

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
ENGENHARIA MECÂNICA

RAFAEL SANTIAGO DE CAMPOS

**SIMULAÇÃO DA EROÇÃO EM UM DUTO CURVO DE 90° POR  
PARTÍCULAS SÓLIDAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2016  
RAFAEL SANTIAGO DE CAMPOS

# **SIMULAÇÃO DA EROÇÃO EM UM DUTO CURVO DE 90° POR PARTÍCULAS SÓLIDAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina TCC2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Lourenço

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2016

## FOLHA DE APROVAÇÃO

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

Dedico este trabalho à minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Lourenço, pela sabedoria, ajuda e conselhos de última hora para que fosse possível fazer um bom trabalho.

Aos meus amigos de sala, por todas as memórias, risadas e ensinamentos passados ao longo do curso.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de agradecer a minha namorada Marcela, sempre iluminando os caminhos por onde passa com seu sorriso. Pelos incentivos e exemplo de alegria e perseverança, que tornou esse processo 1289328 de vezes mais fácil.

E o mais importante, gostaria de agradecer aos meus pais e meu irmão Antonio Carlos, Helena e Matheus pelo amor incondicional, por me darem a oportunidade de não só sonhar, mas as ferramentas para realiza-los, sempre estarei com presente, seja pessoalmente, ou no coração, que já se aquece só de pensar em vocês.

Desejo a você uma vida cheia de entropia, com experiências boas, que ficam marcadas não só na mente, mas no tempo.

## RESUMO

Campos, Rafael Santiago de. **Simulação da erosão em um duto curvo de 90° por partículas sólidas**. 2016. 66 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procopio, 2016.

Este trabalho se trata na validação e aplicação do software UNCYFL3D para DFC (dinâmica dos fluidos computacional) acoplado com um modelo de erosão, sendo possível a simulação e predição da erosão de um duto de secção quadrada através de simulação numérica. Utilizando a metodologia RANS (Reynolds Average Navier-Stokes equations) com um referencial euleriano para a fase contínua (fluido) e um rastreamento de partículas com um referencial lagrangiano para a fase dispersa.

**Palavras-chave:** CFD. Simulação numérica. RANS. erosão. Euleriano-lagrangiano.

## ABSTRACT

CAMPOS, Rafael Santiago de . **Simulation of erosion in a curved duct 90 due to solid particles**. 2016. 66f. Work Completion of course (Graduation) – Mechanical Engineering. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

This work is a validation and application of UNCYFL3D software for CFD (computational fluid dynamics) coupled with an erosion model, it is possible to simulate and predict the erosion of a square section duct through numerical simulation. Using the methodology RANS (Reynolds Average Navier-Stokes equations) with a Eulerian reference to for continuous phase (fluid) and a particle tracking with a Lagrangian reference to the dispersed phase.

**Keywords:** CFD. Numeric Simulation. RANS. erosion. Euleriano-lagrangiano.



## SUMÁRIO

<b>1-INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>13</b>
<b>3 METODOLOGIA.....</b>	<b>30</b>
3.1 MODELAMENTO MATEMÁTICO.....	30
3.2 MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO.....	30
3.3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS.....	30
3.2.1 Método dos volumes finitos.....	31
3.2.2 Aproximação do termo de acúmulo.....	33
3.2.2.1 Método explícito.....	34
3.2.2.2 Método implícito.....	35
3.3.3 Aproximação do termo advectivo.....	35
3.3.3.1 UPWIND de 1ª ordem.....	35
3.2.2.2 UPWIND de 2ª ordem.....	36
3.3.4 Aproximação de termo difuso .....	37
3.3.5 Aproximação do termo fonte.....	38
3.3.6 Malha numérica.....	39
3.3.6.1 Malhas estruturadas.....	40
3.3.6.2 Malha não estruturadas.....	41
3.3.7 Acoplamento entre as fases.....	42
<b>4 DISCRETIZAÇÃO DA FASE CONTÍNUA.....</b>	<b>43</b>
<b>5 DISCRETIZAÇÃO DA FASE DISPERSA.....</b>	<b>45</b>
5.1 MÉTODO DA FORÇA PONTUAL.....	45
<b>5 DOMÍNIO FÍSICO E CONDIÇÕES DE CONTORNO.....</b>	<b>56</b>
<b>6 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>59</b>
<b>7 CONCLUSÃO.....</b>	<b>64</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>65</b>

## INTRODUÇÃO

Muitos processos mecânicos estão sujeitos à corrosão e erosão devido a partículas sólidas em meios fluidos. (SALVO, 2013) afirmam que a erosão em combustores de leito fluidizado, unidades de processo comercial utilizadas para queimar carvão de forma limpa, é um problema sério com consequências econômicas negativas. De acordo com os autores foram relatados erosões severas em tubulações de combustores de leito fluidizado em 1982, mostrando que após 468 h de operação alguns tubos já mostravam desgastes de 1,2 mm, que é mais de 50% dos dois mm aceitos para uma operação segura. (THPA, THAPA, & OLE, mar 2012) mostram que partículas sedimentares provocam erosão nos componentes de uma turbina, que com o passar do tempo a remoção do material pode causar falhas estruturais e perdas de eficiência, sendo não só um problema econômico, mas também de segurança prever corretamente o desgaste dos componentes mecânicos da turbina.

Com tamanha importância no tema fica claro que a previsão do desgaste de componentes mecânicos, como tubulações, se fazem necessárias. Porém o fenômeno da erosão por partículas sólidas em meios fluidos é um problema extremamente complexo. (FERZIGER, 2002) descreve três abordagens que um engenheiro ou projetista pode realizar para desenvolver um projeto: a primeira sendo o método analítico que tem uma limitação severa em relação à descrição de problemas complexos; a segunda é o método experimental que pode ser às vezes a única solução para problemas extremamente complexos, porém possui a desvantagem de ser altamente custoso e muitas vezes impraticável por questões de segurança; a terceira é o método numérico, o qual se torna cada vez mais uma opção viável, pois consegue descrever problemas com geometrias complexas e processos com alto risco, sua principal limitação é o processamento dos dados, sendo que esta decresce rapidamente com a evolução computacional.

Com a evolução dos computadores, métodos numéricos se tornaram cada vez mais viáveis e uma metodologia muito útil na engenharia mecânica é a Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) que se trata da solução das equações do escoamento de fluidos com o uso de um computador através de métodos numéricos. (LYCZKOWSKI & BOUILLARD, set 2002). Neste trabalho o foco é em escoamentos

turbulentos bifásicos (líquido-sólido), mesmo com a evolução dos computadores é necessário certo cuidado na hora escolher a metodologia para a solução de cada fase (líquida-sólida). Considerando a modelagem da turbulência de acordo com (SALVO, 2013), existem basicamente três abordagens: Metodologia da Simulação Numérica Direta, na qual todas as escalas do escoamento são resolvidas; metodologia da Simulação de Grandes Escalas, na qual as menores escalas do escoamento são modeladas e as maiores calculadas; por último a metodologia das Equações Médias de Reynolds (também conhecida como metodologia RANS – *Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*).

Para a simulação do escoamento bifásico turbulento foi utilizada a metodologia das Equações Médias de Reynolds com uma abordagem numérica Euleriana-Lagrangiana, sendo o referencial Euleriano para a fase contínua e o referencial Lagrangiano para a fase dispersa, que localizará cada partícula individualmente no domínio computacional. De acordo (NJOBUNWU & FAIRWEATHER, 2012) a metodologia Euleriana-Lagrangiana é o modelo mais popular para prever escoamentos multifásicos diluídos. Sendo o método ideal para escoamentos multifásicos com acoplamento de uma via, no qual as partículas não exercem grande influência no escoamento do fluido devido à quantidade e ao tamanho das mesmas.

O modelamento da erosão por partículas sólidas é dividido em basicamente três partes: a primeira seria o modelamento do escoamento do fluido, que será baseado na metodologia Euleriana para solução das equações médias de Reynolds; a segunda parte é o rastreamento das partículas sólidas através de um referencial Lagrangiano; e por último tem-se o modelamento da erosão. (NJOBUNWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012). De acordo com (SALVO, 2013) para uma simulação bem sucedida o modelo mecânico e o modelamento da erosão devem ser usados juntos.

Para o modelamento da erosão é necessário saber quais variáveis estão envolvidas no processo de erosão por partículas sólidas. Um modelo geral de erosão é dado pela seguinte equação:

Erosão =  $f$ (condições de operação, propriedades das partículas, propriedades do material base).

Geralmente a erosão é uma função da velocidade, dureza da partícula e dureza do material base. (HUMPHREY, 1990) Descreve um modelo geral para taxa

de erosão (mm/ano) dada em função do tipo de material da partícula, das condições do ambiente, da concentração de partículas, do ângulo de impacto e da velocidade da partícula. É importante lembrar que a variável que mais influência na taxa de erosão é a velocidade, pois numa colisão da partícula com a parede ocorre a transferência da energia cinética da partícula para superfície que está sendo erodida.

Ao longo dos anos foram desenvolvidos vários modelos de erosão, esses são alguns exemplos, de modelos de erosão de acordo com (NJOBUNWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012):

1- Modelo de erosão de Tabakoff et al, 1973: se trata de um modelo de erosão semi empírico que prevê a taxa de erosão baseado no ângulo e na velocidade de impacto, também possui um coeficiente de restituição da partícula.

2- Modelo de erosão de Menguturk e Sverdup, 1979: baseado em relações empíricas para aço carbono erodido por pó de carvão. Também constatou que a taxa de erosão é uma função altamente relacionada com a velocidade e ângulo de impacto da partícula.

3- Modelo de erosão de E/CRC, 1996: criado no Centro de Pesquisa de Corrosão e Erosão da Universidade de Tulsa, relacionando o formato da partícula (afiadas, semi-afiadas ou redondas), a velocidade de impacto, a dureza do material da parede e o ângulo de impacto com a taxa de erosão.

4- Modelo de erosão Oka, Okamura e Yoshida, 2005: seu modelo se baseia em uma função proporcional a erosão causada por um impacto a 90° entre a partícula e parede.

5- Modelo de erosão Huang et al, 2008: desenvolveu um modelo de erosão para uma partícula única, no qual a velocidade depende do formato da partícula.

## 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A referência bibliográfica será apresentada em forma de resumo das principais bibliografias utilizadas neste trabalho.

(THPA, THAPA, & OLE, mar 2012) Utilizando predições numéricas é possível ter uma ideia de onde ocorrerá a erosão em um lamina de turbina por exemplo. Esse é exatamente o objetivo do trabalho de (THPA, THAPA, & OLE, mar 2012) no qual uma comparação foi feita entre os resultados do modelo e a turbina em si, mostrando um padrão similar de erosão.

Para o modelamento numérico da erosão foram utilizados dois modelos: o modelo de erosão de Finnie's e o modelo de Tabakoff e Grand. Baseado nos resultados o modelo de Tabakoff e Grand sendo o modelo mais complexo que leva em conta propriedades do material apresentou um resultado mais real se comparado ao outro, que superestimou a erosão na lamina. Em ambos os casos o resultados é qualitativo, ou seja, indica a região onde ocorre a erosão mas não e capaz de precisar o valor dessa erosão, mesmo assim é uma ferramenta muito útil na projeto de laminas, no qual se sabe as regiões mais afetadas.

O software utilizado foi o ANSYS CFX, no qual as partículas foram implementadas usando um rastreador lagrangiano e os modelos de erosão serviram para determinar a intensidade da erosão. Abaixo estão as condições de contorno aplicadas na simulação.

---

**Tabela 1 - condições de contorno da simulação**

Variável	Valor
Densidade do fluido	999 $kg/m^3$
Densidade da partícula	2.65 $g/cm^3$
Dimensão da partícula	0.1 – 0.2 $mm$
Vazão mássica pela turbina	540 $kg/s$
Vazão mássica das partículas	0.5, 3, 20 e 50 $kg/s$
Direção da vazão na entrada das palhetas (a,r, $\theta$ )	0, 0.4, 0.9165 $m/s$

---

Fonte: (THPA, THAPA, & OLE, mar 2012)

As vazões mássicas das partículas foram determinadas baseadas em 9 anos de medições, o que tornou possível a simulação de diferentes cenários reais durante o funcionamento da turbina, tornando a simulação mais realista.

os resultados obtidos são de grande importância para a determinar o comportamento da erosão em superfícies, neste caso os modelos numéricos calculavam a força exercida pela partícula ao colidir com a parede. Na figura abaixo é possível ter uma ideia qualitativa do problema, no qual são comparadas duas vazões mássicas de partículas em uma palheta.

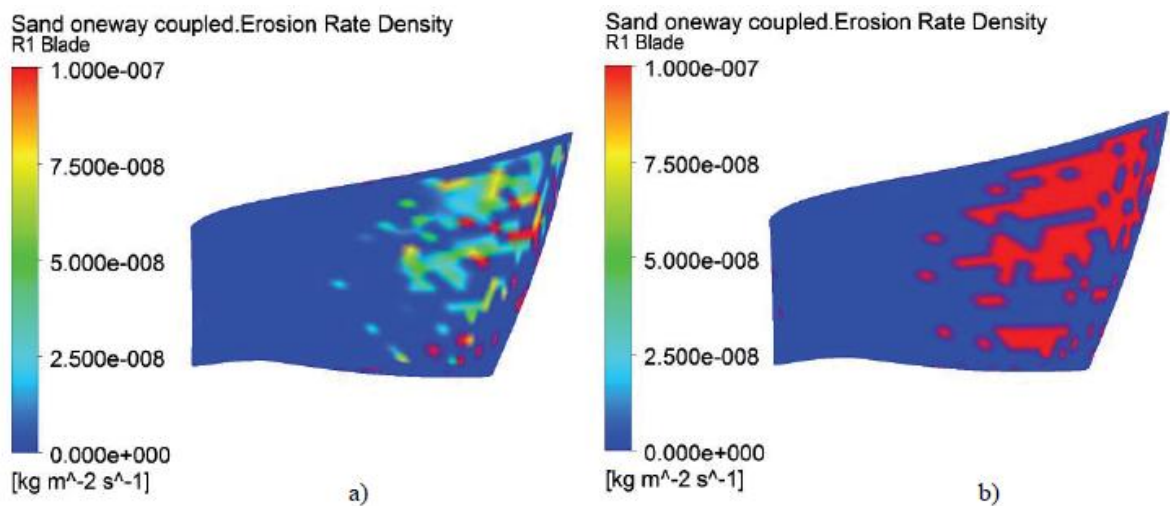


Figura 1- pressão da erosão na lado de velocidade da palheta, com duas vazões mássicas diferentes – a) 0.5 kg/s e b) 20 kg/s

Fonte: (THPA, THAPA, & OLE, mar 2012)

Fotos da turbina real após um o mesmo tempo de uso simulado foram tiradas para comparação, e pode-se notar que a simulação foi bem sucedida em prever o local principal das erosões, provando ser um ferramenta útil no design de estruturas suscetíveis a erosão.



