UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNA BRUNIERA

# OTIMIZAÇÃO LINEAR E APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE TRANSPORTE E DESIGNAÇÃO DE TAREFAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

BRUNA BRUNIERA

# OTIMIZAÇÃO LINEAR E APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE TRANSPORTE E DESIGNAÇÃO DE TAREFAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão 1, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof$^{a}$. Glaucia Maria Bressan

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

Ministério da Educação
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof$^{a}$. Glaucia Maria Bressan
(Orientador)

---

Prof. André Luis Machado Martinez

---

Prof. Daniele Costa e Silva

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, à minha família, à minha orientadora e a todos que estiveram comigo ao longo desses anos, sem vocês não seria possível a realização deste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus por me conduzir ao longo desses anos e por ter me dado força e sabedoria para continuar.

A minha família, de modo particular aos meus pais, irmãos e sobrinho por todo apoio, compreensão e incentivo por meio deles aprendi a maior e mais bela lição: o amor.

A minha orientadora ProfªGlaucia por carinhosamente me adotar como filha acadêmica e por todo sua contribuição ao longo dessa jornada, de modo especial por ser parte deste trabalho e por me guiar ao longo dele e por fazer eu amar a pesquisa cientifica. Meu eterno agradecimento.

Ao Marcelo Rubino por compartilhar os dados para a pesquisa desse Trabalho de Conclusão de Curso.

A professora Maria Lucia por ter sido minha primeira orientadora e por ter sido uma mãe tanto na vida acadêmica como na minha vida pessoal. E a professora Mirian minha orientadora de monitoria, por compartilhar sua sabedoria e ensinamentos.

Aos amigos que fiz durante todos esses anos e que quero levar para a minha vida toda, com vocês dividi as alegrias, as derrotas, as vitórias, as angústias. Com vocês aprendi umas das mais belas lições: Tolerância em saber que apesar das diferenças a amizade sempre permaneceu. De modo particular: Joci, Fabi, Tais, Glaucia, Rebeca, Débora Tamagnoni, Eduardo, Giovana, Kelly Pfhal, Yann. Aos grupos "Atravessa Fronteiras"e "Rainhas". E aos demais não citados neste momento, mas que fizeram parte dessa jornada. As minhas amigas e amigos de fora das paredes da universidade, o apoio de vocês foi fundamental.

Ao Sérgio e o Lucas que mais do que amigos de graduação se tornaram meus grandes irmãos, se hoje cheguei aqui foi porque vocês não permitiram que eu desistisse, juntos construímos uma amizade para vida toda. Em todos meus momentos de dificuldades foram vocês que me socorreram me iluminando com a sabedoria e conhecimento de vocês. A Carina que foi um presente da UTFPR por todo apoio, por acreditar em mim quando eu mesma não acreditava e principalmente por ter me dado um dos presentes mais valiosos, a oportunidade de ser madrinha do seu bem mais precioso (Murilo) , por vocês meu amor e gratidão eterna, amo vocês.

Por fim, mas não menos importante à minha Psicóloga Dr ªIone que bom que nossos caminhos se cruzaram e justamente nessa jornada da minha vida, você é uma das grandes responsáveis por eu ter chego aqui, um dia entrei no seu consultório sem saber o que queria e hoje eu sei que fiz a escolha certa. Obrigada.

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer” (Albert Einstein).

## RESUMO

BRUNIERA, Bruna. **Otimização Linear e Aplicação no Problema de Transporte e Designação de Tarefas**. 2018. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Considerando os avanços tecnológicos que vem ocorrendo ao longo das décadas, as empresas tem buscado ações para melhorar seu desempenho, como diminuir custos, tempos de produção e otimizar processos de produção. Desta forma, o objetivo deste trabalho é estudar o Problema do Transporte e o Problema de Designação de Tarefas, formulados como problemas de Programação Linear, bem como suas aplicações em processos produtivos. Para resolver estes problemas, existem na literatura, respectivamente, dois algoritmos que podem ser implementados computacionalmente para obtenção das soluções: o Método Simplex e o Algoritmo Húngaro. Portanto, é desenvolvida uma aplicação destes problemas em uma micro-cervejaria localizada no município de Araraquara, SP, a fim de minimizar o custo de transporte dos produtos para seus locais de distribuição e o tempo de produção das quatro cervejas melhor avaliadas, designando o melhor fermentador para sua produção.



**Palavras-chave:** Programação Linear. Problema do Transporte. Designação de Tarefas. Pesquisa Operacional.

## ABSTRACT

BRUNIERA, Bruna. **Linear Optimization and Application in the Transport Problem and Assignment of Tasks**. 2018. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Considering the technological advances that has been occurring over the decades, companies have been trying to implement actions in order to improve their performance, such as to reduce costs, production times and to optimize production processes. Therefore, the goal of this work is to study the Transport Problem and the Assignment of Tasks Problem, modeled as Linear Programming problems, as well as applications in productive processes. In order to solve these problems, there are in the literature, respectively, two algorithms that can be implemented computationally for obtaining the solutions: Simplex Method and Hungaro Algorithm. Thus, an application of these problems is developed in a micro-brewery located in the city of Araraquara, in SP state, in order to minimize the transport cost of the products to the centers of distribution and the production time of the four beers best evaluated, assigning the best fermenter for its production.



**Keywords:** Linear Programming. Transport Problem. Assignment of tasks. Operational Research.

## LISTA DE FIGURAS

**LISTA DE TABELAS**

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Com os avanços computacionais e tecnológicos, bem como com o crescimento industrial do Brasil, as indústrias têm se tornado cada vez mais competitivas. Desta forma, a automatização e a eficiência dos processos produtivos se fazem necessárias para a sobrevivência da indústria no mercado, o que estimula o estudo de processos de otimização da produção e de serviços. A minimização de custos e de desperdícios de matéria-prima, aliados ao impacto ambiental, têm sido uma preocupação importante. Nesse contexto, a Pesquisa Operacional pode ser definida como uma ciência que desenvolve métodos quantitativos para a resolução de problemas de otimização de processos (GOLDBARG; LUNA, 2005). A observação inicial e a formulação do problema está entre os mais importantes passos da solução de um problema usando os métodos da Pesquisa Operacional (MOREIRA, 2010). Esta ciência busca encontrar uma solução - chamada solução ótima - por meio da modelagem matemática para o auxílio na tomada de decisões. As técnicas da Pesquisa Operacional têm sido utilizadas ao longo do tempo em vários setores como engenharia, saúde, indústria e serviços públicos.

Um dos principais modelos quantitativos da Pesquisa Operacional é conhecido na literatura como Programação Matemática (GOLDBARG; LUNA, 2005). Esta, compreende algumas subáreas, como a Programação Linear, a qual utiliza funções lineares em sua formulação (ARENALES et al., 2015). A Programação Matemática trata de problemas de decisão e faz uso de modelos matemáticos que procuram representar o problema real. Variáveis (incógnitas) são definidas e relações matemáticas entre essas variáveis são estabelecidas de forma a descrever o comportamento do sistema. O modelo matemático é resolvido por meio de algum método de resolução e, em seguida, deve ser feita a validação do modelo, isto é, a verificação de que as soluções obtidas são compatíveis com a realidade, para diversas situações alternativas (ARENALES et al., 2015).

Um problema típico de Programação Linear é chamado de Problema de Transporte (LACHTERMACHER, 2009). Este problema consiste em determinar soluções para satisfazer demandas, portanto, há um problema de decisão envolvido. Sendo assim, é preciso determinar o quanto deve ser produzido em cada fonte e como deve ser enviado para cada destino, de maneira a satisfazer as demandas e minimizar o custo total do transporte (MOREIRA, 2010). No caso de uma fábrica, por exemplo, é necessário fazer a distribuição dos seus bens para várias localizações. Logo, cada fonte e cada destino terá rotas e custos diferentes. Então, o problema de transporte auxilia de maneira a satisfazer as demandas e minimizar os custos.

Os problemas de Designação de Tarefas, por sua vez, podem ser entendidos como um caso especial do Problema de Transporte. Este tipo de problema envolve a atribuição de tarefas para pessoas e de produtos para máquinas, de modo, que cada elemento corresponda a uma atribuição. Por exemplo: escalar uma pessoa para realizar um projeto ou uma máquina para realizar um trabalho (MOREIRA, 2010).

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é então estudar o Problema do Transporte e o Problema de Designação de tarefas como tipos clássicos de Problemas de Programação Linear. Para obter as soluções destes problemas, aplica-se, respectivamente, dois algoritmos da literatura que podem ser implementados computacionalmente: o Método Simplex (ARENALES et al., 2015) e o Algoritmo Húngaro (MOREIRA, 2010)). Em um segundo momento deste trabalho, pretende-se desenvolver aplicações reais de tais problemas em uma micro-cervejaria localizada no município de Araraquara, SP. A principal contribuição deste estudo é oferecer auxílio na tomada de decisão de uma indústria de pequeno porte, no sentido de otimizar o transporte de produtos para seus destinos e a designação de tarefas executadas por máquinas específicas.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta proposta é estudar problemas que podem ser modelados através da Programação Linear, em especial os Problemas de Transporte e Designação de Tarefas, por meio de estudos de casos reais com apoio de algoritmos de resolução, auxiliando na tomada de decisão.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do presente trabalho são descritos a seguir:

- estudar modelos matemáticos de Programação Linear.
- estudar os problemas de transporte e de designação de tarefas, juntamente com seus respectivos algoritmos de resolução: o método Simplex e o Algoritmo Húngaro;
- aplicar a teoria da otimização em um estudo de caso real;
- estudar técnicas computacionais para resolução dos problemas propostos;
- oferecer auxílio na tomada de decisão proporcionando a melhor solução.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma: O capítulo 1 apresenta a introdução do texto e objetivos desta proposta. O Capítulo 2 apresenta a revisão da literatura em relação aos métodos abordados neste trabalho. O Capítulo 3 descreve os principais conceitos da Pesquisa Operacional e define o Problema de Programação Linear. O Capítulo 4 descreve o problema de Transporte e o algoritmo de resolução, o Método Simplex. Em seguida, o Capítulo 5 apresenta o Problema de Designação de Tarefas e o Algoritmo Húngaro. Uma aplicação real dos problemas estudados é apresentada no Capítulo 6, em que é desenvolvido o estudo de caso em uma micro-cervejaria. Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões e as perspectivas de continuidade do trabalho.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Na literatura, é possível encontrar vários trabalhos sobre a importância da Pesquisa Operacional na tomada de decisões e que formulam os Problemas de Transporte e Designação de Tarefas como problemas de Programação Linear.

Em Stark, Cantao e Cantao (2013), os autores abordam o Problema de Transporte por meio do estudo do roteamento de veículos na coleta seletiva na cidade de Sorocaba, SP. O objetivo principal é melhorar o processo de coleta seletiva e os ganhos econômico-ambientais. O Problema é descrito como um Problema de Programação Inteira Mista e foi resolvido com apoio do *solver* CPLEX. Houve indícios de redução na distância percorrida em relação ao praticado habitualmente, entre 10% e 30%. Os benefícios ambientais da redução das rotas realizadas não se refletem apenas na economia de combustível, mas melhoram também a qualidade de atendimento e a separação de material.

Felizari et al. (2007) apresentam a aplicação do Problema do Transporte em derivados de petróleo em complexos dutoviários. O objeto de estudo dos autores incluiu 9 áreas, sendo 3 refinarias, 1 porto e 5 terminais de distribuição. O objetivo do trabalho é a tomada de decisões durante a operação da rede, permitindo evitar significativas reprogramações, prezar o atendimento dos requisitos de entrega de produtos, manter os estoques de refinarias e terminais dentro de limites práticos, e ao mesmo tempo gerenciar a utilização/ocupação dos dutos do sistema. Além disso, fornecer informações que permitam futuramente ajudar na capacidade ociosa da rede. No trabalho dos autores, foi possível tratar situações de até um mês, permitindo planejamento das movimentações a curto e médios prazos.

