)G + XA(\alpha)^T - G^T B(\alpha)^T + 2\gamma X &< 0, & (II) \\
 \begin{bmatrix} -rX & XA(\alpha)^T - G^T B(\alpha)^T \\ A(\alpha)X - B(\alpha)G & -rX \end{bmatrix} &< 0, & (III) \\
 \begin{bmatrix} \sin(\theta)(XA(\alpha)^T - G^T B(\alpha)^T + A(\alpha)X - B(\alpha)G) & \cos(\theta)(XA(\alpha)^T - G^T B(\alpha)^T - A(\alpha)X + B(\alpha)G) \\ \cos(\theta)(A(\alpha)X - B(\alpha)G - XA(\alpha)^T + G^T B(\alpha)^T) & \sin(\theta)(XA(\alpha)^T - G^T B(\alpha)^T + A(\alpha)X - B(\alpha)G) \end{bmatrix} &< 0. & (IV)
 \end{aligned} \tag{38}$$

Então o sistema (37) é $\mathcal{D}(\gamma, r, \phi)$ -estável e um ganho que resolve o problema pode ser obtido com:

$$\mathbf{K} = \mathbf{GX}^{-1} \quad (39)$$

Demonstração: vide(CHILALI AND GAHINET, 1996).

5 RESULTADOS E ANÁLISE

Neste capítulo, são apresentados os resultados das simulações computacionais via software Matlab®, baseados na modelagem dinâmica e estratégia de controle, especificamente, a modelagem dinâmica de um manipulador planar com dois graus de liberdade e flexibilidade nas juntas.

A simulação computacional é responsável por validar a dinâmica estabelecida e a lei de controle, descritos teoricamente nos Capítulos 3 e 4. Os trabalhos de PARK et al. (2001) e MAKAROV et al. (2012) são exemplos de trabalhos que validaram as leis de controle via simulações computacionais.

A Tabela 1 apresenta os parâmetros e valores assumidos ao manipulador flexível nas simulações, utilizando a dinâmica simplificada deste robô. A maioria destes parâmetros foram determinados com base nas obras de LEWIS et al. (2013) e MAKAROV et al. (2012).

Tabela 1 – Parâmetros e valores assumidos ao manipulador flexível

Parâmetros	Primeiro motor/elo	Segundo motor/elo	Valor
Massa do elo	$m_1(Kg)$	$m_2(Kg)$	0,5
Limite Superior de Elasticidade da junta	$k_1sup(N/m)$	$k_2sup(N/m)$	$10,5 \times 10^3$
Limite Inferior de Elasticidade da junta	$k_1inf(N/m)$	$k_2inf(N/m)$	$9,5 \times 10^3$
Comprimento do elo	$l_1(m)$	$l_2(m)$	0,25
Massa do motor	$m_{m1}(Kg)$	$m_{m2}(Kg)$	0,5
Redução	h_1	h_2	100
Inércia do rotor	$I_{zz1}(Kgm^2)$	$I_{zz2}(Kgm^2)$	14×10^{-6}

Fontes: Adaptado de Lewis et al. (2013) e Makarov et al. (2012).

5.1 CONTROLE E REGULAÇÃO NO MODELO SIMPLIFICADO UTILIZANDO A \mathcal{D} -ESTABILIDADE

Existem 2 incertezas politópicas no modelo do manipulador robótico com dois graus de liberdade e flexibilidade nas juntas, são k_1 e k_2 . Estas são as constantes de rigidez das juntas 1 e 2, respectivamente. Para cada constante de rigidez existe um valor limite superior e um limite inferior que é arbitrado e a combinação deles, aplicada à matriz de estados A, constituem os 4 vértices do politopo. Estes vértices são: (A1,B);(A2,B);(A3,B) e (A4,B).

O conjunto de LMI's que contêm os vértices cujo B é único devido a inexistência de incerteza nele presente, é mostrado em (40).

$$\begin{aligned}
 & X > 0 \\
 & A1X - BG + XA1^T - G^T B^T + 2\gamma X < 0 \\
 & A2X - BG + XA2^T - G^T B^T + 2\gamma X < 0 \\
 & A3X - BG + XA2^T - G^T B^T + 2\gamma X < 0 \\
 & A4X - BG + XA3^T - G^T B^T + 2\gamma X < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -rX & XA1^T - G^T B^T \\ A1X - BG & -rX \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -rX & XA2^T - G^T B^T \\ A2X - BG & -rX \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -rX & XA3^T - G^T B^T \\ A3X - BG & -rX \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -rX & XA4^T - G^T B^T \\ A4X - BG & -rX \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(XA1^T - G^T B^T + A1X - BG) & \cos(\theta)(XA1^T - G^T B^T - A1X + BG) \\ \cos(\theta)(A1X - BG - XA1^T + G^T B^T) & \text{sen}(\theta)(XA1^T - G^T B^T + A1X - BG) \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(XA2^T - G^T B^T + A2X - BG) & \cos(\theta)(XA2^T - G^T B^T - A2X + BG) \\ \cos(\theta)(A2X - BG - XA2^T + G^T B^T) & \text{sen}(\theta)(XA2^T - G^T B^T + A2X - BG) \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(XA3^T - G^T B^T + A3X - BG) & \cos(\theta)(XA3^T - G^T B^T - A3X + BG) \\ \cos(\theta)(A3X - BG - XA3^T + G^T B^T) & \text{sen}(\theta)(XA3^T - G^T B^T + A3X - BG) \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(XA4^T - G^T B^T + A4X - BG) & \cos(\theta)(XA4^T - G^T B^T - A4X + BG) \\ \cos(\theta)(A4X - BG - XA4^T + G^T B^T) & \text{sen}(\theta)(XA4^T - G^T B^T + A4X - BG) \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{40}$$

