

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RENAN MARCELO RAMONI

**ANÁLISE ANALÍTICA NUMÉRICA DA ENTALPIA DE UM
ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL NA ENTRADA DE UM DIFUSOR
PERFIL CÔNICO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

RENAN MARCELO RAMONI

**ANÁLISE ANALÍTICA NUMÉRICA DA ENTALPIA DE UM
ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL NA ENTRADA DE UM DIFUSOR
PERFIL CÔNICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina TCC2, do curso de Engenharia Mecânica da Coordenação de Engenharia Mecânica – COMEC – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte; Engenharia Térmica.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio de Souza Lourenço

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Mecânica
Curso de Engenharia Mecânica



FOLHA DE APROVAÇÃO

Renan Marcelo Ramoni

Análise analítica numérica da entalpia de um escoamento compressível na entrada de um difusor perfil cônico

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 10:20hs do dia 18/11/2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Marcos Antonio de Souza Lourenço - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Henrique Cotait Razuk - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Rubens Gallo - (Membro)

Aos meus pais e irmãos;

Aos meus amigos e professores que ao longo deste tempo de graduação
contribuíram de alguma maneira para a entrega deste trabalho

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Aparecido e Alzira, e irmãos por todo amor e apoio.

Ao Professor Doutor Marcos Antônio de Souza Lourenço, por aceitar, orientar e compartilhar seus conhecimentos.

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná, por disponibilizar sua infraestrutura e oportunidades no decorrer da graduação.

A todos os professores da graduação que compartilharam seus conhecimentos e contribuíram para minha formação.

“O único lugar aonde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”

(Stubby Currence)

RESUMO

O trabalho desenvolve as soluções das equações da região da camada limite de momento e energia, ambas apresentadas por White (1991) em seu livro. Os resultados obtidos foram com variação da velocidade de corrente livre incidente sobre um difusor, objeto de estudo. Os valores de número de Mach variam de 0,3 até 0,9, variando também a angulação das placas do difusor, onde β possui diversos valores entre -0,19884 até 1. O escoamento avaliado é do tipo Falkner-Skan. Os resultados em programação com linguagem Python mostraram-se ótimos, para o modelo utilizado. A análise computacional expôs grande exatidão com valores da literatura para escoamentos incompressíveis. Artigos que estudam a camada limite de escoamento compressível não foram encontrados para comparação. O trabalho é realizado com um modelo computacional alternativo para camada limites quando comparado com os métodos de diferenças finitas apresentados em artigos e livros de comparação na literatura. O método usado apresentou grande rapidez na convergência.

Palavras-chaves: Camada limite. Difusor. Número de Mach. Escoamento compressível. Escoamento Falkner-Skan. Linguagem Python.

ABSTRACT

This work develops an outcome to momentum and energy equations of boundary layer, both presented by White (1991). The results were obtained by variations in inlet freestream velocity in a diffuser, the object of study. The Mach number varieties between 0.3 and 0.9, also variations in angulation are made where β have various values in range of - 0.19884 to 1. For that variation in β the flow is considered to be Falkner-Skan flow type. The results in Python displayed good precision for the method used. The computational analysis presented great calculations compared to the literature of incompressible flows. Articles and books of compressible flows were not found for comparison. The work has a different method for computational calculation of boundary layers, whereas the articles and some books in the literature use finite elements methods. The method used in this work generated faster results convergence and used less computational resources.

Keywords: boundary layer. Diffuser. Mach number. Compressible flow. Falkner-Skan flow. Python.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo físico de um difusor de perfil cônico e comportamento da camada limite ao longo do mesmo. Fonte: WHITE (1991, p.13)	19
Figura 2 - Esquema básico de Turbina a gás em ciclo aberto.	20
Figura 3 - Interface do Spyder 2. Fonte: autoria própria.	23
Figura 4 - Volume de controle referenciado por coordenadas cartesianas retangulares. Fonte FOX <i>et al.</i> (2006, p.186).	26
Figura 5 - Distribuição de tensões sobre um volume de controle.	31
Figura 6 - Modelo físico de fluxo de calor e trabalho sobre o volume de controle.....	35
Figura 7 - Volume arbitrário dentro de um escoamento influenciado por pressão e peso. Fonte: ÇENGEL e CIMBALA (2007, p.162).	41
Figura 8 - Escoamento de um fluido em volta de uma canto (difusão).....	48
Figura 10 - (a) figura de η vs $f'(\eta)$, (b) η vs $g(\eta)$, perfil de velocidade e (d) perfil térmico. ..	59
Figura 11 - η vs $\theta(\eta)$ com $\alpha=0^\circ$	60
Figura 12 - η vs $f'(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$	61
Figura 13 - η vs $g(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$	61
Figura 14 - (a) perfil de velocidade e (b) perfil térmico.	62
Figura 15 - η vs $g'(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$	63
Figura 16 - η vs $\theta(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$	64
Figura 17 - η vs $f'(\eta)$ com $\alpha \sim 10^\circ$	64
Figura 18 - η vs $g(\eta)$ com $\alpha \sim 10^\circ$	65
Figura 19 - perfis de (a) velocidade e (b) de temperatura.	65
Figura 20 - η vs $g'(\eta)$ com $\alpha \sim 10^\circ$	66
Figura 21 - Esquema básico de uma turbina de avião.	73
Figura 22 - Esquema de um volume arbitrário em um escoamento.	77
Figura 23 - Translação e deformação cisalhante de um elemento de fluido.	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de $f''(0)$ para diversos valores de β no escoamento incompressível. - 2016	58
Tabela 2 – Valores de $f''(0)$ para diversos números de β no escoamento compressível. - 2016	58
Tabela 3 - Valores de $f''(0)$ para diversos números de Mach e β . - 2016.....	58
Tabela 4 – Para $m = -0.05$, $T_\infty=0,99T$	67
Tabela 5 – Para $m = -0.03$, $T_\infty=0,99T$	67
Tabela 6 – Para $m = -0.01$, $T_\infty=0,99T$	67
Tabela 7 – Para $m = 0.01$, $T_\infty=0,99T$	67
Tabela 8 - Para $m = 0.03$, $T_\infty=0,99T$	67
Tabela 9 - Para $m = 0.05$, $T_\infty=0,99T$	67

LISTA DE SIGLAS

EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EDP	Equações Diferenciais Parciais
LSODA	Solucionador de Equações Diferenciais Ordinárias inflexíveis e flexíveis
LSODE	Solucionador Livermore de Equações Diferenciais Ordinárias

LISTA DE ACRÔNIMOS

FORTTRAN	Formula Translation
LATEX	Lamport TeX
ODEINT	Integração de Equações Diferenciais Ordinárias
ODEPACK	Solucionadores de Equações Diferenciais Ordinárias

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Grandeza	Unidade
a	Aceleração	m/s^2
α	Ângulo	adimensional
β	Coefficiente de angulação	adimensional
β_a	Ângulo	adimensional
C	Coefficiente de taxa de deformação	adimensional
c_p	Calor específico a pressão constante	kJ/kgK
C_R	Parâmetro de Chapman-Rubesin	adimensional
dA	Elemento de área	m^2
ds	Elemento de comprimento	m
δ	Delta de Kronecker	adimensional
δ_m	Espessura da camada limite do momento	mm
δ_t	Espessura da camada limite térmica	mm
e	Energia interna específica	kJ/kg
E	Energia interna	kJ
ϵ	Taxa de deformação	s^{-1}
Er	Número de Eckert	adimensional
f	Força dividida por volume	N/m^3
F	Força	N
F_c	Força de corpo	N
F_s	Forças superficiais	N
g	Aceleração da gravidade	m/s^2
γ	Coefficiente de expansão adiabática	adimensional
h	Entalpia específica	kJ/kg
H	Entalpia de estagnação específica	kJ/kg
η	Eficiência térmica do ciclo	adimensional
k	Condutividade térmica	$K.m/W$
K	Coefficiente de velocidade da corrente livre	adimensional
K_μ	Segundo coeficiente de viscosidade	$Kg/m.s$
λ	Coefficiente volumétrico viscoso	$Kg/m.s$

m	Massa	kg
m_a	Coefficiente	adimensional
Ma	Número de Mach	adimensional
μ	Viscosidade absoluta	Kg/m.s
Q	Calor	kJ
Q_a	Calor admitido	kJ
Q_b	Calor dissipado	kJ
θ	Ângulo	adimensional
P	Pressão	Pa
Pr	Número de Prandtl	m^2/s^2
r	Taxa de compressão	adimensional
\vec{r}	Vetor de posição	m
R	Constante universal dos gases	kJ/kg.K
Re	Número de Reynolds	adimensional
ρ	Densidade	kg/m ³
s	Comprimento	m
S	Temperatura efetiva do gás	K
t	Tempo	s
T	Temperatura	K
τ	Tensão	N/m ²
u	Velocidade na direção da componente x	m/s
U	Velocidade de corrente livre	m/s
ν	Viscosidade cinemática	m ² /s
v	Velocidade na direção da componente y	m/s
V	Velocidade vetorial total	m/s
Ψ	Volume	m ³
w	Velocidade na direção da componente z	m/s
W	Trabalho	kJ
W_p	Peso	kg.m/s ²
Ω	Velocidade angular	rad/s
ψ	Função corrente	m ² /s
z	Altura	m
ζ	Vorticidade	s ⁻¹

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	16
1.1. Histórico	16
2. OBJETIVOS.....	17
2.1. Geral	17
2.2. Específicos.....	17
3. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	18
4. ESCOLHA E OBJETO DE ESTUDO	19
5. CICLO BRAYTON	20
4.1. Eficiência Térmica.....	21
6. LINGUAGEM PYTHON.....	23
6.1. Matplotlib	24
6.2. Numpy	24
6.3. Scipy	24
7. METODOLOGIA	26
7.1. Conservação Da Massa.....	26
7.2. Equação Da Quantidade De Momento	30
7.3. Conservação Da Energia	35
8. EQUAÇÃO DE BERNOULLI	40
9. DESENVOLVIMENTO	43
9.1. Transformações Das Equações	43
9.1.1. Equação De Momento Da Camada Limite	44
Escoamento De Falkner-Skan	47
9.2. Equação De Energia Da Camada Limite	49
10. PROCEDIMENTO	51
10.1. Perfil De Temperatura	52
11. ALGORITMO	53
12. RESULTADOS E ANÁLISES.....	57
13. CONCLUSÃO	68

13.1. Comentários Dos Resultados.....	68
13.2. Comentários Sobre A Linguagem Python.....	69
13.3. Considerações Finais.....	69
14. RECOMENDAÇÕES.....	70
REFERÊNCIAS.....	71
APÊNDICE A - BALANÇO ENERGÉTICO NA TURBINA.....	73
APÊNDICE B - MÓDULO INTEGRATE E OPTIMIZE DO SCIPY.....	76
Scipy.Integrate.....	76
Scipy.Optimize.....	76
APÊNDICE C - DERIVADA MATERIAL.....	77
APÊNDICE D - MOVIMENTO E DEFORMAÇÃO DE UM VOLUME DE	
CONTROLE DE UM FLUIDO.....	80
APÊNDICE E - EQUAÇÕES COMPLEMENTARES.....	85
APÊNDICE F - DISCRETIZAÇÃO.....	86
ANEXO A - Algoritmo “Falkner-Skan.py”.....	89

1. INTRODUÇÃO

O trabalho aborda as qualidades do ar na entrada de difusores cônicos. Estes são utilizados por turbinas de aviões para que a eficiência destas aumente. As turbinas utilizadas para este trabalho são de grande maioria, turbina a gás. Estas apresentam um grande valor de relação potência-peso, o qual favorece muito quando a questão envolvida é a construção de aeronaves. Segundo Shapiro *et al.* (2011), as turbinas modelos turbo jatos são as mais usadas na aviação.

1.1. Histórico

Mecânica dos Fluidos é uma área em Engenharia Mecânica que estuda e avalia os fenômenos relacionados a um fluido (FOX *et al.*, 2006). Começou a ter grande destaque em meados do século XV, quando ocorreu uma grande batalha naval entre Espanha e Inglaterra. Onde os navios ingleses impuseram grande superioridade de batalha, por serem menores e velozes, contra os grandes e pesados navios espanhóis, como Anderson (2001) cita.

Através dos anos, estudos mais aprofundados e novos nesta área foram surgindo. Os grandes contribuintes para esta área foram Bernoulli e Euler, onde seus estudos revolucionaram a abordagem, na época, de hidrostática e hidrodinâmica. Com o passar do tempo, os estudos de Navier e Stokes, Nos séculos XVIII e XIX, fizeram com que a Mecânica dos Fluidos clássica tivesse um grande salto na compreensão do comportamento dos Fluidos (ÇENGEL, CIMBALA, 2007).

Ao fim do século XIX, Lorde Osborne Reynolds trouxe a Mecânica dos Fluidos grande contribuição ao apresentar o número adimensional que levou seu nome, o qual ajudou e continua a ajudar como Çengel e Cimbala (2007) expõem. Ao decorrer do tempo, com melhoras na tecnologia de experimentação, os resultados empíricos e teóricos não apresentavam resultados condizentes quanto ao estudo de movimento de corpos submerso em um fluido. Problema pelo qual persistiu vários anos sem uma explicação contundente como Fox *et al.* (2006) detalham.

Somente no início do século XX, com a hipótese proposta por Ludwig Prandtl (1904), engenheiro alemão, pode-se unir a parte teórica e experimental. Sua hipótese era de que existiria uma região de espessura muito fina adjacente à superfície do corpo submerso no fluido, onde os efeitos viscosos teriam grande efeito sobre o escoamento. Experimentos

realizados posteriormente comprovaram esta hipótese e sua importância, principalmente quando o corpo estava submerso em fluidos gasosos. A sua importância era tamanha que uma nova subárea de Mecânica dos Fluidos foi criada para somente estudar os fenômenos envolvidos com escoamento de gases, chamada Aerodinâmica (FOX *et al.*, 2006).

O destaque de Aerodinâmica aumentou conforme o tempo, impulsionada pelo protótipo de Santos Dumont, o primeiro avião. Experimentos sobre o mesmo tópico abordado por Dumont também se desenvolviam nos EUA, Rússia e Alemanha, sem contar que a Paz Armada impulsionava os estudos em Aerodinâmica, a qual culminou na Primeira Guerra Mundial. Na Segunda Guerra Mundial, os experimentos alemães com os foguetes V2 elevaram a Aerodinâmica a outro nível, aprofundando ainda mais os estudos em sua área. Época conhecida como *Época de Ouro* segundo Anderson (2001).

Em meados do século XX, com a base dos estudos nas tecnologias alemãs e impulsionadas pela Corrida Aeroespacial, a Aerodinâmica teve novamente uma grande mudança onde seus estudos ficaram mais aprofundados em escoamentos supersônicos e hipersônicos como Anderson (2001) cita. Nos últimos anos, com a evolução da computação e tecnologias de experimentação os resultados em Aerodinâmica ficaram cada vez mais precisos. Atualmente, ainda não foram impostos limites físicos para o desenvolvimento da Aerodinâmica e conseqüentemente da Mecânica dos Fluidos como Çengel e Cimbala (2007) definem.

2. OBJETIVOS

2.1. Geral

- Disponibilizar estudos de escoamentos compressíveis em português.
- Aprofundar os estudos sobre Dinâmica dos Fluidos.

2.2. Específicos

- Criação de um algoritmo alternativo em Python, que através de integração resolva problemas numéricos de camada limite com baixo uso de recurso computacional e consumo de tempo;

- Solução numérica de camada limite de um escoamento térmico sobre uma placa inclinada.

3. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O primeiro capítulo conta uma breve descrição histórica sobre Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica, cita também os objetivos deste trabalho. No segundo capítulo é apresentado o caso escolhido de estudo e uma pequena introdução sobre conceitos de ciclo Brayton, comentários sobre o objeto de estudo e uma discussão sobre a linguagem de programação Python. No capítulo três se encontra uma metodologia mais detalhada sobre as equações de conservação que descrevem o tipo de escoamento abordado. O capítulo quatro é voltado somente para o desenvolvimento das equações de momento e energia da camada limite. No capítulo cinco é apresentado o desenvolvimento computacional, onde é feita simplificações nas equações apresentadas na seção anterior. No capítulo seguinte é mostrada a análise dos resultados, comparando-os com resultados da literatura e discussões de comportamento físico do escoamento. No último capítulo trata da conclusão do estudo e futuros trabalhos que possam ser desenvolvidos através deste estudo.

4. ESCOLHA E OBJETO DE ESTUDO

A crescente globalização exige que os meios de transportes sejam mais velozes. O avião, um deles, é amplamente utilizado nos dias de hoje, por causa de sua versatilidade para percorrer grandes distâncias e evitar obstáculos físicos como regiões montanhosas. Dentre as destacadas, uma qualidade que o avião possui é sua rapidez, a qual é movida pela queima de combustíveis injetados na sua turbina.

O *design* da turbina é de extrema importância, pois esta influencia diretamente na relação de eficiência da turbina de transformar a energia química do combustível em energia cinética no escape dos gases de combustão. Além de sua geometria determinar que a quantidade certa de ar seja coletada pela turbina, para que a queima estequiométrica ocorra. Sabe-se ainda que para uma queima eficiente, é necessário que a temperatura e pressão do ar seja baixa e alta, respectivamente.

O trabalho presente é estudar o comportamento do perfil térmico desenvolvido no escoamento de ar sobre uma placa inclinada, simulando as condições de um difusor cônico de turbina a fim de uma melhor compreensão do comportamento térmico ao longo do mesmo. É avaliado vários ângulos de inclinação da placa a fim de comparar os resultados encontrados através do algoritmo criado.

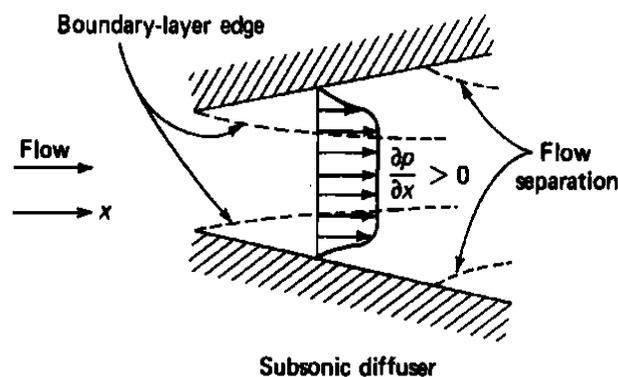


Figura 1 - Modelo físico de um difusor de perfil cônico e comportamento da camada limite ao longo do mesmo. Fonte: WHITE (1991, p.13)

O trabalho tem o objetivo de mostrar um método novo de análise numérica, a qual possibilite que avaliações de cunho numérico sobre fenômenos físicos, apresentem repostas mais fáceis e rápidas de obtenção.

Antes de detalhar o estudo, é relembrado o ciclo termodinâmico da turbina onde o objeto de estudo está inserido, para um melhor entendimento das relações descritas acima para estudo deste trabalho.

5. CICLO BRAYTON

O modelo básico de Turbina a gás é um sistema composto por três partes: compressor; combustor e turbina (SHAPIRO *et al.*, 2011). Onde este modelo de turbina trabalha em ciclo aberto ou fechado, o que quer dizer que há ou não a reutilização do fluido de trabalho pelo sistema termodinâmico.