No trabalho de Nogueira, Valle e Machado (2010), o Problema do Transporte é aplicado para proporcionar melhoria no roteamento de veículos e, consequentemente, redução dos custos de suprimento de leite em cooperativas. Para isso, os autores utilizaram dados do setor logístico de uma cooperativa de leite para poder formular um modelo eficaz no custo das rotas que dependendo da região chega a 40% do preço final do leite. O problema dos autores é classificado como um problema de roteamento, uma vez que suas restrições levam em consideração: rota, número de roteiros, localização dos clientes, frota, capacidade dos veículos, demanda, permanência nos locais. O Problema do Transporte foi mais satisfatório que o modelo adotado pela empresa mostrando que o menor ganho foi de 24% e o maior de 59% em dois dias.

Steiner et al. (2000) aborda um problema de roteamento no transporte escolar. O problema considera as distâncias percorridas, a capacidade e a disponibilidade. O modelo matemático é descrito como um Problema de Programação Inteira Binária e a solução foi obtida por métodos heurísticos. O modelo mostrou-se útil, uma vez que minimizou os gastos com combustível e a manutenção das frotas dos ônibus. Além disso, minimizou o tempo da permanência dos alunos dentro do ônibus, um fator de grande satisfação tanto para os alunos quanto para seus pais.

Um modelo de designação de tarefas foi desenvolvido em Pinheiro et al. (2015). O principal objetivo é designar pessoas às equipes de apoio para organização de um evento acadêmico, levando em consideração as habilidades e as preferências dos candidatos a comporem as equipes. Visando identificar o número de candidatos a serem designados a cada equipe de apoio, foi desenvolvido um modelo inicial, cujos resultados serviram de base para o desenvolvimento de 3 submodelos. O modelo matemático proposto mostrou ser eficiente, obtendo uma solução satisfatória tanto nas capacidades dos candidatos, quanto na demanda necessária ao evento.

Em Teixeira (2011), é desenvolvido um modelo matemático que descreve o problema de alocação de vagões gôndolas de carga geral através do emprego de Programação Linear. Diante da limitação de recursos da empresa, tal como quantidade restrita de vagões para transporte e vasta carteira de atendimento de clientes, torna-se fundamental determinar como alocar esses recursos de forma eficiente e lucrativa. O principal objetivo é definir quais clientes devem ser atendidos, buscando maximizar o resultado sob o aspecto financeiro e garantindo o ponto ótimo no atendimento. O intuito é desenvolver um modelo capaz de determinar a melhor distribuição de vagões entre as cargas de clientes que demandam atendimento, assim otimizando os recursos disponíveis em cada situação, gerando a maior margem por vagão hora possível.

O trabalho de Silva (2003) consiste no desenvolvimentos de algoritmos genéticos para a resolução do problema de designação de tarefas em multiprocessadores de processamento digital de sinais. De modo geral, o problema busca a minimização de atraso total de uma arquitetura de multiprocessadores utilizada em sistemas reais. Os algoritmos aplicados foram eficazes obtendo um atraso menor de 60% e um tempo computacional maior. Todos os algoritmos analisados obtiveram resultados positivos.

Silva et al. (2004) apresenta um modelo matemático de Programação Linear Inteira Binária para resolver o problema de escalas de trabalho para o serviço de guarda de soldados militares da Aeronáutica, de forma a definir os dias de serviço de guarda de cada militar, levando em consideração as suas preferências e as leis da hierarquia militar. O principal objetivo do trabalho é maximizar as preferências, respeitando os graus hierárquicos. Para validar o modelo, várias simulações foram realizadas variando-se o número de militares, os seus pesos (graus de prioridade), as demandas diárias, os tipos de escalas e a possibilidade de se ter militares de sobreaviso. Os resultados foram bastante satisfatórios, comparando-se as escalas otimizadas com as escalas em uso por ocasião da coleta de dados.

Observando-se o referencial bibliográfico, é possível verificar que os Problemas de Transporte e Designação de Tarefas formulados como um Problema de Programação Linear são bem aplicados em problemas reais e bastante citados na literatura. Logo, é possível verificar a importância desses modelos matemáticos para a tomada de decisões e obtenção de soluções ótimas.

# 3 PESQUISA OPERACIONAL E O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

No Brasil, a pesquisa Operacional surgiu por volta dos anos de 1960. Uma definição de Pesquisa Operacional foi proposta na primeira página do periódico inglês *Operational Research Quarterly* em 1967, que de forma resumida, consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos,com a finalidade de prever e comparar estratégias ou decisões alternativas (ARENALES et al., 2015). Ou seja, esta ciência busca encontrar uma solução -chamada solução ótima- por meio da modelagem matemática no auxílio de tomada de decisões.

Três requisitos são necessários para a utilização da Pesquisa Operacional: o primeiro envolve a compreensão de características e atributos de um sistema complexo bem como habilidade de abstrair e traduzir os pontos mais importantes em um modelo matemático ou de simulação; o segundo consiste na habilidade de desenvolver métodos de resolução e utilizar pacotes comerciais com conhecimento sobre os métodos utilizados e por fim, o terceiro envolve a comunicação com os clientes para compreender e explicar os problemas não intuitivos, gerados pela Pesquisa Operacional (ARENALES et al., 2015).

Um dos principais modelos quantitativos da Pesquisa Operacional é conhecido na literatura como Programação Matemática. Esta, compreende algumas subáreas, como a Programação Linear, a qual utiliza funções lineares em sua formulação (ARENALES et al., 2015).

## 3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Para a formulação de um Problema de Programação Linear (PPL), de forma geral, são necessários três elementos: a função objetivo, a qual deve ser maximizada ou minimizada; um conjunto de restrições que devem ser satisfeitas e as condições de não-negatividade, inerentes em todo PPL. Todas as equações do modelo são constituídas por funções lineares, relacionando as variáveis de decisão com os coeficientes conhecidos.

Para que o problema possa ser modelado como um PPL, algumas características devem ocorrer (LACHTERMACHER, 2009):

• Proporcionalidade: o valor da função objetivo é diretamente proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão.

• Aditividade: considera as variáveis de decisão do modelo como entidades totalmente independentes, não permitindo que haja interdependência entre as mesmas, isto é, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições.

• Divisibilidade: assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracional, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir valor fracionário.

• Certeza: assume que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas. Em problemas reais, a certeza quase nunca é satisfeita, provocando a necessidade de análise de sensibilidade dos resultados.

Desta forma, o PPL pode ser escrito como a seguir (GOLDBARG; LUNA, 2005).

$$
\begin{aligned}
&min \quad \text{ou} \quad \max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n && (3.1)\\
&\text{sujeito a} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \quad [sinal] \quad b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \quad [sinal] \quad b_2 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \quad [sinal] \quad b_2 \\
&(...) \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \quad [sinal] \quad b_m && (3.2)\\
&x_1, x_2, x_3, ..., x_n \geq 0 && (3.3)
\end{aligned}
$$

Em que:
- $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as variáveis de decisão;
- $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ são os coeficientes (números reais) da função objetivo;
- $b_1, b_2, ..., b_m$ são as constantes (números reais) de cada uma das restrições;
- $a_{ij}$ são os coeficientes (números reais) das restrições;
- o símbolo [sinal] indica que a restrição pode ser uma equação ou uma inequação;

Depois da declaração da função objetivo (3.1), um conjunto de restrições (3.2) deve ser considerado com as palavras “sujeito a”. Dessa forma, indica-se que a função objetivo está sujeita a algumas restrições ou limitações que devem ser satisfeitas. Por fim, ressaltamos as condições de não-negatividade (3.3) que serão expressas para um Problema de Programação Linear.

Um PPL pode ser escrito na forma padrão por meio das seguintes operações elementares (GOLDBARG; LUNA, 2005):

*Operação 1:* mudança no critério de otimização, ou seja, transformação de maximização para minimização e vice e versa, utilizando da seguinte propriedade:

maximizar $f(x)$ corresponde a minimizar $(-f(x))$ e
minimizar $f(x)$ corresponde a maximizar $(-f(x))$

*Operação 2:* transformação de uma variável livre $(x_j \in \Re)$, em variável não negativa ou seja, uma variável que assume valores reais (positivos, negativos, racionais) em uma variável não negativa (maior ou igual a zero). A variável livre $x_n$ é substituída por duas variáveis auxiliares $x_n^1$ e $x_n^2$ ambas maiores ou iguais a zero, mas a diferença das duas é igual à variável original, ou seja:

$$x_n = x_n^1 - x_n^2 \text{ e } x_n^1 \geq 0, x_n^2 \geq 0$$

*Operação 3:* Transformação das inequações em equações:

Para o caso da transformação de restrições de menor igual $(\leq)$ em igualdade, soma-se uma variável chamada de *variável de folga*, capaz de completar a desigualdade, tornando-a igualdade. Desta forma, considere a restrição apresentada por:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \leq b$$

introduzindo a variável de folga $x_{n+1}$, obtém-se:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = b$$

Assim, um problema de maximização com as restrições na forma de desigualdade, do tipo menor ou igual ($\leq$), pode ser escrito na forma padrão como:

$$Maximizar\ \ c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m}$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$
$$(...)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} \geq 0$$

De modo que:

- $x_1 + x_2 + ... + x_n$ são as variáveis de decisão
- $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ são as variáveis de folga.
- Caso da transformação de restrições de maior igual em restrições de igualdade:

Para o caso da transformação de restrições de maior ou igual ($\geq$) em igualdade, subtrai-se uma variável de folga, tornando-se igualdade. Desta forma, considere a restrição apresentada por:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq b$$

introduzindo a variável de folga $x_{n+1}$, obtém-se:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n - x_{n+1} = b$$

Da mesma forma, um problema de minimização com as restrições na forma de desigualdade, do tipo maior ou igual ($\geq$), também pode ser escrito na forma padrão como:

$$Minimizar\ \ c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m}$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$$
$$(...)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} \geq 0$$

Logo,

- $x_1 + x_2 + ... + x_n$ são as variáveis de decisão
- $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ são as variáveis de folga.

Nos capítulos seguintes, serão apresentados os Problemas do Transporte e de Designação de Tarefas, os quais podem ser formulados matematicamente como Problemas de Programação Linear.

# 4 O PROBLEMA DO TRANSPORTE

O Problema do Transporte pode ser modelado como um PPL e pode ser interpretado como a tarefa de transportar o que foi produzido por fontes ou centros de produção de uma fábrica ou indústria, para seus armazéns ou para seus locais de distribuição. Esse problema tem como objetivo encontrar a melhor solução, com o menor o custo, para percorrer os caminhos e realizar o transporte de produtos. Desse modo, o problema deve apresentar como resposta a quantidade que deve ser enviada e para onde deve prosseguir, de maneira que satisfaça as demandas com o menor custo possível. As quantidades produzidas ou ofertadas em cada centro e as quantidades demandadas em cada mercado consumidor são conhecidas. O transporte deve ser efetuado de modo que respeite as limitações de oferta e atenda à demanda (ARENALES et al., 2015).

## 4.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Por se tratar de um PPL, considera-se a hipótese de que o custo unitário de transporte de cada fábrica para cada destino é constante, independente da quantidade a ser transportada (LACHTERMACHER, 2009). A formulação geral do Problema do Transporte pode ser escrita matematicamente conforme a seguir, minimizando-se o custo total do transporte de acordo com a função objetivo (4.1).

$$minZ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}. \tag{4.1}$$

Em que:
• $X_{ij}$ é a quantidade de itens transportados da fábrica $i$ para a fábrica $j$ (variáveis de decisão);
• $C_{ij}$ é o custo unitário do transporte da fábrica $i$ para o destino $j$ (constantes);
• $m$ é o número de fábricas;
• $n$ é o número de destinos.

As restrições representam o seguinte cenário: as fábricas não podem produzir mais do que sua capacidade e os centros não desejam receber volumes acima de suas demandas. Há duas maneiras para as restrições serem implementadas. Na primeira, o montante ofertado (somatório das capacidades das fábricas) deve ser igual ao demandado. Para isso as seguintes regras precisam ser seguidas:

• No caso em que a oferta for maior que a demanda, deve-se introduzir um destino fantasma, chamado de *dummy*, que tenha os custos de transporte unitário de todas as fábricas para este destino iguais a zero. E além disso, a demanda do centro consumidor deve ser igual à diferença entre o ofertado e o total demandado;

• No caso da demanda ser maior que a oferta, deve-se introduzir uma fonte de oferta fantasma, também chamado de *dummy*, que tenha os custos de transporte unitários para todos os destinos iguais a zero e uma capacidade igual à diferença entre o total demandado e o total ofertado.