Sendo:

A1 a matriz de estados que contêm os limites de rigidez k_{1sup} e k_{2sup} ;

A2 a matriz de estados que contêm os limites de rigidez k_{1sup} e k_{2inf} ;

A3 a matriz de estados que contêm os limites de rigidez k_{1inf} e k_{2sup} ;

A4 a matriz de estados que contém os limites de rigidez k_{1inf} e k_{2inf} .

Para a solução numérica da LMI's (40) e projeto do controlador, foi utilizado o software Matlab® e o solver Self-Dual-Minimisation (SeDuMi), desenvolvido por Jos F.Sturm.

Resolvendo o Lema 1, considerando o conjunto de LMI's (40), com os parâmetros $r = 390$, $\Phi = 60^\circ$, $\gamma = 11$, obteve-se um sistema factível e o seguinte controlador (41) foi obtido:

$$K = \begin{bmatrix} -4560,6 & 1683 & 4637,6 & -1598,7 & 39,2 & 15,2 & -32,5 & -11 \\ 1733,2 & -8787,1 & -17054 & 8827,7 & 12,8 & 8,4 & -10,6 & -6,4 \\ 5074,9 & -1434 & -5031,7 & 1445,1 & -26 & -4,7 & 30,1 & 5 \\ -1151 & 8810,6 & 1180,2 & -8642,2 & -5,1 & -8,7 & 5,2 & 16,5 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Aqui são apresentadas as respostas do sistema com controle de regulação aplicado aos pontos críticos: $q_2 = -180^\circ$, $q_2 = 0^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$.

As Figuras 13 e 14 mostram que todos os autovalores controlados pertencem à região $\mathcal{D}(11,390,60^\circ)$:

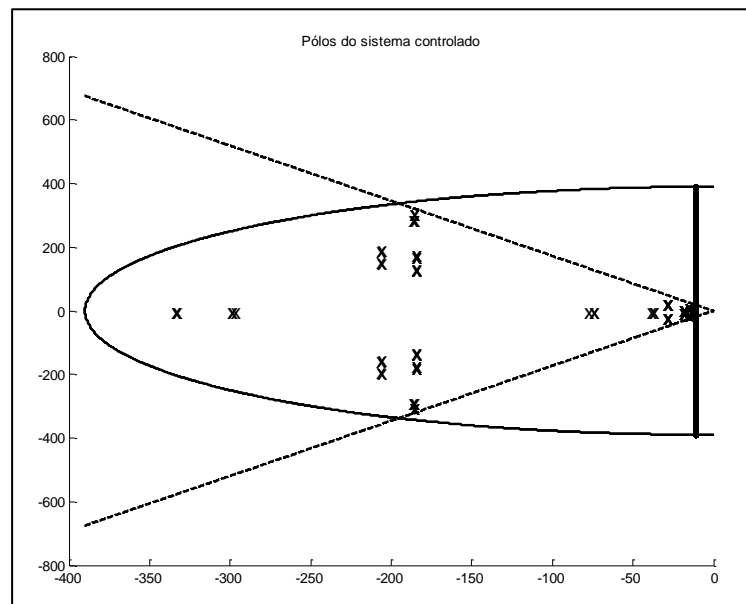


Figura 13 – Região $\mathcal{D}(11,390,60^\circ)$ que contém os pólos do sistema controlado $q_2 = 0^\circ$
Fonte: Autoria Própria.

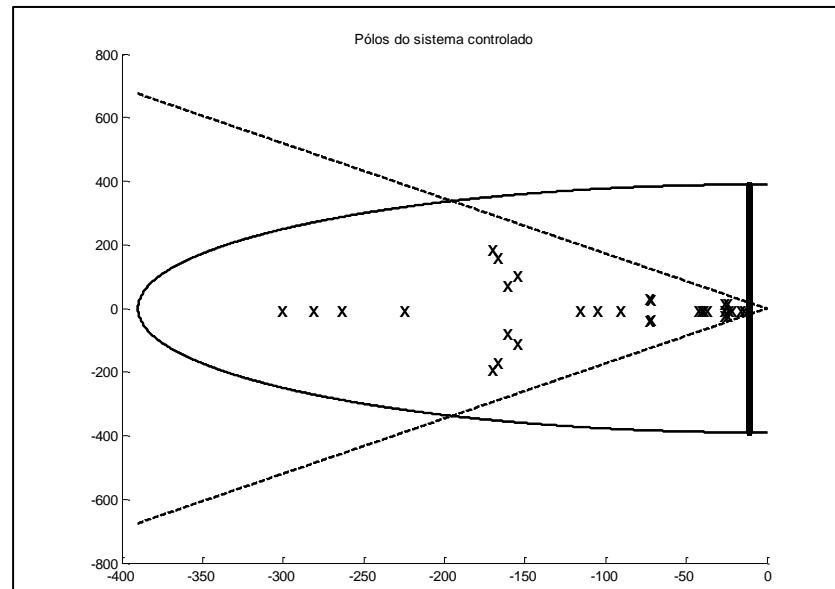


Figura 14 – Região $\mathcal{D}(11,390,60^\circ)$ que contém os polos do sistema controlado para $q_2 = 180^\circ$
Fonte: Autoria Própria.