**Figura 2 - erosão da região externa da turbina na planta de energia de Cahaua**

Fonte: (THPA, THAPA, & OLE, mar 2012)

(NJOBUNWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012) utiliza novamente uma metodologia RANS (equações médias de Navier-stokes e Reynolds) com um referencial euleriano para simular a fase contínua, neste caso o fluido é um rastreador com referencial lagrangiano, no qual se rastreia as partículas uma a uma, para a simulação da fase dispersa ou seja os particulados. Este artigo tem por objetivo validar a simulação de um escoamento turbulento em duto de secção quadrada, usando dados experimentais para tal, assim como o comportamento da trajetória das partículas sólidas que interagem com o fluido e as paredes do duto.

Como mencionado anteriormente a fase contínua, ou o fluido, é simulado usando uma metodologia RANS, que pode ser melhor entendida analisando a equação de conservação da massa e momento descritas respectivamente abaixo:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right] = 0 \quad (2)$$

note que a equação (2) decompõe a variáveis de transporte instantâneas (velocidade no caso) em quantidade média flutuantes descritas pela barra superior,

$u_i$  é a componente x da velocidade,  $t$  é o tempo,  $\rho$  é a densidade,  $P$  é a pressão e  $\nu$  a viscosidade cinemática. O tensor de Reynolds, que é usado para o modelamento das turbulências também é uma média e a equação para tal será descrita nas próximas secções. As partículas por sua vez foram simuladas através de um referencial lagrangiano, sendo esse muito usado para a simulação e rastreamento de partículas, que será descrita com mais detalhes na revisão da tese de (SALVO, 2013). Para o acoplamento entre as fases foi utilizado o modelo de uma via, pois a razão volumétrica entre partícula/fluido é baixa, sendo assim a partícula não exerce grandes impactos no comportamento do fluido.

As características geométricas assim como as condições de contorno são especificadas a seguir:

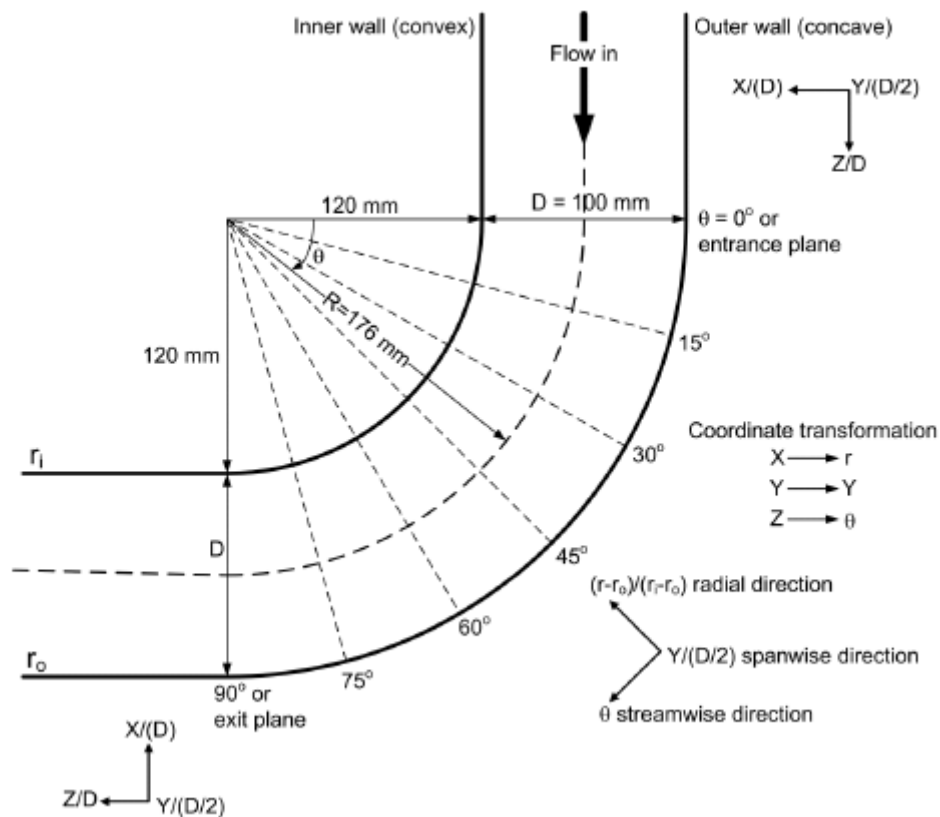


Figura 3 -Geometria do duto simulado

Fonte: (NJOBUNWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012)



---

**Tabela 2- condições de contorno**


---

Variável	Valor
D	100mm
R/D	1,763
Comprimento de entrada	10D
Comprimento de saída	12D
$Re$	$2,2 \times 10^5$ e $3,47 \times 10^5$
Densidade da partícula	2990 kg
Razão massica (kg/kg)	$1,5 \times 10^{-4}$ e $9,5 \times 10^{-4}$
Bulk gas velocities	33,09 e 52,19 $m. s^{-1}$

---

**Fonte: (NJOBUNWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012)**

Os resultados encontrados foram satisfatórios em prever o comportamento do fluido com assim como o comportamento das partículas sobre efeito do mesmo, notou –se um resultado mais preciso para Reynolds mais elevados ( $Re = 3,47 \times 10^5$ ). Note na figura abaixo uma comparação entre a média da velocidade transversal das partículas entre o simulado e os dados experimentais (a linha é o experimental e os pontos o simulado).

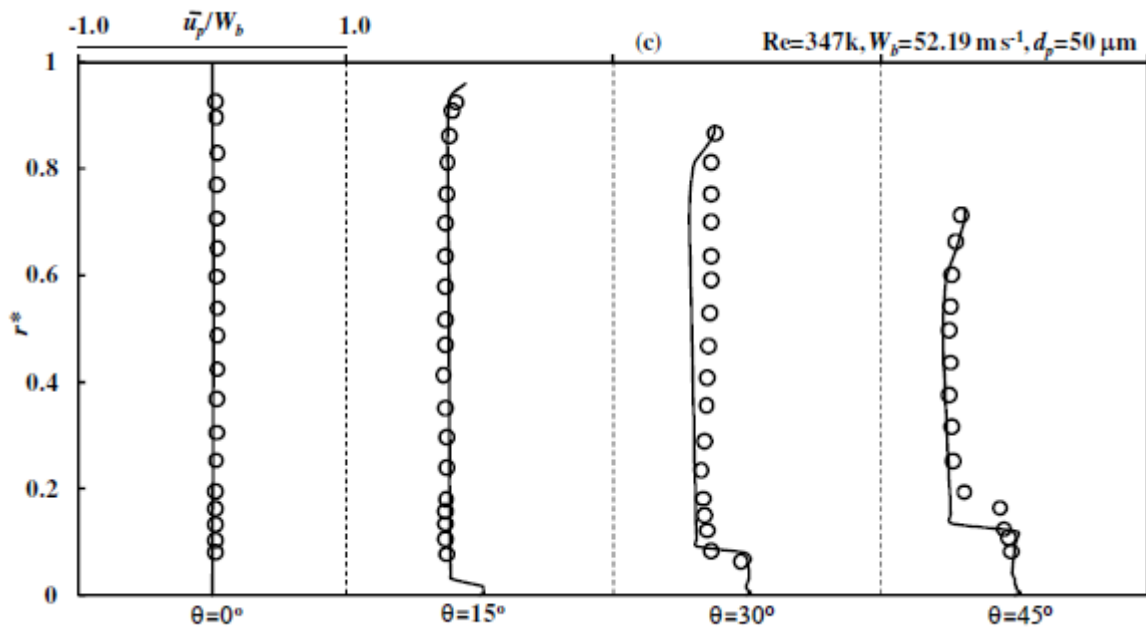


Figura 4- velocidade transversal média das partículas

Fonte: (NJOBUNWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012)

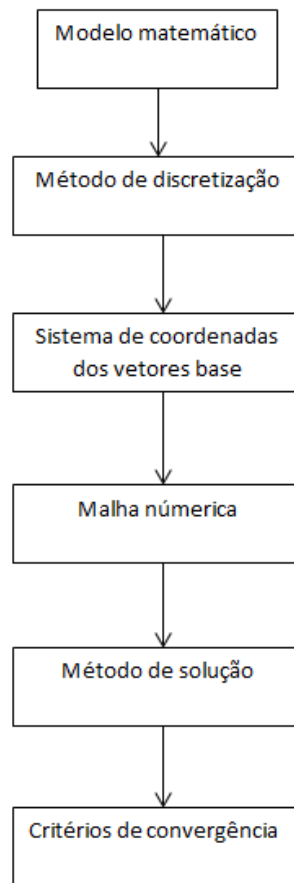
A simulação mostrou uma boa precisão entre o simulado e o experimental, até mesmo na região de maior velocidade da partícula perto da parede concava. Tal simulação se mostrou bastante útil na predição das trajetórias e velocidades das partículas, dando espaço para estudos futuros, como o próximo artigo analisado, no qual um modelo de erosão é acoplado a simulação para prever a simulação por partículas sólidas.

(FERZIGER, 2002) É um bom ponto de partida para entender melhor a base das equações usadas neste trabalho, porém como (FERZIGER, 2002) mesmo adverte, antes se faz necessária a leitura de métodos numéricos e uma boa base em mecânica dos fluidos, sendo que erros significantes foram cometidos por falta de conhecimento em uma das áreas.

O livro traz uma abordagem bastante pratica ao explicar em etapas, como funciona a dinâmica dos fluidos computacional (DFC), sendo o presente trabalho foi estruturado da mesma forma, usando em grande parte (FERZIGER, 2002) como referência base para explicar os métodos de discretização utilizados, malhas numéricas, modelos matemáticos para simulação de fluidos no o presente trabalho

foca bastante no modelo RANS (equações médias de Navier-Stokes e Reynolds traduzindo).

Como foi mencionado, a estruturação de como é apresentado o conteúdo é bastante prática, por essa razão o fluxograma abaixo é um resumo dos passos básicos para a DFC.



**Figura 5- fluxograma dos passos para a DFC**

Outro ponto importante de se ressaltar aqui, é o modelamento das turbulências no fluidos. Problemas mais complexos, como escoamentos turbulentos, exigem uma atenção especial no modelamento matemático, principalmente quando se escolhe o modelo a ser usado, (FERZIGER, 2002) traz uma boa coletânea de modelo de turbulência, na qual vale destacar os seguintes:

- utilização de correlações, tais como a fricção como uma função do número de Reynolds, ou o número de Nusselt de transferência de calor como uma função

dos números de Reynolds e Prandtl. Este método, é muito útil, mas está limitado a tipos de fluxos simples, aquelas que podem ser caracterizadas por apenas alguns parâmetros.

- A metodologia das equações de RANS (Reynolds Average Navier-Stokes) ou traduzindo as equações médias de Reynolds e Navier-Stokes, que são obtidas pela média das equações de movimento ao longo do tempo (se o fluxo é estatisticamente constante), sobre uma coordenada na qual a média de fluxo não varia, ou mais de um conjunto de realizações (Um conjunto imaginado dos fluxos em que todos os fatores controláveis são mantidos fixos). Esta abordagem é chamada de fechamento de um ponto e conduz a um conjunto de equações diferenciais parciais chamadas de Reynolds-média Navier-Stokes (ou RANS) equações. Porém estas equações não formam um conjunto fechado de modo que este método requer a introdução de aproximações (modelos de turbulência), que serão vistos com mais detalhe neste trabalho, já que esta metodologia é utilizada aqui.

- A simulação de grandes escalas (LES – large eddy simulation) resolve a maior escala dos movimentos do fluxo, enquanto a aproximação ou a modelagem apenas de uma pequena escala dos movimentos. Se trata de um método híbrido entre a metodologia RANS e a DNS que será vista a seguir.

- Metodologia DNS (direct numerical simulation) ou simulação numérica direta se trata da solução das equações de Navier-Stokes em movimentos de um escoamento turbulento, sendo o método mais caro computacionalmente.

(NJOBUNWU & FAIRWEATHER, 2012) é o artigo de base para este trabalho, pois descreve o mesmo problema simulado aqui. Trata-se no caso de uma simulação de dinâmica dos fluidos computacional com um sistema de rastreamento de partículas com referencial lagrangiano acoplado a um modelo de erosão que foi utilizado para prever a erosão num duto de 90° de seção quadrada. (NJOBUNWU & FAIRWEATHER, Modelling of pipe bend erosion by dilute particle suspensions, 2012) é o resultado final dos artigos (NJOBUNWU & FAIRWEATHER, 2011) e (NJOBUNWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012) que utilizaram a metodologia Euleriana-Lagrangiana para a simulação de um escoamento turbulento com partículas diluídas, para isso foi usado um fechamento de momento secundário da turbulência e um sistema de rastreamento de partículas lagrangiana acoplado a um algoritmo de interação entre partícula-parede e um modelo randômico da série de Fourier para a dispersão das partículas. Esses dois artigos mencionados foram

capazes de prever a trajetória e velocidade tanto da fase contínua quanto da fase dispersa, com razoável precisão entre o primeiro e segundo momento e dados experimentais. Sendo assim, o próximo passo era a aplicação de modelos de erosão acoplados a simulação que utilizassem os resultados das trajetórias e velocidades para prever a taxa de erosão nas paredes do duto, originando (NJOBWUENWU & FAIRWEATHER, 2012).

o principal diferencial deste artigo são os modelos de erosão, a forma geral para a simulação de erosão pode ser descrita pelas equações abaixo:

$$E = Kf(\alpha)u_p^n \quad (3)$$

$$ER = \frac{E}{m_p} \quad (4)$$

$$ED = \frac{(ER \times m_p)}{(\rho_w \times A_{cell})} \quad (5)$$

Nas quais,  $E$  é a erosão dada partícula sólida dada neste caso em  $mg$ ,  $ER$  é a taxa de erosão, que significa a taxa da massa erodida do material em relação a massa da partícula, em  $mg.g^{-1}$  e  $ED$  é a profundidade da erosão em  $mm$ . Na equação (3)  $K$  representa uma constante proporcional que depende das propriedades do material base, do material abrasivo, formato do abrasivo entre outros fatores,  $f(\alpha)$  é uma função adimensional do ângulo de impacto e  $u_p^n$  é velocidade de impacto da partícula. Nas equações (4) e (5)  $m_p$  é a massa da partícula  $\rho_w$  a densidade da parede e  $A_{cell}$  a área da célula computacional onde ocorre o impacto.