Se uma fonte ou uma demanda fantasma for inserida, é garantido que o total das restrições do problema serão dadas por igualdades. Estas restrições matemáticas são escritas conforme as equações a seguir:

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = f_i$ (para $i$=1,2,...,$m$) restrições da capacidade das fábricas

O somatório das quantidades enviadas para cada fábrica e para cada $n$ destinos deverá ser igual o total ofertado pela fábrica $f_i$.

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j$ (para $j$=1,2,...,$n$) restrições dos centros consumidores

Neste caso, os somatórios das quantidades recebidas por cada centro consumidor das $m$ fábricas deve ser igual ao total demandado por cada destino $d_j$ Somando-se todos os lados de todas as restrições, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} f_i$$

e

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Como os lados esquerdos das duas equações acima representam o somatório do custo de todos os itens transportados das fábricas para os destinos, logo pode-se concluir que os lados direitos também deverão ser iguais, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Esta igualdade é a condição suficiente e necessária para que qualquer problema de transporte tenha solução ótima, caso o modelo utilize variáveis fantasmas.

A segunda forma de se implementar as restrições varia com o total da capacidade das fábricas e o total demandado. O procedimento neste caso ocorre da seguinte forma:

- Quando a oferta é maior que a demanda, nem todas as fábricas produzirão em plena capacidade, porém, os centros consumidores receberão a quantidade desejada. Matematicamente, representa-se como:

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq f_i$, onde $f_i; (i = 1, 2, ..., m)$ restrições das fábricas;

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j$ onde $d_j; (j = 1, 2..., n)$ restrições dos centros consumidores;

- Quando a demanda é maior que a oferta, nem todos os centros receberão as quantidades que desejam, porém as fábricas produzirão sua plena capacidade. Matematicamente, tem-se:

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = f_i; (i = 1, 2, ..., m)$ restrições das fábricas;

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \leq d_j; (j = 1, 2..., n)$ restrições dos centros consumidores;

As variáveis do tipo fantasma não são obrigatórias no modelo, porém facilitam a interpretação do resultado da otimização. Se ocorrer um desequilíbrio entre oferta e demanda, as seguintes ações e interpretações podem ocorrer: se a capacidade for maior que a demanda, a ação é buscar novos consumidores e a interpretação é a capacidade ociosa das fábricas. Se a demanda é maior que a capacidade, a ação é criar uma nova fabrica e a interpretação é que a demanda não é atendida.

### 4.1.1 Exemplo Numérico

Nesta seção, um exemplo numérico do Problema do Transporte (MOREIRA, 2010) é descrito e resolvido utilizando o Método Simplex.

Neste exemplo, existem três fontes de suprimento de um dado produto, as quais serão indicadas por $F_1$, $F_2$ e $F_3$, com as seguintes capacidades mensais de produção:

$F_1$: 10000 unidades
$F_2$: 15000 unidades
$F_3$: 5000 unidades

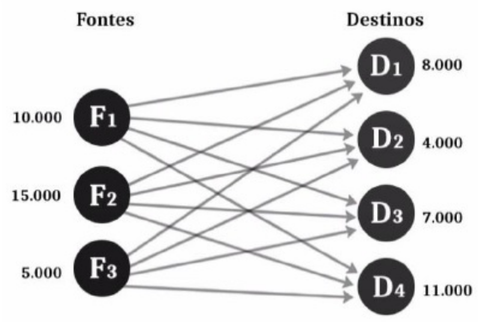
Perfazendo um total de 30.000 unidades disponíveis por mês. Essas três fontes devem suprir as necessidades de quatro armazéns (destinos), indicados por $D_1, D_2, D_3$ e $D_4$, com as seguintes demandas do produto por mês:

$D_1$: 8000 unidades
$D_2$: 4000 unidades
$D_3$: 7000 unidades
$D_4$: 11000 unidades

Chegando, portanto, a um total de 30.000 unidades de produto demandados por mês.

A situação descrita pode ser representada por meio de uma rede, como mostrado na Figura 1.

**Figura 1 – Redes de fontes de suprimento e destino da demanda.**




**Fonte: (MOREIRA, 2010)**

Na Figura 1, os círculos representam as fontes de suprimento e os destinos das demandas. Ao lado dos círculos, anotou-se a capacidade de produção de cada fonte de suprimento e o valor da demanda de cada um dos destinos. As linhas que unem os círculos representam as diversas rotas de transporte. Suponha que os custos de transporte nas várias rotas variem segundo a Tabela 1.

**Tabela 1** – **Matriz de custo de Transporte (R$/unidade)**

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 13 | 9 | 8 | 12 |
| $F_2$ | 12 | 9 | 10 | 14 |
| $F_3$ | 8 | 8 | 9 | 6 |

Solução:

Seja $x_{ij}$ o número de unidades do produto despachadas da fonte de suprimento $i = 1, 2, 3$ para o destino $j = 1, 2, 3, 4$. Fazendo uma síntese com os custos da Tabela 1, as informações sobre demanda dos destinos e capacidade de suprimento das fontes, obtém-se a chamada *matriz de transporte*, apresentada na Tabela 2.

**Tabela 2** – **Matriz de transporte.**

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $Suprimento$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | (13) $x_{11}$ | (8) $x_{12}$ | (9) $x_{13}$ | (13) $x_{14}$ | 10.000 |
| $F_2$ | (12) $x_{21}$ | (9) $x_{22}$ | (10) $x_{23}$ | (14) $x_{24}$ | 15.000 |
| $F_3$ | (8) $x_{31}$ | (8) $x_{32}$ | (9) $x_{33}$ | (6) $x_{34}$ | 5.000 |
| $Demanda$ | 8.000 | 4.000 | 7.000 | 11.000 | 30.000 |

Os números entre parênteses são os custos das rotas entre as fontes e os destinos correspondentes. As variáveis $x_{ij}$ são as variáveis de decisão, ou seja, as quantidades que devem ser transportadas de cada fonte a cada destino. São ao todo 12 variáveis de decisão. A última coluna à direita da Tabela 2 fornece a capacidade de suprimento de cada fonte, e a linha mais abaixo fornece a demanda de cada um dos destinos.

Formulando o problema como um PPL, a função objetivo deve minimizar o custo do transporte, dado por (4.2)

$$min 13x_{11}+8x_{12}+9x_{13}+12x_{14}+12x_{21}+9x_{22}+10x_{23}+14x_{24}+8x_{31}+8x_{32}+9x_{33}+6x_{34} \quad (4.2)$$

As restrições, por sua vez, têm origem nos fatos que cada fonte de suprimento tem produção limitada e de valor conhecido; e cada destino tem demanda especificada e conhecida. Portanto, há dois conjuntos de restrições: um relativo à capacidade de produção das fontes e outro relativo à demanda dos destinos.

Portanto, tem-se:

*Restrições relativas às fontes de produção:*
$x_{11} + x_{22} + x_{13} + x_{14} \leq 10.000$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 15.000$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 5.000$

*Restrições relativas às demandas dos destinos*:
$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 8.000$
$x_{12} + x_{22} + x_{31} = 4.000$
$x_{13} + x_{32} + x_{33} = 7.000$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 11.000$

Desta forma, tem-se um problema com 12 variáveis de decisão e sete restrições. Este exemplo ilustra a modelagem matemática de um problema do transporte. Para resolvê-lo é necessário aplicar um método computacional como o Método Simplex, descrito na Seção 4.2.

### 4.1.2 Exemplo Numérico

O exemplo a seguir mostra uma solução utilizando variáveis dummy no caso em que a capacidade é maior que a demanda. O seguinte exemplo é desenvolvido de acordo com (LACHTERMACHER, 2009):

A LCL bicicletas Ltda. é uma empresa fabricante de bicicletas que possui três fábricas localizadas no Rio de Janeiro, São Paulo e Belo Horizonte. A produção da empresa deve ser entregue em Recife, Salvador e Manaus. Considerando os custos de transporte unitários, a capacidade de produção das fábricas e a demanda dos centros consumidores ilustrados na tabela abaixo, determine o quanto deve ser produzido e entregue por fábrica em cada centro consumidor, de forma a minimizar os custos de transporte.

**Tabela 3 – Dados do Caso LCL Bicicletas**

| **Fábrica/C Consumidor** | **Recife (1)** | **Salvador (2)** | **Manaus (3)** | **Capacidade** |
|---|---|---|---|---|
| Rio (1) | 25 | 20 | 30 | 2000 |
| São Paulo (2) | 30 | 25 | 25 | 3000 |
| Belo Horizonte (3) | 20 | 15 | 23 | 1500 |
| Demanda | 2000 | 2000 | 1000 | |

O primeiro passo para resolver um problema de otimização é a determinação das variáveis de decisão. No caso do Problema de Transporte essas variáveis são as quantidades que devem ser enviadas de cada fábrica para cada centro consumidor e além disso as variáveis dummy caso o problema que estejamos apresentando seja do tipo (capacidade > demanda). No caso desse problema é exatamente o que acontece, pois o total ofertado é de 6.500 unidades enquanto a demanda é de 5.000 unidades ou seja, o total ofertado e superior ao demandado , de forma que um centro consumidor dummy de ser criado com uma demanda de 1.500 unidades (6500-5000). Logo, às variáveis do problema são as seguintes:

- $x_{11}$ - número de bicicletas remetidas do Rio para Recife;
- $x_{12}$ - número de bicicletas remetidas do Rio para Salvador;
- $x_{13}$ - número de bicicletas remetidas do Rio para Manaus;

- $x_{14}$ - número de bicicletas remetidas do Rio para a dummy;
- $x_{21}$ - número de bicicletas remetidas de São Paulo para Recife;
- $x_{22}$ - número de bicicletas remetidas de São Paulo para Salvador;
- $x_{23}$ - número de bicicletas remetidas de São Paulo para Manaus;
- $x_{24}$ - número de bicicletas remetidas de São Paulo para a dummy;
- $x_{31}$ - número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Racife;
- $x_{32}$ - número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Salvador;
- $x_{33}$ - número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Manaus;
- $x_{34}$ - número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para a Dummy;

A função objetivo deste problema será a minimização do custo total de transporte, o que matematicamente por ser representando por:

$$\text{Min Z} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}X_{ij}$$

ou na forma estendida:

$$\text{Min Z} = 25x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 30x_{21} + 25x_{22} + 25x_{23} + 20x_{31} + 15x_{32} + 23x_{33} \quad (4.3)$$

As variáveis dummy relativas ao centro consumidor não aparecem na função objetivo, já que o custo unitário de transporte de qualquer fábrica é igual a zero. O que matematicamente significa um custo total de transporte igual a zero para este centro consumidor, de acordo com a realidade do problema, uma vez que nenhuma fábrica remeteria mercadorias para um centro consumidor inexistente.

Restrições de Oferta:

Com a inserção das variáveis dummy , todas as restrições são de igualdade. A capacidade de cada fábrica que não for utilizada será virtualmente enviada para o centro consumidor dummy. Portanto, as restrições de ofertas são:

$$\sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} = f_i (i = 1, 2, \ldots, m) \text{ Restrições das Fábricas} \quad (4.4)$$

ou seja:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2000$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 3000$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1500$

Restrições de Demanda:

Utilizando a ideia aplicada nas restrições de oferta, iguala-se a demanda de cada centro consumidor, inclusive o centro consumidor dummy,ao total remetido por fábrica para aquele destino. As restrições de demanda , portanto serão:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j (j = 1, 2, \ldots, n+1) \text{ Restrições dos Destinos} \quad (4.5)$$

ou seja:
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500$

Restrições de Não-Negatividade:

Como não faz sentido transportar quantidades negativas,temos que incluir uma restrição para que todas as quantidades tansportadas sejam maiores ou iguais a zero:

$x_{ij} \geq,$ para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$ e $4$

Este exemplo ilustra a modelagem matemática de um problema do transporte utilizando variáveis *dummy*. Para resolvê-lo é necessário aplicar um método computacional, como o Método Simplex.