Pode-se observar que alguns dos 32 polos do sistema com controle estão bem próximos um do outro e foram alocados para o semiplano esquerdo, dentro da região \mathcal{D} , indicando que o controlador amortece as juntas do manipulador para valores críticos da segunda junta q_2 .

A Figura 15 mostra a resposta temporal da ação de controle do regulador sobre as posições angulares dos motores 1 e 2 e posições angulares dos elos 1 e 2 dada uma condição inicial arbitrada $x_0 = [0,84 \ 0,84 \ 0,84 \ 0,84 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Este resultado simulado indica a eficiência do controlador em termos de estabilidade do manipulador robótico com dois graus de liberdade e juntas flexíveis.

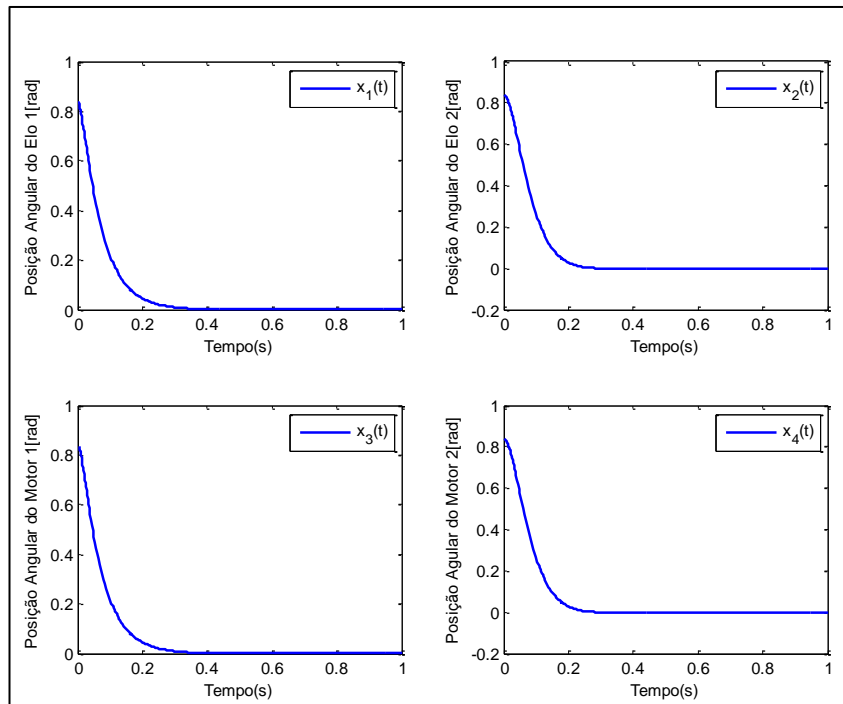


Figura 15 – Ação do controle de regulação sobre as posições angulares dos motores e dos elos
Fonte: Autoria Própria.

5.2 FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA NAS CONFIGURAÇÕES CRÍTICAS DE POSIÇÃO ANGULAR DO ELO 2

Primeiramente, a *Função de Resposta em Frequência (FRF)* do manipulador robótico é analisada com a finalidade de estabelecer os critérios para a sintonia do controlador. A *FRF* é analisada para valores de $q_2 = -180^\circ$, $q_2 = 0^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$. Estes valores correspondem às posições críticas do segundo elo do manipulador, ou seja, são os extremos do plano de trabalho, ressaltando que a matriz de massa total $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ depende da posição angular q_2 do segundo elo.

A Figura (16) e a Figura (17) representam as posições críticas para o segundo elo.

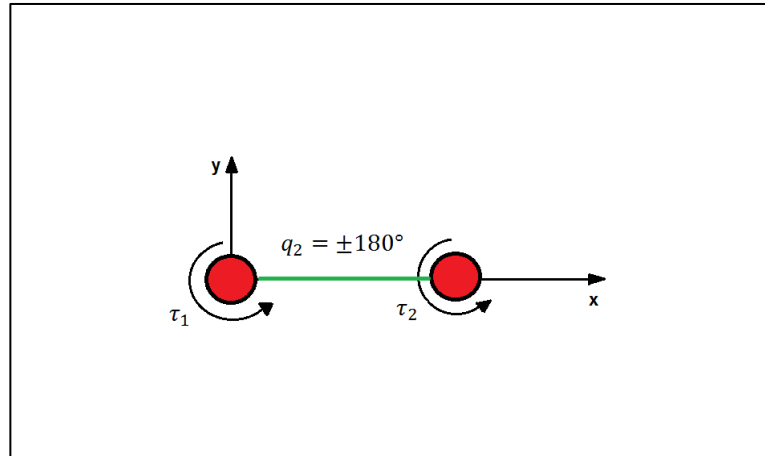


Figura 16 - Representação cartesiana de $q_2 = \pm 180^\circ$
 Fonte: Adaptado de (TAKANO, 2016).