O primeiro componente mencionado tem a função de elevar a pressão do gás admitido no sistema. Em seguida, o combustor ou câmara de combustão, tem a função de realizar a mistura do gás com o combustível e a queima da mistura. A turbina, estágio final, tem a função de transferir a energia cinética dos gases de combustão para as pás que se encontram na sua constituição. Estas transformam o movimento linear dos gases, através de colisões, em movimento rotacional que fornece trabalho. Parte deste trabalho é transmitido para o compressor através de um eixo solidário e o restante é convertido em energia motora ou elétrica como Shapiro *et al.* (2011) citam.

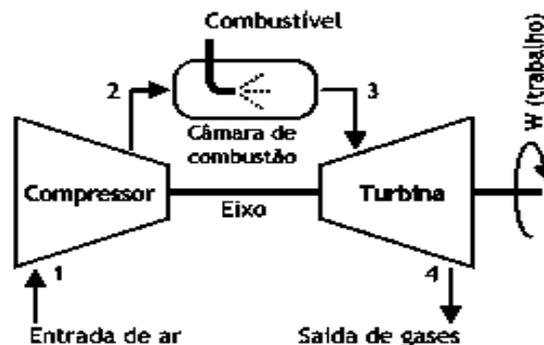


Figura 2 - Esquema básico de Turbina a gás em ciclo aberto.
Fonte SOARES (2007).

Como neste sistema de geração de energia o fluido de estudo do ciclo, no caso o ar, não sofre mudança de estado, por isso, se chama ciclo Brayton de potência (VAN WYLEN, SONNTAG, BORGNACKKE, 1995).

4.1. Eficiência Térmica

Pela Figura 2 são observados que: o primeiro ponto é a entrada do compressor, o qual está no ponto 1, saída do compressor e entrada da câmara de combustão sejam o ponto 2, saída da câmara de combustão e entrada da turbina sejam o ponto 3, e finalmente a saída da turbina seja o ponto 4. Ainda, presume-se que seja um ciclo isentrópico. Sabendo que a avaliação da eficiência térmica do ciclo é feita através da relação de calor dissipado por calor adquirido, tem-se que:

$$\eta = 1 - Q_b/Q_a \quad (5.1)$$

Como se trata de ar, podemos modelá-lo como um gás perfeito, assim, pode-se dizer:

$$Q = mh \quad (5.2)$$

assim, o calor total é:

$$Q = mc_p dT \quad (5.3)$$

Pois, como se trata de um gás perfeito, se usa a relação de entalpia a seguir:

$$c_p = dh/dT \quad (5.4)$$

assim, tem-se:

$$\eta = 1 - c_p(T_4 - T_1)/c_p(T_3 - T_2)$$

$$\eta = 1 - T_1(T_4/T_1 - 1)/T_2(T_3/T_2 - 1)$$

entretanto,

$$T_3/T_4 = T_2/T_1 \rightarrow T_3/T_4 - 1 = T_2/T_1 - 1$$

assim,

$$\eta = 1 - T_1/T_2 \quad (5.5)$$

Por se tratar de um gás perfeito, pode se realizar a seguinte igualdade:

$$P_2/P_1 = (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

substituindo essa relação na equação (4.4), tem-se:

$$\eta = 1 - 1/(P_2/P_1)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (5.6)$$

Van Wylen, Sonntag e Borgnakke (1995) concluem que a eficiência térmica do ciclo Brayton é somente função da relação de pressão do processo, mais precisamente, a compressibilidade que o compressor realiza, onde está pode ser expressa por r .

Através desta equação é possível verificar que a eficiência energética de uma turbina de avião depende necessariamente das relações de entalpia que o ar admitido por esta apresenta. Pela equação (4.3), vê-se que a temperatura é a grandeza física determinante para a eficiência da turbina. Assim, o trabalho se desenvolve no estudo da qualidade que o ar possui na admissão pelo sistema, no caso, quando este passa pelo difusor.

Turbinas na aviação apresentam um valor de relação potência-peso elevado, pois este melhora a eficiência da turbina, porém, não vem ao caso de serem citados neste trabalho. Os novos componentes adicionados são o difusor e o bocal de escape. O Primeiro tem como seus objetivos, primeiramente canalizar o ar para o compressor que se encontra em uma parte mais interna da turbina e sua outra função é aumentar a pressão do ar que o compressor receberá, assim, aumentando a relação de compressão.

O bocal tem como objetivo estreitar a área de exaustão dos gases de combustão que saem da turbina, assim, através da lei de conservação da massa, os gases que saem do mesmo precisam ser acelerados por causa do estreitamento, aumentando assim, a energia cinética dos gases acarretando a impulsão da turbina para frente. Para informações complementares de balanço energético de um modelo de turbina de avião, consultar o Apêndice A.

6. LINGUAGEM PYTHON

No início, a linguagem de programação Python não possuía funcionalidades importantes para a interação com o sistema operacional. Um dos focos primordiais de Python era aumentar a produtividade do programador. Mas ultimamente vem sendo usada amplamente na resolução de problemas físicos, pois é uma linguagem de uso fácil e possui várias bibliotecas poderosas para processamento matemático, além de ser uma linguagem *high-end* (avançada) acrescenta Kiusalaas (2013). Assim, a linguagem vem apresentando um destaque maior para soluções de problemas físicos, o que leva a ser muito usada na área acadêmica e começando a possui um lugar de maior ênfase no meio comercial.

Como toda linguagem, possui pontos fortes e fracos, no caso, alguns pontos fortes já foram destacados. O principal ponto fraco é a questão de processamento, a qual é mais lenta quando comparada as outras linguagens, como linguagem C ou C++, por exemplo. Porque utiliza maiores recursos do computador, tornando-se mais “pesada” e utiliza uma interface para a compilação. Foi usada a versão estável do Python 3.5.2, com as bibliotecas estáveis Matplotlib 1.5.3, Numpy 1.11.2, Scipy 0.18.0. As bibliotecas utilizadas são discutidas abaixo. A interface de programação é feita através do programa Spyder 2 que vem com o pacote de módulos do Python Anaconda 3.5.

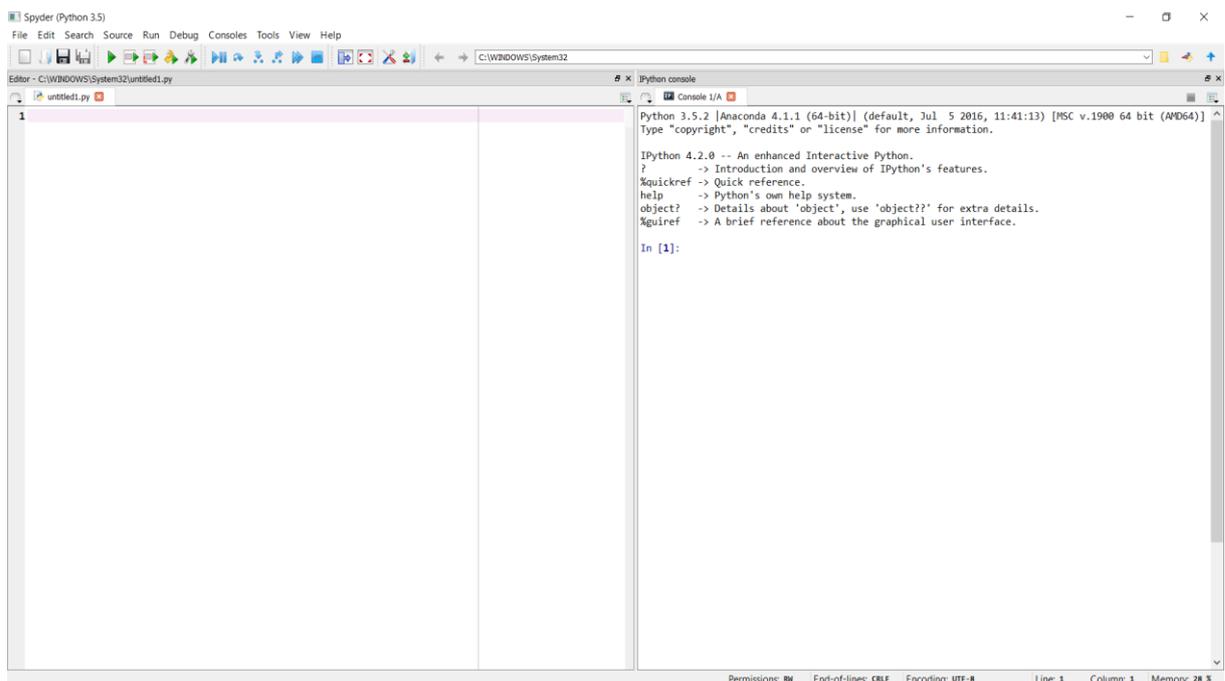


Figura 3 - Interface do Spyder 2. Fonte: autoria própria.

6.1. Matplotlib

Johansson (2014) define que é um módulo da linguagem Python que permite gerar gráficos de duas dimensões de excelente qualidade, permitindo edição interativa, animações, inúmeros tipos de gráficos diferentes, anotações em sintaxe LaTeX e salvamento das imagens geradas em diversos formatos diferentes.

O Matplotlib permite trabalhar com diversos tipos de gráficos diferentes, entre eles: gráficos de funções, múltiplos gráficos, histogramas, funções discretas, torta e barra. Fornece funções para a customização dos gráficos, podendo trabalhar com diversas fontes diferentes, cores, tamanhos de página, entre outros. Além disso, existem funções para a manipulação e análise de imagens e sinais como Johansson (2014) enuncia.

6.2. Numpy

Pacote básico da linguagem Python que permite trabalhar com arranjos, vetores, matrizes de N dimensões e operações matemáticas. Provê diversas funções e operações sofisticadas:

- Objeto *array* (vetor) para a implementação de arranjos multidimensionais;
- Objeto *matrix* (matriz) para o cálculo com matrizes;
- Ferramentas para álgebra linear;
- Transformadas de Fourier básicas;
- Ferramentas sofisticadas para geração de números aleatórios.

Além disso, todas as classes criadas podem ser facilmente “herdadas”, permitindo a customização do comportamento. O módulo é implementado em linguagem C, o que dá uma grande velocidade às operações realizadas (NUMPY.ORG, 2014).

6.3. Scipy

Pacote básico da linguagem Python que programa diversas técnicas úteis na computação científica. Utiliza como base o *Numpy* para lidar eficientemente com grandes quantidades de números e programa em linguagem C diversos algoritmos numéricos e

simbólicos para o processamento matemático (SCIPY.ORG, 2014). Entre as capacidades do *Scipy*, tem-se:

- Estatísticas;
- Otimização;
- Integração numérica;
- Processamento de sinais e imagens;
- Solução de equações diferenciais;
- Funções especiais (Bessel, etc.);
- Polinômios.

Para maiores informações sobre esta biblioteca do Python, ler o Apêndice B.

7. METODOLOGIA

Para os cálculos sobre os efeitos que ocorrem na camada limite, é necessário primeiramente desenvolver as equações que descrevem como o fluido se comporta sobre ações que ocorrem sobre o mesmo. Segundo Fox *et al.* (2006), fluido é toda massa que ocupa um volume e que não suporte qualquer tipo de esforço que venha a causar-lhe cisalhamento.

Necessita-se primeiro determinar as equações que descrevam fisicamente o comportamento do fluido, as quais são: conservação da massa, equação do momento e a conservação da energia. Estas podem ser tratadas como as equações básicas que descrevem um fluido fisicamente. Equações adicionais para a resolução das equações básicas serão apresentadas ao final deste capítulo.

7.1. Conservação Da Massa

Aplicando o conceito de conservação em um volume arbitrário de tamanho definido no escoamento, onde seu tamanho é baseado de tal maneira que o fluido em estudo mantenha a hipótese de continuidade, assim, fazendo que possa ser descrito pela matemática eulariana. Este tamanho é definido pelo livre caminho médio que uma partícula tem em um sistema físico, no caso, o caminho que uma partícula do fluido tem até que colida contra outra partícula do mesmo fluido, como Fox *et al.* (2006) definem.

Após a escolha do tamanho do volume, aplica-se a lei de conservação da massa no mesmo.

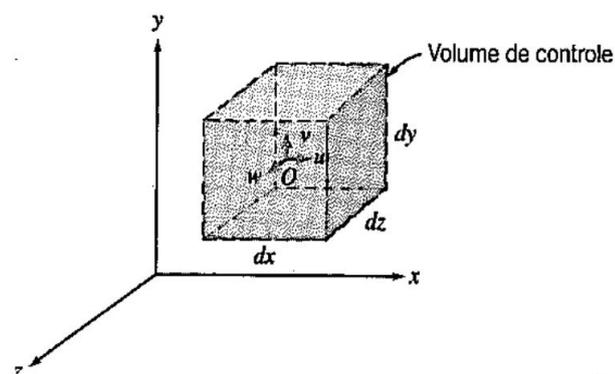


Figura 4 - Volume de controle referenciado por coordenadas cartesianas retangulares. Fonte FOX *et al.* (2006, p.186).

Fox *et al.* (2006) enunciam que para o caso, deve ser assumido que ρ é a densidade do fluido e u , v e w são as velocidades nas coordenadas x , y e z , respectivamente. Eles citam ainda que a conservação de massa é avaliada no ponto O , por isso, faz-se necessário o uso da ferramenta matemática de expansão de Taylor para aproximar o valor do volume de controle para o contorno mais exato do ponto escolhido.

Sabendo que a conservação da massa é descrita pela equação:

$$\int \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (7.1)$$

Usando a expansão de Taylor,

$$P(x) = f(x) + f'(x)x + f''(x)x^2/2! + f'''(x)x^3/3! + \dots \quad (7.2)$$

Tem-se a velocidade na direção do eixo x aproximando-se pela esquerda:

$$u = u - (\partial u / \partial x)(dx/2) - (\partial^2 u / \partial x^2)(dx/2)^2(1/2!) - \dots \quad (7.3)$$

Neste caso, são descartados os elementos de ordem superior porque os valores de x são muitos pequenos, assim, estes elevados a uma potência superior a 1 acabam sendo muito pequenos, logo, podendo ser desprezados:

$$u_- = u - (\partial u / \partial x)(dx/2) \quad (7.4)$$

O termo x é substituído por $dx/2$, porque a distância da superfície à esquerda até o ponto O é de $dx/2$. Agora, resolvendo no lado direito do sistema tem-se, aplicando a expansão de Taylor e fazendo as devidas simplificações:

$$u_+ = u + (\partial u / \partial x)(dx/2) \quad (7.5)$$

Fazendo agora a expansão de Taylor para a densidade do fluido, aproximando tanto pela esquerda e direita, e com as devidas simplificações:

$$\rho_- = \rho - (\partial\rho/\partial x)(dx/2) \quad (7.6)$$

$$\rho_+ = \rho + (\partial\rho/\partial x)(dx/2) \quad (7.7)$$

Como na equação (6.1) a conservação de massa é o produto entre a velocidade vezes a densidade, apresenta-se:

$$\rho_- u_- = (\rho - (\partial\rho/\partial x)(dx/2)) \cdot (u - (\partial u/\partial x)(dx/2))$$

$$\rho_- u_- = \rho u - \rho(\partial u/\partial x)(dx/2) - u(\partial\rho/\partial x)(dx/2) \quad (7.8)$$

Realizando o mesmo procedimento para a aproximação positiva, e logo depois os subtraindo entorno do ponto O :

$$\rho_+ u_+ = \rho u + \rho(\partial u/\partial x)(dx/2) + u(\partial\rho/\partial x)(dx/2)$$

$$\rho_+ u_+ = \rho u + \rho(\partial u/\partial x)dx + u(\partial\rho/\partial x)dx \quad (7.9)$$

Como passo final, o produto da equação (6.9) é multiplicado pelo elemento de área dA , onde a área em estudo é a multiplicação de dy vezes dz , assim:

$$(\rho(\partial u/\partial x)dx + u(\partial\rho/\partial x)dx) \cdot dydz$$

rearranjando;

$$(\rho(\partial u/\partial x) + u(\partial\rho/\partial x)) \cdot dx dy dz \quad (7.10)$$

a qual é a equação de conservação de momento na direção do eixo x . Para as outras coordenadas, através das mesmas técnicas e hipóteses:

$$(\rho(\partial v/\partial y) + u(\partial\rho/\partial y)) \cdot dx dy dz \quad (7.11)$$

$$(\rho(\partial w/\partial z) + u(\partial\rho/\partial z)) \cdot dx dy dz \quad (7.12)$$

Para White (1991) é melhor trabalhar com estas equações divididas pelo volume, pois facilitam o trabalho que é desenvolvido a partir das mesmas. Então, neste trabalho é seguido o mesmo raciocínio que o autor mostra em seu livro. Por último, há também a variação de massa que ocorre no volume de controle através da variação temporal como Fox *et al.* (2006) especificam. Este sendo modelado matematicamente como:

$$\partial\rho/\partial t \quad (7.13)$$

Assim, retornando ao caso de conservação da massa na direção da coordenada x :

$$\begin{aligned} \partial\rho/\partial t + (\rho(\partial u/\partial x) + u(\partial\rho/\partial x)) + (\rho(\partial v/\partial x) + u(\partial\rho/\partial x)) + \\ (\rho(\partial w/\partial x) + u(\partial\rho/\partial x)) = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Nas direções y e z , as fórmulas apresentam mesma estrutura. Para facilitar a visualização, pode se mudar a equação (6.14) para uma notação vetorial, onde:

$$V = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (7.15)$$

na qual, \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são os vetores unitários nas direções dos eixos x , y e z , respectivamente.

Utilizando a ferramenta matemática do cálculo vetorial, o divergente, pode-se escrever a equação (6.14) da seguinte maneira:

$$\text{div } V = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$$

$$\text{div } \rho = \partial\rho/\partial x + \partial\rho/\partial y + \partial\rho/\partial z$$

assim, rearranjando a equação (7.14):

$$\partial\rho/\partial t + \text{div } \rho V = 0 \quad (7.16)$$

a qual é a equação de conservação de massa.

Um novo termo matemático é usado para que as equações do fluido sejam simplificadas, onde este se chama Derivada Material, mais informações a seu respeito são encontradas no Apêndice C.

7.2. Equação Da Quantidade De Momento

Segundo White (1991), esta é simplesmente a aplicação da equação da segunda lei de Newton. O autor define que em sistemas avaliados que possuam fluidos, é comum dividir a equação pelo volume do corpo, assim, fazendo que trabalhe com a densidade do mesmo invés de sua massa. Pela equação de Newton:

$$F = ma$$

$$f = \rho a$$

Como mostrado anteriormente, pela derivada material, foi possível calcular a aceleração do corpo de fluido, assim:

$$f = \rho DV/dt \quad (7.17)$$

White (1991) expõem que a força aplicada sobre o corpo é dividida em dois tipos de ações: as que agem sobre a superfície do volume de controle e as que agem sobre o corpo inteiro, no caso, a força da gravidade por exemplo.

$$f_s + f_c = \rho DV/dt \quad (7.18)$$

No caso abordado neste texto, a única força de corpo avaliada é a causada pela gravidade, então:

$$F_c = \rho g \quad (7.19)$$

No caso das forças superficiais, as únicas contribuintes são as tensões normais e cisalhantes que atuam no fluido.