## 4.2 O MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex, desenvolvido por George Dantzig em 1947, utiliza uma sequência de cálculos para chegar à solução de um Problema de Programação Linear (MOREIRA, 2010) e pode ser aplicado para obter a solução do Problema do Transporte. O algoritmo utiliza de ferramentas da Álgebra Linear para determinar, por meio de um método iterativo, a solução ótima de um PPL. De forma geral, o algoritmo parte de uma solução viável do sistemas de equações, solução essa normalmente extrema (vértice), e a partir dessa solução inicial identifica novas soluções viáveis. Logo, o algoritmo permite encontrar novos e melhores vértices da envoltória convexa do problema e além disso, determinar se o vértice escolhido é uma solução ótima (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Considere o problema primal de otimização linear na forma padrão (ARENALES et al., 2015):

$$\text{min} f(x) = c^T x$$

$$\text{s.a: } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

onde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ e, sem perda de generalidade, assuma que posto $(A) = m$

A solução geral do sistema em $Ax = b$ pode ser descrita considerando uma partição nas colunas de $A$:

$$A = (B, N)$$

tal que $B \in \mathbb{R}^{mxn}$, formada por $m$ colunas da matriz $A$, seja não singular. A partição equivalente é feita no vetor das variáveis:

$$x = (x_B, x_N),$$

onde $x_B$ é chamado *vetor de variáveis básicas* e $x_N$ *vetor de variáveis não básicas*. Assim,

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Dada uma escolha qualquer para $x_N$, tem-se $x_B$ bem determinado, de modo que o sistema está verificado.

**Definição 4.2.1** *A solução particular $x$ obtida por $x_B^0 = B^{-1}b, x_N^0 = 0$ é chamada solução básica. Se $x_B^0 = B^{-1}b \geq 0$, então a solução básica é primal factível.*

Considere também a partição nos coeficientes do gradiente da função objetivo $c$:

$$c^T = (c_B, c_N)^T.$$

**Definição 4.2.2** *O vetor $y \in \mathbb{R}^m$, dado por*

$$y^T = c_B^T B^{-1}$$

*é definido como vetor das variáveis duais ou vetor multiplicador simplex. Se*

$$c_j - y^T a_j \geq 0,$$

*para $j = 1, \ldots, n$ então $y$ é uma solução básica dual factível, e diz-se que a partição é dual factível, onde $a_j$ representa a coluna $j$ da matriz de restrições $A$.*

A seguir, alguns teoremas são descritos para fundamentar o Método Simplex. As demonstrações são feitas de acordo com Goldbarg e Luna (2005).

**Definição 4.2.3** *O conjunto C = {$x$ tal que $Ax = b$, $x \geq 0$} denomina-se conjunto de soluções viáveis (ou soluções factíveis). O conjunto de todas as soluções viáveis também é chamado de região factível.*

**Definição 4.2.4** *Um conjunto é dito convexo se todos os pontos que formam o segmento de reta que une quais dois pontos deste conjunto também pertencem ao conjunto.*

**Teorema 4.2.1** *O conjunto $C$ das soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.*

**Demonstração 4.2.1.1** *Seja $C$ o conjunto formado pelos pontos $x$ tais que:*

$$\begin{gathered} Ax = b \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

*Se C é um conjunto convexo, para qualquer conjunto composto por dois pontos distintos $x_1$ e $x_2$, pertencentes a C, a combinação linear convexa desses pontos também pertence a C, o que equivale a dizer que:*

$$\{x_1, x_2\} \in C \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \quad \in C \\ \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

*Sejam duas soluções viáveis de C, $x_1$, $x_2$, tais que $x_1 \neq x_2$, então:*

$$\begin{matrix} Ax_1 = b & Ax_2 = b \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \end{matrix}$$

*e seja:*

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$$
$$0 \leq \alpha \leq 1$$

*Então:*

$$\begin{aligned} Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \\ = \alpha A x_1 + (1-\alpha)A x_2 = \\ = \alpha b + (1-\alpha)b = b \end{aligned}$$

*e $x \geq 0$, uma vez que:*

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0$$

*e*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 1$$

■

**Definição 4.2.5** *Uma Solução Básica sem componentes negativos é denominada solução básica viável.*

**Teorema 4.2.2** *Toda solução básica viável do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto C.*

**Demonstração 4.2.2.1** *Seja $C$ o conjunto formado pelos pontos $x$ tais que:*

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

*Seja, ainda, uma solução viável qualquer $x$, de dimensão $n$, na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as $m$ primeiras:*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com todos os componentes } x_i \geq 0.$$

*Suponha, por absurdo, que $x$ seja um ponto extremo do conjunto convexo $C$, definido anteriormente. Então $x$ pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto. Sejam $y$ e $z$ esses dois pontos, temos:*

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z$$
$$0 \leq \alpha \leq 1$$

*Como $y$ e $z$ pertencem ao conjunto $C$, as seguintes relações de pertinência são válidas:*

$$Ay = b \qquad Az = b$$
$$\text{e}$$
$$y \geq 0 \qquad z \geq 0$$

*A relação $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:*

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)z_1 \\ x_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)z_2 \\ \vdots \\ x_m = \alpha y_m + (1-\alpha)z_m \\ 0 = \alpha y_{m+1} + (1-\alpha)z_{m+1} \\ \vdots \\ 0 = \alpha y_n + (1-\alpha)z_n \end{gathered}$$

*Devido às relações $0 \leq \alpha \leq 1$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ as últimas $(n-m)$ relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas em um dos seguintes casos:*

1. $0 < \alpha < 1$ *e* $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$, *para* $i = 1, ..., n-m$.
   *Neste caso teríamos $x = y = z$, pois tanto $y$ quanto $z$ são soluções básicas do sistema em análise, calculados com as mesmas variáveis básicas.*

2. $\alpha = 0$ *e* $z_{m+i} = 0$, *para* $i = 1, ..., n-m$.
   *Por raciocínio análogo ao caso anterior, deduzimos que $x = z$. Além disso, como $\alpha = 0$, segue que $x = y = z$.*

3. $\alpha = 1$ *e* $y_{m+i} = 0$, *para todo* $i = 1, ..., n-m$.
   *Por razões análogas, conclui-se que $x = y = z$.*

*Desta forma, demonstra-se que não existem soluções viáveis $y$ e $z$, distintas da solução básica $x$ que satisfaçam a relação $x = \alpha y + (1-\alpha)z$. Por contradição com a hipótese inicial, demonstra-se, então, que $x$ é um ponto extremo do conjunto convexo $C$.*

■

**Teorema 4.2.3** *Um ponto x é extremo em um conjunto de soluções viáveis de um problema de programação linear se e somente se $x \geq 0$ for uma solução básica do sistema de equações lineares Ax=b*

A seguinte demonstração do Teorema é feita de acordo com Menezes (2006)

**Demonstração 4.2.3.1** $(\Longrightarrow)$ *Será demonstrado que se x é um ponto extremo então x é uma solução básica viável (sbv). Suponha, então, que x é um ponto extremo de $\chi$. Se x é o vetor nulo, então como a matriz A tem posto completo, segue-se que $x$ é uma sbv para alguma matriz base de A. Sem perda de generalidade, suponha que as primeiras q componentes de $x$ são positivas. Pela viabilidade de $x$, para $j = 1, ..., q, x_j < 0$ e $A_1x_1 + ... + A_qx_q = b$, onde $A_j$ é a j-ésima coluna da matriz A. Para demonstrar que x é uma sbv, devemos mostrar que os vetores $A_1, \ldots,$ $A_q$, associados às componentes positivas de $x$, são linearmente independentes (li). Suponha, por contradição,que estes vetores são linearmente dependentes, isto é, existem números $\lambda_j$, j=1,...,q, não todos nulos, tais que:*

$$\sum_{j=1}^{q} A_j\lambda_j = 0. \tag{4.6}$$

*Selecionando*

$$\sigma = min\left\{\frac{x_j}{|\lambda_j|}; \lambda_j \neq 0, j = 1, \ldots, q\right\},$$

*pode-se escolher* $\epsilon$, $0 < \epsilon < \sigma$, *tal que* $x_j + \epsilon\lambda_j > 0$ *e* $x_j - \epsilon\lambda_j > 0$ *para* $j = 1, \ldots, q$. *Assim, define-se* $x^1$ *e* $x^2$ *por:*

$$x^1 = x + \epsilon\lambda \geq 0 \;\; e \;\; x^2 = x - \epsilon\lambda > 0, \tag{4.7}$$

*onde* $\lambda = [\lambda_1 \ldots, \lambda_q, 0 \ldots, 0]^T$. *Segue-se pela definição de* $\lambda$ *e por 4.6 que* $A\lambda = 0$. *Logo, pela linearidade de* $A$, $Ax^1 = b$ *e* $Ax^2 = b$, *de tal maneira que, usando* $x = (x^1 + x^2)/2$, *isto é,x é uma combinação convexa de dois outros pontos distintos,contradizendo o fato de que* $x$ *é um ponto extremo. Logo,* $A_1 \ldots A_q$ *são vetores* $li$ *e portanto,se* $x$ *é um ponto extremo de* $\chi$, $x$ *é uma sbv de* $\chi$. *Isto finaliza a primeira parte da demonstração.*

($\Longleftarrow$) *Será demonstrado que se* $x$ *é uma sbv então* $x$ *é um ponto extremo. Suponhamos, então, que* $x$ *é uma sbv de* $\chi$. *Se necessário, rearranjando suas componentes,*

$$x = [x_1, \ldots, xm, 0, \ldots, 0]^T, \tag{4.8}$$

*uma vez que* $x$ *é uma sbv. Além disso, pela viabilidade de* $x$, $x \leq 0$ *e*

$$Ax = Bx_B = b \tag{4.9}$$

*onde* $B$ *é a matriz base, obtida das* $m$ *primeiras colunas de* $A$. *Se*

$$x = (x^1 + x^2)/2 \in \chi$$

*para dois pontos quaisquer* $x^1, x^2 \in \chi$, *segue-se por 4.8 que as m primeiras componentes de* $x^1$ *e* $x^2$ *são não negativas e as* $n - m$ *componentes restantes são iguais a zero. Pelo fato de B ser uma matriz base, o sistema 4.9 possui uma única solução , logo* $x = x^1 = x^2$. *Portanto,* $x$ *é um ponto extremo de* $\chi$. *Isto finaliza a demonstração.*

■

**Teorema 4.2.4**

*1. Se uma função objetivo possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do Teorema 4.2.1.*

*2. Se a função objetivo assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.*

**Demonstração 4.2.4.1** *A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2013)*

**Lema 4.2.1** *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função definida por* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b, a_{ij}, b \in \mathbb{R}$. *Se dentre os valores que* $f$ *assumir num segmento AB do* $\mathbb{R}^n$, *o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto P interior deste segmento, então* $f$ *será constante em AB.*

**Teorema 4.2.5 (Teorema Fundamental da Programação Linear)** *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função definida na região poliedral convexa V do* $\mathbb{R}^n$ *por* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b, a_{ij}, b \in \mathbb{R}$. *Suponha que f assuma valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se* $V$ *possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.*

**Demonstração 4.2.5.1**

*A demonstração é feita de acordo com Camargo (2014)*

*Seja $V \subset \mathbb{R}^2$. Assuma que $n = 2$. Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de $f$ seja assumido em um ponto $P$ de $V$, considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis de $\mathbb{R}^2$ tem-se:*

*1. $P$ é um vértice. (Neste caso o teorema já está provado)*

*2. $P$ está numa aresta. Do lema (4.2.1), $f$ assumirá este valor máximo (mínimo) em toda a aresta. Como a região $V$ possui vértice(s) esta aresta conterá um vértice $V$ obrigatoriamente, portanto $f(P) = f(A)$.*