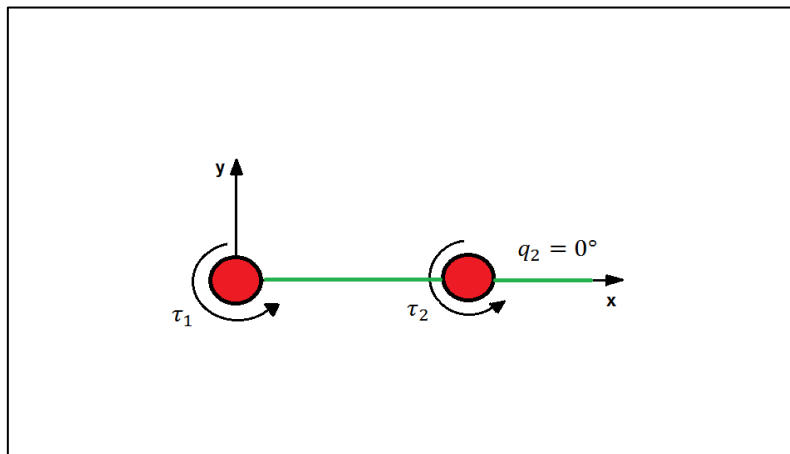


Figura 17 - Representação cartesiana $q_2 = 0^\circ$
 Fonte: Adaptado de (TAKANO, 2016).

Nas Figuras 18, 19, 20 e 21 observa-se que a segunda junta correspondente à posição angular do segundo elo (q_2) e apresenta grande influência no sistema. Nos casos $q_2 = -180^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$ as respostas são muito próximas pois apresentam a mesma matriz de inércia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$.

A função de transferência $G_{11}(s)$ na Figura 18 apresenta as respostas para $q_2 = -180^\circ$, $q_2 = 0^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$. O gráfico mostra a influência da entrada τ_1 na saída θ_1 .

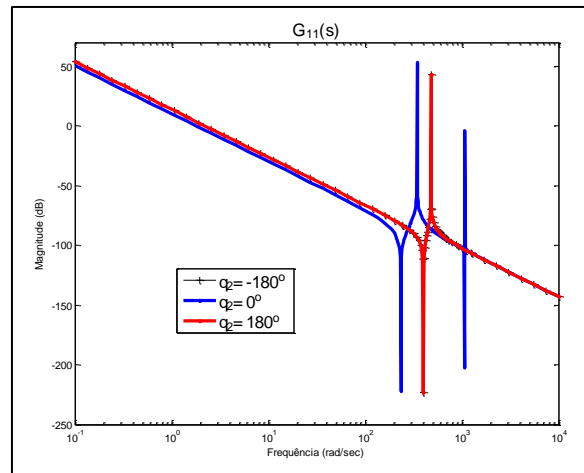


Figura 18 - Função de transferência $G_{11}(s)$
Fonte: Autoria própria.

A função de transferência $G_{22}(s)$ na Figura 19 apresenta as respostas para $q_2 = -180^\circ$, $q_2 = 0^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$. O gráfico mostra a influência da entrada τ_2 na saída θ_2 .

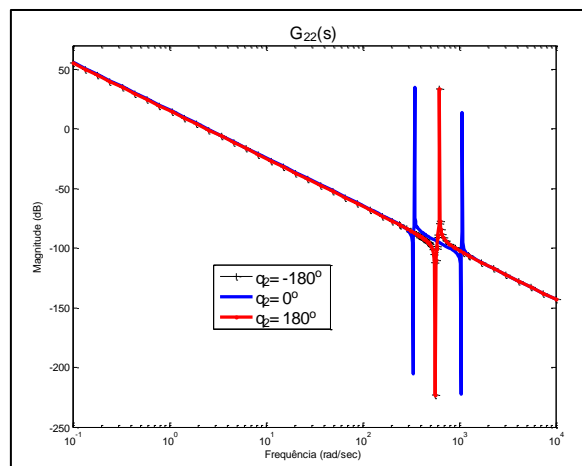


Figura 19 - Função de transferência $G_{22}(s)$
Fonte: Autoria própria.

A função de transferência $G_{12}(s)$ na Figura 20 apresenta as respostas apenas para $q_2 = 0^\circ$. Isto ocorre pois, matematicamente, não é possível calcular a resposta nos casos $q_2 = -180^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$ por não haver a inversa da matriz jacobiana necessárias para os cálculos. O gráfico mostra a influência da entrada τ_1 na saída θ_2 .

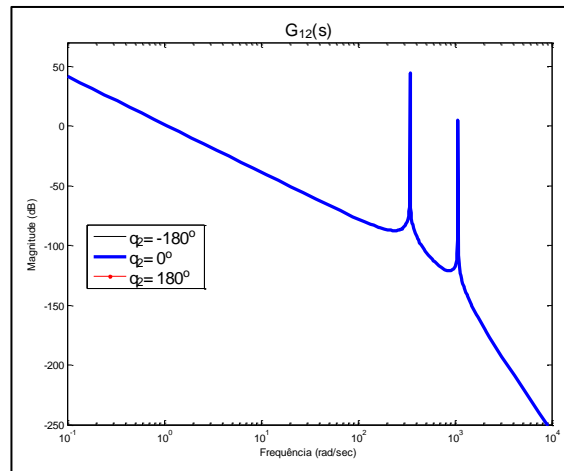


Figura 20 - Função de transferência $G_{12}(s)$
Fonte: Autoria própria.