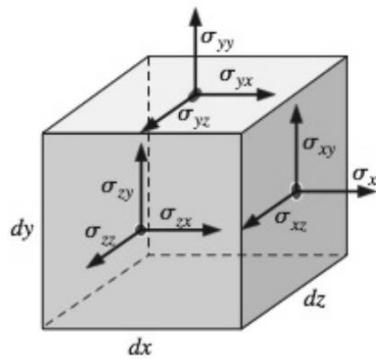


Figura 5 - Distribuição de tensões sobre um volume de controle.
Fonte ÇENGEL e CIMBALA (2007, p.365).

White (1991) descreve que as tensões atuantes no corpo podem ser escritas na forma de um tensor.

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Este tensor forma uma simetria que é precisa para se realizar o equilíbrio dos momentos entorno dos eixos, onde $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Esta formulação é feita porque o fluido em estudo é newtoniano como White (1991) cita. Escolhendo as tensões que atuam na direção da coordenada x e aplicando em um ponto, tem se:

$$dF_x = \tau_{xx} dydz + \tau_{xy} dx dz + \tau_{xz} dx dy \tag{7.20}$$

White (1991) define que em um estado de equilíbrio as tensões na face frontal seriam de magnitude igual às tensões que atuam na face de trás. Tendo as mesmas considerações que para conservação de massa sobre um volume de controle, aplica-se a expansão de Taylor:

$$\tau_{xx,frontal} = \tau_{xx,trás} + (\partial\tau_{xx}/\partial x) dx \tag{7.21}$$

Aplicando o mesmo raciocínio nas componentes cisalhantes de tensão que atuam na superfície normal a coordenada na direção x e dividindo pelo volume $dx dy dz$, tem-se a força líquida igual à:

$$f_x = \partial\tau_{xx}/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z \quad (7.22)$$

$$f_y = \partial\tau_{yx}/\partial x + \partial\tau_{yy}/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z \quad (7.23)$$

$$f_z = \partial\tau_{zx}/\partial x + \partial\tau_{zy}/\partial y + \partial\tau_{zz}/\partial z \quad (7.24)$$

Para uma maior facilidade, pode-se reescrever as equações acima na forma vetorial, assim tornando somente uma equação, a qual é:

$$f = \nabla \cdot \tau_{ij} = \partial\tau_{ij}/\partial j \quad (7.25)$$

a qual é o divergente do tensor de tensões é para ser entendido como um vetor na direção das coordenadas do tensor como White (1991) apresenta.

Portanto, a equação de momento, mais comumente chamada de Navier-Stokes, encontra-se na forma vetorial abaixo:

$$\rho g + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho DV/dt \quad (7.26)$$

No entanto, quando o fluido se encontra em repouso, isso é, quando o volume de controle não possui nenhuma aceleração, a tensão de cisalhamento devido à viscosidade se torna igual a zero e os termos de tensão normal do fluido são simplesmente a contribuição da pressão hidrostática como White (1991) define.

$$i = j \therefore \tau_{ij} = -P$$

$$i \neq j \therefore \tau_{ij} = 0$$

Os passos a seguir necessitam de um detalhamento maior, pois a determinação dos elementos ligados a distribuição de tensões necessitada de matemática tensorial para uma descrição melhor, por isso, para maiores informações sobre o assunto consultar o apêndice D.

White (1991) cita que as forças tem que apresentar este valor, quando a velocidade do volume de controle do fluido for zero. Este divergente do tensor de tensões por ser

simétrico, contém também o termo causado por taxa de deformação do volume de controle, os quais são descritos pela taxa de variação de velocidade. Deformação esta que pode ser descrita pela equação de Hooke. Foi considerada por Stokes em 1845, o qual apresentou três postulados para esta deformação, segundo White (1991):

- O fluido é um corpo contínuo e as tensões podem ser avaliadas com taxas de deformações;
- O elemento avaliado é isotrópico;
- Quando as taxa de deformações forem zero, a deformação do volume de controle deve ser somente a causada pela pressão hidrostática,

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = 1 \rightarrow i = j \text{ \& } \delta_{ij} = 0 \rightarrow i \neq j$$

onde, δ é o delta de Kronecker.

Pelos postulados de Stokes, pode-se dizer que:

$$\tau_{11} = -P + C_1\epsilon_{11} + C_2\epsilon_{22} + C_3\epsilon_{33} \quad (7.27)$$

Por se tratar de um material isotrópico, segundo postulado, pode se assumir que ϵ_{22} e ϵ_{33} são iguais, pode-se ainda assumir que $C_2=C_3$. Com isso, White (1991) descreve que a equação (7.27) pode ser reescrita como:

$$\tau_{11} = -P + K_\mu\epsilon_{11} + C_2(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \quad (7.28)$$

Na qual $K_\mu = C_1 - C_2$.

Com esta mudança na equação, pode-se mostrar o comportamento de tensões que atuam no corpo de fluido quando este não está em repouso, assim, representando as tensões normais atuantes no corpo, tem-se, pela equação (7.28):

$$\tau_{xx} = -P + K_\mu\epsilon_{xx} + C_2 \text{div } V \quad (7.29)$$

$$\tau_{yy} = -P + K_{\mu}\epsilon_{xx} + C_2 \operatorname{div} V \quad (7.30)$$

$$\tau_{zz} = -P + K_{\mu}\epsilon_{xx} + C_2 \operatorname{div} V \quad (7.31)$$

Os termos de cisalhamento, por simetria, não apresentam o último termo da equação (7.28) e tão pouco os termos de pressão, pois esta atua na direção da normal a superfície do corpo. Assim estes termos cisalhantes são descritos pelo seguinte modelo matemático, exemplo:

$$\tau_{xy} = K_{\mu}\epsilon_{xy} \quad (7.32)$$

Em escoamento entre placas paralelas, foi notado que o coeficiente K_{μ} possui o valor de duas vezes a viscosidade absoluta, como era independente da viscosidade, recebeu o nome de Segundo Coeficiente de Viscosidade, assim White (1991) apresenta. Já no caso do coeficiente C_2 , este foi mudado para λ e recebeu o nome coeficiente viscoso de volume, onde este é relacionado com a expansão volumétrica (WHITE, 1991).

Na notação vetorial, as equações (7.29), (7.30), (7.31) e (7.32) podem ser escritas como:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i) + \delta_{ij}\lambda \operatorname{div} V \quad (7.33)$$

Assim, é exibido na forma vetorial o formato final da equação de momento que descreve um fluido. Colocando os termos de densidade e derivada material da velocidade do fluido no lado esquerdo da equação:

$$\rho DV/dt = \rho g - \nabla P + \partial/\partial x_j [\mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i) + \delta_{ij}\lambda \operatorname{div} V] \quad (7.34)$$

a qual é a forma final da equação de Navier-Stokes para a equação de momento de um fluido newtoniano compressível. Comparando com a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis:

$$\rho DV/dt = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 V$$

Vê-se que os termos de λ desaparecem, a viscosidade absoluta passa a ser constante e o termo devido à tensão cisalhante acaba se tornando um laplaciano da velocidade do fluido. Na verdade, λ também não é avaliado para cálculos com fluidos compressíveis, pois sua contribuição é negligenciável, como White (1991) expõem. Porém, em estudos recentes sobre Aeroacústica, λ vem se apresentando como um fator de grande importância nas equações.

7.3. Conservação Da Energia

Esta parte da equação da primeira lei da termodinâmica, apresentada anteriormente. Primeiramente, reescrevendo-a como uma taxa de variação temporal (WHITE, 1991), tem-se:

$$DE/Dt = DQ/Dt + DW/Dt \tag{7.35}$$

Com isso, a equação (A.2) fica (consultar apêndice A):

$$DE/Dt = \rho(De/Dt + V DV/Dt - g \cdot V) \tag{7.36}$$

Encontrando os valores agora de Q e W , utiliza-se um modelo físico de fluxo de calor e trabalho no volume estudado.

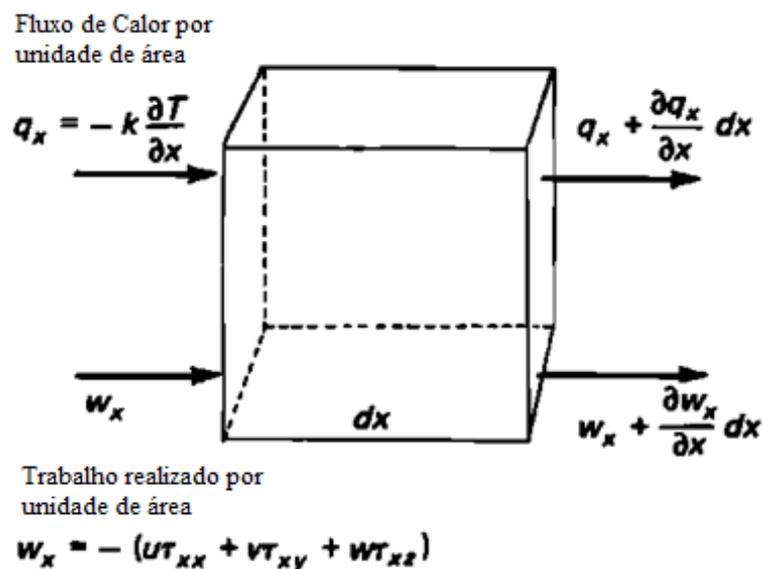


Figura 6 - Modelo físico de fluxo de calor e trabalho sobre o volume de controle.
 Fonte: WHITE (1991, p.70).

White (1991) argumenta que a única forma de transferência de calor para o volume de controle é descrita pela lei de Fourier:

$$q = -k\nabla T \quad (7.37)$$

Então a taxa de calor que é transferida ao volume de controle é, no caso, a transferência na direção da coordenada x vezes a área do volume:

$$Q_{-x} = q_x dydz$$

Por expansão de Taylor entorno do ponto de entrada, pode-se encontrar o fluxo de calor na área de saída:

$$Q_{+x} = (q_x + (\partial q_x / \partial x) dx) dydz$$

somando-se ambos os valores:

$$Q_x = (-q_x dydz - (-(q_x + (\partial q_x / \partial x) dx)) dydz$$

$$Q_x = -(\partial q_x / \partial x) dx dydz \quad (7.38)$$

Seguindo mesma lógica e desenvolvendo para as outras direções de condução do calor, tem-se, com todas as direções:

$$Q = -(\partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y + \partial q_z / \partial z) dx dy dz$$

logo,

$$DQ/Dt = -div q$$

$$DQ/Dt = +div(k\nabla T) \quad (7.39)$$

Passando agora para encontrar o valor do trabalho, por expansão de Taylor, tem-se:

lado esquerdo:

$$W_{-x} = w_x = -(u\tau_{xx} + u\tau_{xy} + u\tau_{xz})$$

lado direito:

$$W_{+x} = -(w_x + (\partial w_x / \partial x)dx)$$

Ambos os trabalhos por unidade de área. Assim, somando-os e fazendo as simplificações necessárias:

$$DW_x/Dt = -(\partial w_x / \partial x)dx = -\partial / \partial x (u\tau_{xx} + u\tau_{xy} + u\tau_{xz})$$

Avaliando mais minuciosamente, observa-se que as outras direções de fluxo de trabalho possuem a mesma forma, isso acarreta que a expressão do trabalho pode ser reescrita como um divergente do produto interno entre a velocidade e as tensões que atuam no fluido (WHITE, 1991).

$$DW/Dt = -div w = \nabla \cdot (V \cdot \tau_{ij})$$

White (1991) define que para ocorrer simplificações que facilitam o cálculo final e deixa a equação de energia final mais fácil de interpretar, precisa-se que ocorra uma comutação matemática:

$$\nabla \cdot (f_a \cdot f_b) = f_a \cdot (\nabla \cdot f_b) + f_b \cdot (\nabla \cdot f_a)$$

a qual é uma das propriedades do divergente na matemática, assim aplicando a equação acima de trabalho tem-se:

$$\nabla \cdot (V \cdot \tau_{ij}) = V \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) + \tau_{ij}(\nabla \cdot V)$$

onde,

$$\nabla \cdot V = \partial u_i / \partial x_j$$

Sabendo que o divergente das tensões é relacionado com a aceleração do volume de controle menos sua contribuição de energia potencial, como exposto pela equação (7.26).

Logo, multiplicando este termo pela velocidade:

$$V \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) = \rho(V DV/dt - g \cdot V)$$

Com isso, substituindo todos os valores encontrados de energia interna, calor e trabalho na equação (7.35):

$$\rho(De/Dt + V DV/Dt - g \cdot V) = \text{div}(k\nabla T) + \rho(V DV/dt - g \cdot V) + \tau_{ij}(\partial u_i / \partial x_j) \quad (7.40)$$

simplificando,

$$\rho(De/Dt) = \text{div}(k\nabla T) + \tau_{ij}(\partial u_i / \partial x_j) \quad (7.41)$$

Pelos postulados de Stokes, White (1991) cita que a contribuição pelas tensões são um resultado das somas de tensões normais, cisalhantes e pressão.

$$\tau_{ij}(\partial u_i / \partial x_j) = \tau'_{ij}(\partial u_i / \partial x_j) - P \text{div} V$$

a qual o termo $P \text{div} V$ pode-se ser escrito de maneira diferente através da equação (7.16).

$$D\rho/Dt + \rho \text{div} V = 0$$

$$-D\rho/Dt = \rho \text{div} V$$

$$P \text{div} V = -(P/\rho)(D\rho/Dt)$$

através de algumas propriedades matemáticas:

$$P \operatorname{div} V = \rho(D/Dt)(P/\rho) - DP/Dt$$

Assim, a equação (7.41) assume a forma:

$$\rho(De/Dt) = \operatorname{div}(k\nabla T) + \tau'_{ij}(\partial u_i/\partial x_j) - \rho(D/Dt)(P/\rho) + DP/Dt$$

$$\rho[(De/Dt) + (D/Dt)(P/\rho)] = \operatorname{div}(k\nabla T) + \tau'_{ij}(\partial u_i/\partial x_j) + DP/Dt$$

$$\rho[(D/Dt)(e + P/\rho)] = \operatorname{div}(k\nabla T) + \tau'_{ij}(\partial u_i/\partial x_j) + DP/Dt \quad (7.42)$$

a qual é a soma da energia interna com a pressão dividida pela densidade é a entalpia do fluido.

Investigando mais a avaliação da equação (7.42), o termo que envolve a tensão cisalhante é a dissipação de energia devido à viscosidade do fluido, onde é a viscosidade absoluta multiplicando quadrado das velocidades, onde esta nova função é passada a chamar função de dissipação, representada pela letra grega Φ , como White (1991) detalha.

$$\rho(Dh/Dt) = Dp/Dt + \operatorname{div}(k\nabla T) + \Phi \quad (7.43)$$

na qual,

$$\begin{aligned} \Phi = \mu[2(\partial u/\partial x)^2 + 2(\partial v/\partial y)^2 + 2(\partial w/\partial z)^2 + 2((\partial v/\partial x) + \\ (\partial u/\partial y))^2 + 2((\partial w/\partial y) + (\partial v/\partial z))^2 + 2((\partial u/\partial z) + (\partial w/\partial x))^2] + \\ \lambda[(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y) + (\partial w/\partial z)]^2 \end{aligned} \quad (7.44)$$

White (1991) cita uma relação da equação (7.44) em uma situação de um gás incompressível, onde a equação se torna:

$$\rho c_p(DT/Dt) = \beta_T T(Dp/Dt) + \operatorname{div}(k\nabla T) + \Phi \quad (7.45)$$

Esta mostra que correções com a expansão térmica são necessárias na parte contribuinte da energia quanto à pressão e a substituição da entalpia por $c_p T$, pois casos de gases incompressíveis é considerado como sendo um gás perfeito.

Portanto, as três equações básicas que descrevem um fluido newtoniano são (7.16), (7.34) e (7.43).

Conservação da massa:

$$\partial\rho/\partial t + \text{div } \rho V = 0$$

Conservação de momento:

$$\rho DV/dt = \rho g - \nabla p + \partial/\partial x_j [\mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)] + \delta_{ij}\lambda \text{div } V$$

Conservação de energia:

$$\rho(Dh/Dt) = Dp/Dt + \text{div}(k\nabla T) + \Phi$$

É visto que as equações do fluido dependem das grandezas físicas de densidade e viscosidade para serem calculadas, apesar do presente trabalho utiliza-las como constantes é possível encontrar maiores informações sobre aquelas no apêndice E.

8. EQUAÇÃO DE BERNOULLI

No trabalho, a pressão tem uma função importante no escoamento do fluido, pois é avaliada em altas velocidades. A equação de Bernoulli fornece que contribuições na pressão do fluido ocorrem pela parcela envolvendo a energia cinética do mesmo, como será apresentado a seguir. Para dedução da equação, algumas hipóteses sobre o fluido são assumidas como Çengel e Cimbala (2007) expõem:

- Escoamento compressível;
- Efeitos viscosos são negligenciáveis;
- Regime permanente.

Escolha-se um volume infinitesimal em um escoamento de um fluido, e aplica-se a equação da segunda lei de Newton para descrevê-la segundo Çengel e Cimbala (2007).

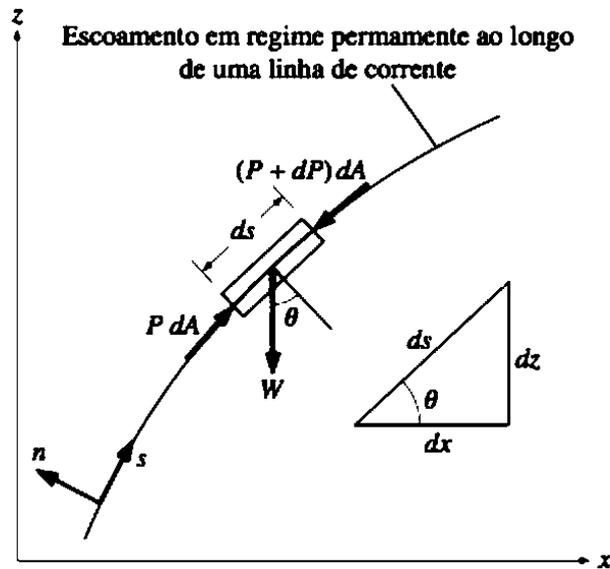


Figura 7 - Volume arbitrário dentro de um escoamento influenciado por pressão e peso. Fonte: ÇENGEL e CIMBALA (2007, p.162).

$$\sum F = ma$$

$$pdA - (p + dp)dA - W_p \text{sen}\theta = mV dV/ds \tag{8.1}$$

Com algumas considerações:

$$\text{sen}\theta = dz/ds$$

$$m = \rho V = \rho dA ds$$

$$W_p = mg = \rho g dA ds$$

logo, a equação (8.1) fica:

$$-dpdA - \rho g dA ds(dz/ds) = \rho dA ds V dV/ds$$

realizando as simplificações,

$$-dp - \rho g dz = \rho V dV$$

$$dp + \rho V dV + \rho g dz = 0$$

integrando,

$$p + 1/2 \rho V^2 + \rho g z = Cte$$

$$p/\rho + 1/2 V^2 + g z = Cte \quad (8.2)$$

a qual é a forma final da equação de Bernoulli e por Çengel e Cimbala (2007) esta pode ser enunciada pela seguinte citação:

“A soma das energias cinéticas, potencial e de escoamento de uma partícula de fluido é constante ao longo de uma linha de corrente durante um escoamento em regime permanente quando os efeitos da compressibilidade e do atrito são desprezíveis.”