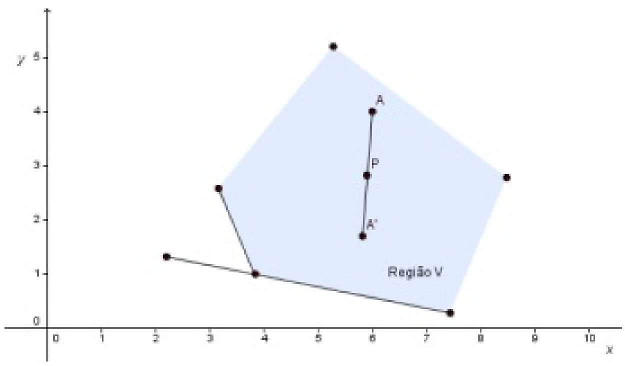
*3. $P$ está no interior de $V$. Neste Caso, $f$ será constante em toda região $V$.*

*De fato, seja A um outro ponto de interior de $V$. Como $V$ é poliedral convexa, o segmento $AP$ está contido em $V$. Além disso, como $P$ é interior podemos considerar $AA'$ que contém, $P$ deste ainda contido em $V$ . Do lema (4.2.1) segue que $f$ é constante em $AA'$ e portanto, $f(P) = f(A)$.*

*Na Figura 2 pode ser observado o ponto máximo no interior da região viável $V$.*

■

**Figura 2 – Ponto máximo no interior de uma região viável V.**




**Fonte: (CAMARGO, 2014)**

**Definição 4.2.6** *Denomina-se estratégia simplex a seguinte perturbação da solução básica: escolha $k \in N$, onde $N$ é o conjunto de índices de variáveis não básicas, tal que $c_k - y^T a_k < 0$; faça $x_k = \epsilon \geq 0$, $x_j = 0, \forall j \in N - k$.*

A estratégia simplex produz uma nova solução dada por

$$\begin{cases} x_B = x_B^0 + \epsilon d_B \\ x_N = \epsilon e_k \end{cases}$$

e o valor da função objetivo dado por:

$$f(x) = f(x^0) + (c_k - y^T a_k)\epsilon$$

onde $d_B = -B^{-1} a_k$ e $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m-n}$ com 1 na $k$-ésima componente.

A direção $d \in \mathbb{R}^n$, dada por $d = (d_B, d_N)^T = (d_B, e_k)^T$, define uma perturbação da solução básica e é chamada *direção simplex*. Se a solução básica for não-degenerada, isto é, $x_B^0 > 0$, então $d$ é uma direção factível. Note ainda que o produto escalar entre $d$ e o gradiente da função objetivo é $c^T d = c_k - y^T a_k < 0$. Portanto $d$ é uma direção de descida.

Da estratégia simplex, pode-se determinar o maior valor de $\epsilon$, impondo $x_B \geq 0$:

$$\epsilon^0 = min \left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} | d_{B_e} < 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

onde $x_{B_e}^0$ é a e-ésima componente de $x_B^0$, que sai da base.

Em suma, o Método Simplex basicamente experimenta uma sequência de soluções básicas viáveis, na busca do valor ótimo para a função objetivo.

### 4.2.1 O Algoritmo Primal Simplex

O algoritmo do Método Primal Simplex é descrito a seguir, para um problema de minimização escrito na forma padrão. É chamada de *Fase I* o procedimento para determinar uma solução inicial e, *Fase II* o Método Simplex.

**Fase I**
Encontre uma partição básica primal-factível: $A = (B \;\; N)$.
Faça PARE = FALSO, IT=0
(Será FALSO até que a condição de otimalidade seja verificada. IT indica o número da iteração.)
**Fase II**
Enquanto NÃO PARE faça:
• Determine a solução básica primal factível:
$x_B = B^{-1} b$.
• Teste de otimalidade:
Determine a solução básica dual: $y^T = c_B^T B^{-1}$;
Encontre $x_k$ com custo relativo: $c_k - y^T a_k < 0$.
Se $c_k - y^T a_k \geq 0, \quad \forall \;\; k = 1, \ldots, n - m,$ então a solução na iteração IT é ótima.
PARE=VERDADE.
Senão:
• Determine a direção simplex: $d_B = -B^{-1} a_k$, de mudança nos valores das variáveis básicas
• Determine o passo: $\epsilon^0 = min \left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} | d_{B_e} < 0, i = 1, \ldots, m \right\}$.
Se $d_B \geq 0$, o problema não tem solução ótima finita.
PARE=VERDADE.
Senão:
• Atualize a partição básica: $a_{B_l} \leftrightarrow a_k, IT \leftarrow IT + 1$.
*Fim enquanto.*

## 4.3 MÉTODO SIMPLEX NA FORMA TABULAR (TABLEAUX SIMPLEX)

O Simplex na Forma Tabular é uma forma de representar por esquema os problemas de programação linear. Os quadros apresentados possuem coeficientes das variáveis de decisão e de folgas em colunas e as restrições e função objetivo em linhas. O primeiro passo é escrever na forma padrão e depois montar um quadro com uma coluna para cada variável. Essas variáveis vão se constituir de uma matriz identidade referente à base do método, identificar as variáveis básicas. As variáveis correspondentes à base de forma geral são as variáveis de folga. Considere um problema de Programação Linear descrita na forma geral (GOLDBARG; LUNA, 2005):

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_sx_s + 0x_{s+1} + 0x_{s+2} + ... + 0x_n \\
&\textit{sujeito a:} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1s}x_s + x_{s+1} + 0 + 0 + ... + 0 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2s}x_s + 0 + x_{s+2} + 0 + ... + 0 = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{ms}x_s + 0 + 0 + 0 + ... + x_n = b_m \\
&x_1, x_2, ..., x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Organiza-se um quadro inicial para o início das iterações, de acordo com a Tabela 4

**Tabela 4 – Quadro Inicial do Simplex no Formato Tabular**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ .............. $x_k$ .............. $x_s$ | $x_{s+1}$ .............. $x_{s+r}$ .............. $x_n$ | |
| | $z$ | $c_1$ .............. $c_{1k}$ .............. $c_s$ | $c_{s+1}$ .............. $c_{s+r}$ .............. $c_n$ | |
| $x_{s+1}$ | $b_1$ | $a_{11}$ .............. $a_{1k}$ .............. $a_{1s}$ | 1 .............. 0 .............. 0<br>0 .............. 0 .............. 0 | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ | $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ | $\dfrac{\overline{b}_s}{a_{sk}}$ |
| $x_{s+r}$ | $b_r$ | $a_{r1}$ .............. $a_{rk}$ .............. $a_{rs}$ | 0 .............. 1 .............. 0 | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ | $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ | |
| $x_n$ | $b_m$ | $a_{m1}$ .............. $a_{mk}$ .............. $a_{ms}$ | 0 .............. 0 .............. 1 | |
| | Termo Ind. | Matriz de Restrições $(m \times m - n)$ | Variáveis de Folga $(m \times m)$ | |

Tal que,

- A primeira coluna contém informações sobre a base atual, ou seja, a função objetivo $z$ e as variáveis $x_1...x_k...x_s$ são a solução básica inicial. As colunas intermediárias contém informações sobre as variáveis $x_1...x_k...x_s$, e a última coluna contém na primeira linha o valor atual da função objetivo.

- A primeira linha refere-se à função objetivo $z$. As demais linhas referem-se às restrições do problema.

Logo, a configuração matemática associada a esse, está indicada na Tabela 5.

**Tabela 5 – Identificação das Matrizes e Variáveis no Formato Simplex Tabular**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Índice das Variáveis | | |
| | Valor da F.O. | Valor de $z_j - c_j$ | | |
| Índice das Variáveis Básicas | $\overline{x}_B$ | $x_N = B^{-1}R$ | $B^{-1}$ | Área de Cálculos |
| | | Variáveis Não Básicas | Variáveis Básicas | |

O termo $z_j - c_j$ pode ser interpretado como o coeficiente de utilidade relativa das variáveis. Já $\overline{x}_B$ é o vetor de $m$ componentes formado pelas variáveis associadas aos termos independentes.

Ao longo das iterações do algoritmo, corresponderá à forma canônica da Tabela 6.

**Tabela 6 – Quadro Geral do Simplex**

| | | $x_1$ .............. $x_k$ .............. $x_s$ | $x_{s+1}$ .............. $x_{s+r}$ .............. $x_n$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $z$ | $z_1 - c_1 ... z_k - c_k ... z_s - c_s$ | $z_{s+1} - c_{s+1} ... z_{s+r} - c_{s+r} ... z_n - c_n$ | |
| $x_{B1}$ | $\overline{b}_1$ | $y_{11}$ .............. $y_{1k}$ .............. $y_{1s}$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ | | |
| $x_{Br}$ | $\overline{b}_r$ | $y_{r1}$ .............. $y_{rk}$ .............. $y_{rs}$ | $B^{-1}$ | $\dfrac{\overline{b}_s}{y_{sk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ | | |
| $x_{Bm}$ | $\overline{b}_m$ | $y_{m1}$ .............. $y_{mk}$ .............. $y_{ms}$ | | |

Tal que:

- A variável $x_k$ é a que entra na base, melhorando o valor da função objetivo, e a variável $x_s$ deixa a base ao ter o seu valor numérico esgotado completamente pelo crescimento de $x_k$.
- O elemento $y_{rk}$ é denominado "pivô".

Com o auxílio do quadro anterior, uma sequência de passos é executado para que a solução ótima seja encontrada. Estes passos convergem para a solução do sistema de inequações lineares sujeitas a uma função objetivo.

**Passo 1:** Organizar o quadro inicial como indicado, partindo de um PPL escrito na forma padrão

**Passo 2:** Realizar o teste de parada

- Se todos os $z_j - c_j \leqslant 0 (j \in J)$, então a solução ótima foi alcançada.
- Caso contrário, escolha o maior $z_j - c_j \geqslant 0 \;\; (j \in J)$, isto é, $z_k - c_k$, escolhendo o vetor associado $x_k$ para entrar na base

**Passo 3:** Definir a variável que sairá da base:

- Se $y_{ik} \leqslant 0$ para todo *i* = 1, ... ,m, então a variável $x_k$ poderá ser diminuída indefinidamente e o valor de z tenderá ao infinito negativo. Neste caso, a solução será ilimitada.
- Se $y_{ik} \geqslant 0$ para todo *i* = 1, ... ,m, então faça:

  Calcule *r*, onde *r* é a variável básica relacionada ao mínimo entre os coeficientes $\dfrac{\overline{b}_i}{y_{ik}}$. O elemento $y_{rk}$ é denominado: pivô.

**Passo 4:** Substituir a *r-ésima* variável, correspondente a *r-ésima* equação pela variável $x_k$, que passará a integrar a nova base, e recalcular as matrizes $B^{-1}$, Y e os vetores $z_j - c_j$, $\overline{x}_B$ e $z_0$. Retornar ao passo 2.

### 4.3.1 Exemplo Numérico

Nesta seção um exemplo numérico de um PPL é resolvido utilizando o Método Simplex na forma tabular.

O problema a seguir consiste na maximização do lucro na produção de 4 produtos sujeito a um conjunto de três restrições (GOLDBARG; LUNA, 2005):

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\
&\text{sujeito a} \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 15 \\
&7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 120 \\
&3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leqslant 100 \\
&x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema na forma padrão, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar } z = -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\
&\text{sujeito a} \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 15 \\
&7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 = 120 \\
&3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 = 100 \\
&x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Com $x_5$, $x_6$ e $x_7$ variáveis de folga, tem-se o 1ºquadro:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | cte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | -4 | -5 | -9 | -11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_6$ | 7 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 120 |
| $x_7$ | 3 | 5 | 10 | **15** | 0 | 0 | 1 | 100 |

**Variável que entra na base:** $x_4$ (maior valor negativo em módulo: 11)
**Variável que sai da base:** $x_7$ (pois 100/15 é menor que 15/1 e 120/2)
**Pivô** = 15.

A variável que entra na base ocupa a mesma posição da variável que sai da base.