A função de transferência $G_{21}(s)$ na Figura 21 apresenta as respostas apenas para $q_2 = 0^\circ$. Isto ocorre pois, matematicamente, não é possível calcular a resposta nos casos $q_2 = -180^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$ por não haver a inversa da matriz jacobiana necessárias para os cálculos. O gráfico mostra a influência da entrada τ_2 na saída θ_1 .

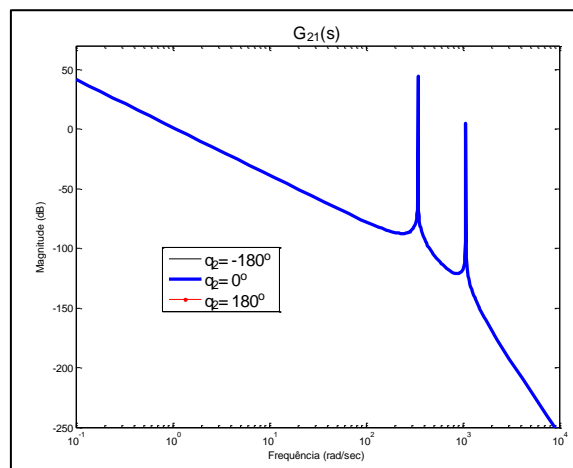


Figura 21 - Função de transferência $G_{21}(s)$
Fonte: Autoria própria.

Nestes casos, pode-se analisar o acoplamento do sistema. No caso do manipulador robótico em questão, percebe-se um pequeno acoplamento que pode ser observado pela ausência de zeros nos diagramas de bode apresentados anteriormente.

5.3 FREQUÊNCIAS DE BLOQUEIO

O comportamento das frequências de bloqueio é considerado na sintonia do controle de regulação para garantir que a largura de banda do sistema controlado seja no máximo um terço das frequências de bloqueio de cada junta.

A grandeza das frequências de bloqueio variam significativamente em função da posição da junta q_2 .

Em função da configuração do manipulador robótico, as frequências de bloqueio são avaliadas entre $q_2 = -180^\circ$, $q_2 = 0^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$ conforme a Figura 22 e, para a primeira e segunda juntas, são denominadas w_1 e w_2 , respectivamente.

Nota-se que as posições $q_2 = -180^\circ$ e $q_2 = 180^\circ$ apresentam o mesmo valor numérico de frequências de bloqueio por possuírem a mesma matriz de inércia. Para w_1 os valores para $q_2 = \pm 180^\circ$ e $q_2 = 0^\circ$ foram: 400[rad/s] e 234,8[rad/s], respectivamente.

Para w_2 os valores para $q_2 = \pm 180^\circ$ e $q_2 = 0^\circ$ foram: 481,1[rad/s] e 332,9[rad/s], respectivamente.

Devido ao fato da inércia do primeiro motor ser maior que a inercia do segundo motor, temos que w_2 é maior que w_1 .

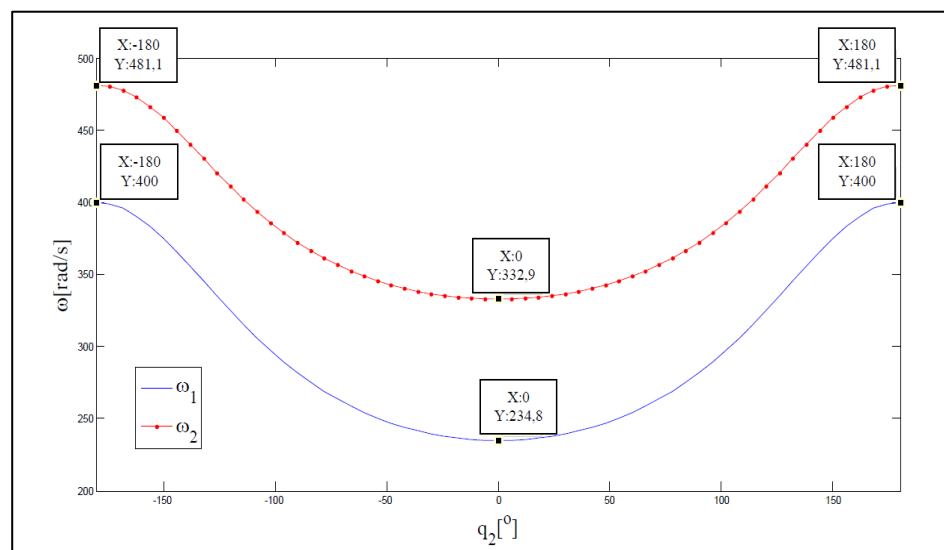


Figura 22 – Frequências de bloqueio em função de q_2
Fonte: Autoria própria.

A não linearidade dinâmica do manipulador produz variação das frequências de bloqueio, apresentadas na Figura 22. Esta não linearidade ocorre devido à variação da matriz de inércia, dependente da configuração do segundo elo do manipulador robótico (q_2) e ela é considerada pelo sistema de controle.