Em (NJOBWUENWU & FAIRWEATHER, 2012) foram testados 5 diferentes modelos de taxa de erosão, sendo que neste trabalho será descrito em mais detalhe somente o modelo de (Grant, 1975)

(Grant, 1975) foi o modelo aplicado neste trabalho por apresentar bons resultados quando comparados com os outros, sendo este modelo semi-empírico prevê a taxa de erosão em diferentes ângulos e velocidades de impacto.  $ER$  neste caso é definido por:

$$ER = K_1 f(\alpha) u_p^2 \cos^2(\alpha) (1 - e_t^2) + f(u_{p,n}) \quad (6)$$

$$f(\alpha) = \left\{ 1 + K_4 \left[ K_2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi \alpha}{2 \alpha_0} \right) \right] \right\}^2 \quad (7)$$

$$f(u_{p,n}) = K_4 [u_p \operatorname{sen}(\alpha)]^4 \quad (8)$$

$$K_4 = \begin{cases} 1, & \alpha \leq 3\alpha_0 \\ 1, & \alpha > 3\alpha_0 \end{cases} \quad (9)$$

$$e_t = 1,0 - 2,12\alpha + 3,057\alpha^2 - 1,1\alpha^3 \quad (10)$$

No qual  $e_t$  é o coeficiente de restituição,  $\alpha$  o ângulo de impacto em radianos,  $\alpha_0$  o ângulo de máxima erosão.  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $\alpha_0$  são as constantes do modelo que dependem do material da partícula e parede, neste caso para partículas de quartzo em uma parede de aço inoxidável são:  $K_1 = 1,505101 \times 10^{-6}$ ,  $K_2 = 0,296077$ ,  $K_3 = 5,0 \times 10^{-12}$  e  $\alpha_0 = \pi/6$ .

Como comentado anteriormente a fase contínua foi modelada pela metodologia RANS com um referencial Euleriano, para a fase dispersa foi utilizado um referencial lagrangiano, para a erosão foram utilizados 5 tipos de modelos, a seguir estão as características geométricas e condições de contorno:

**Tabela 3 - condições de contorno**

Variável	Valor
D/m	0,0254
R/D	10
Comprimento de entrada	10D
Comprimento de saída	12D
<i>Re</i>	138267
Densidade da partícula kg/m <sup>3</sup>	3900
Razão massica (kg/kg)	3,3
De	30917
Diametro da partícula $\mu m$	60
Bulk gas velocities	33,09 e 52,19 $m. s^{-1}$

**Fonte: (NJOBUNWU & FAIRWEATHER, 2012)**

Como resultado final foram obtidos perfis de velocidade, trajetórias de partículas, velocidade média das partículas em diferentes secções da curva, porém um dos mais expressivos e também o resultado usado para validação deste TCC se trata na comparação entre a profundidade da erosão dos métodos simulados com dados experimentais obtidos de (Mason, 1972). A seguir esta a figura que compara as erosões simuladas e as experimentais:

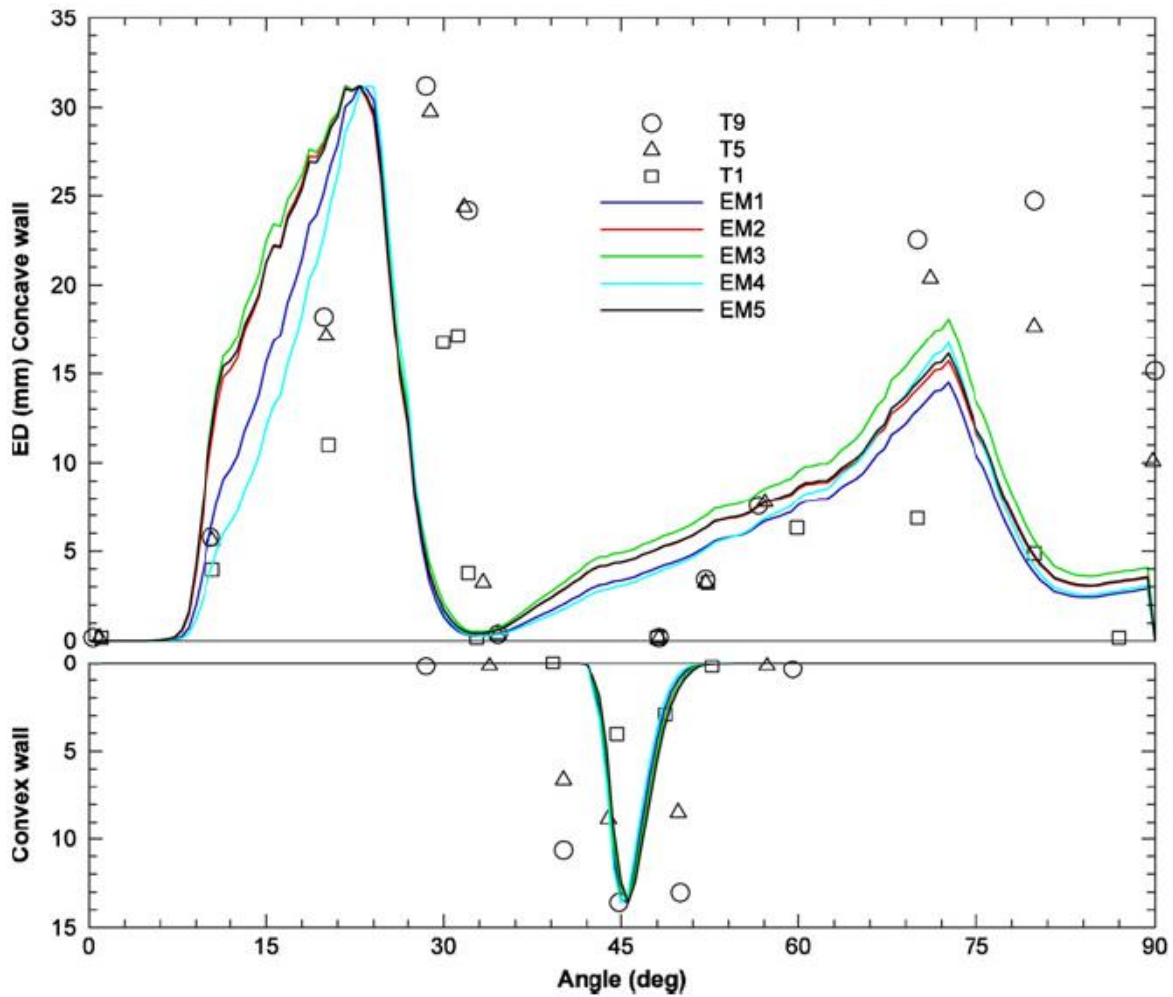


Figura 6 - comparação entre a erosão simulada e dados experimentais

Fonte: (NJOBUNWU & FAIRWEATHER, 2012)

Na figura acima, tem-se a comparação dos cinco modelos usados (EM1 – EM5) com o valor máximo da profundidade da erosão em diferentes locais da curva encontrada através de dados experimentais em (Mason, 1972). Na Figura 6 apresenta-se uma aproximação entre o simulado e os dados experimentais, em geral o modelo de erosão foi claramente capaz de prever os picos de erosão pelo duto, o que seria um dado valioso para o projeto e a manutenção de equipamentos que utilizassem este tipo de geometria, podendo até ser extrapolado para geometrias mais complexas.

Em conclusão os modelos foram capazes de prever uma precisão razoável s picos de erosão, no entanto a maior deficiência do software seria não levar em conta a influencia dessa nova superfície erodida no escoamento do fluido e por sua vez no



comportamento das partículas, essa é uma das razões pela qual os modelos subestimam a erosão, resultados em valores menores que o real. Outra fonte de erro foi a falta de um modelo empírico do coeficiente de restituição da partícula para o par abrasivo-parede. Em geral os resultados mostraram que a DFC é uma ferramenta valiosa na estimativa do tempo de vida de equipamentos sujeitos a erosão, algo extremamente comum na indústria.

O software utilizado neste trabalho é o UNCYFL3D que utiliza a metodologia Euleriana e Lagrangiana para a simulação de um escoamento turbulento multifásico dentro de um ciclone industrial, utilizado especialmente para coletar particulados, reduzindo o impacto ambiental de muitos processos industriais. Este software foi desenvolvido na Universidade Federal de Uberlândia, e uma das aplicações e validações deste software foi na tese (SALVO, 2013) que se tornou o trabalho base para este TCC, no qual foram detalhadas os esquemas numéricos utilizados para simular o escoamento bifásico.

(SALVO, 2013) aplica o DFC em duas fases diferentes, na primeira faz um estudo do escoamento monofásico em dois ciclones diferentes, o primeiro sem duto de underflow e outro com uma caixa coletora, tal simulação cobre uma faixa de  $Re = 15000$  à  $522000$ . Após esta primeira fase, une o rastreamento de partículas em função dos subpassos de tempo, partículas essas que são coletadas em uma caixa computacional após a circulação das mesmas. Nesta etapa são consideradas a influência da distribuição da malha computacional, o modelo de turbulência e do refinamento da malha.

(SALVO, 2013) foi utilizado principalmente pelas equações de rastreamento das partículas, que são detalhadas neste trabalho com base na tese de doutorado, o detalhamento destas equações podem ser encontradas na seção “5.1 – método da força pontual”. Em (SALVO, 2013) pode-se encontrar também o algoritmo utilizado para o rastreamento das partículas, cujo qual é baseado em (Haselbacher, 2007)

Como foram feitas diversas simulações, desde o escoamento monofásico até o bifásico, foi escolhido uma das últimas simulações para demonstrar os bons resultados até mesmo em casos mais complexos, que se trata de um ciclone de dimensões consideráveis no qual o número de Reynolds e suas dimensões de aproximação a uma aplicação industrial, neste caso é considerado um escoamento transiente, turbulento e multifásico. As condições de contorno são encontradas a seguir:

---

**Tabela 4 - condições de contorno para simulação.**

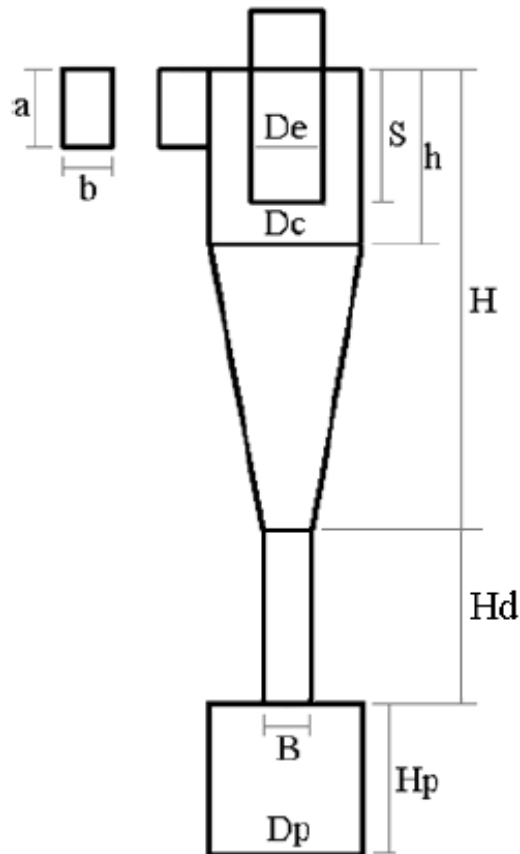

---

<b>Variável</b>	<b>Valor</b>
Diâmetro do ciclone, Dc	0,4 m
Diâmetro do duto de saída, De	0,15 m
Altura do duto de entrada, a	0,175 m
Largura do duto de entrada, b	0,088 m
Altura do ciclone, H	0,99 m
Altura do cilindro, h	0,5 m
Comprimento do duto, Hd	0,5 m
Comprimento do duto finder, S	0,18 m
Diâmetro do duto de underflow, B	0,18 m
Comprimento do Hopper, Hp	0,294 m
Diâmetro do Hopper, Dp	0,296 m
Velocidade de entrada, Ve	12,7 m/s
Re	336000
Número de partículas	50000
Densidade do fluido, ar	1,2047 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade do fluido, ar	1,820x10 <sup>-5</sup> kg/m.s

---

**Fonte: (SALVO, 2013)**

Para exemplificar melhor o problema, a explicita as principais dimensões comentadas na tabela acima:



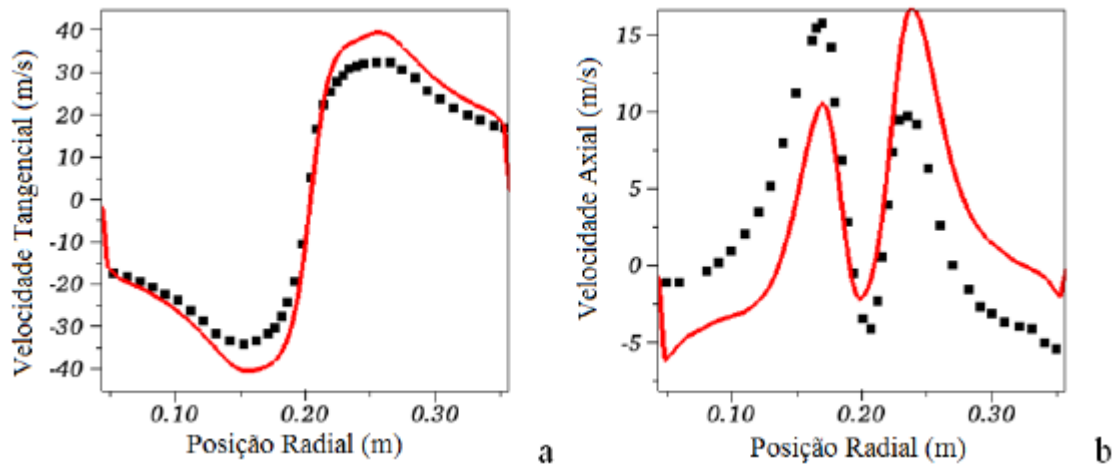
**Figura 7- Dimensões do ciclone**

Fonte: (SALVO, 2013)

Para esta simulação foi utilizado o modelo de turbulência SST, com um esquema de interpolação centrado de 2ª ordem para a intorpolação do termo advectivo, com um passo de tempo  $1,0 \times 10^{-5} s$  e um critério de convergência de  $1,0 \times 10^{-4}$ . Como a fração volumétrica das partículas é baixa pode-se utilizar um acoplamento de uma via, no qual as partículas não possuem inércia suficiente para influenciar no escoamento.