Deve-se escalonar a coluna $x_4$ dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a $x_7$ por 15. Obtém-se:

Agora efetuando as operações elementares entre as linhas com o objetivo de zerar os outros elementos da coluna do pivô. Entende-se por operações elementares multiplicar as linhas do pivô pelo número que se pretende zerar com sinal oposto e somar com a linha que contém esse número a ser transformado em zero. Por exemplo: a linha do pivô é a linha correspondente à variável $x_7$. O pivô agora é o número 1 (linha $x_7$ com coluna $x_4$). Portanto, devem-se zerar todos os elementos da coluna $x_4$. Começamos pelo número 2, na linha imediatamente acima

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | cte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | -4 | -5 | -9 | -11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_6$ | 7 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 120 |
| $x_7$ | 1/5 | 1/3 | 2/3 | **1** | 0 | 0 | 1/15 | 20/3 |

da linha do pivô (correspondente à variável $x_6$). Então, multiplica-se a linha do pivô por -2 e somando-se com a linha correspondente à variável $x_6$. E assim sucessivamente com os demais elementos da coluna $x_4$. O resultado do pivoteamento é:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | cte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | -1,8 | -4/3 | -5/3 | 0 | 0 | 0 | 11/15 | 220/3 |
| $x_5$ | **0,8** | 2/3 | 1/3 | 0 | 1 | 0 | -1/15 | 25/3 |
| $x_6$ | 33/5 | 13/3 | 5/3 | 0 | 0 | 1 | -2/15 | 320/3 |
| $x_4$ | 1/5 | 1/3 | 2/3 | 1 | 0 | 0 | 7/15 | 20/3 |

Esta solução ainda não é a ótima, pois há elementos negativos na linha da base. Repete-se o procedimento:
**Variável que entra na base:** $x_1$ (maior valor negativo em módulo)
**Variável que sai da base:** $x_5$
**Pivô** = 0,8.

Devemos escalonar a coluna $x_1$ dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a variável $x_5$ por 0,8. Obtemos:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | cte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | -1,8 | -4/3 | -5/3 | 0 | 0 | 0 | 11/15 | 220/3 |
| $x_5$ | **1** | 5/6 | 5/12 | 0 | 5/4 | 0 | -1/12 | 125/12 |
| $x_6$ | 33/5 | 13/3 | 5/3 | 0 | 0 | 1 | -2/15 | 320/3 |
| $x_4$ | 1/5 | 1/3 | 2/3 | 1 | 0 | 0 | 7/15 | 20/3 |

Agora, efetuamos as operações elementares entre as linhas com o objetivo de zerar os outros elementos da coluna do pivô.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | cte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | 0 | 1/6 | -11/12 | 0 | 0 | 0 | 11/15 | 1105/12 |
| $x_1$ | 1 | 5/6 | 5/12 | 0 | 5/4 | 0 | -1/12 | 125/12 |
| $x_6$ | 0 | -7/6 | -13/12 | 0 | -33/4 | 1 | 5/12 | 455/12 |
| $x_4$ | 0 | 1/6 | **7/12** | 1 | -1/4 | 0 | 1/12 | 55/12 |

Esta solução ainda não é a ótima, pois há um elemento negativo na linha da base. Repetimos o procedimento:

**Variável que entra na base:** $x_3$
**Variável que sai da base:** $x_4$
**Pivô** = 7/12.

Deve-se escalonar a coluna $x_3$ dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a $x_4$ por 7/12. Obtêm-se:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | cte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | 0 | 1/6 | -11/12 | 0 | 0 | 0 | 11/15 | 1105/12 |
| $x_1$ | 1 | 5/6 | 5/12 | 0 | 5/4 | 0 | -1/12 | 125/12 |
| $x_6$ | 0 | -7/6 | -13/12 | 0 | -33/4 | 1 | 5/12 | 455/12 |
| $x_4$ | 0 | 2/7 | **1** | 12/7 | -3/7 | 0 | 1/7 | 55/7 |

Agora, efetua-se as operações elementares entre as linhas com o objetivo de zerar os outros elementos da coluna do pivô.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | cte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | 0 | 3/7 | 0 | 11/7 | 13/7 | 0 | 5/7 | **695/7** |
| $x_1$ | 1 | 5/7 | 0 | -5/7 | 10/7 | 0 | -1/7 | 50/7 |
| $x_6$ | 0 | -6/7 | 0 | 13/7 | -61/7 | 1 | 4/7 | 325/7 |
| $x_3$ | 0 | 2/7 | **1** | 12/7 | -3/7 | 0 | 1/7 | 55/7 |

Solução ótima!
Não há elementos negativos na base. O lucro máximo é 695/7.

## 4.4 RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PPL

A representação gráfica de PPL possibilita concluir várias propriedades teóricas, além de ajudar a esboçar um método de solução. Resolver um PPL consiste em encontrar uma solução ótima, em outras palavras, um exemplo que envolva minimização equivale determinar uma solução factível em $x^*$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall$ **x** factível. Portanto, se o PPL envolver duas variáveis de decisão, a solução ótima pode ser encontrada graficamente. Para exemplificar, considere o problema de otimização linear a seguir (ARENALES et al., 2015).

Maximizar

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \tag{4.10}$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \tag{4.11}$$
$$x_1 \leq 2 \tag{4.12}$$
$$x_2 \leq 3 \tag{4.13}$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \tag{4.14}$$

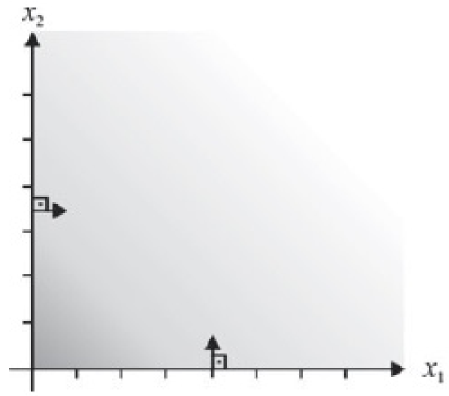
A região factível é denominada por : **S** $= \{(x_1, x_2)$ tal que $x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

As soluções factíveis devem satisfazer todas as restrições. Primeiro representa-se no plano os pontos $(x_1, x_2)$ que satisfazem as condições de não negatividade (4.14), ou seja, o primeiro quadrante da Figura 3. Para representar os outros pontos no plano $(x_1, x_2)$ que também satisfazem a restrição (4.11), procede-se da seguinte maneira:

• Primeiro, encontre os pontos que satisfazem a igualdade $x_1 + x_2 = 4$. Esta equação define uma reta no plano e o vetor $(1, 1)^T$ é perpendicular a reta.

• Em seguida, verifique os pontos que satisfazem $x_1+x_2 < 4$. Para isso, basta observar que o vetor $(1, 1)^T$ está apontando no sentido em que $x_1$ e $x_2$ cresce. Os pontos no plano da reta, no qual o vetor $(1, 1)^T$ é $x_1 + x_2 > 4$ e o ponto do lado aposto na qual o vetor aponta é $x_2 + x_2 < 4$. Estes últimos são os pontos procurados.

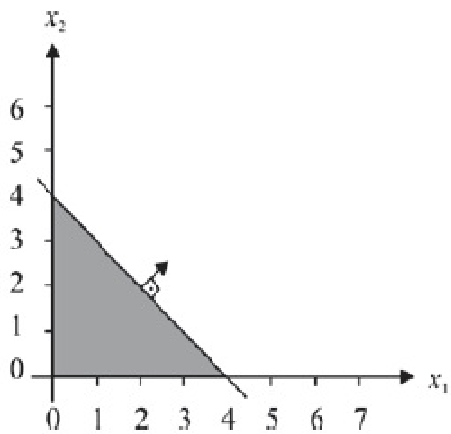
**Figura 3 – Região definida por $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.**




**Fonte: (ARENALES et al., 2015)**

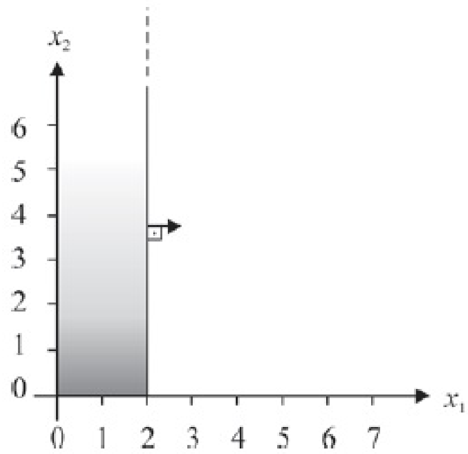
A Figura 4 ilustra a reunião dos pontos $x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 + x_2 < 4$ (as condições de não-negatividade já foram consideradas no primeiro quadrante). Da mesma forma, as Figuras 5 e 6 ilustram os pontos $x_1 \leq 2$ e $x_2 \leq 3$ e satisfazem as restrições e as condições de não-negatividade. A região factível está determinada na Figura 7, a qual representa a intersecção de todas as regiões das Figuras de 3 a 6.

**Figura 4 – Região definida por $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.**




**Fonte: (ARENALES et al., 2015)**

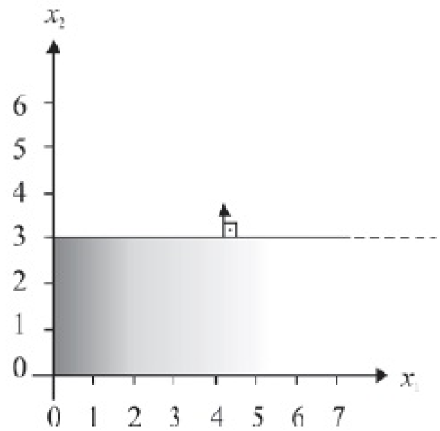
**Figura 5 – Região definida por $x_1 \leq 2$.**




**Fonte: (ARENALES et al., 2015)**

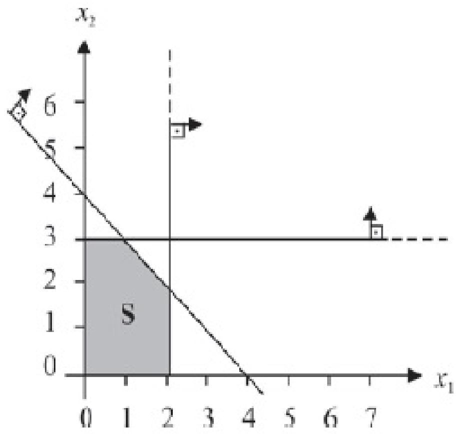
A função objetivo (FO) representada pela equação (3.4) pode assumir infinitos valores. Por exemplo: A solução factível $X' = (x_1', x_2')^T = (0, 0)^T$ a função objetivo vale $f' = f(x') = 0$ e todos os pontos do plano $(x_1, x_2)$ que atribuem este mesmo valor a FO estão na reta $x_1 + x_2 = 0$ (o conjunto de pontos que atribui o mesmo valor para função objetivo é chamada de curva de nível, verificada na Figura 6 através da reta tracejada em f'=0). Ao definir a região factível, o vetor dos coeficientes $(1 \;\; 2)^T$ é perpendicular à reta $x_1 + 2x_2 = 0$ e aponta no sentido que a função cresce. Logo, qualquer ponto de $S$ atribui valor maior que zero à FO. Portanto, pretende-se maximizar a FO, pode-se concluir, que a solução factível $X' = (0 \;\; 0)^T$ não é uma solução ótima. Considerando-se a solução factível $x'' = (x_1', x_2')^T = (2 \;\; 0)^T$ em que FO vale $f'' = f(x'') = 2$ e a curva de nível $x_1 + 2x_2 = 2$ (representado na Figura 8, por $f'' = 2$). Essa reta é paralela a anterior $f' = 0$ e não altera o vetor gradiente, então o vetor continua apontando no sentido em que f cresce. No gráfico é possível identificar outros pontos de $S$ que atribuem valores maiores que 2 à FO. Logo, $x''$ também não é solução ótima. Por outro lado, se forem considerados os pontos que atribuem valores maiores que a FO, então $x^* = (x_1^* \;\; x_2^*)^T = (1 \;\; 3)^T$ na qual

**Figura 6 – Região definida por $x_2 \leq 3$.**




**Fonte: (ARENALES et al., 2015)**

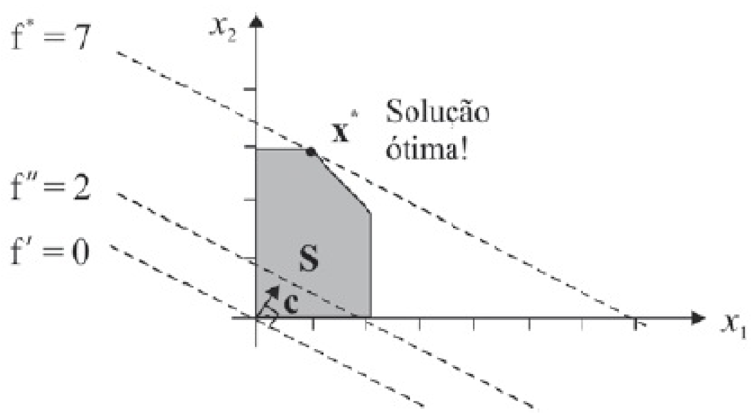
**Figura 7 – Região factível S.**




**Fonte: (ARENALES et al., 2015)**

$f(x^*) = 7$. Através da curva de nível $x_1 + 2x_2 = 7$ pode-se observar que todos os pontos de $S$ atribuem valores menores que 7 à FO. Então, para todo **x** $\in$ **S**, $f(x) \leq 7 = f(\mathbf{x}^*)$ o que significa que **x**$^*$ é solução ótima. Portanto, a solução **x**$^*$ que satisfaz todas as restrições ao mesmo tempo e maximiza *f*(**x**)existe e é única: **x**$^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. A representação da solução pode ser vista na Figura 8.