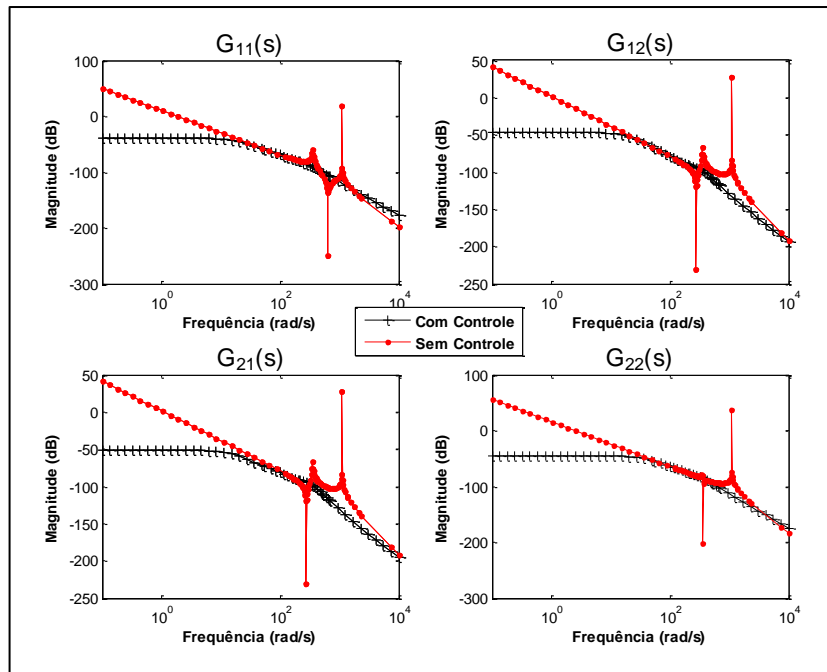


Figura 23 – Largura de banda e frequência das funções de transferência em $q_2 = 0^\circ$
Fonte: Autoria própria.

Na Figura 23 são apresentadas as respostas em frequência para $q_2 = 0^\circ$, controlados e não-controlados. As matrizes de transferência $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$ indicam frequências que seguem a regra de um terço das frequências de bloqueio.

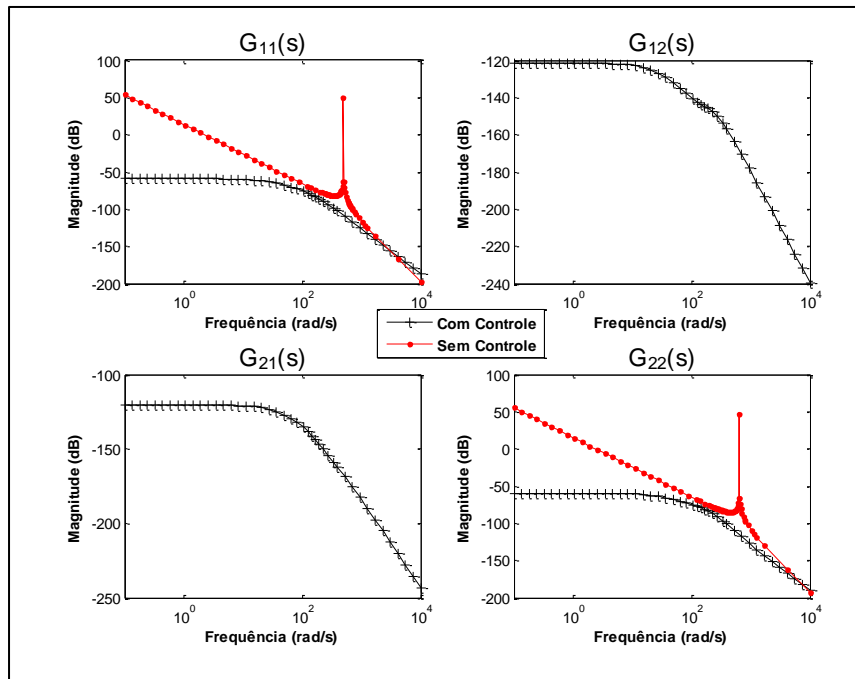


Figura 24 – Largura de banda e frequência das funções de transferência em $q_2 = 180^\circ$
 Fonte: Autoria própria.

Como pode ser observado, na Figura 24 os picos das FRF do sistema sem controle foram atenuados quando comparados à FRF com controle. A sintonia do controlador atende ao requisito de um terço da frequência de bloqueio. Além disso, percebe-se que tanto para $q_2 = 0^\circ$ quanto para $q_2 = 180^\circ$ nas funções de transferência $G_{12}(s)$ e $G_{21}(s)$, existe um pequeno acoplamento do sistema e que o controle é efetivo.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi abordado um estudo sobre o controle de robôs manipuladores com juntas flexíveis, especificamente um manipulador planar com dois graus de liberdade e flexibilidade nas juntas. Após a revisão de trabalhos análogos publicados na literatura, foi proposto utilizar o controle de regulação utilizando \mathcal{D} -estabilidade com o objetivo de alocar os polos em malha fechada de modo a garantir a estabilidade do manipulador robótico em uma configuração específica. Após determinado o modelo dinâmico do manipulador, foram feitas simulações computacionais para comprovar a efetividade do controlador.

Os desempenhos encontrados nas simulações computacionais foram satisfatórios e pode ser considerado uma alternativa em relação aos controladores encontrados na literatura.

Os resultados preliminares, gerados a partir da dinâmica simplificada do manipulador robótico, mostraram variações na frequência de bloqueio e nas respostas em frequência, significando uma certa dependência da configuração do robô. Este resultado expressa o comportamento não linear do manipulador robótico. Levando em consideração os pontos críticos temos um controle de regulação efetivo, isto é, o controlador estabiliza a posição do manipulador robótico para essas configurações considerando-se uma condição inicial arbitrada.