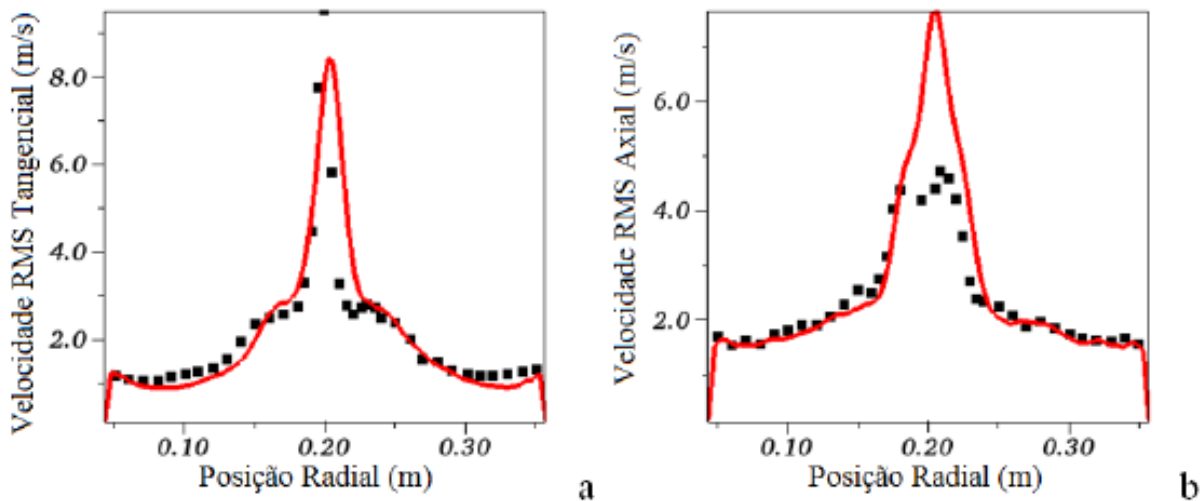
Como resultado da simualção foram obitidos perfis de velocidade tangencial e axial média, RMS tangencial e axial, assim como a eficiência na coleta das

partículas, todos esses resultados foram comparados com dados experimentais de (Obermair & Staudinger, 2001). Podendo-se notar uma boa concordância entre o simulado e o experimental, como pode ser visto em alguns exemplos a seguir:



**Figura 8 - perfis de comparação de velocidade tangencial média (a), e axial média (b), obtidos na posição  $y=0,3$ , as linhas pontilhadas representam dados experimentais**

Fonte: (SALVO, 2013)



**Figura 9 - - perfis de comparação de velocidade RMS tangencial (a), e RMS axial (b), obtidos na posição  $y=0,3$ , as linhas pontilhadas representam dados experimentais.**

Fonte: (SALVO, 2013)

Outro resultado bastante importante é a eficiência da coleta, dado esse que comprovaria qualquer modificação para aumentar a eficiência do ciclone e até mesmo como bench marketing para com outros ciclones, sendo assim se torna

primordial que este comportamento esteja de acordo com dados experimentais, para que resultados futuros sejam confiáveis.

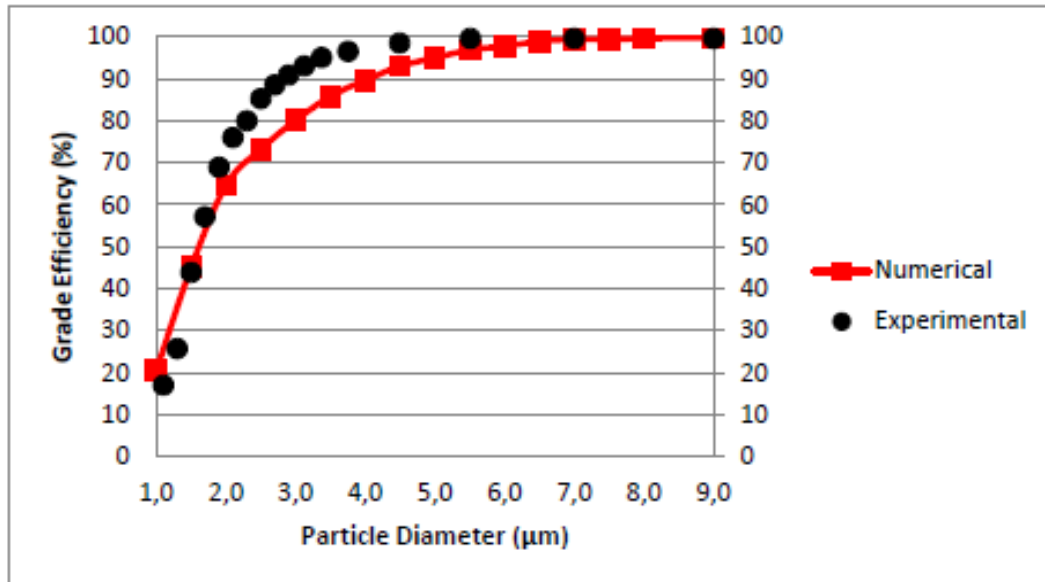


Figura 10 - comparação da eficiência de coleta obtida numericamente com os dados experimentais de (Obermair & Staudinger, 2001)

Fonte: (SALVO, 2013)

Com pode ser constatado, os resultados foram fiéis ao experimental, mesmo se tratando de um problema extremamente complexo como este, inclusive a eficiência da coleta das partículas, sendo um dado importante de comparação e validação se mostrou preciso. Como continuação do trabalho o autor utilizou o software UNCYFL3D para verificar diferentes perfis de dutos de entrada e saída e como estes influenciavam na eficiência da coleta. Para futuros trabalho (SALVO, 2013) propõem um estudo da erosão causada pelas partículas e a influência destas na vida útil do sistema, tema que serviu de inspiração para este TCC. Esta tese comprava o uso cada ve mais correte e de baixo custo, que são as simulações, capazes de reproduzir fenômenos dos mais simples aos mais complexos.

## 2 MÉTODOLOGIA

### 2.1 MODELAMENTO MATEMÁTICO

O começo para qualquer método numérico é a definição do modelo matemático, que descreverá o problema de forma representativa, podendo ser versões simplificadas das leis de conservação. Cada modelo deve se adaptar a aplicação desejada, como por exemplo, se tratando de um fluido incompressível, não-viscoso, laminar, permanente, pode-se simplificar a equação de Navier-Stokes para se comportar como o problema desejado. Porém neste trabalho deve-se achar um modelo que consiga descrever um problema de um escoamento turbulento, incompressível, transiente, não-viscoso, tridimensional, e para isso foi escolhido trabalhar com as equações médias de Navier-stokes e Reynolds.

### 2.2 MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO

Após determinado o modelo matemático, deverá ser selecionado um método de discretização, que será o método de aproximação das equações diferenciais em um sistema algébrico de equações. Os métodos mais importantes de discretização são: método de diferenças finitas (DF), o de volumes finitos (VF) e o método dos elementos finitos (MEF), sendo este não muito comum para simulação de escoamentos, sendo assim não será abordado neste trabalho. (FERZIGER, 2002)

### 2.3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Sendo o método mais antigo para soluções de EDP (equações diferenciais parciais), é o mais simples e fácil para geometrias mais simples, (FERZIGER, 2002).

O ponto de partida do método de diferenças finitas é a equação da conservação na sua forma diferencial mostrada a seguir:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (11)$$

Na equação de conservação neste caso foi assumindo que  $\phi$  é a única incógnita e que as outras variáveis são determinadas por meio das interações anteriores. A forma escalar genérica da equação diferencial se torna o ponto de partida, no qual será aproximada por um sistema de equações lineares e a solução do sistema fornecerá a solução das equações parciais diferenciais. Existem diferentes métodos de aproximação das equações diferenciais de várias ordens, como por exemplo a expansão da série de Taylor para aproximação das EDP de primeira e segunda ordem.

Sendo mais indicado para malhas estruturadas por ser simples e eficiente, sendo que a desvantagem é a restrição a geometrias mais simples no qual a malha estruturada é mais indicada, outra desvantagem é a que a conservação não reforçada senão tomados certos cuidados, podem fazer com a solução diverja.

### 2.3.1 Método dos volumes finitos

Ao contrario do MDF, o MVF usa a forma integrativa da equação da conservação como ponto de partida, no qual o domínio físico é dividido em pequeno volumes de controle, e a equação da conservação é aplicado em cada VC, sendo um método conservativo por construção. Expressando as variáveis nas superfícies de controle através de interpolação. Sendo que a principal desvantagem do MDF é complexidade no desenvolvimento de métodos de ordem mais alta pois é necessário três níveis de aproximação: interpolação, integração e diferenciação.

A vantagem deste método é que pode acomodar todo tipo de malha, sendo ideal para geometrias complexas, que utilizam geralmente malhas não estruturadas, que é o caso estudado neste trabalho, apesar de não ser uma geometria de alto nível de complexidade, uma malha não estruturada é utilizada.

Como este será o método utilizado neste trabalho, a seguir será detalhado como foi feita a aplicação do método de volumes finitos na equação de transporte de uma variável genérica. A demonstração é baseada em (SALVO, 2013) que usa como referência (FERZIGER, 2002)

A equação diferencial de transporte de uma variável pode ser descrita abaixo como:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (12)$$

Na qual  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\phi$  é a variável a ser transportada e  $\Gamma$  é o coeficiente de difusão.

O primeiro termo da esquerda para direita é o acúmulo de variável ao longo do tempo no volume de controle determinado.

O segundo termo, descreve o fluxo convectivo (ou advectivo), considerando o transporte de uma variável devido a um campo de velocidade.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)$  representa o fluxo difusivo, o qual considera o transporte da variável devido a seus gradientes.

$S_\phi$  representa a inserção de um termo fonte. Sendo esse qualquer termo extra que não possa ser inserido no termo advectivo ou difusivo.

Integrando a equação de transporte (12) sobre um volume de controle, obtém-se a forma genérica de conservação na forma integral, sendo o ponto de partida do MVF (FERZIGER, 2002)

$$\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV + \int_V S_\phi dV \quad (13)$$

$V$  representa o volume de controle, para facilitar a solução da equação acima, é aplicado o teorema de Gauss em dois termos, transformando as integrais de volume em integrais de superfície, simplificando a solução.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi) dV = \oint_A \phi_{I_i} d\vec{A} \quad (14)$$



substituindo (14) na (13), obtem-se:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \oint_A (\rho u_j \phi) d\vec{A} = \oint_A \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) d\vec{A} + \int_V S_\phi dV \quad (15)$$

Os termos convectivos e difusivo da equação (15) são integrais de superfície, sendo que devem ser resolvidas, juntamente com as integrais de volume que expressão o termo fonte e de acumulo. Para o calculo das integrais de superficial seria necessário o valor do integrando em cada superfície de controle, no entanto somente o valor do integrando no centro do volume do controle é conhecido, sendo assim são feitas duas aproximações: a primeira é a aproximação da integral em termos da variável no centro da face da célula, ou seja considerar que o ponto da central da superfície de controle representa as propriedades da variável em toda sua superfície, e a segunda aproximação é aproximar com o valor da variável no centro da face pelo valor no centro do volume de controle.

A aproximação mais simples para o calculo das integrais de superfície é a aplicação da regra do ponto médio, que é a fórmula de Newton-Cortes aberta, no qual aproxima o valor da integral por retângulos. Já para o aproximação de segunda ordem para as integrais de volume, o método mais simples é a substituição da integral pelo produto do valor médio do integrando pelo volume do volume de controle.

Utilizando esses conceitos é possível reescrever a equação (15), discretizada para um volume de controle genérico "L" é:

$$\left( \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \right)_L \Delta V_L + \sum_f J_f \phi_f = \sum_f \Gamma_f (grad\phi)_f + (S_\phi \Delta V)_L \quad (16)$$

No qual  $J_f$  é a vazão massica  $J_f = \rho_f \vec{V}_f \cdot \vec{A}_f$ ,  $\Gamma_f$  é o coeficiente de difusão na face. Cada termo da equação (16) deve ser aproximado para que possa ser calculado, a seguir esta uma breve explicação de como cada termo foi tratado no código computacioanl baseado em (SALVO, 2013) e (FERZIGER, 2002).

### 2.3.2 Aproximação do termo de acumulo

O termo de acúmulo descreve a parte transiente do escoamento (o escoamento depende do tempo), a diferença entre coordenadas espaciais e temporais é o modo de propagação dessa variável, na qual em regime transiente uma força em um dado instante só irá influenciar o escoamento no futuro. Reescrevendo a equação (16), pode-se notar a semelhança com problemas de valor inicial para a solução de equações diferenciais ordinárias.

$$\left(\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right)_L = \frac{(-\sum_f J_f \phi_f + \sum_f \Gamma_f (\text{grad}\phi)_f + (S_\phi \Delta V)_L)}{\Delta V_L} = f(t, \phi(t)) \quad (17)$$

Na equação (17) o termo de acúmulo está escrito como uma função  $f(t, \phi(t))$  que é uma soma dos termos convectivo, difusivo e termos fonte.

Na análise numérica para a obtenção de soluções aproximadas dependentes do tempo de EDO (equações diferenciais ordinárias) podem ser utilizados métodos explícito e implícitos, que serão explicados a seguir, no qual o método implícito será mais detalhado pois é o método utilizado neste trabalho.

### 2.3.2.1 Método explícito

Métodos explícitos calculam somente os termos no qual a variável já é conhecida, ou seja métodos explícitos calculam o estado do sistema em um tempo anterior ao estado atual do sistema, matematicamente falando:

$$Y(t + \Delta t) = f(Y(t)) \quad (18)$$

Onde  $Y(t)$  é o estado atual do sistema e  $Y(t+\Delta t)$  é seu estado posterior. Este método é mais simples que o implícito visto que não necessita prever as variáveis futuras e depois corrigi-las, porém necessita de um passo de tempo bastante pequeno para manter a estabilidade da simulação e os erros dentro da tolerância, neste caso é mais aconselhável o método implícito.

### 2.3.2.2 Método implícito de euler

Como comentado anteriormente este método possui a vantagem de poder utilizar passos de tempo maiores, isto ocorre pois geralmente estão associados a diversos critérios de estabilidade, porém exigem um maior poder de processamento.

Matematicamente falando:

$$G(Y(t), Y(t + \Delta t)) = 0 \quad (19)$$

Onde deve ser encontrado  $Y(t+\Delta t)$ , ou seja os valores dos termos presentes deverão ser avaliados para o um novo tempo, no qual a solução ainda não é conhecida, portanto um sistema deve ser resolvido. A derivada temporal discretizada pelo método implícito de Euler pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}\right)_L = \frac{(\rho_L \phi_L)^{n+1} - (\rho_L \phi_L)^n}{\Delta t} \quad (20)$$

No qual  $\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}\right)_L$  é a variação do termo de acumulo é uma função do estado futuro descrita por  $n+1$  menos o estado presente, descrito por  $n$ .

O código UNSCYFL3D utiliza-se somente o métodos implícitos de resolução.

### 2.3.3 Aproximação do termo advectivo

Considerando que o fluxo mássico seja conhecido através da face, é preciso determinar o valor da variável  $\rho$  no centro da face da célula, neste caso é utilizado interpolação. No UNSCLF3D possui três tipos diferentes de interpolação: UPWIND de 1ª ordem, UPWIND de segunda ordem e CDS de segunda ordem.

### 2.3.3.1 UPWIND de 1ª ordem

Sendo o mais simples dos métodos de discretização, e incondicionalmente estável (FERZIGER, 2002) ainda sim se trata de uma aproximação de primeira ordem, o qual necessita de malhas muito finas para que a variação do valor seja o mais próximo de um função linear e o erro seja reduzido, sendo assim não é o utilizado neste trabalho, pois não foi possível a confecção de malhas muito finas devido ao alto poder de processamento requerido para a simulação.