9. DESENVOLVIMENTO

Esta seção do texto trata somente das deduções das equações que descrevem as camadas limites de momento e térmica do escoamento, este quando escoar envolta de um corpo submerso no fluido.

9.1. Transformações Das Equações

Antes de realizar as transformações que resultam nas equações das camadas limites, fazem-se simplificações nas equações básicas de um fluido a fim de facilitar o cálculo. Para isso, algumas hipóteses são feitas, segundo White (1991), são:

- Escoamento em regime permanente;
- Escoamento bidimensional;
- Calores específicos de volume e pressão constantes do fluido são constantes;
- $w = 0, z = 0, \partial/\partial z = 0$;
- A camada limite é uma região muito fina, sendo que a variação de pressão na direção de perpendicular a placa adjacente do escoamento seja aproximadamente zero;
- $v \ll u, \partial/\partial x \ll \partial/\partial y$.

Assim, as equações (6.16), (6.50) e (6.58) reescrevendo-as:

$$\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y = 0 \quad (9.1)$$

$$\rho u(\partial u/\partial x) + \rho v(\partial u/\partial y) = - dp_{\infty}/dx + \partial/\partial y [\mu(\partial u/\partial y)] \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} \rho u(\partial h/\partial x) + \rho v(\partial h/\partial y) = \\ u(dp_{\infty}/dx) + (\partial/\partial y)[(\mu/Pr)(\partial h/\partial y)] + \mu(\partial u/\partial y)^2 \end{aligned} \quad (9.3)$$

na qual o subscrito ∞ significa na corrente livre do escoamento.

Estas são as equações de conservação de massa, momento e conservação de energia, respectivamente, com as devidas simplificações. São derivadas das relações de Crocco 1932 e Busemann 1931, como White (1991) define.

9.1.1. Equação De Momento Da Camada Limite

Neste trabalho é seguido a lógica e construção da equação pela transformação de Illingworth em 1950, segundo White (1991). O primeiro passo é escrever os produtos de densidades e velocidades do fluido como uma derivação de uma função corrente. Com a definição acima, pode-se escrever que as velocidades u e v são os produtos da derivação da função corrente.

$$\partial\Psi/\partial y = \rho u$$

$$\partial\Psi/\partial x = -\rho v$$

White (1991) cita que esta relação elimina a premissa de conservação de massa, pois há um termo negativo de massa, o que fisicamente é impossível. Havendo isto, acontece um processo em que a variável y é mudada pela variável $\int \rho dy$, para que o problema de conservação da massa seja resolvido. Com isso, são substituídas as variáveis x , y e ρ por outras duas variáveis, as quais são (ξ, η) . Este processo é chamado de similaridade em matemática, onde estas façam com que as equações de Ψ e u assumam os seguintes valores:

$$\Psi(\xi, \eta) = \int \rho u dy = G(\xi) f'(\eta) \quad (9.4)$$

$$u(\xi, \eta) = U_\infty(\xi) f'(\eta) \quad (9.5)$$

Substituindo estes valores na equação (8.2), é encontrado que a equação de momento será independente de ξ . Portanto, White (1991) detalha que vários passos para transformações foram feitos, porém, o abordado neste trabalho é de Illingworth. O qual define que os efeitos viscosos são ligados a variável ξ , enquanto os efeitos de densidade são ligados a variável η . White (1991) expõem estes valores como:

$$\xi = \int_0^x \rho_\infty(x) U_\infty(x) \mu_\infty(x) dx \quad (9.6)$$

$$\eta = (U_\infty / \sqrt{2\xi}) \int_0^y \rho dy \quad (9.7)$$

reescrevendo o termo de pressão pela equação de Bernoulli da equação (8.2),

$$p_\infty / \rho + (1/2)U_\infty^2 + gz = Cte$$

assumindo $z = 0$,

$$p_\infty / \rho = -(1/2)U_\infty^2 + Cte$$

derivando em relação eixo de coordenada x ,

$$p_\infty = -\rho(1/2)U_\infty^2 + Cte$$

$$dp_\infty / dx = -\rho U_\infty (dU_\infty / dx) \quad (9.8)$$

Com isso, pode-se substituir na equação (9.2) os valores das equações (9.6), (9.7) e (9.8). Antes da substituição, são levantadas as hipóteses de que:

$$u(x, 0) = 0 ; u(x, \infty) = U_\infty$$

$$u(x_0, y) = g(y); v(x, 0) = 0$$

Pela equação (9.5),

$$f'(\eta) = u(\xi, \eta) / U_\infty(\xi)$$

analisando-a,

$$y = 0 \rightarrow f'(\eta) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$$

substituindo a equação (9.5) na equação (9.1),

$$\partial(\rho v)/\partial y = -(\partial/\partial x)(\rho U_{\infty} f') \quad (9.9)$$

Substituindo o termo de v da equação, usa-se a equação (9.4) na definição de função corrente,

$$v = -(\partial/\partial x)(G(\xi)f'(\eta) + f(y)) \quad (9.10)$$

Antes da substituição das equações anteriores na equação (9.2), realiza as derivações da equação (9.5), para tornar o texto mais organizado e a equação de momento da camada limite ficar de forma mais clara.

$$u(\xi, \eta) = U_{\infty}(\xi)f'(\eta) \quad (9.11)$$

através da derivação por regra da cadeia:

$$\partial u/\partial x = U'_{\infty}(\xi)(d\xi/dx)f'(\eta) + U_{\infty}(\xi)f''(\eta)(d\eta/dx) \quad (9.12)$$

Agora, fazendo para a variação em y ,

$$\partial u/\partial y = U_{\infty}(\xi)f''(\eta)(d\eta/dy) \quad (9.13)$$

derivando novamente,

$$\mu(\partial^2 u/\partial y^2) = \mu(x)U_{\infty}(\xi)f'''(\eta)(d\eta/dy)^2 + \mu(x)U_{\infty}(\xi)f''(\eta)(d^2\eta/dy^2) \quad (9.14)$$

Com os valores das equações (9.5), (9.8), (9.9), (9.10) e as quatro equações acima, são substituídos na equação (9.2), reescrevendo-a:

$$\begin{aligned}
& \rho(U_\infty(\xi)f'(\eta))[U'_\infty(\xi)(d\xi/dx)f'(\eta) + U_\infty(\xi)f''(\eta)(d\eta/dx)] + \\
& \rho[-(\partial/\partial x)(G(\xi)f'(\eta) + f(y))][U_\infty(\xi)f''(\eta)(d\eta/dy)] = \\
& -\rho U_\infty(dU_\infty/dx) + \mu(x)U_\infty(\xi)f'''(\eta)(d\eta/dy)^2 + \\
& \mu(x)U_\infty(\xi)f''(\eta)(d^2\eta/dy^2)
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Tendo os valores das equações (9.6) e (9.7), assim, substituindo-os na equação (9.15) e com algumas simplificações, chega-se ao resultado final da equação geral do momento da camada limite, a qual é apresentada (WHITE, 1991):

$$(C_R f'')' + f f''' + (2\xi/U_\infty)(dU_\infty/d\xi)[(\rho_\infty/\rho) - f'^2] = 0 \tag{9.16}$$

Na qual $C_R = \rho\mu/\rho_\infty\mu_\infty$.

Escoamento De Falkner-Skan

Como será analisado um escoamento na entrada de um difusor cônico de turbina, é necessário modelar o escoamento de tal maneira que este adeque-se fisicamente no problema proposto. Os escoamentos de Falkner-Skan, segundo White (1991), são regidos por equações que descrevem a velocidade da seguinte forma:

$$U = Kx^m \tag{9.17}$$

na qual, m é determinado pela angulação que a parede faz com a linha paralela do sentido de escoamento.

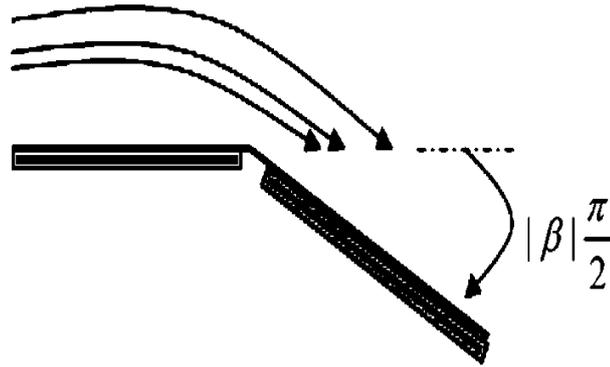


Figura 8 - Escoamento de um fluido em volta de um canto (difusão).
 Fonte: BARARNIA *et al.* (2012).

Assim, o termo na equação (9.12):

$$(2\xi/U_\infty)(dU_\infty/d\xi)$$

Passa por uma mudança para que se adeque ao problema. Primeiramente, assuma-se que o escoamento é unidirecional e sua única variável é ξ , pela equação (9.6) a densidade e viscosidade são constantes, assim:

$$\left(\left(2\rho_\infty\mu_\infty \int_0^X U_\infty dx \right) / U_\infty \right) \left(dU_\infty / d \left(\rho_\infty\mu_\infty \int_0^X U_\infty dx \right) \right)$$

$$\left(\left(2 \int_0^X U_\infty dx \right) / U_\infty \right) (dU_\infty / U_\infty)$$

substituindo os valores de U pelos valores de U na equação (9.13):

$$\left(\left(2 \int_0^X Kx^m dx \right) / Kx^m \right) (d(Kx^m) / Kx^m)$$

derivando e integrando:

$$((2Kx^{m+1}) / (m + 1)Kx^m)(mKx^{m-1} / Kx^m)$$

$$((2mx^{m+m}) / (m + 1)x^{m+m})$$

$$\beta = 2m/(m + 1) \quad (9.18)$$

Portanto, a equação (9.12) passa a ter a seguinte forma:

$$(C_R f'')' + f f''' + [2m/(m + 1)][(\rho_\infty/\rho) - f'^2] = 0 \quad (9.19)$$

Segundo Bejan e Kraus (2003), resultados numéricos para β foram encontrados no alcance de $-0,0904 < \beta < \infty$, onde o limite inferior é selecionado pelo ponto de desprendimento da camada limite. Outro ponto importante é a pressão criada por este tipo de escoamento, a qual pode ser facilmente deduzida pela equação (9.8):

$$dp_\infty/dx = -\rho_\infty K x^m (dK x^m/dx)$$

$$dp_\infty/dx = -\rho_\infty K x^m (m K x^{m-1})$$

$$dp_\infty/dx = -\rho_\infty m K^2 x^{2m-1} \quad (9.20)$$

9.2. Equação De Energia Da Camada Limite

Como White (1991) expõem, a mudança na equação (9.3) é através da escolha da variável de entalpia que muda para um produto da entalpia de corrente livre com uma função g .

$$h(x, y) = h_\infty(\xi)g(\eta) \quad (9.21)$$

Utilizando esta relação e calculando suas derivadas:

$$\partial h/\partial x = h'_\infty(\xi)(d\xi/dx)g(\eta) + h_\infty g'(\eta)(d\eta/dy) \quad (9.22)$$

$$\partial h/\partial y = h_\infty g'(\eta)(d\eta/dy) \quad (9.23)$$

$$\partial^2 h/\partial y^2 = h'_\infty(\xi)g''(\eta)(d\eta/dy)^2 + h_\infty g'(\eta)(d^2\eta/dy^2) \quad (9.24)$$

Substituindo na equação (9.3) os valores de das equações (9.8), (9.10), (9.11), (9.13) e as derivações acima, tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho[(U_\infty(\xi)f'(\eta))(h'_\infty(\xi)(d\xi/dx)g(\eta) + h_\infty g'(\eta)(d\eta/dy))] + \\ & \rho\{[-(\partial/\partial x)(G(\xi)f'(\eta) + f(y))][h_\infty g'(\eta)(d\eta/dy)]\} = \\ & (U_\infty(\xi)f'(\eta))(-\rho U_\infty(dU_\infty/dx)) + (\mu/Pr)[h'_\infty(\xi)g''(\eta)(d\eta/dy)^2 + \\ & h_\infty g'(\eta)(d^2\eta/dy^2)] + \mu[U_\infty(\xi)f''(\eta)(d\eta/dy)]^2 \end{aligned} \quad (9.25)$$

Utilizando do mesmo método para a dedução da equação de momento, fazendo simplificações e substituindo os valores de ξ e η pelas equações (9.6) e (9.7), tem-se:

$$[(C_R/Pr)g']' + fg' = [(\xi/H_\infty)(dH_\infty/d\xi)]f'[2g + (U_\infty^2/h_\infty)f'^2] - (U_\infty^2/h_\infty)C_R f''^2 \quad (9.26)$$

na qual $H_\infty = h_\infty + U_\infty^2/2$; entalpia total de estagnação da corrente livre.

A equação (9.26) é a forma final da equação de energia da camada limite, entretanto White (1991) cita que alguns modelos físicos simplificam as equações (9.19) e (9.26).

10. PROCEDIMENTO

Fazem-se algumas simplificações nas equações que são à base deste texto. White (1991) detalha que a equação (9.19) pode ter algumas modificações. Como no livro do autor, este texto utiliza as modificações de Cohen e Reshotko 1956, a qual é para tipos de escoamento compressível Falkner-Skan.

White (1991) cita que é assumido que o parâmetro de Chapman-Rubensin é igual a um, ou seja, os efeitos viscosos são aproximados. Outro ponto é que o número de Prandtl é unitário, assim, a taxa de difusão viscosa é igual à taxa de difusão térmica, o que para o ar, é uma hipótese aceitável. Outra questão que o autor cita, é que a relação de densidade local por densidade da corrente livre é aproximadamente o valor da função g , a qual é razoável, pois como não haverá grandes diferenças na pressão dentro da região da camada limite, pela equação de gás perfeito, pode-se assumir que a relação de densidades é relacionada com a função g como White (1991) detalha.

$$\rho_{\infty}/\rho(x, y) = (P/RT_{\infty})(RT(x, y)/P) = T(x, y)/T_{\infty} \approx h(x, y)/h_{\infty} \approx g(\eta)$$

Assim, a equação de momento apresenta uma forma final igual à apresentada abaixo:

$$f''' + ff'' + \beta(g - f'^2) = 0 \quad (10.1)$$

na qual $\beta = 2m/(m + 1)$.

White (1991) expõem que para a equação de energia, algumas outras simplificações devem ser feitas, a primeira é o valor relacionado ao parâmetro de Eckert:

$$\widehat{Er} = U_{\infty}^2/h_{\infty}$$

$$U_{\infty}^2/c_p T_{\infty} = (\gamma - 1)U_{\infty}^2/\gamma RT_{\infty} = (\gamma - 1)Ma_{\infty}^2$$

Outra hipótese do autor é de que o termo:

$$(\xi/H_{\infty})(dH_{\infty}/d\xi) = 0$$

porque a entalpia da corrente livre não varia com ξ , pode-se reescrever a equação (9.26) como:

$$g'' + fg' = -(\gamma - 1)Ma_\infty^2 f'^2 \quad (10.2)$$

Assim, as equações de momento e energia da camada limite estão totalmente definidas. Em muitos casos, o lado direito da equação (10.2) é aproximado de zero, pois os efeitos pelo número de Mach são pequenos quando este é menor que um, já que é um termo ao quadrado como White (1991) examina. Com isso, a equação passa a ser:

$$g'' + fg' \approx 0 \quad (10.3)$$

10.1. Perfil De Temperatura

Pode-se escrever o a função adimensional da cama limite térmica como sendo uma função da temperatura do fluido, assim, sendo compatível com a equação (10.3).

$$g(\eta) = h(x, y)/h(\xi)$$

White (1991) cita que pode-se aproximar as entalpias pela equação (4.4), assim:

$$g(\eta) = c_p(T(\eta) - T_\infty)/c_p(T_p - T_\infty) \quad (10.4)$$

na qual o termo T_p é a temperatura da parede e $T(\eta)$ é a temperatura local do fluido.

Considerando que não há variação do calor específico a pressão constante do ar, é possível simplificar a equação (9.3). Logo, tem-se um novo parâmetro adimensional do fluido, o qual passa a ser chamado de θ (WHITE, 1991).

$$\theta(\eta) = (T(\eta) - T_\infty)/(T_p - T_\infty) \quad (10.5)$$

na qual o novo parâmetro também varia com η , entretanto, seu valores de contorno são diferentes, onde:

$$\theta(0) = 1 ; \theta(\infty) = 0$$

11. ALGORITMO

Primeiramente, em Python as bibliotecas que serão usadas no algoritmo são chamadas:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from scipy.optimize import newton_krylov
import locale
```

Após a chamada das funções, é criada uma função no Python, onde o objetivo desta é retornar um *array* (vetor) no formato da equação (11.9).

```
def Illingworth(z, n):

    lambda m, Mae: m, Mae

    BETA = 2*m / (m+1)
    Pr = 1
    gama = 1.4

    B = Pr*(gama-1)*(Mae[i]**2)

    return np.array([z[1],z[2],(BETA*((z[1]**2)-z[3])-(z[0]*z[2])),z[4],-B*(z[2]**2)-(z[0]*z[4])])
```

Para uma visão mais detalhada do *array* da função *Illingworth*, consultar o apêndice F. Os subscritos na equação (F.12) são as posições dos argumentos no vetor de estimativa inicial (apêndice F). Estas equações são resolvidas no espaço de η , o qual por similaridade contém os valores das coordenadas x e y . Assim, é criado um vetor que contenha os valores de η de zero até um número desejado.

```
eta = np.linspace(0.0,5.0,10000)
```

onde, a função *linspace* cria um vetor que varia de 0 até 5 seccionado em 10000 pontos.

Como dito anteriormente, um vetor de estimativa inicial para as funções é criado também, neste vetor coloca-se os valores que as funções f e g e suas derivadas possuem no

ponto inicial do cálculo. Como demonstrado anteriormente no texto os valores são os seguintes:

$$f(0) = 0$$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(0) = g_w \\ g(\infty) = 1 \end{cases}$$

$$g'(0) = 0$$

A primeira e a segunda condição, quando η é igual a zero, vêm com respeito à condição de não deslizamento do fluido na interface sólido-fluido. A segunda condição, quando o η é infinito, diz que é a velocidade do fluido na região da camada limite assume velocidade igual à velocidade da corrente livre, logo esta delimita a região da camada limite.

$$f'(\infty) = 1 = u/U_\infty$$

A terceira condição indica que quando η é zero, o fluido admite o valor de temperatura da placa que esta na interface sólido-fluido. Quando η no infinito, o valor da temperatura do fluido na região da camada limite é igual ao valor de temperatura do fluido em corrente livre.

$$g(\infty) = 1 = h(x, y)/h_\infty(\xi)$$

A última condição diz que não há transferência de calor da parede para o fluido ou vice versa, então, pode-se considerar que a parede é adiabática. Estas condições são apresentadas por White (1991), as quais ocorrem em alguns fenômenos. Com as condições descritas, o vetor de estimativa inicial apresenta a seguinte forma:

```
z = np.array([0.0,0.0,0.0,1.0,0.0])
```

a função g , neste caso, possui um valor unitário.

Como o Python não reconhece que a iteração deve ser feita até que f' e g tenham um valor igual a um, é criada uma nova função onde esta recebe o vetor de estimativa inicial. O seu módulo encarrega de resolver a EDO, chamada pela função *Odeint*, onde usada o vetor criado pela função anterior e utiliza o vetor de estimativa inicial para os cálculos e por fim, a função interage em todo o espaço delimitado pelo vetor de η .