Como sugestão para continuação deste trabalho, seria interessante aplicar uma entrada do tipo degrau na entrada do sistema, e verificar se os requisitos como overshoot e um tempo de acomodação são pequenos, indicando que o controlador amortecerá e estabilizará a resposta do sistema de forma adequada. Além disso, realizar a implementação para o modelo dinâmico completo do manipulador robótico de dois graus de liberdade com juntas flexíveis.

REFERÊNCIAS

- BENOSMAN, M.; LE VEY, G. **Control of flexible manipulators: A survey.** In: *Robotica*. 5. ed. [s.l: s.n.]. v. 22p. 533 – 545, out. 2004.
- CHANG, Y.-C.; YEN, H.-M. **Design of a robust position feedback tracking controller for flexible-joint robots.** *IET Control Theory Applications*, v. 5, n. 2, p. 351–363, jan. 2011.
- CRAIG, John J. *Robótica*. 3. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2012
- DA SILVA, E. R. P., ASSUNÇÃO, E., TEIXEIRA, C. M. and BUZACHERO, L. F. S. (2012). **Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback,** *Mathematical Problems in Engineering* vol. 2012: 21 pages. Article ID 315049.
- DE LUCA, A.; SICILIANO, B. **Joint-based control of a non-linear model of a flexible arm.** In: american control conference. Atlanta, Georgia: 1988.
- ENCICLOPÉDIA de automática: controle e automação. São Paulo: Blusher. 2007. FAPESP.
- ISOGAI, M.; ARAI, F.; FUKUDA, T. **Modeling and vibration control with neural network for flexible multi-link structures.** IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1999.
- KARKOUB, M.; TAMMA, K. **Modelling and u-synthesis control of flexible manipulators.** In: *Computers and Structures*. v. 79 p. 543–551. 2011.
- KRESS, R.; LOVE, L. DUBEY, R. GIZELAR, A. **Waste tank cleanup manipulator modeling and control,** 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1997. Proceedings. *Anais...*, 1997 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1997. PROCEEDINGS. abr. 1997.
- LARA-MOLINA, Fabian A. TAKANO, Karina A. KOROISHI Edson H. **Set-point regulation of a robot manipulator with flexible joints using fuzzy control.** Latin American Robotics Symposium, 12. Uberlandia. 2015.
- LBR IIWA.** Disponível em: <<http://www.kuka-lbr-iiwa.com/>>. Acesso em: 27 set. 2016.
- LEWIS, F. L.; DAWSON, D. M.; ABDALLAH, C. T. **Robot manipulator control: theory and practice.** CRC Press, 2003.
- M. CHILALI AND P. GAHINET. **H1 design with pole placement constraints: An LMI approach.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, 1996.

MANNANI, A.; TALEBI, H. A. **TS-model-based fuzzy tracking control for a single-link flexible manipulator** *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications*, 2003.

MAKAROV, M. **Contribution à la modélisation et la commande robuste de robots manipulateurs à articulations flexibles. Applications à la robotique interactive.** Tese. Supélec, 21 mai. 2013.

OGATA, K. **Modern control engineering.** 5. ed. Upper Saddle River, New Jersey. 2009.

READMAN, M. C. **Flexible Joint Robots.** CRC Press, 1994.

TAKANO, Karina A. LARA-MOLINA, Fabian A. KOROISHI, Edson H. **Motion control strategy of a robotic manipulator with flexible joints based on fuzzy control.** *International Congress of Mechanical Engineering*, 23. Rio de Janeiro. 2015.

TAKANO, Karina A. LARA-MOLINA, Fabian A. KOROISHI, Edson H. **Modelagem de manipulador robótico com juntas flexíveis.** *Simpósio Paranaense de Engenharia Mecânica*, 4. Cornélio Procópio. 2015.

TEIXEIRA, M. C. M., PIETROBOM, H. C. & ASSUNÇÃO, E. (2000). **Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e lmi**, *Controle & Automação* 11(1): 37-48.

VANANTWERP, J. G. & BRAATZ, R. D. (2000). **A tutorial non linear and bilinear matrix inequalities**, *Journal of Process Control* 10: 363-385.

ZUBEN, Fernando. J.V, **“Introdução ao Controle por Realimentação”**, http://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/notas_de_aula/topico11.pdf, 2010.

ZHU, W.; SUN, Z. **Data-based fuzzy adaptive control for a flexible-link manipulator.** *2012 Third International Conference on Intelligent Control and Information Processing (ICICIP)*. jul. 2012.

ANEXO A – DEDUÇÃO DA EQUÇÃO DINÂMICA DO MANIPULADOR

Este anexo é adaptado da obra de (LEWIS; DAWSON; ABDALLAH, 2003) e apresenta a dedução da equação dinâmica do manipulador.

Considerando um manipulador planar, admite-se que as posições de junta q e velocidade de junta \dot{q} podem ser expressas conforme a equação (A.1), onde: e é o movimento linear, θ é a posição angular e $\dot{\theta}$ é a velocidade angular.

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ e \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

O vetor de força generalizado é considerado na equação (A.2).

$$\tau = \begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

onde:

t é um torque;

f é uma força e ambos correspondem ao motor do manipulador.