**Figura 8 – Região factível S.**




**Fonte: (ARENALES et al., 2015)**

# 5 O PROBLEMA DE DESIGNAÇÃO DE TAREFAS

O Problema de Designação tem como objetivo a alocação de recursos a objetos (MOREIRA, 2010). Para que o problema de designação ocorra, além de termos os recursos e objetos, também é necessário ter alguma medida que ligue cada recurso a cada objeto. Para sua formulação, algumas hipóteses devem ser satisfeitas (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

1. O número de designados e o número de tarefas é o mesmo. Esse número é representado por $n$.
2. Deve-se atribuir a cada designado exatamente uma tarefa.
3. Cada tarefa deve ser realizada exatamente por um designado.
4. Há um custo associado ao designado $i = 1, 2, ..., n$ executando a tarefa $j = 1, 2, ..., n$.
5. O objetivo é determinar como todas as n designações devem ser feitas para minimizar o custo total.

## 5.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Dessa forma, o Problema de Designação pode ser formulado matematicamente conforme a seguir (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Variáveis de decisão binárias (para $i = 1, 2, ..., n$ e $j = 1, 2, ..., n$):

$x_{ij}$ = 1, se o designado $i$ realiza a tarefa $j$
$x_{ij}$ = 0, caso o contrário

Sendo $Z$ o custo total, a formulação matemática para o problema de designação de tarefas pode ser escrito na forma geral como:

min Z = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

$x_{ij} \geq 0$ para todo $i$ e $j$
e
$x_{ij} \geq 0$ binário para todo $i$ e $j$

O primeiro conjunto de restrições especifica que cada designado deve realizar exatamente uma tarefa, enquanto o segundo conjunto de restrições pede que cada tarefa seja realizada por um designado.

Ao comparar esse modelo com o modelo do Problema de Transporte, observa-se que o Problema de Designação de Tarefas trata-se de um caso especial do Problema de Transporte, em que as *origens* agora são os *designados* e os *destinos* agora são as *tarefas* e nos quais:

Número de origens $m$ = número de destinos $n$
Toda oferta $S_i$=1,
Toda demanda $d_j$=1.

## 5.2 O ALGORITMO HÚNGARO

O algoritmo húngaro, criado pelos Húngaros D. König e E. Everváry, é um procedimento de cinco passos cujo algoritmo trabalha com o princípio da redução da matriz, isto é, por meio de operações, pretende-se reduzi-lá a uma matriz de custo de oportunidade. O objetivo, então, é procurar obter uma matriz reduzida em que cada linha ou cada coluna tenha somente um zero, as células em que estejam esses zeros mostrarão as alocações ótimas (MOREIRA, 2010).

**Teorema 5.2.1** *(Alocação ótima) Se um número real é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna de uma matriz-custo, então uma alocação ótima para a matriz-custo resultante é também uma alocação ótima para a matriz-custo original.*

A demonstração deste teorema é feita de acordo com (BRITO; JUNIOR, 2015).

**Demonstração**: Considere a matriz custo $C_{n\times n}$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Suponha que $c_{11_k}, c_{22_k}, \dots, c_{ii_k}, \dots, c_{nn_k}$ sejam as entradas da alocação ótima da matriz-custo original, onde os índices $1_k, 2_k, \dots, i_k, \dots, n_k$ sejam diferentes dois a dois. Sendo assim, o custo mínimo da matriz em questão é obtido pela soma $S_0$, que consiste nas somas das entradas acima citadas, ou seja:

$$S_0 = c_{11_k} + c_{22_k} + \dots + c_{ii_k} + \dots + c_{nn_k}.$$

Como $S_0$ é a alocação ótima, então existe ao menos uma alocação $S$ obtida pela soma de quaisquer outras entradas, tal que $S \geq S_0$, para qualquer $S$ dado.
Seja $\beta$ um valor real qualquer, que será adicionado a todas as entradas da linha $i$ da matriz custo $C$. Obtêm-se uma nova matriz $C'$, diferente da matriz original. Assim,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1}+\beta & c_{i2}+\beta & \dots & c_{ij}+\beta & \dots & c_{in}+\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Somando as entradas da matriz $C'$ correspondente às entradas de $S_0$ da matriz original, obtemos a soma $S'_0$. Sendo assim, encontra-se com a soma a seguir:

$$S'_0 = c_{11_k} + c_{22_k}, + \cdots + (c_{ii_k} + \beta) + \cdots + c_{nn_k} = S_0 + \beta$$

Observa que o valor real $\beta$ foi adicionado a todas as entradas da linha $i$ da matriz $C$, gerando a matriz $C'$. Nestas condições qualquer alocação possível para $C'$ conterá um elemento da linha $i$, ou seja, tem-se uma soma $S'$ com as entradas correspondentes a $S$, porém acrescidas de $\beta$, logo:

$$S' = S + \beta \geq S_0 + \beta = S'_0.$$

Como $S' = S_0 + \beta$ é uma alocação ótima para a matriz $C'$, quaisquer outras alocações existentes serão maiores ou iguais a $S'_0$, pois uma vez que foi acrescido o valor real $\beta$ a todos os elementos da linha $i$ da matriz $C$, qualquer outra alocação existente terá a forma de $S' = S + \beta$, não mudando o resultado antes obtido quando $S$ foi comparado a $S_0$. De maneira análoga, pode-se provar que o fato não muda quando somado qualquer valor à coluna $j$. ■

Por meio do Teorema anterior, pode-se dar início ao estudo do algoritmo Húngaro. Algumas observações devem ser feitas (MOREIRA, 2010):

1. O número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, o número de objetos a serem alocados é igual aos recursos a alocar;
2. Não há restrições de alocação, ou seja, cada recurso pode ser alocado a qualquer um dos objetos;
3. A matriz é de custos ou alguma outra grandeza que deve ser minimizada.

Se o problema satisfaz as condições acima, pode-se aplicar os cinco passos do algoritmo húngaro (MOREIRA, 2010), descritos a seguir:

1. Transformar a matriz dada em uma matriz de custos de oportunidade, por meio dos seguintes procedimentos:

• subtrair o menor tempo de desenvolvimento(ou custo) em cada linha, de todos os outros tempos da mesma linha, gerando pelo menos um zero em cada linha;

• subtrair o menor tempo de desenvolvimento (ou custo) em cada coluna, de todos os outros tempos da mesma coluna, gerando pelo menos um zero em cada coluna.

2. Verificar se a matriz resultante já está pronta para oferecer a alocação ótima. Para isso, traçar o menor número possível de retas cobrindo todos os zeros da matriz. Caso o número de retas seja igual ao número de linhas ou colunas da matriz (lembrar que a matriz é quadrada), então a solução ótima foi encontrada; ir para o 4ºpasso. Caso o número de retas traçadas seja menor que o número de colunas ou linhas da matriz, ir para o 3ºpasso.

3. Quando o número mínimo de retas traçadas for menor que o número de linhas ou colunas da matriz, identificar o menor número não coberto pelas reta traçadas. Em seguida:

• subtrair esse número de todos os outros não cobertos pelas retas traçadas, gerando pelo menos mais um zero na matriz;

• somar esse número a todos os números que estejam nas intersecções das retas traçadas.

Retornar, então, ao 2ºpasso, ou seja, traçar de novo o menor número possível de retas para cobrir todos os zeros.

De forma simples: repetir 2ºe o 3ºpassos até que o número de retas traçadas cubra todos os zeros e seja igual ao número de linhas ou colunas da matriz.

4. Se o número de retas traçadas para cobrir todos os zeros for igual ao número de linhas ou colunas da matriz, então a solução ótima foi encontrada.

• verificar as linhas ou colunas que têm um único zero e fazer a alocação nessa célula;

• eliminar a linha ou coluna em que foi feita a alocação e procurar por outros zeros isolados em linhas ou colunas. Repetir o procedimento até que todos os recursos estejam alocados.

Considera-se três casos especiais de designação (MOREIRA, 2010):
a) Quando o número de recursos a serem alocados for diferente do número de objetos para alocação, devem ser criadas, conforme o caso, linhas ou colunas fictícias. As linhas fictícias representam objetos para alocação também inexistentes. Em ambos os casos, as linhas ou colunas fictícias são preenchidas com zeros, resolvendo-se o problema.
b) Quando a matriz exige maximização e não minimização. Primeiramente, identifica-se o maior número da matriz. Em seguida, subtrai-se dele todos os outros números. Esse procedimento transforma a matriz em matriz de custos de oportunidade, e o algoritmo pode ser aplicado como foi explicado. A alocação de custos de oportunidade mínimos corresponderá à alocação ótima na maximização.
c) Quando existem recursos e objetos para alocação que são incompatíveis. Atribuiu-se um custo extremamente alto à combinação recurso/objeto incompatível, de forma que se assegure que a alocação não será feita. Frequentemente, pode-se usar simplesmente a letra $M$ para designar tal custo elevado, considerando qualquer subtração feita a $M$ levará ainda a um número tão grande que pode continuar sendo designado $M$.

### 5.2.1 Exemplo numérico

Nesta seção, um exemplo numérico do Problema de Designação de Tarefas (MOREIRA, 2010) é descrito e resolvido utilizando o algoritmo húngaro.

Em uma empresa de construção civil, há três projetos que podem ser alocados a três equipes diferentes. Tanto o tempo de experiência das equipes como suas orientações técnicas são diferentes, de modo que o tempo de término de cada projeto dependerá da equipe particular ao qual estará alocado. A Tabela 7 representa uma matriz que exibe o tempo desenvolvimento de cada projeto, conforme sejam alocados a cada uma das equipes. Aplicar o algoritmo húngaro para chegar à alocação ótima, isto é, ao menor tempo total de desenvolvimento.

**Tabela 7 – Matriz de tempo de desenvolvimento (meses)**

| | Projeto A | Projeto B | Projeto C |
|---|---|---|---|
| Equipe 1 | $15$ | $24$ | $21$ |
| Equipe 2 | $17$ | $22$ | $18$ |
| Equipe 3 | $23$ | $29$ | $30$ |

Solução: Em um primeiro momento deve-se listar todas as alocações possíveis e calcular o tempo total de desenvolvimento associado a cada uma delas, como na Tabela 8.