```
def vsolucao(z):
```

```
    f = odeint(illingworth, z, eta)
```

```
    return np.array([f[0,0], f[0,1], 1.0 - f[-1,1], 1.0 - f[-1,3], f[0,4]])
```

Depois de realizar as iterações, a função retorna um valor no formado do vetor acima. O primeiro valor é o valor de posição de iteração da solução, o segundo é o valor inicial da derivada da função f . o terceiro é 1.0 menos o último valor da derivada de f , por isso leva o sufixo de posição igual à $[-1,1]$, onde -1 indica que é o último valor do vetor. Isto é feito para certificar-se que interaja até 1.0. O próximo valor, que é a função g é construído sobre a mesma lógica. Por fim, o último valor retorna o valor inicial de g' .

Em seguida, com este vetor gerado uma nova função é utilizada, a qual recebe o vetor gerado e com o vetor de estimativa inicial faz iterações até que se encontrem as raízes de cada argumento do vetor gerado.

```
F = newton_krylov(vsolucao, z)
```

Por último, como as raízes encontradas do vetor de EDOs e salvas na variável F este passa para a última função do bloco principal, onde é novamente chamada a função *Odeint*, e com as raízes encontradas. Esta as utiliza como sendo o ponto inicial de iteração do vetor gerado pela primeira função, no caso, a equação (11.9), essa iteração ocorre no espaço estabelecido de η .

```
f = odeint(illingworth, F, eta)
```

Assim, a variável f é a solução final do problema e esta contém os valores das funções f e g . As funções seguintes geram as figuras de perfil de velocidade e térmico através dos valores das funções f e g .

```
Yr = np.linspace(0.0,1.0,10000)
plt.figure(figsize=(16,9))
plt.plot(F[:,1],Yr, 'k', label='perfil de velocidade')

plt.figure(figsize=(16,9))
plt.plot(F[:,3],Yr, 'k', label='perfil de temperatura')
```

Por fim, o algoritmo primário utiliza os valores de espessura das camadas limites para calcular os perfis que o escoamento irá apresentar sobre a placa, tanto de momento quanto térmico.

Para análise de comparações, outro algoritmo é feito com a mesma estrutura do algoritmo anterior para cálculo da função $f(\eta)$ e $g(\eta)$, porém este trabalha com a temperatura que o escoamento na região da camada limite apresenta, entretanto, o único ponto que este sofre mudança é no vetor de limites superiores do contorno.

def raizes(z):