O método UPWIND de 1ª ordem, apresenta as seguintes funções de interpolação:

$$\phi_f = \phi_L \text{ caso } J_f > 0 \quad (21)$$

$$\phi_f = \phi_R \text{ caso } J_f < 0 \quad (22)$$

Para o melhor entendimento das equações 21 e 22, representam o esquema UPWIND de primeira ordem, aplicado a equação uni-dimensional linear de advecção mostrada a seguir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

Onde  $\psi$  é o campo escalar sendo sofrendo a advecção de  $u$  e  $i$  é a componente da coordenada  $x$  do vetor  $u$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \text{ para } \psi > 0 \quad (24)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \text{ para } \psi < 0 \quad (25)$$

### 2.3.3.2 UPWIND de segunda ordem

Como o próprio nome já descreve, este método utiliza uma aproximação de segunda ordem, o que reduz o erro comparado ao método de segunda ordem e também garante um resultado mais preciso com o refinamento da malha segundo (SALVO, 2013). O esquema pode ser descrito como:

$$\phi_f = \phi_L + (\text{grad}\phi)_{rL} \cdot \overrightarrow{dR_L} \quad \text{caso } J_f > 0 \quad (26)$$

$$\phi_f = \phi_R + (\text{grad}\phi)_{rR} \cdot \overrightarrow{dR_R} \quad \text{caso } J_f < 0 \quad (27)$$

No qual o vetor  $\overrightarrow{dR_L}$  é direcionado do centro do elemento “L” até o centro da face “f”, e o  $\overrightarrow{dR_R}$  análogo ao  $\overrightarrow{dR_L}$  mudando a direção que se dá do elemento “r” até o centro da face.  $(\text{grad}\phi)_{rL}$  é o gradiente reconstituído na célula L e o  $(\text{grad}\phi)_{rR}$  é o da célula R. Sendo que o gradiente reconstituído pode ser obtido como auxílio do teorema da divergência de Gauss, transformando integrais de volume em integrais de superfície, no qual o valor da derivada no centro do volume de controle é aproximado pela média do valor da célula.

$$(\text{grad}\phi)_r = \frac{1}{\Delta V} \left( \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV \right) \rightarrow (\text{grad}\phi)_r = \frac{1}{\Delta V} \sum_f (\overline{\phi}_f \cdot \overrightarrow{A}_f) \quad (28)$$

No qual  $\overline{\phi}_f$  é o valor médio da variável no centro da face, como se segue:

$$\overline{\phi}_f = \frac{\phi_L + \phi_R}{2} \quad (29)$$

O primeiro termo do lado direito das equações 28 e 29 é sempre tratado de forma implícita, e o segundo termo do lado direito é calculado explicitamente, por se tratar de um termo fonte.

### 2.3.4 Aproximação do termo difuso

fluxo difusivo através da face “f” e os volumes de controle L e R pode ser descrito pela equação:

$$\Gamma_f(\text{grad}\phi)_f \cdot \vec{A}_f = \Gamma_f \frac{\phi_R - \phi_L}{|ds|} \cdot \frac{\vec{A}_f \cdot \vec{A}_f}{\vec{A}_f \cdot \vec{e}_s} + \Gamma_f \left[ \overline{\text{grad}\phi} \cdot \vec{A}_f - \overline{\text{grad}\phi} \cdot \vec{e}_s \cdot \frac{\vec{A}_f \cdot \vec{A}_f}{\vec{A}_f \cdot \vec{e}_s} \right] \quad (30)$$

O  $\vec{e}_s$  é o vetor unitário que une os centroides, sendo expressado por:

$$\vec{e}_s = \frac{\vec{ds}}{|ds|} \quad (31)$$

Na equação (30) o primeiro termo do lado direito é tratado implicitamente, já o segundo termo representado a difusa secundária é calculado na forma explícita. Note que para casos no qual a malha seja composta por elementos hexaédricos ortogonais, como o presente trabalho, o primeiro termo do lado direito se torna equivalente a aplicação do esquema de diferenças centradas em malha cartesiana uniforme, pois o termo referente a difusão secundária se anula. Isto ocorre pois neste tipo de malha os vetores  $|\vec{A}_f|$  e  $\vec{e}_s$  se tornam colineares, e a equação (32) passa a ser válida.

$$\frac{\vec{A}_f \cdot \vec{A}_f}{\vec{A}_f \cdot \vec{e}_s} = \frac{|\vec{A}_f|^2}{|\vec{A}_f|} = |\vec{A}_f| \text{ e, sendo assim } |\vec{A}_f| \cdot \vec{e}_s = \vec{A}_f \quad (32)$$

E o segundo termo do lado direito, no caso de malhas hexaedricas ortogonais se torna:

$$\overline{\text{grad}\phi} \cdot \vec{A}_f - \overline{\text{grad}\phi} \cdot \vec{A}_f = 0 \quad (33)$$

Reescrevendo a equação (33)

$$\Gamma_f(\text{grad}\phi)_f \cdot \vec{A}_f = \Gamma_f |\vec{A}_f| \frac{\phi_R - \phi_L}{|ds|} \quad (34)$$

### 2.3.5 Aproximação do termo fonte

Pode ser utilizada regra do ponto médio para a aproximação de uma integral de volume, no o produto do integrando no centro do volume de controle e o volume do VC.

$$\int_V S_\phi dV = (S_\phi \Delta V)_L \quad (35)$$

O termo fonte  $S_\phi$  contém todas fontes volumetricas de  $\phi$ , termos explícitos da discretização do termo transiente, contribuições de 2ª ordem do fluxo advectivo e difusivo secundário (Souza, 2011).

No código UNSCYFL3D os termos da pressão nas equações de quantidade de movimento são consideradas como forças conservativas na superfície do volume de controle, mas podem ser tratadas também como forças de corpo não conservativa. No caso do presente trabalho o termo da pressão fica:

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x_j} dV = \oint_A P_i d\vec{A} = \sum_f (\vec{A}_f \cdot \overline{P_{i_f}}) \quad (36)$$

Na qual o teorema de Gauss é utilizado para converter a integral de volume do gradiente de pressão em uma integral de superfície, com as pressão aplicadas sobre as faces do volume.

Para melhor entendimento a equação (37) exemplifica o termo fonte relativo à componente u do vetor velocidade.

$$S_{u_p} = \frac{\rho_p}{\Delta t} u^n_p + \sum_{nb} \mu_f \left[ \overline{grad(u)} \cdot \vec{A}_f - \overline{grad(u)} \cdot \vec{e}_s \cdot \frac{\vec{A}_f \cdot \vec{A}_f}{\vec{A}_f \cdot \vec{e}_s} \right] + \sum_{nb} \mu_f \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right)_f \cdot \vec{A}_f - \sum_f \vec{A}_f \cdot P_{i_f} \quad (37)$$

Sendo que n é o instante anterior ao tempo atual, e o sobrescrito n+1 foi omitido para simplificar a equação.

### 2.3.6 Malha numérica

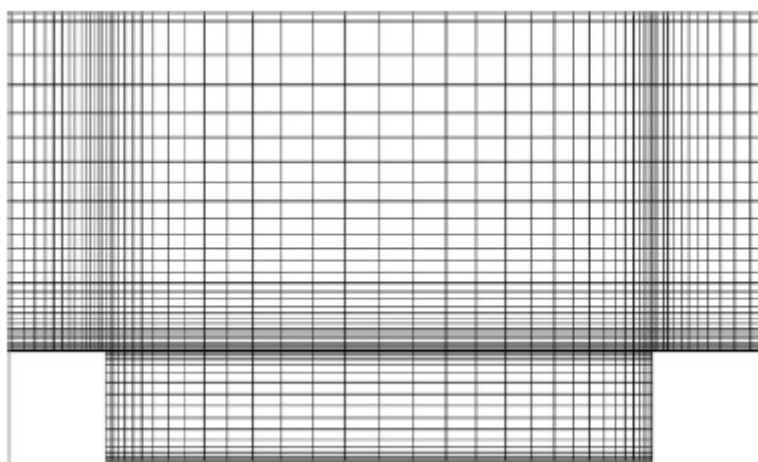
A malha numérica tem um papel primordial na precisão de uma simulação DFC. (Hirsh, 2007). Existem vários métodos para a geração de malhas, sendo um processo extremamente complexo, pois tem que se basear em teorias algébricas, estimativas de retas e curvaturas, transformação de coordenadas e etc, por isso os softwares DFC se concentram numa geração de malhas mais dinâmicas que possam se adaptar em geometrias mais complexas. Pode-se dividir as malhas numéricas em dois tipos: estruturadas e não estruturadas.

#### 2.3.6.1 Malhas Estruturadas

É composto por famílias de linhas interseccionadas, uma para cada dimensão, por exemplo, três famílias de linhas para 3D, no qual cada ponto da malha é localizado em uma intersecção de apenas uma linha de cada família. Sendo um método mais eficiente para DFC em termos de processamento requerido e precisão se comparado com o as malhas não estruturadas (Hirsh, 2007).

A desvantagem desse método é sua rigidez em relação a geometrias complexas, já para se adicionar um novo ponto na malha são necessárias linhas adicionais para tal ponto, afetando todo o domínio e aumentando a memoria requerida.





**Figura 11 - malha cartesiana de células não uniformes**

**Fonte: (Hirsh, 2007)**

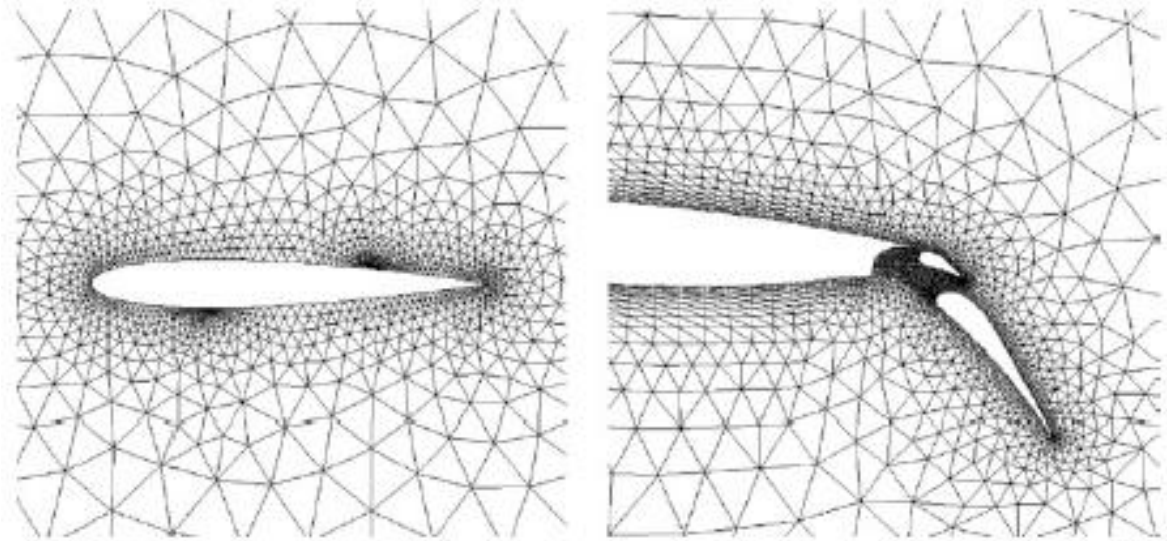
Na figura acima esta a representação de uma malha estruturada não uniforme, devido ao refinamento da malha na intersecção, note que para refinar uma região da peça regiões que não haviam necessidade de refinamento, tiveram de ser para acompanhar a família de linhas.

#### 2.3.6.2 Malhas não estruturadas

Ao contrario das malhas estruturadas, os pontos são distribuídos de forma arbitrária, e não tem a obrigatoriedade de haver somente uma família de linhas passando pelo ponto, podendo a intersecção de triângulos, quadriláteros em 2D e tetraedros, prismas, hexaedros em 3D.

Este tipo de malha vem se tornando um método cada vez mais usual na área de DFC (Hirsh, 2007). No entanto vale lembrar que para geometrias mais simples e nas que não necessitam de tanto refinamento o uso da malha estruturada é o mais aconselhável, pela sua precisão e rápido processamento se comparado com as não estruturadas.

Como comentado anteriormente nas malhas estruturadas o refinamento em certas áreas pode afetar a geometria malha como um todo, criando refinamentos onde não são necessários, uma das vantagens das malhas não estruturadas é justamente esse, realizar refinamentos locais sem afetar a malha toda, como mostra a figura 12.



**Figura 12 - exemplo de uma malha não estruturada triangular**

Fonte: (Hirsh, 2007)

Neste trabalho foi utilizado uma malha hexaédrica não estruturada e não uniforme ao longo de um duto de seção retangular, foram utilizados refinamentos locais nas regiões de entra e saída da curva, assim como na parede de simetria do duto.

### 2.3.7 Acomplamento entre as fases

Com a adição de um número considerável de partículas em um escoamento monofásico, podem ser adotados quatro regimes para este novo escoamento, no qual o regime descreve a forma como o escoamento (fase continua) percebe a presença das partículas (fase dispersa) e a fase dispersa influencia na turbulência da fase continua (S, 1991)

(S, 1991) criou um mapa para relacionar as características da fase dispersa com as características da fase continua, no qual foi o usado a classificação de quatro regimes (uma via, duas vias, três vias e quatro vias).

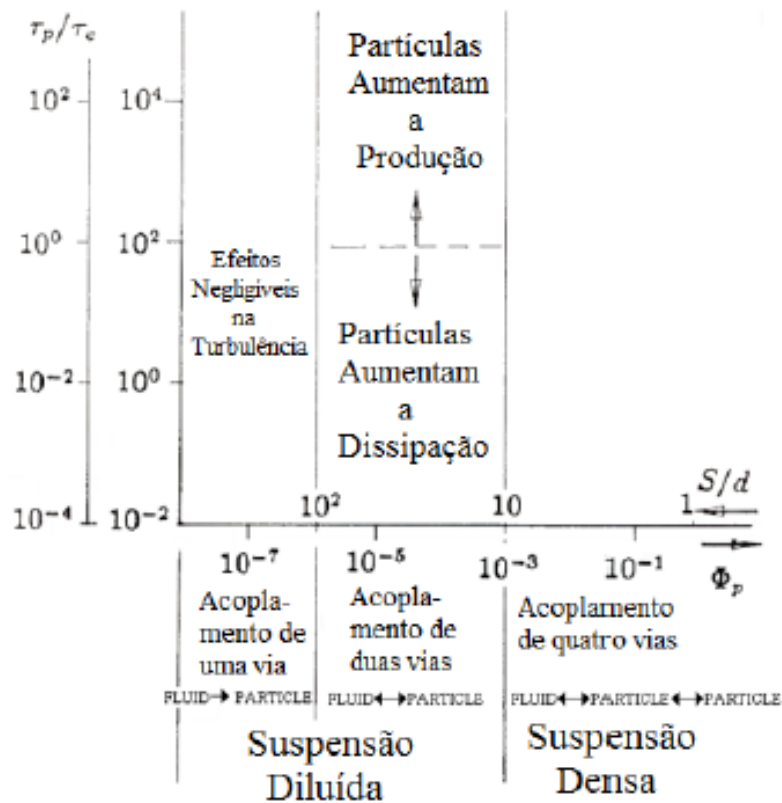


Figura 13 - Diagrama exibindo os regimes de escoamento

Fonte: (S, 1991)

No qual  $\Phi_p$  é a fração volumétrica da fase dispersa;  $N_p$  é o número de partículas,  $V_p$  volume ocupado pelas partículas;  $S$  é a distancia entre o centro de duas partículas vizinhas;  $d_p$  o diametro da partícula,  $\tau_p$  o tempo de resposta da partícula na escala de tempo de Kolmogorov ( $\tau_k$ ) e  $\tau_e$  é o tempo de giro das grandes escalas.