A energia cinética total E , considerando o movimento angular $\dot{\theta}$ e movimento linear \dot{e} é apresentado na equação (A.3).

$$E = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{e}^2 \quad (A.3)$$

A energia potencial é dada na equação (A.4).

$$P = m g e \sin \theta \quad (A.4)$$

A partir da equação de Lagrange, dada pela equação (A.5), podem ser obtidas as equações (A.6) e (A.7).

$$L = E - P = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{e}^2 - m g e \sin \theta \quad (A.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}}{\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}} = \begin{bmatrix} me^2 \\ m\dot{e} \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} me^2 \ddot{\theta} + 2me\dot{e}\dot{\theta} \\ m\ddot{e} \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} -mge\cos\theta \\ me\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

As equações dinâmicas do manipulador são apresentadas a seguir nas equações (A.8) e (A.9). Este é um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas que descrevem o movimento $q(t) = [\theta(t) \quad e(t)]^T$. Os primeiros termos em cada equação são termos de aceleração envolvendo massas e inércias. O segundo termo da equação (A.8) é a componente de Coriolis e o segundo termo da equação (A.9) é a força centrípeta. Os terceiros termos são relacionados à gravidade.

$$me^2 \ddot{\theta} + 2me\dot{e}\dot{\theta} + mge\cos\theta = t \quad (A.8)$$

$$m\ddot{e} - me\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta = f \quad (A.9)$$

A equação dinâmica pode ser escrita da forma vetorial, como apresentado na equação (A.10). A equação (A.11) apresenta a denominação dos termos que serão utilizados a seguir, onde: $M(q)$ é a matriz de inércia, $V(q, \dot{q})$ é o vetor composto pelas forças de Coriolis e centrípeta e $G(q)$ é o vetor de gravidade.

$$\begin{bmatrix} me^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2me\dot{e}\dot{\theta} \\ -me\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mge\cos\theta \\ mg\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (A.11)$$

A partir deste momento é admitido um manipulador planar de dois graus de liberdade e com base na Figura 14, considerando a massa m de cada elo de

comprimento a concentrada no seu ponto final, são deduzidas as suas equações dinâmicas completas.

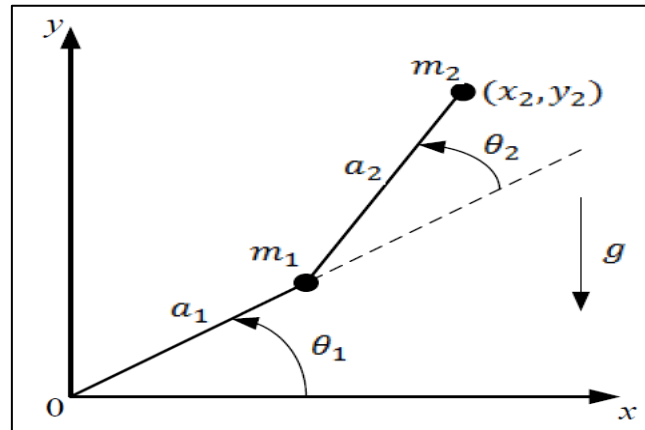


Figura 25 - Representação de manipulador de dois graus de liberdade
Fonte: Adaptado de (Lewiws et al., (2003)

As energias cinética e potencial para o elo 1 podem ser observadas, respectivamente nas equações (A.12) e (A.13).

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{A.12})$$

$$P_1 = \frac{1}{2} m_1 g a_1 \sin \theta_1 \quad (\text{A.13})$$

Para o elo 2 obtemos as seguintes equações:

$$x_2 = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{A.14})$$

$$y_2 = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{y}_2 = a_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{A.17})$$

Portanto a velocidade V ao quadrado é:

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \quad (A.18)$$

Portanto, podemos obter as energias cinética e potencial para o elo 2 conforme apresentado, respectivamente, nas equações (A.19) e (A.20).

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_2 a_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 a_1 a_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \quad (A.19)$$

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g [a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (A.20)$$

Utilizando a equação de Lagrange, obtemos a equação (A.21).

$$L = E - P = E_1 + E_2 - P_1 + P_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) a_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 a_1 a_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 - (m_1 + m_2) g a_1 \sin \theta_1 - m_2 g a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (A.21)$$

A seguir, nas equações (A.22) a (A.27) são indicados alguns termos importantes para o restante desenvolvimento das equações.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) a_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 a_1 a_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \quad (A.22)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = -(m_1 + m_2) a_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 a_1 a_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - m_2 a_1 a_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \quad (A.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2) g a_1 \cos \theta_1 - m_2 g a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (A.24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 a_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \quad (A.25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 a_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 a_1 a_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (A.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 a_1 a_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 - m_2 g a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (A.27)$$

De acordo com as equações de Lagrange, a equação dinâmica do manipulador é dada pelas duas equações acopladas não lineares: equação (A.28) e (A.29).

$$\tau_1 = [(m_1 + m_2)a_1^2 + m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + [m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_2 - m_2 a_1 a_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 + (m_1 + m_2) g a_1 \cos \theta_2 + m_2 g a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (A.28)$$

$$\tau_2 = [m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 g a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (A.29)$$

Escrevendo na forma vetorial as expressões dinâmicas obtemos:

$$M(q) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 a_1 a_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \\ m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g a_1 \cos \theta_1 + m_2 g a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (A.30)$$

onde:

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)a_1^2 + m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 \cos \theta_2 & m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos \theta_2 \\ m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos \theta_2 & m_2 a_2^2 \end{bmatrix} \quad (A.31)$$