```
    r = odeint(FalknerSkan, z, eta)
    return np.array([r[0,0], r[0,1], 1.0 - r[-1,1], 1.0 - r[0,3], r[-1,3]])
```

12. RESULTADOS E ANÁLISES

Pode ser avaliado pela equação (10.1) que a geometria onde o escoamento ocorre é extremamente ligada aos resultados que esta gera. No caso da equação (10.2), como White (1991) cita, esta é extremamente ligada aos valores de Ma , por isso, para escoamentos com valores de Ma baixo a equação que descreve a energia da camada limite passa a ser a equação (10.3).

Os resultados dos gráficos a seguir foram obtidos através dos algoritmos detalhados no capítulo 5, e suas versões completas encontram-se anexadas a este trabalho. Os estudos variam na angulação do difusor estudado, variando de aproximadamente -18° sentido horário até 90° no sentido anti-horário, com referência ao eixo da coordenada x . Também uma análise quando a parede se encontra perpendicular ao escoamento, estagnação total. Todos os casos avaliados com:

- $g(0) = 1$;
- Parede adiabática do difusor;
- $c_p = cte$; $c_v = cte$;
- Efeitos viscosos são desprezíveis;
- Relações de densidade local e da corrente livre são aproximadas da função $g(\eta)$;
- Número de Prandtl é unitário;
- Viscosidade cinemática igual a $0,000001249 \text{ m}^2/\text{s}^2$;
- A placa em estudo tem $0,5 \text{ m}$ de comprimento.

Primeiro compara-se os resultados do algoritmo com alguns resultados fornecidos na literatura. Os valores que são usados de referência são os valores adimensionais que envolvem a aceleração do fluido no ponto sobre a placa. Primeiro é comparado o valor de um escoamento incompressível, assim, a relação de densidade torna-se igual a 1 na equação (10.2).

Tabela 1 - Valores de $f''(0)$ para diversos valores de β no escoamento incompressível. - 2016

β	1º Método apresentado	White (1991)	Rajagopal et al. (1983)	Bor-Lih Kuo (2005)	Bararnia et al. (2012)
-0,19884	0,0072	0,0	****	****	0,035
-0,18	0,1286	0,1286	****	****	****
0,00	0,4696	0,4696	0,4696	0,4696	0,4683
0,3	0,7749	0,7748	0,7747	0,7755	0,7746
0,4	0,8545	****	0,8544	0,8549	0,8536
0,5	0,9277	****	0,9276	0,9279	0,9262
1,0	1,2413	1,2326	1,2325	1,2312	1,2313

Fonte: autoria própria.

São apresentados os valores da função f'' com base nas equações modificadas (10.2) e (10.3), as quais são apresentadas no artigo de Cho e Aessopos (2004). Por direitos autorais de imagem, o artigo de Cho e Aessopos (2004) não apresenta nenhuma figura para comparação.

$$f''' + ff'' + \beta(g - f'^2) = 0; \quad g'' + Prfg' = 0$$

Tabela 2 – Valores de $f''(0)$ para diversos números de β no escoamento compressível. - 2016

β	2º Método apresentado	White (1991)	Rajagopal et al. (1983)	Bor-Lih Kuo (2005)	Bararnia et al. (2012)
-0,19884	0,4195	0,0	****	****	0,035
-0,18	0,4369	0,1286	****	****	****
0,00	0,5937	0,4696	0,4696	0,4696	0,4683
0,3	0,8217	0,7748	0,7747	0,7755	0,7746
0,4	0,8902	****	0,8544	0,8549	0,8536
0,5	0,9552	****	0,9276	0,9279	0,9262
1,0	1,2413	1,2326	1,2325	1,2312	1,2313

Fonte: autoria própria.

Finalmente, são apresentados os valores da função f'' com as equações (10.2) e (10.3) nas formas originais como apresentadas no texto. White (1991) não apresenta nenhum resultado destas equações.

Tabela 3 - Valores de $f''(0)$ para diversos números de Mach e β . - 2016

Número de Mach	β				
	-0,19884	-0,05	0,0	0,03	1
0,3	0,0184	0,3992	0,4696	0,5080	1,2594*
0,4	****	0,3983	0,4696	0,5085	1,2738*
0,5	****	0,3970	0,4696	0,5092	1,2927*
0,6	****	0,3956	0,4696	0,5101	1,3163*
0,7	****	0,3938	0,4696	0,5111	1,3453*
0,8	****	0,3918	0,4696	0,5122	1,3801*
0,9	****	0,3895	0,4696	0,5135	1,4214*

Fonte: autoria própria

Nota: (*) dados contendo incertezas, devido a problemas de convergência do algoritmo.

Pode-se analisar que na Tabela 3, a influência do número de Mach na aceleração é bastante visível quando a placa de escoamento sobre uma inclinação ao eixo da coordenada x , porém apresenta os mesmos valores para a placa plana, tanto caso incompressível quanto compressível. Isto é devido ao fato de que para β igual à zero, a equação de momento passa a depender inteiramente dela, por isso, apresenta os mesmos valores que os escoamentos incompressíveis apresentados por White (1991) e Bararnia *et al.* (2012).

Seguindo as equações (10.2) e (10.3), foram geradas figuras, os resultados mostrados são de $m=0$, caso de Blasius.

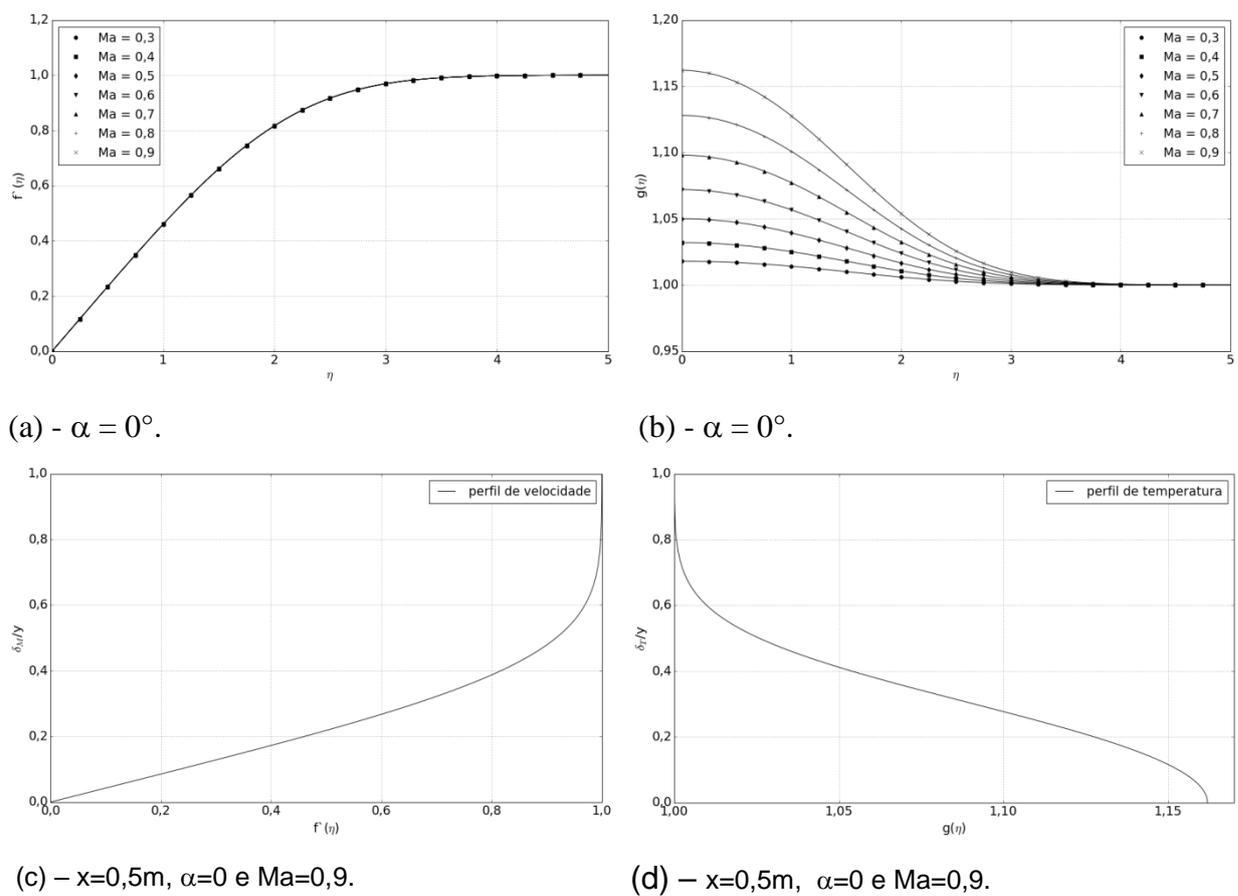


Figura 9 – (a) figura de η vs $f'(\eta)$, (b) η vs $g(\eta)$, perfil de velocidade e (d) perfil térmico.

Pode ser observado que as camadas limites, através da equação (10.2), possuem o mesmo comportamento que a solução de Blasius para placa plana, independente da velocidade da corrente livre. As Figuras 9(a) e 9(c) possuem grande compatibilidade com os que podem ser encontrados no livro do Fox *et al.* (2006). A Figura 9(b) apresenta o comportamento da função $g(\eta)$ pelos limites de contornos por White (1991). As diferenças de

entalpia local para a corrente livre são maiores para valores de Ma maiores, pois os mesmos possuem um estado energético maior.

Por último a Figura 9(d) mostra o perfil de temperaturas que o escoamento na região da camada limite apresenta. Os valores da relação delta dividido por y com menos de 0.1 apresentam o valor igual ao valor da parede, o qual pode ser descrito pela hipótese de temperatura de filme, por isso, a Figura 9(d) apresenta o comportamento da curva perto da parede.

Em muitos artigos e alguns livros, os limites de integração para a função de energia da camada limite mudam, a Figura 13, pois não levam em conta os efeitos do número de Mach e os efeitos viscosos em seu desenvolvimento.

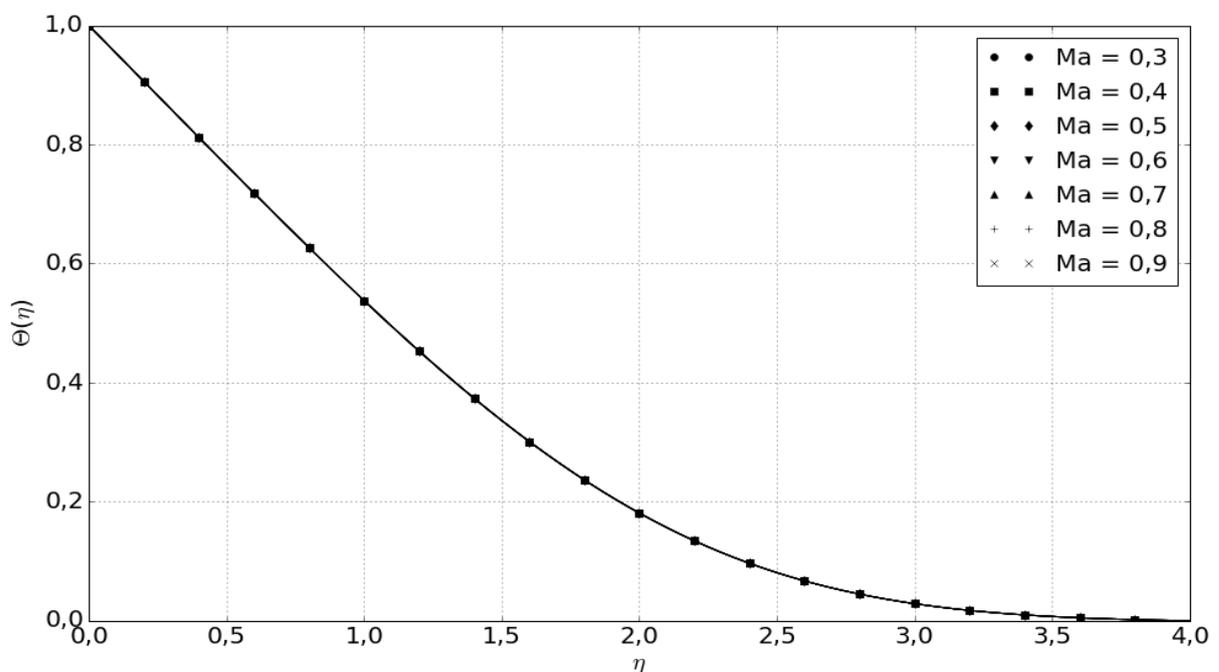


Figura 10 – η vs $\theta(\eta)$ com $\alpha=0^\circ$.

Bararnia *et al.* (2012) e Schlichting (1979) apresentam curvas com grande similaridade a esta em seu artigo e livro, respectivamente.

Como Bejan e Kraus (2003) citam, o valor negativo máximo que m pode assumir é de -0,0904. Assim, os gráficos deste valor são apresentados abaixo:

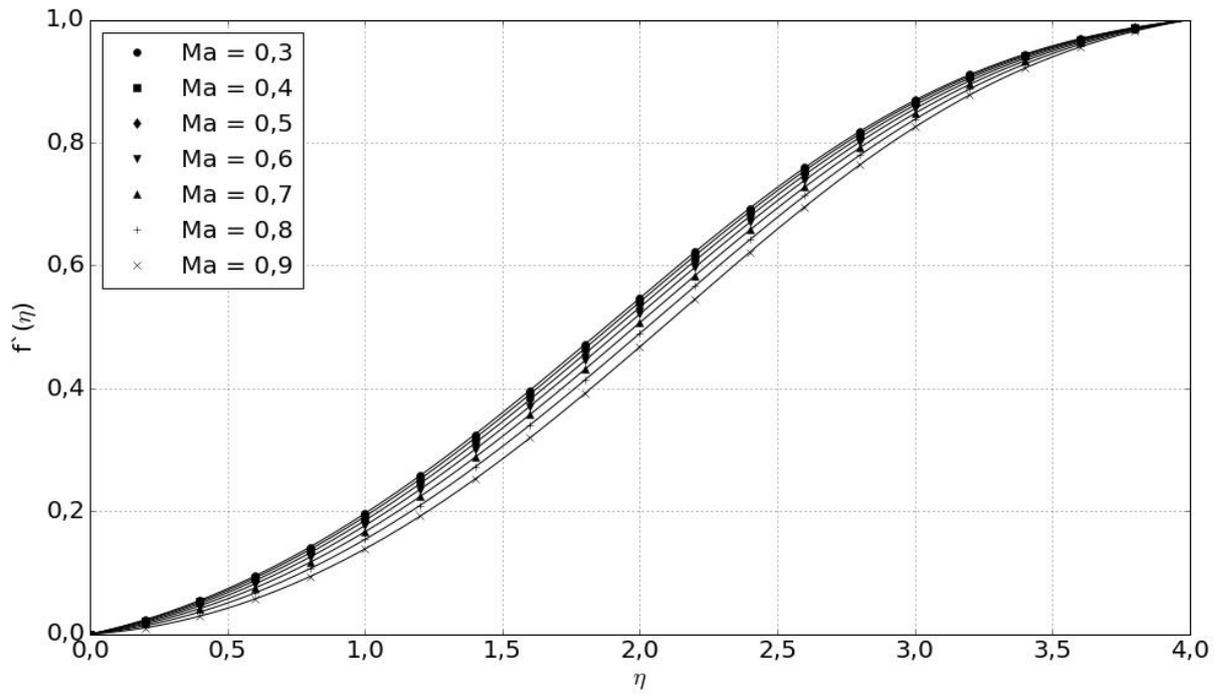


Figura 11 - η vs $f'(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$.

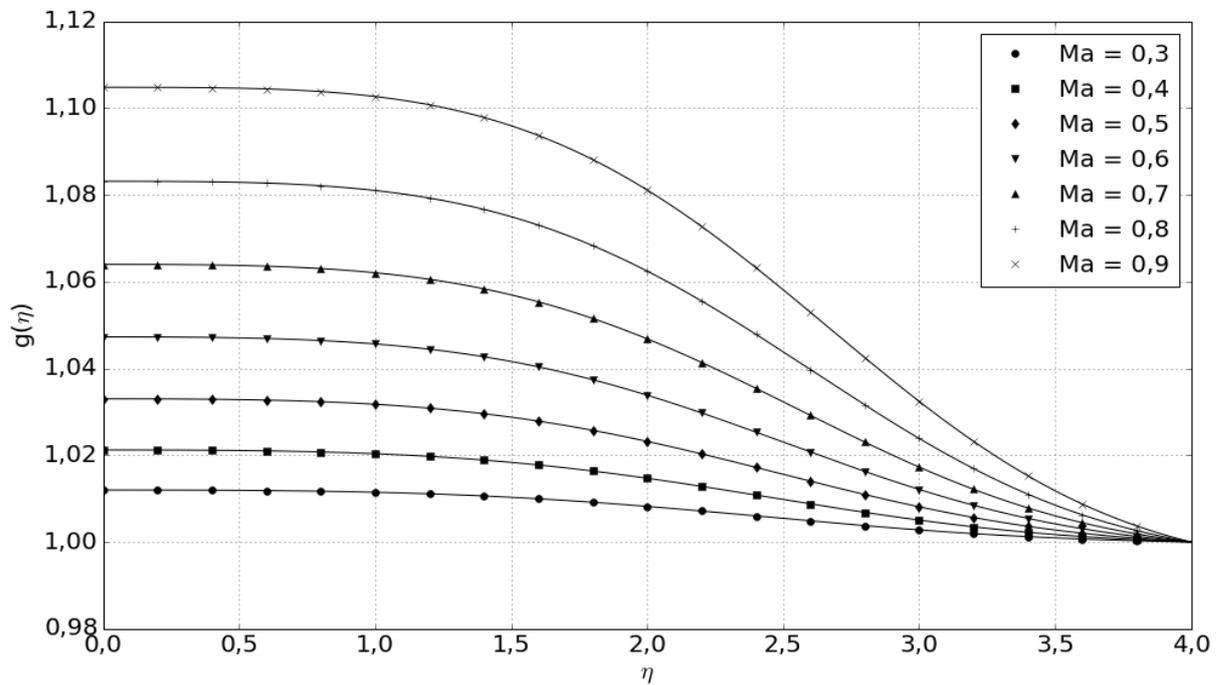


Figura 12 - η vs $g(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$.

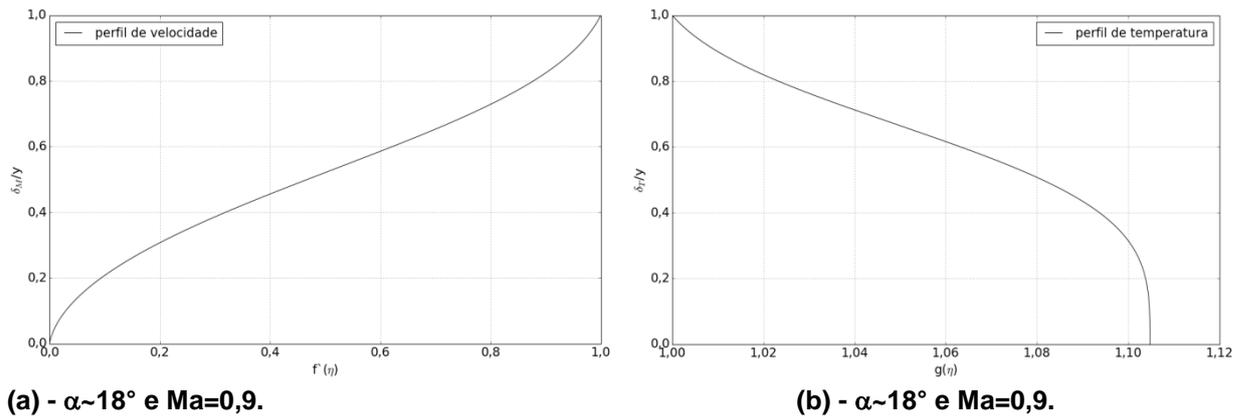
(a) - $\alpha \sim 18^\circ$ e $Ma=0,9$.(b) - $\alpha \sim 18^\circ$ e $Ma=0,9$.

Figura 13 - (a) perfil de velocidade e (b) perfil térmico.

Neste caso, a Figura 11 mostra o adimensional de velocidade com grande precisão aos resultados que White (1991), Bararnia *et al.* (2012) e Schlichting (1979) expuseram, menos sendo escoamentos incompressíveis e sem a contribuição de Ma . É possível ver que com o aumento de Ma a curva da função sofre uma atenuação maior, o que causará um descolamento da camada limite antes que esta atinja a estabilidade na direção de η .

Não há comparativos para a Figura 12, onde esta segue a definição que White (1991) propõem em seu livro. A análise desta figura indica que com o aumento de velocidade, apareça uma discrepância maior entre as temperaturas do escoamento e da parede, por causa dos efeitos viscosos, os quais contribuem para o aumento da temperatura próxima a parede, já que esta é considerada adiabática. Pela Figura 14, pode-se ver melhor a transferência de calor que ocorre no fluido.

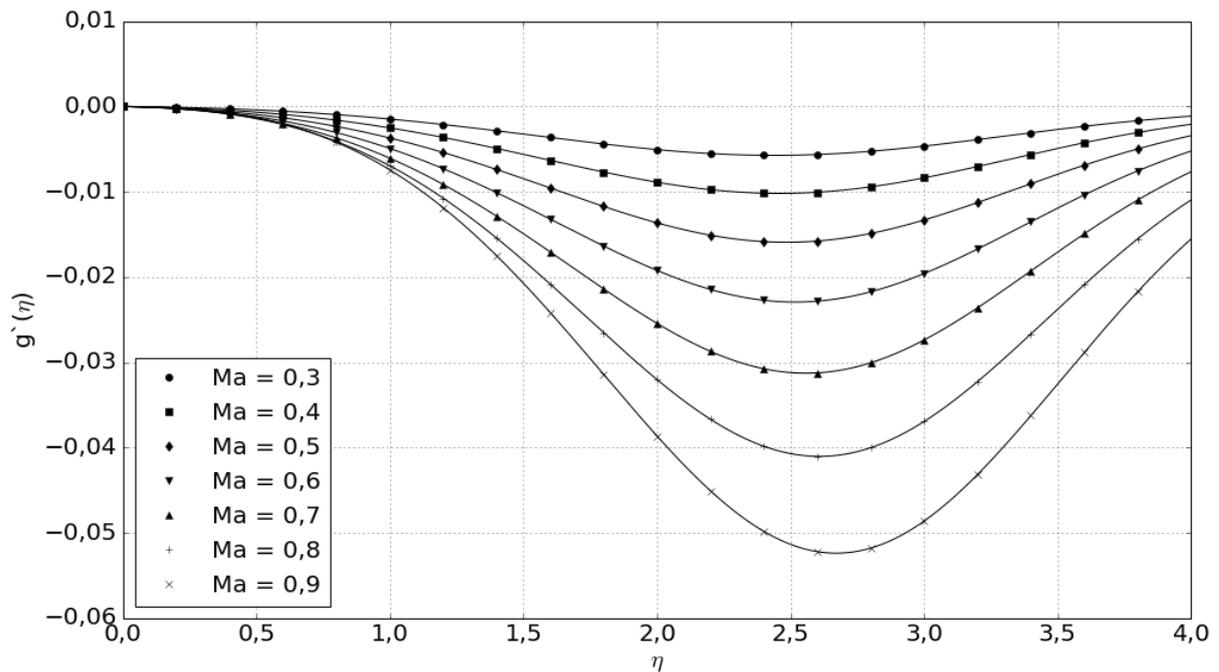


Figura 14 - η vs $g'(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$.

Esta imagem ilustra que a transferência de calor dentro da região da camada limite ocorre devidamente aos dois limites de contorno, pela esquerda é a parede e pela direita é a corrente livre. Pode-se observar que quanto maior o Ma da corrente livre a derivada zero da transferência de calor desloca-se para a direita. A explicação física é porque com o número de Mach maior, logo a espessura da camada limite diminui. Com isso, esta região assume o valor da temperatura da parede. Com isso, a transferência de calor varia de maneira mais abrupta perto da parede. Este tipo de figura não possui nenhuma comparação com artigos, pois não foram encontrados artigos que abordam ou descrevem o mesmo tema. Valores obtidos pelos limites descritos por de White (1991).

Quanto aos limites da temperatura, este exibe que os perfis apresentam a mesma característica da Figura 10, pois não levam em conta os efeitos causados pelo número de Mach e efeitos viscosos.

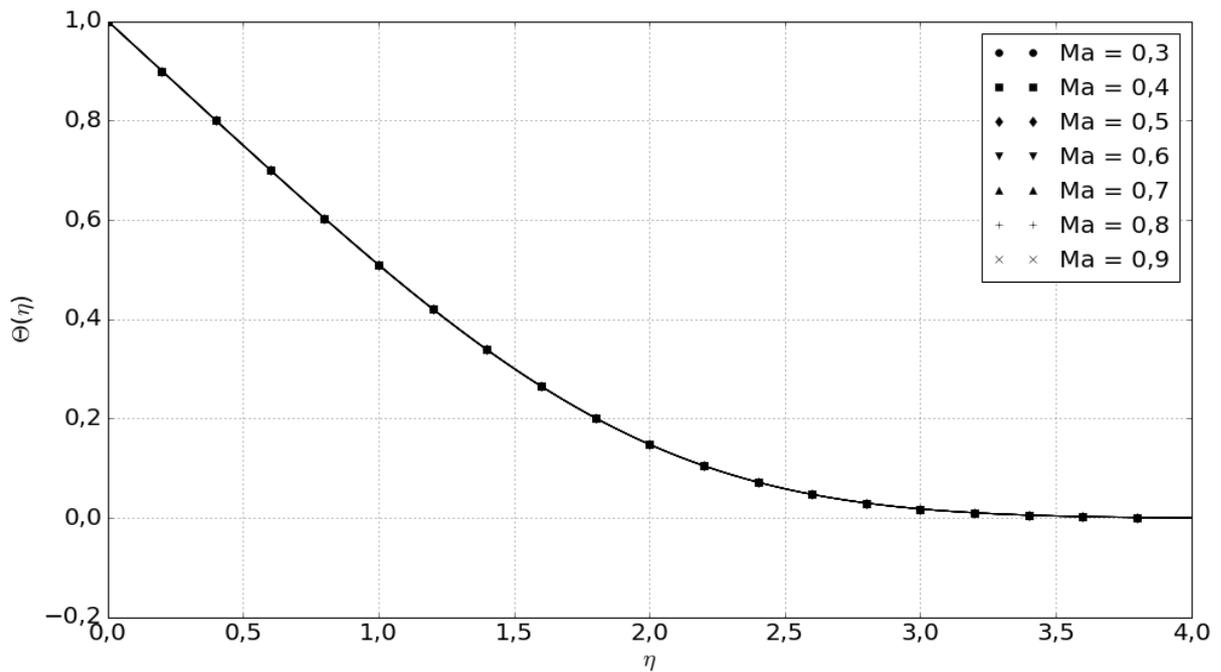


Figura 15 - η vs $\theta(\eta)$ com $\alpha \sim -18^\circ$.

Por White (1991), quanto maior o valor do número de Mach, o escoamento apresenta maior resistência à mudança térmica e de momento, por isso, suas curvas com Ma altos apresentam maiores curvaturas. Em um ponto contrário, o trabalho mostra também a placa com rotação anti-horária, no caso, um bocal. O valor de m utilizando é de 0,06.

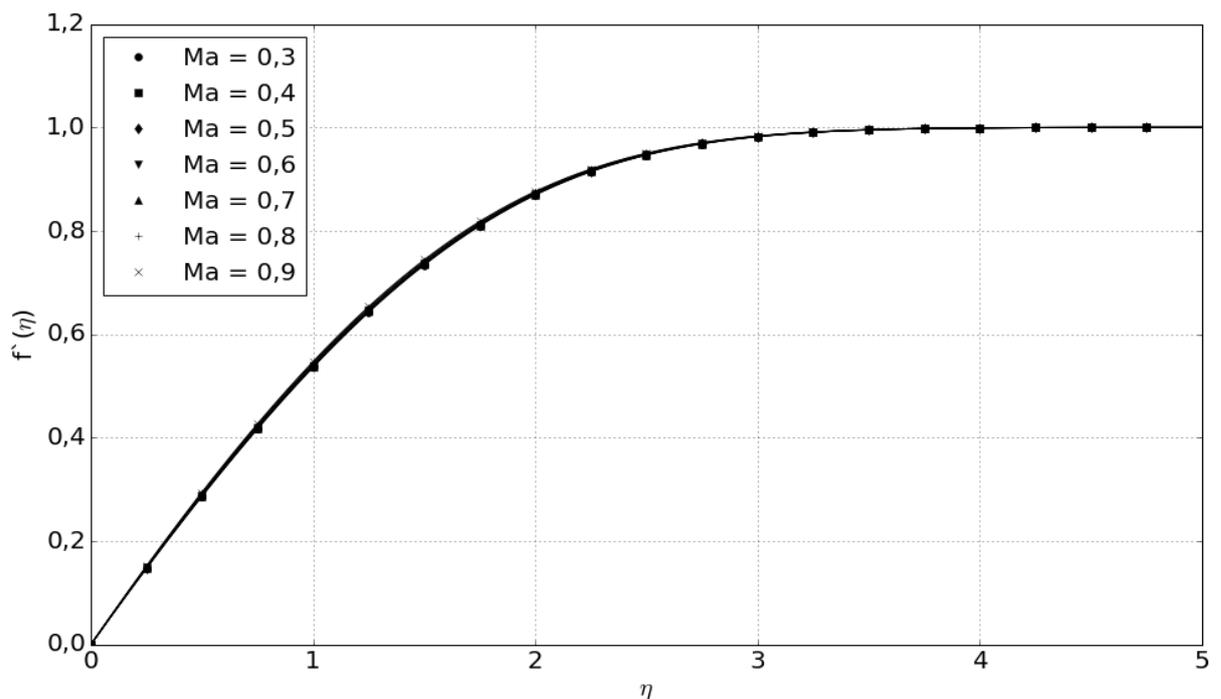


Figura 16 - η vs $f'(\eta)$ com $\alpha \sim 10^\circ$.

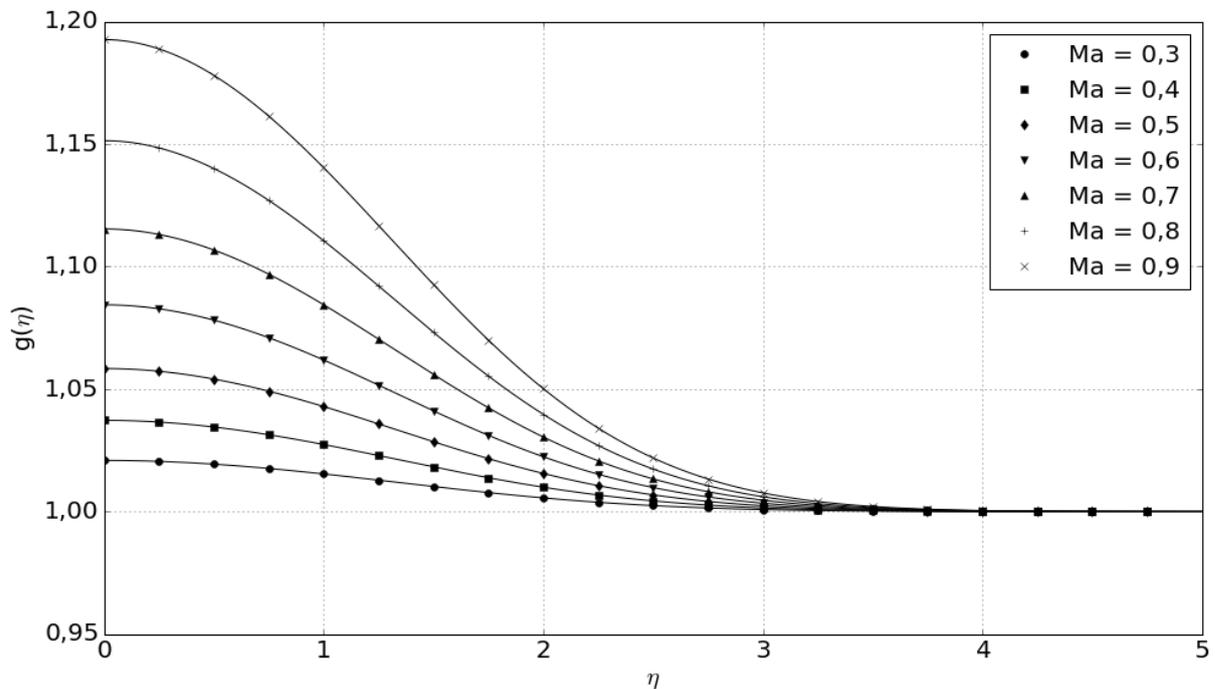
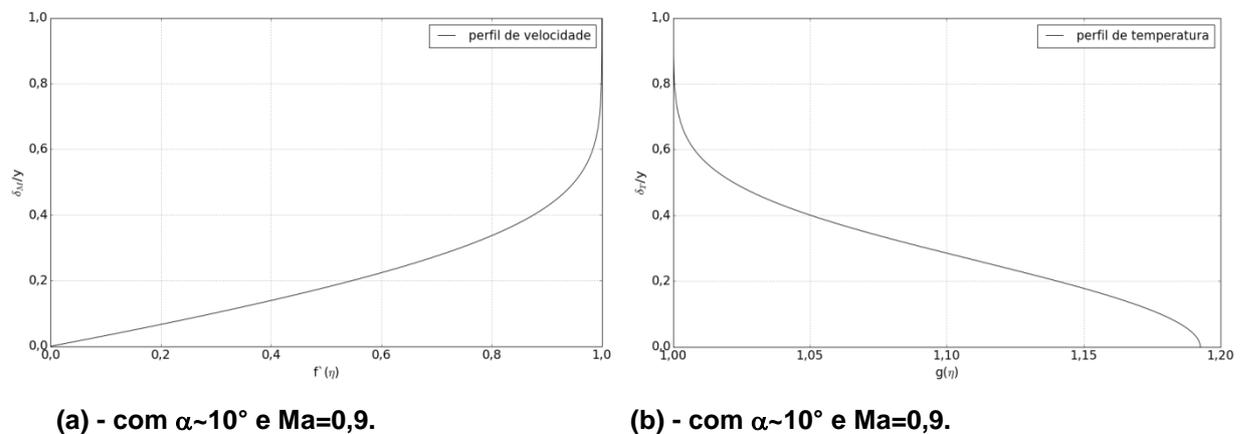


Figura 17 - η vs $g(\eta)$ com $\alpha \sim 10^\circ$.



(a) - com $\alpha \sim 10^\circ$ e $Ma=0,9$.

(b) - com $\alpha \sim 10^\circ$ e $Ma=0,9$.

Figura 18 – perfis de (a) velocidade e (b) de temperatura.

A Figura de temperatura deste arranjo físico não é mostrada, pois o fator determinante desta é o número de Prandtl, como no trabalho este é assumido com um valor unitário, não terá uma mudança visível na curva.

Pelas Figuras 16 e 17 é possível ver que a estabilização de η ocorre de maneira mais rápida, outro ponto é que a função $g(\eta)$ terá uma variação maior em entalpia conforme a velocidade de corrente livre aumenta, assim, uma transferência de calor maior em magnitude e acontecendo de maneira mais veloz.

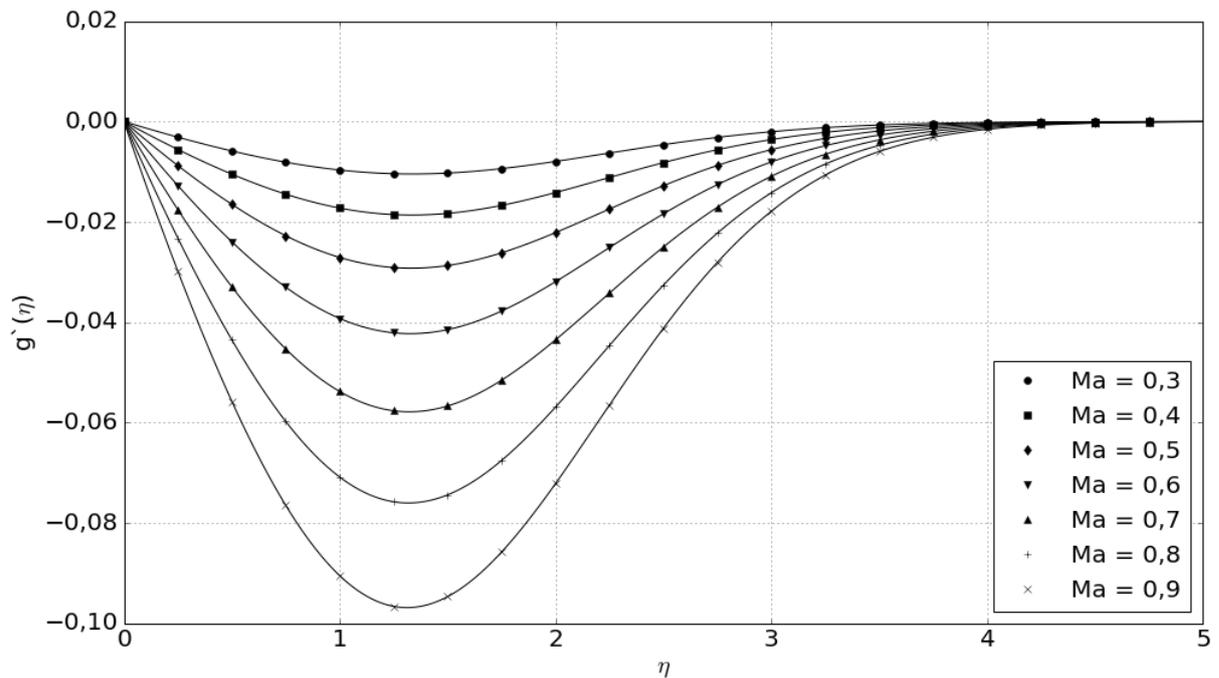


Figura 19 - η vs $g'(\eta)$ com $\alpha \sim 10^\circ$.

Pode-se ver pela Figura 19 que a maior parte de transferência de calor ocorre no lado esquerdo, indicando que o fluido na região da camada limite tem o aumento de temperatura, quase que na totalidade, devido à placa. Um adendo, como o fluido está sendo acelerando, neste caso, este acabará atingindo um número de Mach maior que um, assim, uma onda de choque oblíqua será formada. Com isso, terá um aumento de pressão, densidade e temperatura muitos grandes em um espaço nanométrico (ANDERSON, 2001). Este fenômeno invalida os resultados obtidos, sendo necessários novos modelos matemáticos para descrever o fenômeno físico, pois ondas de choque são considerados pontos de descontinuidade pois há um aumento significativo em temperatura, pressão e densidade do fluido os quais não podem ser descritos pela matemática eulariana.

Valores de $g(\eta)$ são exibidos para os limites colocados por White (1991) para as equações (10.1) e (10.2):

Tabela 4 – Para $m = -0.05$, $T_{\infty}=0,99T$.

Número de Mach	η de estabilização	$g(\eta)$
0,3	1,57919	1,00115
0,4	1,57050	1,00207
0,5	1,55918	1,00331
0,6	1,54508	1,00489
0,7	1,52803	1,00688
0,8	1,50780	1,00933
0,9	1,48408	1,01234

Tabela 7 – Para $m = 0.01$, $T_{\infty}=0,99T$.

Número de Mach	η de estabilização	$g(\eta)$
0,3	1,65410	1,00114
0,4	1,65464	1,00202
0,5	1,65533	1,00315
0,6	1,65617	1,00453
0,7	1,65716	1,00615
0,8	1,65831	1,00802
0,9	1,65961	1,01013

Tabela 5 – Para $m = -0.03$, $T_{\infty}=0,99T$.

Número de Mach	η de estabilização	$g(\eta)$
0,3	1,54989	1,00126
0,4	1,54715	1,00226
0,5	1,54362	1,00355
0,6	1,53932	1,00516
0,7	1,53418	1,00709
0,8	1,52822	1,00935
0,9	1,52142	1,01198

Tabela 8 - Para $m = 0.03$, $T_{\infty}=0,99T$.

Número de Mach	η de estabilização	$g(\eta)$
0,3	1,67086	1,00116
0,4	1,67224	1,00205
0,5	1,67401	1,00320
0,6	1,67617	1,00459
0,7	1,67872	1,00623
0,8	1,68167	1,00809
0,9	1,68501	1,01019

Tabela 6 – Para $m = -0.01$, $T_{\infty}=0,99T$.

Número de Mach	η de estabilização	$g(\eta)$
0,3	1,68520	1,00101
0,4	1,68453	1,00180
0,5	1,68366	1,00281
0,6	1,68261	1,00406
0,7	1,68136	1,00554
0,8	1,67992	1,00726
0,9	1,67829	1,00921

Tabela 9 - Para $m = 0.05$, $T_{\infty}=0,99T$.

Número de Mach	η de estabilização	$g(\eta)$
0,3	1,66205	1,00124
0,4	1,66407	1,00220
0,5	1,66667	1,00343
0,6	1,66985	1,00491
0,7	1,67361	1,00665
0,8	1,67794	1,00864
0,9	1,68286	1,01085

13. CONCLUSÃO

13.1. Comentários Dos Resultados

O primeiro ponto que pode ser comentado é que os artigos e os livros sobre o assunto fazem uma aproximação dos resultados por diferenças finitas, isto causa o consumo de recursos computacionais e de tempo serem grandes, estes métodos são maiores também em número de linhas de códigos que por fim, encarece o trabalho. O trabalho presente exibiu um modelo computacional alternativo, o qual precisa de menos recursos computacionais e tempo de execução. Quando comparado com os valores obtidos por métodos de diferenças finitas, o método apresentado no trabalho apresentou-se altamente eficaz e conciso com os outros valores, sendo que a diferença entre os valores pequena, assim, comprovando sua eficácia em atingir o resultado esperado.