No caso do presente trabalho a fração volumétrica da fase dispersa  $\Phi_p$  é muito baixa, com um valor de  $10^{-6}$  que caracteriza um acoplamento de uma via, no qual a fase dispersa não apresenta efeitos consideráveis na turbulência

### 3 DISCRETIZAÇÃO DA FASE CONTÍNUA

Foi utilizado um referencial Euleriano para a solução das equações diferenciais parciais, descrevendo a conservação de massa e quantidade de movimento de um escoamento tridimensional, turbulento, transiente, incompressível, isotérmico através de um duto curvo. As equações da conservação da massa e quantidade de movimento respectivamente estão expressas abaixo, na forma de média temporal:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - u'_i u'_j \right] \quad (39)$$

Valores médios são denotados por uma barra e as variáveis flutuantes com uma aspa, a forma instantânea do transporte foi dividida em valores médios e valores flutuantes descritos acima. O termo de estresse de Reynolds  $u'_i u'_j$  na equação (39) é desconhecido e deve ser determinado. Neste trabalho optou-se pela utilização do modelo RSM (*Reynolds Stress Model*), de Jones e Musong, neste modelo as componentes do tensor de Reynolds são determinadas diretamente pela solução das equações diferenciais de transporte, especificadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j) = & - \left( u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} + u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) \\ & + C_s \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \frac{k}{\varepsilon} u'_i u'_m \frac{\partial}{\partial x_m} (u'_i u'_j) \right] + A_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \end{aligned} \quad (40)$$

No qual  $k$  é a energia cinética turbulenta e  $\varepsilon$  é a taxa de dissipação. O termo de redistribuição flutuante de pressão " $A_{ij}$ " é modelado como:

$$\begin{aligned} A_{ij} = & -C_1 \frac{k}{\varepsilon} \left( u'_i u'_j - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) + C_2 \delta_{ij} \varepsilon u'_i u'_m \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \\ & + C_3 \left( u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} + u'_i u'_l \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) + C_4 k \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + C_5 u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} - \\ & \left( \frac{3}{2} C_2 + C_3 \right) \left( u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_i} + u'_i u'_l \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) - \left( \frac{3}{2} C_4 + C_3 \right) k \delta_{ij} \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (41)$$

A equação (41) modela  $A_{ij}$  como uma função linear do tensor de estresse de Reynolds, assumindo que o retorno e a contribuição da corrente mais rápida para o gradiente de pressão-velocidade, normalmente modelados separadamente, são diretamente influenciados pela corrente principal (mais rápida). As constantes do modelo, de acordo com (NJOBWENWU & FAIRWEATHER, 2012), podem ser escritas como:  $C_s = 0,22$ ,  $C_1 = 3,0$ ,  $C_2 = -0,44$ ,  $C_3 = -0,46$ ,  $C_4 = -0,23$  e  $C_5 = 0,3$ .

## 4 DISCRETIZAÇÃO DA FASE DISPERSA

Como foi mencionado na introdução, será utilizado o método Euleriano para o referencial da fase contínua (fluida) e o método Lagrangiano para fase dispersa (partículas). A utilização do método Lagrangiano é comum para o rastreamento das partículas, pois rastreia a posição das partículas individualmente no passo do tempo, enquanto no método Euleriano as propriedades são calculadas como uma média em um volume computacional. (SALVO, 2013).

De acordo com (SALVO, 2013) pode-se utilizar basicamente duas classificações para a fase dispersa, a primeira em relação ao referencial, neste caso sendo utilizado o método Lagrangiano. A segunda classificação é quanto ao tratamento das forças de superfície na partícula, podendo ser classificadas em: força pontual ou superfície resolvida.

### 4.1 MÉTODO DA FORÇA PONTUAL

Para o presente trabalho será utilizado o método de força pontual, no qual cada partícula é tratada individualmente, onde as trajetórias individuais de cada partícula são calculadas em um sentido Lagrangiano com equações diferenciais ordinárias baseadas no local da partícula que se movimentando. Necessitando de menos recursos computacionais quando comparado ao método de superfície resolvida, isso porque o método de superfície requer que o escoamento ao redor da partícula deve ser resolvido em alta resolução o que torna o método extremamente

custoso para um número alto partícula, como neste caso, que é de 500000. A equação (42) é a equação de movimento da partícula, sendo  $u_p$  a velocidade no centroide da partícula  $X_p$  e  $m_p$  é a massa da partícula.

$$m_p \times \left( \frac{du_p}{dt} \right) = F_{corpo} + F_{superficie} + F_{colisão} \quad (42)$$

A equação acima nada mais é que a segunda lei de Newton, no qual a variação da quantidade de movimento da partícula é o somatório das forças aplicadas a mesma. O lado esquerdo representa a massa da partícula multiplicada sua aceleração ao longo do tempo. A  $F_{corpo}$  representa as forças proporcionais à massa da partícula, como por exemplo, a força gravitacional. A  $F_{superficie}$  representa as forças dinâmicas de superfície do fluido na partícula. A  $F_{colisão}$  representa a força devido à colisões partícula-partícula ou partícula-parede. No caso do método de força pontual a  $F_{superficie}$  é uma força média na superfície da partícula sendo esta uma combinação linear de forças específicas, como por exemplo, arrasto, sustentação, gradiente de tensão, etc. Como exemplificado na equação abaixo.

$$F_{super} = \sum_{k=1}^K F_{super,k} = F_D + L + A + S + H + \dots \quad (43)$$

Para a abordagem de força pontual com referencial lagrangiano a equação (42) pode ser desmembrada em:

$$F_{corpo} = F_{gravidade} + F_{empuxo} + F_{eletromagnéticas} \quad (44)$$

Força de corpo são aquelas que são proporcionais a massa da partícula, neste caso  $F_{gravidade}$  representa a força em consequência da aceleração gravitacional,  $F_{empuxo}$  é a força resultante da diferença de massa específica entre o fluido e a partícula e  $F_{eletromagnéticas}$  como o nome já descreve, são as forças elétricas ou magnéticas que neste caso será desconsiderada para simplificar a equação.

$$F_{superficie} = F_{arrasto} + F_{sustentação} + F_{história} + F_{tensão} + F_{Browniano} + F_{termofísica} \quad (45)$$

Forças de superfície são proporcionais a área da partícula, exemplificada na equação acima.  $F_{arrastro}$  se opõe ao movimento da partícula em meio fluido,  $F_{sustentação}$  originada pela rotação da partícula e o cisalhamento do fluido;  $F_{história}$  considera tensões transientes sobre a partícula;  $F_{tensão}$  devido a tensões dinâmicas no fluido na ausência do fluido;  $F_{Browniano}$  ocorre devido ao movimento aleatório de interações moleculares discretas e por último a  $F_{termofísica}$  como consequência das interações moleculares devido ao gradiente de temperatura. Para o presente trabalho somente a  $F_{arrastro}$  foi considerada no cálculo das forças de superfície, pelo fato que as demais forças se tornam desprezíveis quando comparadas a  $F_{arrastro}$ .

As  $F_{colisão}$  também foram desconsideradas, pois uma colisão perfeitamente elástica entre parede-partícula não entraria na equação diferencial mostrada a seguir e também foram desconsideradas as colisões partícula-partícula.

$$m_p \frac{du_p}{dt} = F_{arrastro} + [F_{gravidade} + F_{empuxo}] \quad (46)$$

A equação (46) foi simplificada, sendo reescrita como a equação acima.

Para entender melhor a dedução da equação de movimento da partícula e por consequência como foi calculada a trajetória da mesma, será apresentada a metodologia para o cálculo da força de arrasto. Neste caso a equação (47) conhecida como equação de Stokes mostra o equilíbrio entre o gradiente de pressão e as tensões viscosas na ausência de forças inerciais, que foram desconsideradas devido ao baixo número de Reynolds admitido pela teoria de Stokes ( $Re_p \ll 1$ )

$$\nabla P = \mu_f \nabla^2 v \quad (47)$$

para números de Reynolds baixos a equação (47) possibilitou o cálculo do arrasto para o uma partícula completamente submersa de diâmetro  $d_p$  com uma velocidade da corrente livre  $U$ .

$$F_{DStokes} = 3\pi\mu U d_p \quad (48)$$

Para  $Re_p \ll 1$  a equação (49) representa passa a ser valida, no entanto também apresenta bons resultados para escoamentos  $Re_p$  proximos a 1.

$$F_{D_{Stokes}} = 3\pi\mu d_p(U - u_p) \quad (49)$$

Sendo que o coeficiente de arrasto pode ser descrito como uma função da força de arrasto  $F_D$ .

$$C_D = \frac{F_D}{A_{proj} \left( \frac{1}{2} \rho_f (U - u_p)^2 \right)} \quad (50)$$

Podendo ser reescrita com base na equação (49), que relaciona o coeficiente de viscosidade  $\mu$ , a massa especifica do fluido  $\rho_f$ , o diâmetro da partícula  $d_p$  e a velocidade relativa entre a corrente livre do fluido  $U$  e a velocidade da partícula  $u_p$ .

$$C_D = \frac{3\pi\mu d_p(U - u_p)}{\frac{1}{8}\pi\rho_f d_p^2 (U - u_p)^2} = \frac{24\mu}{\rho_f d_p (U - u_p)} \quad (51)$$

Considerando  $Re_p$  como o número de Reynolds da partícula, sendo a razão adimensional das forças inerciais do fluido pelas forças viscosas do fluido ao redor da partícula:

$$Re_p = \frac{\rho_f d_p (U - u_p)}{\mu} \quad (52)$$

Substituindo a equação (52) na (51) tem-se um  $C_D$  para a partícula, porém aplicado a casos muito restritos, com  $Re_p$  baixos, necessitando de um fator de correção apresentado na equação (53).

$$C_D = \frac{24}{Re_p}, \text{ para } Re_p \rightarrow 0 \quad (53)$$



$$f = \frac{F_D}{a\pi\mu d_p(U-u_p)} \quad (54)$$

Rescrevendo a força de arrasto com seu fator de correção, encontra-se:

$$F_D = 3\pi\mu d_p(U - u_p)f \quad (55)$$

Sendo reescrito como uma função do coeficiente de arrasto e o fator de correção.

$$F_D = \frac{1}{8}\pi\rho_f\mu d_p^2(U - u_p)^2 f C_D \quad (56)$$

No qual para o presente caso, que somente os efeitos de Reynolds influenciam neste caso, o fator de correção foi reescrito como:

$$f = f_{Re} \equiv \frac{F_D}{F_D(Re_p \rightarrow 0)} = \frac{\frac{1}{8}\pi\rho_f\mu d_p^2(U-u_p)^2 C_D}{\frac{1}{8}\pi\rho_f\mu d_p^2(U-u_p)^2 C_D(Re_p \rightarrow 0)} \quad (57)$$

Utilizando o  $C_D$  e  $Re_p$ , a equação (57) fica sendo:

$$f_{Re} \equiv \frac{F_D}{F_D(Re_p \rightarrow 0)} = \frac{C_D}{\frac{24}{Re_p}} = \frac{Re_p C_D}{24} \quad (58)$$

Substituindo em (56), a  $F_D$  é:

$$F_D = 3\pi\mu d_p(U - u_p)\frac{Re_p C_D}{24} \quad (59)$$

Por consequência a equação da quantidade de movimento da partícula é:

$$m_p \frac{du_p}{dt} = 3\pi\mu d_p(U - u_p)\frac{Re_p C_D}{24} + [F_{gravidade} + F_{empuxo}] \quad (60)$$

A  $F_{gravidade} + F_{empuxo}$  pode ser escrita como uma função do volume da partícula  $Vol_p$  da gravidade  $g$  e da diferença entre massa específica da partícula  $\rho_p$  e a massa específica do fluido  $\rho_f$ .

$$F_{gravidade} + F_{empuxo} = (\rho_p - \rho_f)Vol_p g \quad (61)$$

Substituindo em (60):

$$m_p \frac{du_p}{dt} = 3\pi\mu d_p (U - u_p) \frac{Re_p C_D}{24} + (\rho_p - \rho_f)Vol_p g \quad (62)$$

Na qual,

$$m_p = \rho_p Vol_p \quad (63)$$

e

$$Vol_p = \frac{\pi}{6} d_p^3 \quad (64)$$

Sendo assim a equação (62) foi reescrita como:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{18\mu(U-u_p)}{\rho_p d_p^2} \frac{Re_p C_D}{24} + \frac{(\rho_p - \rho_f)g}{\rho_p} \quad (65)$$

Como a  $F_D$  é definida como sendo:

$$F_D = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{Re_p C_D}{24} \quad (66)$$

A equação (66) pode ser rearmada com uma função da força de arrasto  $F_D$ , a velocidade da componente x da partícula  $u_p$  e  $u$  é a velocidade do fluido interpolada para a posição da partícula., dando origem a equação abaixo.

$$\frac{du_p}{dt} = F_D(u - u_p) + \frac{(\rho_p - \rho_f)g}{\rho_p} \quad (67)$$

Para a partícula  $Re_p$  fica:

$$Re_p = \frac{\rho_f d_p |u_p - u|}{\mu_f} \quad (68)$$

E pode ser feita uma simplificação na  $F_D$  como uma função de relaxação da partícula.

$$F_D = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{Re_p C_D}{24} = \frac{1}{\tau_p} \quad (69)$$

Agrupando as forças de empuxo e peso em  $a$

$$a = \frac{(\rho_p - \rho_f)g}{\rho_p} \quad (70)$$

Reescrita a equação (67), tem-se:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{1}{\tau_p} (u - u_p) + a \quad (71)$$

A equação acima se trata de uma equação diferencial ordinária referente a variação de velocidade da partícula, será demonstrado a seguir como foram obtidas as soluções analíticas para descrever a velocidade e posição da partícula. Existe mais de uma método de solução dessa equação, por exemplo o método do esquema implícito de Euler ou o esquema trapezoidal, em todos os casos o objetivo final é mesmo, porém alguns métodos são menos custosos computacionalmente ou mais estáveis, no entanto o objetivo deste trabalho não é comparar os diferentes métodos de integração, sendo assim foi escolhido o método analítico, que apresentou bons resultados para um escoamento similar com o esquema de Euler e o Trapezoidal, que podem ser vistos com mais detalhes nos resultados obtidos em (SALVO, 2013).