Pontos importantes foram que para escoamentos compressíveis os valores eram fortemente ligados ao número de Mach, a variação de entalpia do fluido, e β , a variação de momento do fluido. A variação na angulação da placa com relação ao eixo de coordenada x mostrou-se fortemente ligada ao momento dentro da camada limite, sendo que para valores altos de β no difusor cônico, quanto maior o número de Mach da corrente livre, a camada limite sofria um descolamento mais rápido, pois o estado de energia era maior. Quanto à entalpia, a região da camada limite sofreu grande variação devido ao número de Mach, apesar de sua estabilização no espaço η ocorrer rapidamente, como as Tabelas de 4 a 9 apresentam. Todos os Ma com valores elevados, a variação foi mais brusca, gerando altos valores de transferência de energia na região da camada limite, apesar desta ser de pequena espessura.

Infelizmente, não foram encontrados valores para escoamentos compressíveis na literatura, para que pudesse haver comparação de resultados. Entretanto, os resultados com escoamentos incompressíveis para o mesmo algoritmo, somente modificando as equações, mostraram-se de grande confiabilidade.

Finalmente, pode ser avaliado que pelos estudos apresentados difusores com área de entrada regulável, assim como os bocais de aviões de caça militares, pode apresentar uma eficácia maior em comparação aos difusores de área estática. Porém entra em contra partida ao sentido de construir um sistema mecânico para realizar o mesmo, aumentando assim o peso da turbina e se essa modificação realiza uma melhora na eficácia significativa.

13.2. Comentários Sobre A Linguagem Python

Como comentado no tópico anterior, o Python mostrou-se altamente adaptativo ao tipo de problema apresentado, as bibliotecas utilizadas, como o *Scipy*, exibiram um grande potencial computacional na resolução de problemas numéricos de Engenharia. Porém, um problema encontrado, o qual não é de exclusividade deste trabalho, é a convergência de resultados fornecidos. As funções de solução de raízes mostraram grandes incertezas de resultados quando β era um valor alto, tanto negativo quanto positivo, por isso foram realizadas variações do espaço de η a fim de que o algoritmo pudesse resolver o problema.

No Entanto, com um algoritmo relativamente pequeno, de fácil interpretação e principalmente, que utilizou pouco tempo para a execução, expôs resultados excelentes principalmente quando β possuía um valor pequeno. Assim, é possível concluir que a escolha da linguagem Python para o problema foi um ponto chave.

13.3. Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, o conhecimento adquirido foi de grande satisfação, principalmente sobre aerodinâmica de escoamentos compressíveis. Há também o ganho de conhecimento mais aprofundado em Mecânica dos Fluidos. Este foi talvez, o ponto mais importante do trabalho, o enriquecimento de conhecimento sobre o assunto abordado.

Quanto ao desenvolvimento no âmbito computacional, foi de grande destaque, pois isto será levado como um grande peso de bagagem para futuros trabalhos na área computacional. Como comentado anteriormente, os algoritmos foram leves e versáteis, mas um ponto foi a realização do problema com um computador contendo um processador core i7 2.50GHz e 16Gb-RAM, o que fez com que o tempo gasto para a geração de figuras fosse menor.

14. RECOMENDAÇÕES

Com o desenvolvimento deste trabalho, alguns pontos podem ser melhorados em trabalhos futuros a fim de que mostre resultados mais precisos ou que convenha como “pilar” para o desenvolvimento de novos trabalhos em Aerodinâmica ou outras áreas, por se tratar de ser um algoritmo versátil.

Desenvolver um trabalho que avalie uma configuração do difusor completa, onde possa aferir se paredes adjacentes interferem no comportamento do fluido.

Pode ser feito um trabalho futuro sobre soluções numéricas, onde procure criar um método de solução de raízes que ofereça um modelo de convergência mais preciso e que este atinja valores satisfatórios, mesmo com grandes intervalos de cálculo no algoritmo, como no caso de η no problema tratado no trabalho apresentado.

Desenvolver um trabalho sobre a eficácia real que uma configuração regulável do difusor cause na qualidade do ar de entrada na turbina, assim, observando se há uma melhora significativa nesta configuração.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, John D. **Fundamentals of Aerodynamics**. 3ed. USA: McGraw-Hill, 2001.

BARARNIA, H., et al. **Flow analysis for the Falkner-Skan wedge flow**. Current Science, vol. 103, no. 2, 25 jul. 2012, pag. 169-177. Disponível em: <

<http://www.currentscience.ac.in/Volumes/103/02/0169.pdf> > Acesso em: 25 ago. 2016.

BEJAN, Adrian; KRAUS, Allan D. **Heat Transfer Handbook**. USA: John Wiley & Sons, Inc. 2003.

BLUNDELL, S., BLUNDELL, K., **Concepts in Thermal Physics**. UK: Oxford University Press, 2007.

ÇENGEL, Yunus A., CIMBALA, John M. **Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações**, Brasil: AMGH Editora Ltda, 2007.

CHO, Yeunwoo; AESSOPOS, Angelica. **Similarity transformation methods in the analysis of the two dimensional steady compressible laminar boundary layer**.

Compressible Fluid Dynamics, Springer, term paper: 2.26, 2004. Disponível em: <

https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-26-compressible-fluid-dynamics-spring-2004/assignments/pap_cho_aessopos.pdf > Acesso em: 16 ago. 2016.

FOX, Robert W.; McDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J., **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 6ed. Rio de Janeiro, Brasil: LTC editora, 2006.

JOHANSSON, J. R. **Matplotlib - 2D and 3D plotting in Python** Disponível em:

<[http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/scientific-python-](http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/scientific-python-lectures/blob/master/Lecture-4-Matplotlib.ipynb)

[lectures/blob/master/Lecture-4-Matplotlib.ipynb](http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/scientific-python-lectures/blob/master/Lecture-4-Matplotlib.ipynb)> Acesso em: 05 Setembro 2016.

KIUSALAAS, Jaan. **Numerical Methods in Engineering with Python 3**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2013.

PINE, David. **Introduction to Python for Science**. 0.9.23ed. [S.l]: [s.n], 2013. Disponível em: < http://physics.nyu.edu/~physlab/Lab_Main/PythonMan.pdf > Acesso em: 02 jul. 2016.

SCHLICHTING, Dr. Hermann. **Boundary-Layer Theory**. 7ed. USA: McGraw-Hill, 1979.

Scipy.org. **Numpy**. Scipy. Disponível em: < <http://www.numpy.org/> > Acesso em: 02 set. 2016.

_____. **Scipy.integrate.odeint**. Scipy. Disponível em: < <http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.15.1/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html> > Acesso em: 02 set. 2016.

_____. **Scipy.optimize.root**. Scipy. Disponível em: < <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.root.html> > Acesso em: 03 set. 2016.

SHAPIRO, Howard N.; MORAN, Michael J.; et al. **Fundamentals of Engineering Thermodynamics**. 7ed, USA: John Wiley & Sons, Inc. 2011.

SOARES, Marcos, 2007. **Ciclo Brayton – Introdução**. Termodinâmica V-30, MSPC. Disponível em: < <http://www.mspc.eng.br/termo/termod0530.shtml> > Acesso em: 17 out. 2016.

VAN WYLEN, Gordon J., SONNTAG, Richard E., BORGNAKKE, Claus. **Fundamentos da Termodinâmica Clássica**. 4ed, Brasil: Blücher LTDA, 1995.

WHITE, Frank M., **Viscous Fluid Flow**. 2ed, USA: McGraw-Hill, 1991.

WIJERATHNE, Chaminda. **Turbine Engine Inlet Systems**, Disponível em: < <http://okigihan.blogspot.com.br/p/turbine-engine-inlet-systems-engine.html> > Acesso em: 03 de out. 2016.

APÊNDICE A - BALANÇO ENERGÉTICO NA TURBINA

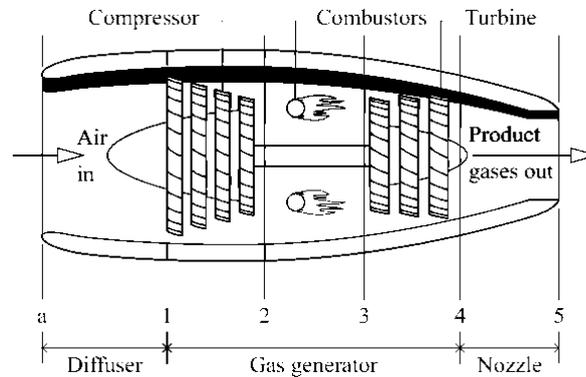


Figura 20 - Esquema básico de uma turbina de avião.

Fonte: SHAPIRO et. al (2011, p.546).

Para a realização do balanço em cada componente da turbina, é preciso primeiro assumir algumas hipóteses segundo Shapiro *et al.* (2011):

- O calor específico à pressão constante do ar é constante;
- A densidade do ar é constante;
- Regime uniforme e constante;
- Cada componente é tratado como um volume de controle;
- O ar é o único fluido de trabalho do ciclo modelado com gás perfeito;
- A câmara de combustão é modelada como um componente que só adiciona calor ao sistema;
- O difusor, compressor, turbina e bocal são isentrópicos;
- Não há queda de pressão na câmara de combustão;
- Os efeitos de energia cinética só são considerados no difusor e no bocal;
- Efeitos da energia potencial são negligenciados.

Seguindo o esquema da Figura 20, e aplicando a primeira lei da termodinâmica, tem-se:

$$\delta E = \delta Q - \delta W \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$E = \rho(e + v^2/2 + g \cdot \vec{r}) \quad (\text{A.2})$$

na qual ρ é a densidade, e é a energia interna específica, v é a velocidade e r é a posição vetorial no espaço.

Por se tratar de um sistema aberto, é substituída a energia interna por entalpia, pois esta engloba o trabalho de fronteira que o fluido realiza para poder entrar no volume de controle, assim:

$$\rho(h + v^2/2 + gz) = dQ - dW \quad (\text{A.3})$$

reescrevendo a equação (A.3) com as hipóteses acima, tem-se:

$$\rho(h + v^2/2) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Aplicando a equação (A.4) nos pontos a e 1, e assumindo que a velocidade na entrada do compressor é igual a zero, tem-se:

$$h_a + v_a^2/2 = h_1 + v_1^2/2 \quad (\text{A.5})$$

Prosseguindo, agora modelando o compressor e utilizando a equação (A.3):

$$\rho h = -dW \quad (\text{A.6})$$

aplicando nos pontos 1 e 2:

$$\rho(h_2 - h_1) = -W_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{A.7})$$

Fazendo o balanço de energia agora na câmara de combustão, pela equação (A.3):

$$\rho h = dQ$$

$$\rho(h_3 - h_2) = Q_{2 \rightarrow 3} \quad (\text{A.8})$$

Na turbina, usando a equação (A.3):

$$\rho h = -dW$$

$$\rho(h_4 - h_3) = -W_{3 \rightarrow 4} \quad (\text{A.9})$$

Shapiro *et al.* (2011) comenta que em turbinas para aviões, a turbina tem a função somente de fornecer energia para que o compressor funcione e a impulsão da turbina é somente feita pelo bocal de escape, o qual será modelado agora:

Pela equação (A.3):

$$\rho(h + v^2/2) = 0$$

$$h_4 + v_4^2/2 = h_5 + v_5^2/2 \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – MÓDULO ITEGRATE E OPTIMIZE DO SCIPY

Scipy.Integrate

Constitui-se de um módulo com uma biblioteca Fortran chamada Odepack para soluções de EDOs, chamado de LSODE. Na biblioteca se encontra o algoritmo *Odeint*, usa uma versão adaptada de LSODE chamada de LSODA que automaticamente troca entre rotinas “inflexíveis” e “flexíveis” de integração, dependendo da característica da solução, e faz isso a cada intervalo de tempo para conseguir uma acurácia maior e desejada da solução (SCIPY.ORG, 2014).

Scipy.Optimize

Módulo da biblioteca de *Scipy* com finalidade de otimização e rotinas para encontrar valores de raízes de funções (SCIPY.ORG, 2014).

APÊNDICE C – DERIVADA MATERIAL

Primeiramente, assume-se que um volume de controle percorre certo trajeto que é determinado pela função corrente.

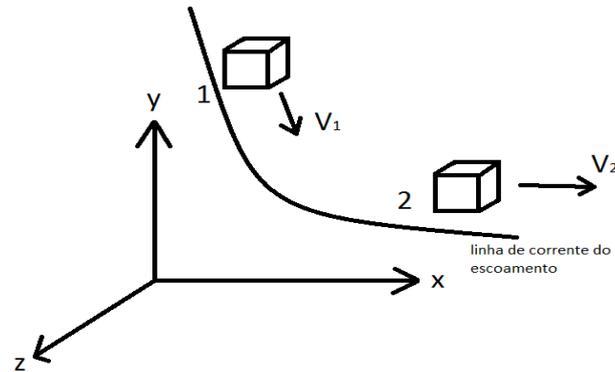


Figura 21 - Esquema de um volume arbitrário em um escoamento.
Fonte: autoria própria, 2016.

Supõe-se que o fluido é irrotacional:

$$\nabla^2 \psi = -\zeta$$

Assume-se ainda que a velocidade deste volume seja V , onde:

$$\vec{V} = V(x, y, z, t)$$

Pressupondo-se que este volume vá de um ponto inicial, ponto 1, e vá para o ponto 2, o ponto de destino, tem-se:

$$\vec{V}_1 = V(x_1, y_1, z_1, t_1) \text{ e } \vec{V}_2 = V(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

Admitindo que a distância entre os pontos 1 e 2 diminua, até um valor infinitesimal e aplicando a expansão de Taylor entorno do ponto 1, tem-se:

$$V_2 = V_1 + ((\partial V / \partial x)|_1)(x_2 - x_1) + ((\partial V / \partial y)|_1)(y_2 - y_1) + ((\partial V / \partial z)|_1)(z_2 - z_1) + ((\partial V / \partial t)|_1)(t_2 - t_1)$$

subtraindo V_1 de ambos os lados e dividindo-a por $(t_2 - t_1)$:

$$\begin{aligned} (V_2 - V_1)/(t_2 - t_1) = \\ ((\partial V/\partial x)|_1)(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) + ((\partial V/\partial y)|_1)(y_2 - y_1)/(t_2 - t_1) + \\ ((\partial V/\partial z)|_1)(z_2 - z_1)/(t_2 - t_1) + ((\partial V/\partial t)|_1) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Por definição:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} (V_2 - V_1)/(t_2 - t_1) = DV/dt \quad (\text{B.2})$$

a qual é a definição de derivada material, assim, calculando o limite para os outros termos da equação, apresenta-se:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = u$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} (y_2 - y_1)/(t_2 - t_1) = v$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} (z_2 - z_1)/(t_2 - t_1) = w$$

Reescrevendo a equação (B.1) e substituindo os novos termos calculados:

$$DV/dt = (\partial V/\partial x) u + (\partial V/\partial y) v + (\partial V/\partial z) w + (\partial V/\partial t) \quad (\text{B.3})$$

a qual segundo Çengel e Cimbala (2007), o termo de derivada temporal é a aceleração local do corpo e os termos espaciais são os valores advectivos.

Pode-se reescrever ainda, de uma forma mais clara e curta, o seguinte:

$$div V = (\partial V/\partial x) u + (\partial V/\partial y) v + (\partial V/\partial z) w$$

assim,

$$DV/dt = \operatorname{div} V + \partial V/\partial t \quad (\text{B.4})$$

A derivada material pode ser utilizada para o cálculo de qualquer propriedade do corpo.

APÊNDICE D - MOVIMENTO E DEFORMAÇÃO DE UM VOLUME DE CONTROLE DE UM FLUIDO

Em Mecânica dos Fluidos, o elemento de fluido pode sofrer quatro tipos de movimentos ou deformações: translação, rotação, alongamento e dilatação segundo White (1991). Uma breve revisão bibliográfica das definições sobre o tema e mostrada sem o aprofundamento no âmbito de definições e desenvolvimento das equações matemáticas.

Observando a figura a seguir:

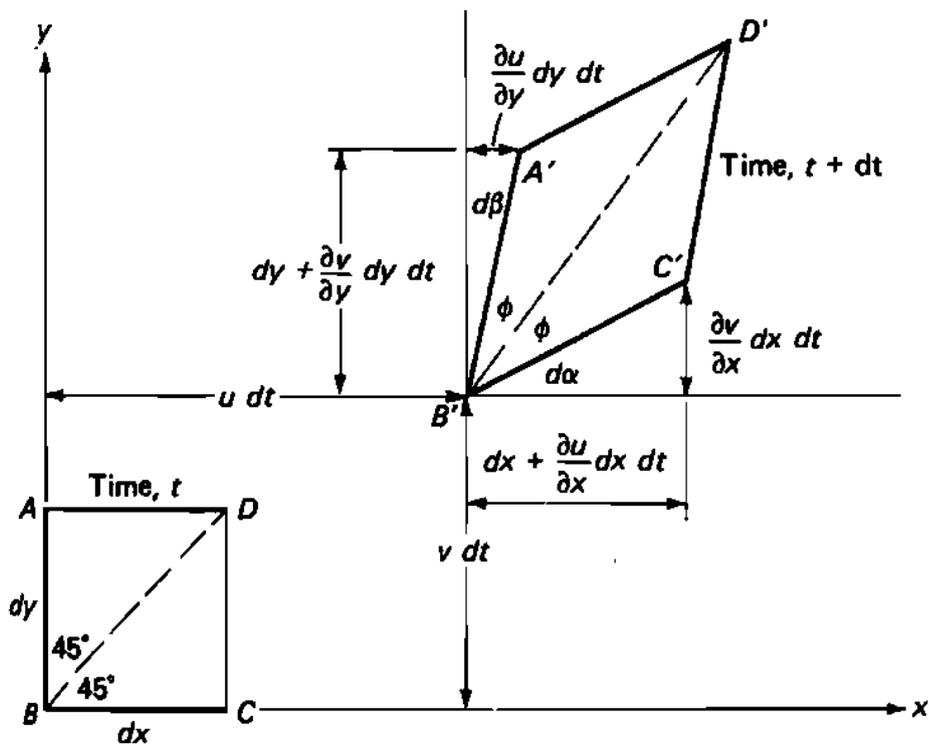


Figura 22 – Translação e deformação cisalhante de um elemento de fluido.

Fonte: WHITE (1991, p.19)

A translação do corpo se dá pelas quantidades que o ponto futuro tem, no caso, $u dt$ na direção x e $v dt$ na direção y .

Para o caso de rotação, observa-se que no ponto futuro do elemento pode-se escrever que:

$$90^\circ = 2\phi + d\alpha + d\beta_a$$

E a rotação da reta BD em relação ao eixo x que pode ser escrito como:

$$d\Omega_z = \phi + d\alpha - 45^\circ$$

White (1991) define que assim, pode-se encontrar o valor exato:

$$d\Omega_z = (d\alpha - d\beta_a) 1/2 \quad (\text{D.1})$$

Pela Figura 22, pode-se ir além e escrever:

$$d\alpha = \tan^{-1}((\partial v/\partial x)dxdt/(dx + (\partial u/\partial x)dxdt)) \quad (\text{D.2})$$

$$d\beta_a = \tan^{-1}((\partial u/\partial y)dydt/(dy + (\partial v/\partial y)dydt)) \quad (\text{D.3})$$

Seguindo o raciocínio de White (1991) e fazendo o limite das equações (D.2) e (D.3) quando o intervalo de tempo tende para zero, tem-se:

$$d\alpha = (\partial v/\partial x)dt$$

$$d\beta_a = (\partial u/\partial y)dt$$

logo,

$$d\Omega_z/dt = (1/2)((\partial v/\partial x) - (\partial u/\partial y)) \quad (\text{D.4})$$

Entorno dos eixos das outras coordenadas,

$$d\Omega_x/dt = (1/2)((\partial w/\partial y) - (\partial v/\partial z))$$

$$d\Omega_y/dt = (1/2)((\partial u/\partial z) - (\partial w/\partial x))$$

White (1991) descreve que esta é a aceleração angular do corpo e para facilitar, são eliminados estes fatores de meio que cada equação possui. O autor define também que o fator de velocidade angular vezes dois é a vorticidade do corpo, assim:

$$\zeta = 2 d\Omega/dt \quad (D.5)$$

Segundo White (1991), pode-se relacionar a vorticidade com o rotacional da velocidade do corpo:

$$\zeta = \nabla \times V = \text{rot } V$$

Então, quando esta quantidade é igual à zero chama-se o fluido de irrotacional (WHITE, 1991).

Avaliando a deformação de cisalhamento define-se como sendo o decréscimo médio do ângulo entre linhas que delimitam o corpo, inicialmente perpendiculares entre si. Escolhendo as linhas BA e BC da Figura 22 no ponto futuro a angulação terá uma magnitude igual ao valor anterior calculado no quesito quanto à vorticidade, assim, neste caso:

$$(1/2)(d\alpha + d\beta_a)$$

Como, segundo White (1991), a taxa de deformação é a variação da velocidade do corpo, pode-se escrever:

$$\epsilon_{xy} = (1/2)(d\alpha/dt + d\beta_a/dt)$$

a qual é igual ao mesmo que,

$$\epsilon_{xy} = (1/2)(dv/dx + du/dy) \quad (D.6)$$

similarmente,

$$\epsilon_{xy} = (1/2)(dv/dx + du/dy) \quad (D.7)$$

$$\epsilon_{xy} = (1/2)(dv/dx + du/dy) \quad (D.8)$$

Assim, White (1991) cita que por ser material isotrópico, como em mecânica dos sólidos, estas taxas são iguais,

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

O tópico de dilatação do corpo do fluido é discutido como White (1991) expõem. A dilatação é o incremento no comprimento em qualquer direção. Seleccionando o incremento na direção da coordena x , tem-se:

$$\epsilon_{xx}dt = ((dx + (\partial u/\partial x)dxdt) - dx)/dx$$

$$\epsilon_{xx} = \partial u/\partial x \quad (D.9)$$

Com o mesmo raciocínio, pode-se descrever as equações das outras direções:

$$\epsilon_{yy} = \partial v/\partial y \quad (D.10)$$

$$\epsilon_{zz} = \partial w/\partial z \quad (D.11)$$

White (1991) cita ainda, que o estado de deformação do corpo nas coordenadas cartesianas pode ser representado por um tensor:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Pode-se avaliar que os tensores de taxa de deformações e de tensões são iguais, pois é considerado que estes são simétricos por apresentarem o mesmo formato. Finalmente, adotando a seguinte notação:

$$u_{ij} = \partial u_i/\partial x_j$$

e dividindo o termo derivativo em duas partes, uma simétrica e outra assimétrica, tem-se:

$$u_{ij} = 1/2 (u_{ij} + u_{ji}) + 1/2 (u_{ij} - u_{ji})$$

substituindo pelas equações (D.4), (D.9), (D.10) e (D.11):

$$\partial u_{ij} / \partial x_j = \epsilon_{ij} + d\Omega_{ij} / dt \quad (\text{D.12})$$

assim, cada derivada da velocidade pode ser interpretada como uma soma da aceleração angular e a taxa de deformação, como White (1991) define.

APÊNDICE E - EQUAÇÕES COMPLEMENTARES

Todas as equações até agora vistas necessitam do valor de densidade para ser calculadas, por isso esta variável junto com a viscosidade possuem um tópico específico de discussão.

Primeiramente, sobre a equação de estado que fornece um valor para a densidade. É definido como sendo a relação de unidade de massa por unidade de volume. Como o fluido abordado neste trabalho é ar, ele pode ser descrito pela equação de gases perfeito:

$$p = \rho RT \quad (\text{E.1})$$

na qual o termo R é calculado através da constante de Boltzmann vezes o número de Avogadro.

Esta equação revela uma descrição macroscópica do gás. Para fazer este tipo de hipótese, algumas considerações devem ser feitas, segundo Blundell e Blundell (2007), são elas:

- A cinemática das moléculas do gás é descrita somente pela mecânica newtoniana;
- As moléculas colidem umas nas outras de forma perfeitamente elástica;
- O volume da molécula é desprezível em comparação ao volume em qual o gás esta confinado;
- Não existem forças intermoleculares.

A segunda grandeza física comentada é a viscosidade absoluta do fluido. Esta foi determinada, a equação que a descreve, empiricamente. A equação de Sutherland relaciona a viscosidade somente com a temperatura do fluido, foi criada com a idealização de um potencial de força intermolecular como White (1991) cita.

$$\mu/\mu_0 = ((T_0 + S)/(T + S))(T/T_0)^{3/2} \quad (\text{E.2})$$

na qual o termo S é a temperatura efetiva do gás, sendo esta uma característica do mesmo.

APÊNDICE F - DISCRETIZAÇÃO

O Python não resolve problemas de EDOs de ordens superiores e uma mudança faz-se necessária. Esta é transformar todos os termos da EDO de ordem superior em argumentos de EDO de primeira ordem e alocá-los em um vetor (PINE, 2013). Resolvendo a equação de momento e escolhendo a função f para fazer a derivação, tem-se, onde a função é o primeiro valor do vetor de solução.

$$f = z_0 \tag{F.1}$$

$$dz_0/d\eta = z_1 \tag{F.2}$$

na qual o termo z é um valor arbitrário que a derivada da função f assume.

Prosseguindo nas derivações, ao invés de derivar em relação à função f deriva-se em relação ao valor z , mantendo assim, que os valores sejam somente EDOs de primeira ordem.

$$dz_1/d\eta = z_2 \tag{F.3}$$

Porém, pela equação (10.1) a terceira derivada da função f é:

$$f''' = -ff'' - \beta(g - f'^2) \tag{F.4}$$

Com isso, pode-se dizer que a derivada de terceira ordem da função f é igual à derivada de z_2 .

$$dz_2/d\eta = z_3 = f'''$$

Assim, a equação (10.3) pode ser reescrita como:

$$dz_2/d\eta = -z_0z_1 - \beta(g - z_1^2) \tag{F.5}$$

Salve-se a função g para as próximas derivações. Assim, com as equações (F.2), (F.3) e (F.5) monta-se o vetor de derivadas que será a solução que espera se encontrar para a equação de momento da camada limite.

$$\text{vetor} = ([z_1, z_2, -z_0 z_1 - \beta(g - z_1^2)]) \quad (\text{F.6})$$

notação, colchetes dentro de parênteses porque é o modo que a linguagem Python reconhece um vetor.

Para a equação de energia da camada limite utiliza-se a mesma lógica, primeiro passo é reescrever toda a parcela que multiplica a derivada segunda da função f , assim:

$$B = -(\gamma - 1)Ma_\infty^2 \quad (\text{F.7})$$

Pela mesma estrutura apresentada acima, chama-se a função g de um valor z .

$$g = z_0 \quad (\text{F.8})$$

derivando z_0 ,

$$dz_0/d\eta = z_1 \quad (\text{F.9})$$

Pela equação (10.2),

$$g'' = -fg' - Bf''^2$$

E chamando g'' de:

$$dz_1/d\eta = z_2 = g''$$

$$dz_1/d\eta = -fz_1 - Bf''^2$$

Assim, o vetor de EDOs é:

$$vetor = ([z_1, -fz_1 - Bf''^2]) \quad (F.10)$$

Como as duas equações são relacionadas entre si, porém, o Python por ser uma linguagem de fácil interpretação, pode-se criar um único vetor que englobe as EDOs de ambas as equações, momento e energia. Com isso, assume-se que os valores no vetor das EDOs da equação de energia seja uma continuação do vetor de equação de momento.

$$g = z_3; dz_3/d\eta = z_4$$

logo,

$$dz_3/d\eta = -fz_3 - Bf''^2 \quad (F.11)$$

Com todas EDOs alocadas em um único vetor e substituindo os valores que faltam nas equações (F.2) e (F.8):

$$vetor = ([z_1, z_2, -z_0z_1 - \beta(z_3 - z_1^2), z_4, -z_0z_3 - Bz_2^2]) \quad (F.12)$$

ANEXO A – Algoritmo “Falkner-Skan.py”

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from scipy.optimize import root, newton_krylov, anderson
import locale

locale.setlocale(locale.LC_NUMERIC, "ptb_bra")
plt.figure(figsize=(16,9))
tk = ["ko", "ks", "kd", "kv", "k^", "k+", "kx"]
plt.rcParams['axes.formatter.use_locale'] = True
Ma = np.arange(0.3,1.0,0.1) # número de Mach na corrente livre
m = 0.06 # coeficiente de angulação

for i in range(len(Ma)):

    def FalknerSkan (z, eta):

        lambda Ma, m: Ma, m # função lambda para chamar os valores de m e Ma
        gamma = 1.4 # gama do ar, cp/cv
        Pr = 1 # numero de Prantdl

        beta = 2*m/(m+1) # coeficiente angular
        B = -Pr*(gamma-1)*Ma[i]**2 # simplificações que correlaciona gama e número de Mach

        return np.array([z[1], z[2], beta*((z[1]**2)-z[3]) - z[0]*z[2], z[4], B*(z[2]**2) - z[0]*z[4]]) # formato das equações
        # de momento e energia

    eta = np.arange(0.0,5.0,0.0005) # espaço de eta que será resolvido a equação
    z = [0.0,0.0,0.0,1.0,0.0] # condições iniciais de contorno inferiores

    def raizes(z):

        r = odeint(FalknerSkan, z, eta) # primeira solução das EDOs para criar um vetor que é usado para calcular
        # as raízes

        return np.array([r[0,0], r[0,1], 1.0 - r[-1,1], 1.0 - r[-1,3], r[0,4]]) # condições de contorno superiores

    sol = newton_krylov(raizes, z) # encontrando os valores das raízes para cada função

    F = odeint(FalknerSkan, sol, eta) # o resultado final do problema de BVP (boundary value problem)

    g = (F[9900,0])
    print(u'\N{GREEK SMALL LETTER ETA} = {} para Ma = {}'.format(round(F[9900,0],2),round(Ma[i],1)))

    plt.plot(eta[:500], F[:,4][:500], tk[i], label='Ma = {}'.format(round(Ma[i],1)).replace('.',',')) # geração de gráficos
    plt.plot(eta, F[:,4], 'k')
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('$\eta$')
    plt.ylabel('g`($\eta$)')
    plt.rc('xtick', labels=20)
    plt.rc('ytick', labels=20)
    plt.rc('axes', labels=20)
    plt.rc('legend', fontsize=20)

plt.legend(numpoints=1,loc=0)

plt.show()

Yr = np.linspace(0.0,1.0,10000)
plt.figure(figsize=(16,9))
plt.plot(F[:,1],Yr, 'k', label='perfil de velocidade')
plt.grid(True)

```

```
plt.xlim([0.0,1.0])  
plt.xlabel('f ( $\eta$ )')  
plt.ylabel('$\delta_M/y$')  
plt.legend(loc=0)  
plt.show()
```

```
plt.figure(figsize=(16,9))  
plt.plot(F[:,3],Yr, 'k', label='perfil de temperatura')  
plt.grid(True)  
plt.xlim([1.0,1.20])  
plt.xlabel('g( $\eta$ )')  
plt.ylabel('$\delta_T/y$')  
plt.legend(loc=0)  
plt.show()
```