Como comentado anteriormente, o método analítico foi usado, e a seguir está a resolução das equações ordinárias para determinação da velocidade e posição da partícula. O primeiro passo será encontrar a velocidade  $u_p^{n+1}$  sendo

essa a velocidade da partícula no instante  $n+1$  por integrado a equação ordinária abaixo.

$$\tau_p \frac{du_p}{dt} = (u - u_p) + \tau_p a \quad (72)$$

Para tal foram utilizados artifícios matemáticos para facilitar a resolução da integral, como podem vistos a seguir:

$$\varphi \equiv u + \tau_p a \quad (73)$$

Substituindo a equação (73) na (72):

$$\tau_p \frac{du_p}{dt} = -u_p + \varphi \quad (74)$$

Reescrevendo a equação e integrando os dois lados no intervalo  $n$  até  $n + 1$  e de  $t$  á  $t + 1$ , tem-se:

$$\frac{du_p}{-u_p + \varphi} = \frac{1}{\tau_p} dt \quad (75)$$

$$\int_{u_p^n}^{u_p^{n+1}} \frac{du_p^*}{\varphi - u_p^*} = \frac{1}{\tau_p} \int_t^{t+\Delta t} dt \quad (76)$$

Definindo a variável auxiliar e sua derivada:

$$\epsilon \equiv \varphi - u_p \quad (77)$$

$$d\epsilon^* \equiv -du_p^* \quad (78)$$

Substituindo as variáveis auxiliares em (76) e multiplicando ambos os lados por (-1), obtem-se a equação abaixo.

$$\int_{\epsilon^n}^{\epsilon^{n+1}} \frac{d\epsilon^*}{\epsilon} = -\frac{1}{\tau_p} \int_t^{t+\Delta t} dt^* \quad (79)$$

Partindo da premissa que o tempo de relaxação, a velocidade do fluido e força de aceleração são constante, tem-se que a solução é:

$$\ln|\epsilon|_{\epsilon^n}^{\epsilon^{n+1}} = -\frac{1}{\tau_p} [\Delta t] \quad (80)$$

$$\ln|\epsilon^{n+1}| - \ln|\epsilon^n| = -\frac{1}{\tau_p} [\Delta t] \quad (81)$$

Usando uma das propriedades logaritmáticas, obtêm-se:

$$\ln \left| \frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon^n} \right| = -\frac{1}{\tau_p} \Delta t \quad (82)$$

$$\frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon^n} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} \quad (83)$$

Da equação (77) tem-se:

$$\epsilon^{n+1} \equiv \varphi - u_p^{n+1} \quad (84)$$

$$\epsilon^n \equiv \varphi - u_p^n \quad (85)$$

E substituindo as equações acima na equação (81), obtêm-se uma função para a velocidade.

$$u^n + \tau_p a - u_p^{n+1} = (u^n + \tau_p a - u_p^n) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} \quad (86)$$

Reescrevendo a equação acima:

$$-u_p^{n+1} = -u^n - \tau_p a + u^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} + \tau_p a e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} - u_p^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} \quad (87)$$

$$u_p^{n+1} = u^n + \tau_p a - u^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} - \tau_p a e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} + u_p^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} \quad (88)$$

$$u_p^{n+1} = u^n + e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} (u_p^n - u^n) - a \tau_p \left( e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} - 1 \right) \quad (89)$$

Como foi obtida a função velocidade da partícula, pode-se determinar a posição da mesma, fazendo uso da equação abaixo:

$$\frac{dx_p}{dt} = u_p \quad (90)$$

Substituindo a equação acima na (89) e reagrupando de forma a passar o derivando do tempo para o lado direito da equação, tem-se:

$$dx_p = \left[ u^n + e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} (u_p^n - u^n) - a \tau_p \left( e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} - 1 \right) \right] dt \quad (91)$$

Escrevendo que:

$$\Delta t = t^* - t \quad (92)$$

Sendo que a resolução da integral é:

$$\int_{x_p^n}^{x_p^{n+1}} dx_p^* = \int_t^{t+\Delta t} \left[ u^n + e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} (u_p^n - u^n) - a \tau_p \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} - 1 \right) \right] dt^* \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_p^n}^{x_p^{n+1}} dx_p^* &= \int_t^{t+\Delta t} u^n dt^* + \int_t^{t+\Delta t} \left[ e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} (u_p^n - u^n) \right] dt^* \\ &\quad - \int_t^{t+\Delta t} \left[ a \tau_p \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} - 1 \right) \right] dt^* \end{aligned} \quad (94)$$

$$\int_{x_p^n}^{x_p^{n+1}} dx_p^* = u^n \int_t^{t+\Delta t} dt^* + (u_p^n - u^n) \int_t^{t+\Delta t} \left[ e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right] dt^* - a\tau_p \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} - 1 \right) \right] dt^* \quad (95)$$

$$\int_{x_p^n}^{x_p^{n+1}} dx_p^* = u^n \int_t^{t+\Delta t} dt^* + (u_p^n - u^n) \int_t^{t+\Delta t} \left[ e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right] dt^* + a\tau_p \int_t^{t+\Delta t} dt^* - a\tau_p \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right) \right] dt^* \quad (96)$$

$$\int_{x_p^n}^{x_p^{n+1}} dx_p^* = u^n \int_t^{t+\Delta t} dt^* + (u_p^n - u^n - a\tau_p) \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right) \right] dt^* + a\tau_p \int_t^{t+\Delta t} dt^* \quad (97)$$

$$\int_{x_p^n}^{x_p^{n+1}} dx_p^* = u^n(\Delta t) + a\tau_p(\Delta t) + (u_p^n - u^n - a\tau_p) \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right) \right] dt^* \quad (98)$$

Considerando somente a integral do lado direito:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right) \right] dt^* = -\tau_p e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \Big|_t^{t+\Delta t} \quad (99)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right) \right] dt^* = \tau_p \left( e^{-\frac{t-t}{\tau_p}} - e^{-\frac{t+\Delta t-t}{\tau_p}} \right) \quad (100)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( e^{-\frac{t^*-t}{\tau_p}} \right) \right] dt^* = \tau_p \left( 1 - e^{-\frac{t+\Delta t-t}{\tau_p}} \right) \quad (101)$$

Substituindo o resultado na equação (101) e resolvendo o lado esquerdo:

$$x^{n+1} + x^n = u^n \Delta t + a\tau_p \Delta t + (u_p^n - u^n - a\tau_p) \tau_p \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} \right) \quad (102)$$

A seguir na equação (103), apresenta-se o resultado da integração analítica das equações diferenciais da posição. Para a equação da posição da partícula no tempo  $t = n + 1$ , é encontrado:

$$x^{n+1} = x^n + u^n \Delta t + a \tau_p \Delta t + (u_p^n - u^n - a \tau_p) \tau_p \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} \right) \quad (103)$$

## 5 DOMÍNIO FÍSICO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno deste trabalho foram baseadas no artigo (NJOBUEWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012). O domínio físico é um duto de seção quadrada com uma curva de 90°, diâmetro hidráulico,  $D=25,4$  mm, raio de curvatura,  $R=254$  mm, e tendo uma relação de  $R/D=10$ , esquematizado na figura 1. Com dutos acoplados na saída e entrada da curva, com um comprimento de  $c=300$  mm. O fluido entra no domínio na vertical e sai na horizontal, com uma velocidade de entrada de  $W_b = 85,364$  m/s, correspondendo a um número de Reynolds, baseado no diâmetro do duto, de  $Re = 138,267 \times 10^3$ . De acordo com (NJOBUEWU & FAIRWEATHER, 2012) a intensidade turbulenta no fluxo principal é de aproximadamente 1% de  $W_b$ . Foi utilizado um passo de tempo de  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  s. Para a fase dispersa foram injetadas 5000000 partículas sólidas, com uma densidade de  $\rho_p = 3900$  kg/m, totalizando uma massa total  $m_p = 3,3$  kg de partículas injetadas no modelo. As partículas possuem um diâmetro  $d_p = 60 \times 10^{-6}$  com uma dureza Vickers  $H_v = 20$  GPa. Devido à diluição das partículas no fluido, segundo (NJOBUEWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012) de  $(1 \times 10^{-6})$  pode-se caracterizar um acoplamento de uma via, o que significa que a quantidade de massa injetada não é suficiente para influenciar no fluxo do fluido.





Tabela 5- condições de contorno e condições iniciais

Itens	Parâmetros	Símbolo	Unidade	Valor
Geometria	Diâmetro do duto	D	mm	25,4
	Raio da curva	R	mm	254
	Comprimento de entrada	--	mm	300
	Comprimento de saída	--	mm	300
	Razão da curva e do raio	$R / D$	--	10
Fase contínua (gás)	Densidade	$\rho_f$	$\frac{kg}{m^3}$	1,18
	Viscosidade	$\mu$	$\frac{kg}{m \cdot s}$	$1,852 \times 10^{-5}$
	Velocidade de entrada	$W_b$	$\frac{m}{s}$	85,364
	Passo de tempo	$\Delta t$	s	$1 \times 10^{-4}$
	Número de Reynolds	$Re$	--	$138,267 \times 10^3$
	Intensidade turbulenta	I	--	1% de $W_b$
Fase sólida	Densidade	$\rho_p$	$\frac{kg}{m^3}$	3900
	Diâmetro	$d_p$		60
	Total de massa no sistema	L	kg	$60 \times 10^{-6}$
	Número de partículas			5000000

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O perfil da fase fluida pode ser visto na figura 15. O software UNCYFL3D - ferramenta numérica voltada para pesquisa, desenvolvida na Universidade Federal de Uberlândia - mostrou uma boa precisão ao simular a fase fluida em um duto com uma curvatura  $R/D=6$ , no qual os resultados foram comparados com dados empíricos retirados do artigo (NJOBWUENWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012), no qual, mesmo na saída da curva no qual o fluxo se torna muito complexo, se mostrou bastante preciso. Na figura 15 pode-se fazer uma análise qualitativa do fluxo de gás no duto, notando um gradiente de pressão e velocidade irregular devido à curvatura. O maior gradiente de velocidade se concentra na região interna da curva, o que mostra uma concordância com o trabalho (NJOBWUENWU & FAIRWEATHER, 2011), no qual foi plotado a velocidade em diferentes planos ao longo da curva, mostrando um comportamento similar ao observado neste trabalho.

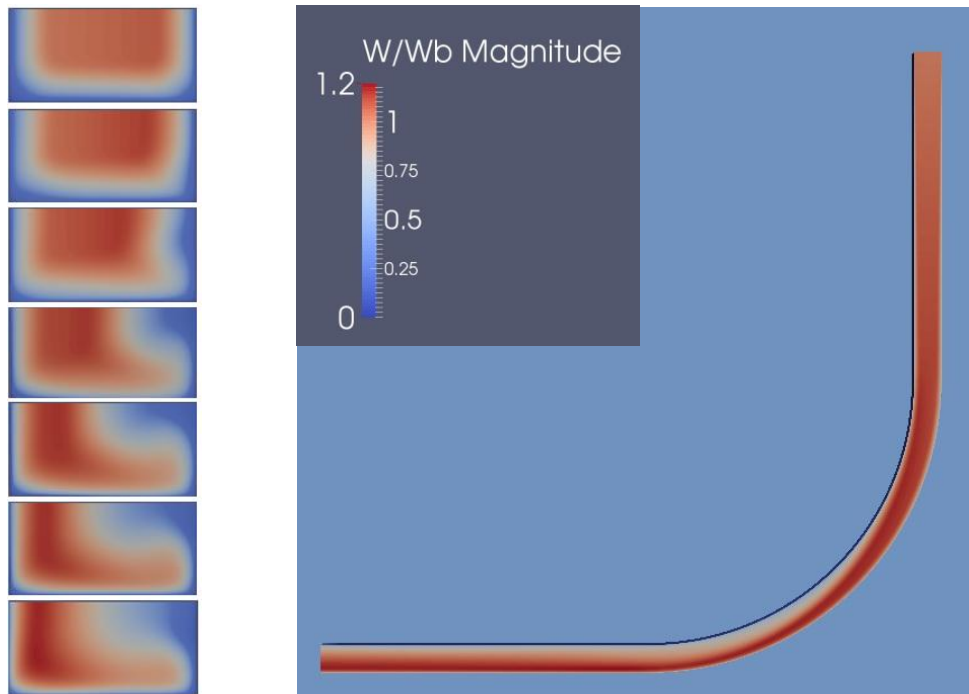
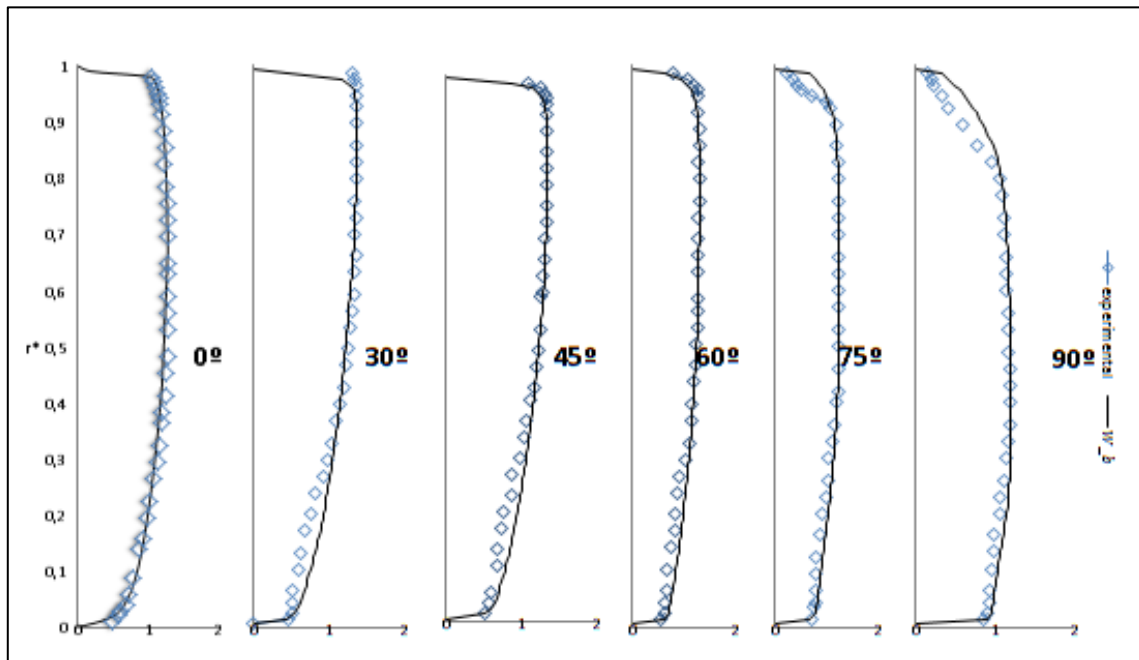


Figura 15- Perfil de velocidade no duto

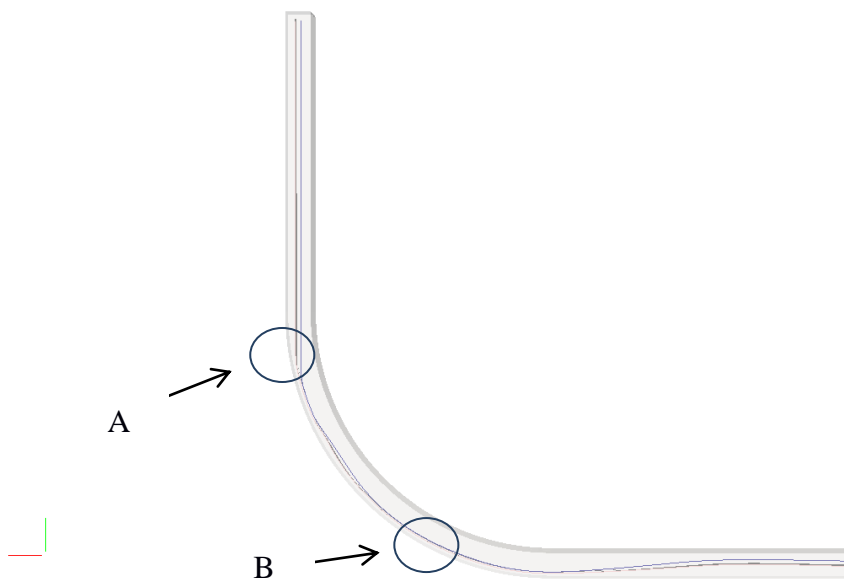


**Figura 16 - perfil de velocidade média  $W_b$ , comparação entre simulado e experimental**

**Fonte: comparado com os dados experimentais obtidos de (NJOBUEWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012)**

Para a melhor visualização do escoamento, e a pela necessidade de validação do modelo matemático adotado, foi comparado o perfil de velocidade média da corrente do fluido  $W_b$  na figura 16, levando-se em conta as velocidades nos eixos  $i, j$  e  $k$ . Para fins de comparação, o raio da curvatura foi modificado de modo a ser um adimensional, sendo que  $r^* = 0$  é o lado interno da curvatura e  $r^* = 1$  o externo. Foi utilizado o artigo (NJOBUEWU, FAIRWEATHER, & YAO, 2012) como base de comparação, do qual foram extraídos os dados experimentais. Este resultado tem uma importância relevante, pois é possível notar uma boa concordância entre o simulado (linha contínua) e o experimental (losangos azuis), sendo nosso par fluido-partícula classificado como de uma via, o perfil do escoamento tem fundamental importância nos resultados, sendo um ótimo ponto de partida para este trabalho.

Utilizando uma sonda virtual na entrada do duto e através de um referencial lagrangiano, para o rastreamento das partículas, foi possível prever a trajetória das partículas.



**Figura 17 - trajetória de 4 partículas aleatórias**

Na figura 17 foram plotadas a trajetória de 4 partículas aleatórias em um molde tridimensional, nela é possível ver que as partículas acompanham o fluxo do fluido devido à baixa inércia das mesmas no conjunto fluido-partícula, como esperado, uma vez que o acoplamento utilizado é de uma via. Na figura 17. pode-se notar que os principais pontos de impacto estão na região A e B, sendo esses prováveis pontos onde a erosão é mais acentuada, na figura 18 pode-se observar mais especificamente a taxa de erosão na região A e B, comprovando a erosão acentuadas nestas regiões.

A figura 18 mostra uma comparação qualitativa foi feita, utilizando os resultados experimentais obtidos no artigo (HUMPHREY, 1990), nele é possível comparar o comportamento e regiões nas quais a erosão é mais severa. Na figura

18 foram retirados os valores das taxas de erosão  $ER \text{ kg.kg}^{-1}$ , dados esses provenientes da simulação nos seguintes locais da curva  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  e  $90^\circ$ . Estes resultados foram a base para comparação da profundidade de erosão, tal comparação foi possível devido à relação proporcional entre esses valores, dada pela seguinte expressão:

$$ED = (ER \times m_p) / (\rho_w \times A_{cell} \times 10) \quad (104)$$

Na equação (104)  $ED$  é a profundidade da erosão (mm),  $ER \text{ (mg.g}^{-1}\text{)}$  que representa a massa de material retirado pela massa de partículas adicionadas no sistema,  $m_p$  é massa da partícula,  $\rho_w$  é a densidade da partícula,  $A_{cell}$  é a área da célula da superfície de impacto delimitada pela malha computacional e variável de acordo com a posição na curva. A equação (104) foi dividida por 10 para facilitar a visualização no gráfico, não alterando a posição dos picos, alterando somente amplitude dos mesmos.

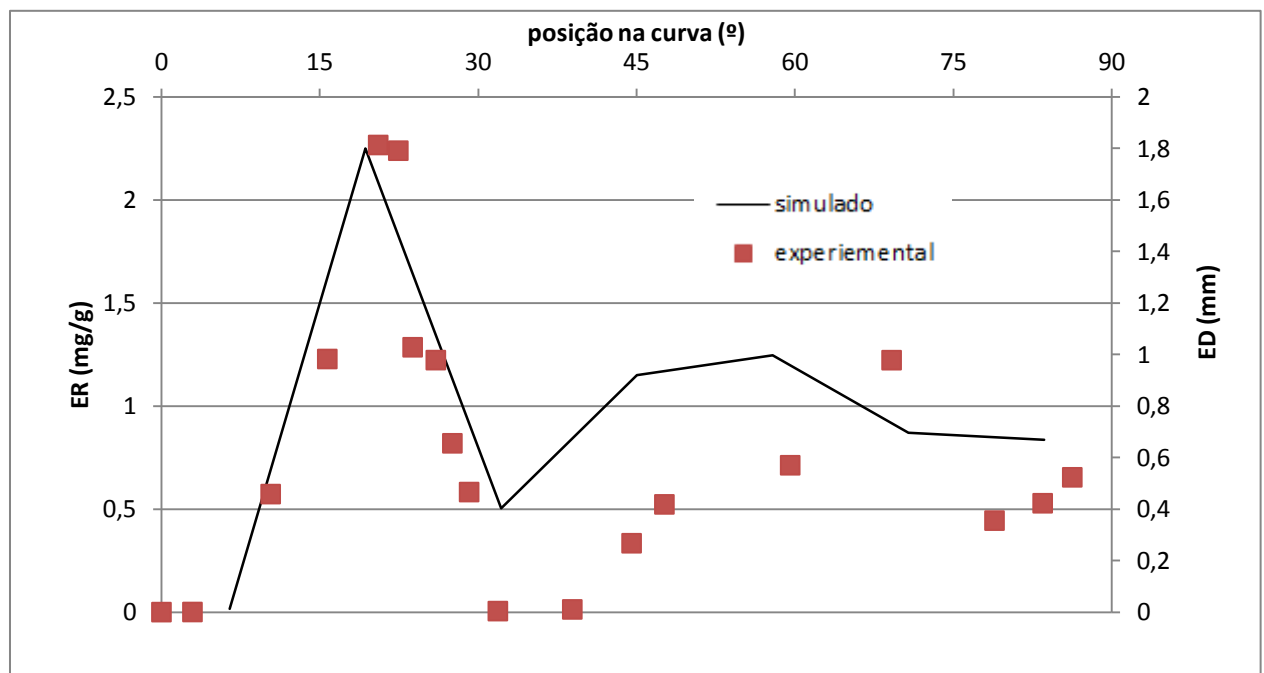


Figura 18 - Comparação da taxa de erosão simulada com a erosão experimental.

A erosão máxima se dá entre 15° a 30° nos dois casos, mostrando uma relação entre o simulado e experimental, mais precisamente em 20°, por ser o primeiro ponto de impacto, como visto na figura 17. Já no segundo ponto de impacto, a comparação não é muito precisa, visto que não foram utilizados muitos pontos para plotagem do gráfico, sendo utilizados somente sete pontos da simulação, porém pode-se notar um segundo pico na região entre 60° e 75°, devido ao ricochete das partículas no primeiro impacto.

A figura 19 confirma os resultados apresentados até agora, no qual a região de maior erosão é a mesma onde ocorre o primeiro impacto, entre 20° e 30° da curva do duto, mostrando uma taxa de erosão de  $3,67 \text{ kg.kg}^{-1}$  (mg de material removido por g de partículas injetadas).

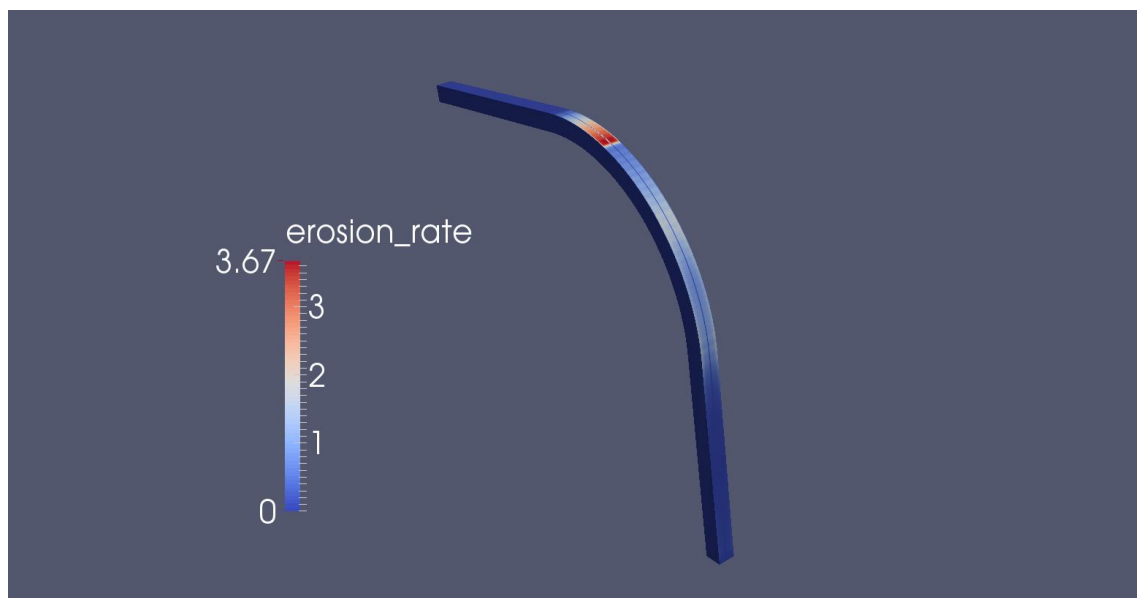


Figura 19- Máxima taxa de erosão na curva

## 7 CONCLUSÃO

A dinâmica de fluidos computacional em conjunto com o rastreamento de partículas com referencial lagrangiano (no qual todas as partículas são rastreadas individualmente) e o modelo de erosão de (Oka, Okamura e Yoshida, 2005), foram utilizados para modelar a erosão causada por partículas sólidas de alumina em um duto de seção quadrada com uma curva de 90°. A modelagem da fase contínua (fluida) se mostrou coerente com o que foi apresentado em (NJOBWUENWU & FAIRWEATHER, 2011), sendo possível observar o comportamento do fluido, tanto na região da curva quanto na saída do duto (apesar de se tratar de dutos com dimensões diferentes esta comparação é válida). Foram realizadas análises tanto qualitativa quanto quantitativa, comparando os resultados experimentais da profundidade de erosão do artigo (NJOBWUENWU & FAIRWEATHER, 2012) com a taxa de erosão modelada. O modelamento da erosão se mostrou satisfatório, demonstrando um comportamento similar aos resultados experimentais com os modelados neste trabalho. Os principais resultados deste trabalho são a previsão da taxa de erosão e o ponto exato no qual a mesma ocorre. A taxa de erosão foi obtida com sucesso, porém o local exato da erosão seria mais preciso com um aumento no número de sondas ao longo da curva. Mesmo com a imprecisão no local de maior taxa de erosão, a DFC em conjunto com o rastreamento de partículas e um modelo de erosão se mostrou útil, sendo capaz de gerar dados importantes para a realização de um projeto ou um protótipo, ou na predição da vida útil do equipamento, neste caso um duto curvo.



## 8 REFERÊNCIAS

- ÇENGEL, Y. A. (2007). *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. São Paulo: Editora Mcgraw-Hill.
- FERZIGER, J. H. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3ª ed. Alemanha: Springe.
- Grant, G. &. (1975). Erosion prediction in turbomachinery resulting. *Journal of Aircraft*, 12(5), 471–478.
- Haselbacher, A. N. (2007). An efficient and robust particule localization algorithm for unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, Vol. 225 pg 2198-2213.
- Hirsh, C. (2007). *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Amsterdam: BH.
- HUMPHREY, J. A. (1990). Fundamentals of fluid motion in erosion by solid particle impact. Berkeley: Review, Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley.
- LYCZKOWSKI, R. W., & BOUILLARD, J. X. (set 2002). State-of-the-art review of erosion modeling in fluid/solids systems. Progress of Energy and Combustion Science, Argonne National Laboratory, Energy Systems Division (USA), INERIS, Parc Technologique (France).
- MALISKA, C. R. (2010). *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Rio de Janeiro: LTC.
- Mason, J. S. (1972). Erosion of bends by pneumatically conveyed. *Powder Technology*, 323–335.
- NJOBUNWU, D. O., & FAIRWEATHER, M. (2011). Prediction of Turbulent Gas-Solid Flow in a Duct with a 90° Bend Using an Eulerian-Lagrangian Approach. *Institute of Particle Science and Engineering, School of Processm, Environmental and Materials Engineering, University of Leeds, Leeds (UK)*.

- NJOBUNWU, D. O., & FAIRWEATHER, M. (2012). Modelling of pipe bend erosion by dilute particle suspensions. *Computers and Chemical Engineering, University of Leeds, Leeds (UK)*, v. 42, p. 235-247.
- NJOBUNWU, D. O., FAIRWEATHER, M., & YAO, J. (2012). Coupled RANS-LPT modelling of dilute, particle-laden flow in a duct with a 90° bend. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 50, p. 71-88.
- Obermair, S., & Staudinger, G. (2001). The dust outlet of a gas and its effects on separation efficiency. *Chemical Engineering Technology*, v. 24 p 1259-1263.
- S, E. (1991). Direct numerical simulations of bubble-laden turbulent flows using the two-fluid formulation. *Applied Scientific Research*, v46, 301-314.
- SALVO, R. d. (2013). *Aplicação da metodologia Euleriana-Lagrangiana à análise do processo de separação em ciclones*. Uberlândia: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.
- Souza, F. J. (2011). *UNSCYFL3D Versão 1.11 - Manual teórico*. Uberlândia: UFU.
- THPA, B. S., THAPA, B., & OLE, G. D. (mar 2012). Empirical modelling of sediment erosion in Francis turbine. Energy, Turbine Testing Laboratory, Kathmandu University (Nepal), Waterpower Laboratory,.
- WOOD, R. J., JONES, T. F., GANESHALINGAM, J., & MILES, N. J. ( set 2003.). Comparison of predicted and experimental erosion estimates in slurry ducts. *Science Direct, University of Southampton (UK), University of Nottingham, University Park (UK)*,, p. 937-947.