**Tabela 8 – Alocações possíveis**

| Projeto A | Projeto B | Projeto C | Tempo total de desenvolvimento (meses) |
|---|---|---|---|
| Equipe I | Equipe II | Equipe III | 15+22+30=67 |
| Equipe I | Equipe III | Equipe II | **15+29+1=62** |
| Equipe II | Equipe I | Equipe III | 17+24+30=71 |
| Equipe II | Equipe III | Equipe I | 7+29+21=67 |
| Equipe III | Equipe I | Equipe II | 23+24+18=65 |
| Equipe III | Equipe II | Equipe I | 23+22+21=66 |

O objetivo do exemplo é tornar a matriz reduzida, em que cada linha e cada coluna tenha somente um zero, o lugar onde se encontra o zero na matriz mostrará as alocações ótimas.

Voltar à Tabela 7, o primeiro passo para realizar o algoritmo húngaro é construir uma matriz oportunidade dividindo-a em duas partes:

1º- Subtrair o menor custo de cada linha de todas as outras linhas, obtendo uma nova matriz:

| | Projeto A | Projeto B | Projeto C |
|---|---|---|---|
| Equipe 1 | $0$ | $9$ | $6$ |
| Equipe 2 | $0$ | $5$ | $1$ |
| Equipe 3 | $0$ | $6$ | $7$ |

2º- Subtrair o menor custo de cada coluna de todos os outros da coluna, chegando à seguinte matriz:

| | Projeto A | Projeto B | Projeto C |
|---|---|---|---|
| Equipe 1 | $0$ | $4$ | $5$ |
| Equipe 2 | $0$ | $0$ | $0$ |
| Equipe 3 | $0$ | $1$ | $6$ |

Até agora, obteve-se uma matriz que apresenta os custos de oportunidade em cada linha e em cada coluna. Os zeros indicam as atribuições ótimas nas linhas e nas colunas.

| | Projeto A | Projeto B | Projeto C |
|---|---|---|---|
| Equipe 1 | $0$ | $4$ | $5$ |
| Equipe 2 | $0$ | $0$ | $0$ |
| Equipe 3 | $0$ | $1$ | $6$ |

Neste momento, pode-se testar se foi encontrada a solução ótima na matriz reduzida. Para isso traça-se o menor número possível de retas verticais e horizontais cobrindo os zeros gerados na matriz:

Se o número mínimo de retas traçadas for igual à ordem da matriz então a solução ótima terá sido encontrada. No caso do exemplo a matriz é de ordem 3 e traçou-se apenas duas retas. Neste caso que o número de retas traçadas é menor que a ordem da matriz, o algoritmo diz para:

- subtrair o menor número não coberto de todos os outros números não cobertos;

- acrescentar o menor número não coberto a todos os números que se encontram nas intersecções das retas traçadas.

Na matriz, o menor número é 1, e há apenas uma intersecção entre as retas traçadas (lugar onde aparece o número zero). Seguindo as instruções acima, obtêm-se uma nova matriz:

| | Projeto A | Projeto B | Projeto C |
|---|---|---|---|
| Equipe 1 | $0$ | $3$ | $4$ |
| Equipe 2 | $1$ | $0$ | $0$ |
| Equipe 3 | $0$ | $0$ | $5$ |

Com o procedimento realizado acima gerou-se um novo zero na matriz, portanto, deve-se traçar novamente o menor número possível de retas cobrindo todos os zeros.

| | Projeto A | Projeto B | Projeto C |
|---|---|---|---|
| Equipe 1 | $0$ | $3$ | $4$ |
| Equipe 2 | $1$ | $0$ | $0$ |
| Equipe 3 | $0$ | $0$ | $5$ |

O fato de traçar-se as três retas significa que chegou-se na solução ótima, pois o número mínimo de retas satisfaz a ordem da matriz. Para determinar a solução ótima, verifica-se as linhas ou colunas que possui apenas um zero, o lugar onde estiver esse zero, será feito a atribuição.

Na matriz acima, há dois zeros únicos: Na primeira linha, a intersecção da Equipe I com o Projeto A e na última coluna, intersecção da Equipe II com o Projeto C. Portanto, a Equipe III fica automaticamente alocada no Projeto B. Logo, as alocações ficam da seguinte maneira:

| **Projeto A** | **Projeto B** | **Projeto C** | **Tempo total de Desenvolvimento(meses)** |
|---|---|---|---|
| Equipe I | Equipe III | Equipe II | 15+29+18 = 62 meses |

Portanto, como visto acima, a melhor solução será de 62 meses.

# 6 ESTUDO DE CASO: APLICAÇÃO DOS PROBLEMAS DO TRANSPORTE E DE DESIGNAÇÃO DE TAREFAS EM UMA MICRO-CERVEJARIA

Um estudo de caso foi desenvolvido em uma micro-cervejaria localizada no município de Araraquara, SP. Este estudo tem como objetivos: minimizar o custo total de transporte de produtos provenientes das fontes de produção para os destinos, satisfazendo as demandas (problema do transporte) e minimizar o tempo de produção das 4 cervejas melhor avaliadas, designando fermentadores para cada tipo de cerveja (problema de designação).

## 6.1 APLICAÇÃO DO PROBLEMA DO TRANSPORTE

Primeiramente, para a modelagem matemática do Problema do Transporte, a fábrica produz um total de $6000$ $l$/mês, os quais são distribuídos para cinco destinos diferentes, sendo que $25\%$ da produção de cerveja são destinados para um restaurante localizado na própria cervejaria. Outros $25\%$ da produção são destinados para locais da cidade de Araraquara, $30\%$ para a cidade de São Paulo, $18\%$ para a cidade de Ribeirão Preto e os outros $2\%$ restantes, para outros destinos. A fábrica possui um total de oito tanques, que consistem nas fontes de produção, sendo que, destes, quatro tanques têm capacidade de $1000$ litros e os outros quatro têm capacidade de $500$ litros. Desse modo, o problema em estudo apresenta oito fontes de produção e cinco destinos. Todas as oito fontes podem produzir o mesmo tipo de cerveja, ou seja, todas os destinos podem receber a cerveja de qualquer uma das fontes.

Os custos de transporte dos produtos das fontes para cada destino são obtidos com base nas distâncias percorridas para realizar o transporte. A formulação matemática do Problema do Transporte é descrita a seguir. As variáveis de decisão do problema são denotadas por $x_{ij}$ e representam a quantidade (em litros) de produto transportada da fonte de produção com índice $i(i = 1, \ldots, 8)$ para o destino $j(j = 1, \ldots, 5)$. A função objetivo é expressa como:

Min $1x_{11} + 5x_{12} + 500x_{13} + 200x_{14} + 700x_{15} + 1x_{21} + 5x_{22} + 500x_{23} + 200x_{24} + 700x_{25} + 1x_{31} + 5x_{32} + 500x_{33} + 200x_{34} + 700x_{35} + 1x_{41} + 5x_{42} + 500x_{43} + 200x_{44} + 700x_{45} + 1x_{51} + 5x_{52} + 500x_{53} + 200x_{54} + 700x_{55} + 1x_{61} + 5x_{62} + 500x_{63} + 200x_{64} + 700x_{65} + 1x_{71} + 5x_{72} + 500x_{73} + 200x_{74} + 700x_{75} + 1x_{81} + 5x_{82} + 500x_{83} + 200x_{84} + 700x_{85}$

As restrições têm origem nos fatos de que cada fonte de produção tem produção limitada (capacidade de produção) e cada destino tem demanda conhecida. Desta forma, são formulados dois conjuntos de restrições: um relativo à capacidade de produção das fontes e outro relativo à demanda dos destinos.

Restrições relativas à produção das fontes:

Fonte 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 1000$ Fonte 5: $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} \leq 500$
Fonte 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1000$ Fonte 6: $x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} \leq 500$
Fonte 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1000$ Fonte 7: $x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} \leq 500$
Fonte 4: $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \leq 1000$ Fonte 8: $x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} \leq 500$

Restrições relativas às demandas dos destinos:

Destino 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{41} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1500$
Destino 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} = 1500$

Destino 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = 1800$
Destino 4: $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = 1080$
Destino 5: $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} = 120$

Formulado o problema como um problema de programação linear, o método Simplex é aplicado para a obtenção da solução ótima, com apoio computacional do software LINDO (*Linear Interactive and Discrete Optimizer*)

A solução ótima obtida, após 18 iterações, é: o custo mínimo para o transporte da produção é de R$ 1.209.000. A solução ótima apresenta os seguintes valores para as variáveis de decisão: $x_{11} = 1000$, $x_{23} = 1000$, $x_{34} = 880$, $x_{35} = 120$, $x_{42} = 800$, $x_{44} = 200$, $x_{52} = 500$, $x_{62} = 200$, $x_{63} = 300$, $x_{71} = 500$, $x_{83} = 500$.

Desta forma, conclui-se que se as demandas aumentarem e a capacidade de produção permanecer constante, a demanda não será satisfeita. Por outro lado, se as demandas diminuírem e a capacidade de produção permanecer constante, o valor da função objetivo é reduzido.

## 6.2 APLICAÇÃO DO PROBLEMA DE DESIGNAÇÃO

Para a modelagem matemática do Problema de Designação, foram selecionados os quatros tipos de cerveja que receberam melhor avaliação em um site de cervejas, sendo estas: Opera Seven'Inn ($C1$), Estrempia Die Walbkiire ($C2$), Pumpkin Ale ($C3$) e Extrena Oak & Passion ($C4$). Cada cerveja é fabricada por um fermentador e possui um determinado tempo de produção, em dias, de acordo com os ingredientes selecionados, como pode ser visto na Tabela 8, em que $C1, ..., C4$ são os tipos de cerveja e $F1, ..., F4$ são os fermentadores.

**Tabela 9 – Tempo de produção (dias) de cada cerveja em cada fermentador**

| | F1 | F2 | F3 | F4 |
|---|---|---|---|---|
| C1 | 7 | 9 | 9 | 11 |
| C2 | 7 | 9 | 8 | 10 |
| C3 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| C4 | 14 | 16 | 16 | 17 |

O *algoritmo Húngaro* (MOREIRA, 2010), descrito na Seção 5.2, foi aplicado para obtenção da solução ótima. A partir do princípio da redução da matriz, os seguintes procedimentos são executados:

**Passo 1**: Subtrair o menor tempo de desenvolvimento em cada linha, de todas os outros tempo da mesma linha, gerando pelo meno um zero em cada linha, conforme Tabela 9.

**Tabela 10 – Passo 1 do algoritmo Húngaro**

| | F1 | F2 | F3 | F4 |
|---|---|---|---|---|
| C1 | 0 | 2 | 2 | 4 |
| C2 | 0 | 2 | 1 | 3 |
| C3 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| C4 | 0 | 2 | 2 | 3 |

**Tabela 11 – Passo 2 do algoritmo Húngaro**

| | F1 | F2 | F3 | F4 |
|---|---|---|---|---|
| C1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| C2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C4 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**Passo 2**: A partir da Tabela 9, subtrair o menor tempo de desenvolvimento em cada coluna, de todos os outros tempos da mesma coluna, gerando pelo menos um zero em cada coluna, conforme Tabela 10.

**Passo 3**: Traçar o menor número possível de retas cobrindo todos os zeros da matriz obtida na Tabela 3. Caso o número de retas seja igual ao número de linhas ou colunas da matriz, a solução ótima foi encontrada (executar Passo 5). Senão, identificar o menor número não coberto pelas retas e executar o Passo 4.

**Passo 4**: Subtrair este valor de todos os outros não cobertos pelas retas, gerando pelo menos um zero. Some esse número a todos que estejam nas interseções das retas traçadas. Retornar ao Passo 3.

**Passo 5**: Verificar linhas ou colunas que tem um único zero e fazer a alocação nessa célula. Eliminar a linha e a coluna em que foi feita a alocação e buscar outros zeros isolados até que todos os recursos sejam alocados.

Portanto, os tipos de cerveja são designados a serem produzidas pelos seguintes fermentadores: $C1 \rightarrow F1$ (7 dias); $C2 \rightarrow F3$ (8 dias); $C3 \rightarrow F2$ (14 dias) e $C4 \rightarrow F4$ (17 dias), minimizando o tempo de produção das cervejas para um total de 46 dias. Como a empresa não apresenta planejamento para otimização da sua produção, na prática, a designação é feita pela diagonal da matriz da Tabela 1, resultando em 48 dias. Portanto, conclui-se que o algoritmo Húngaro foi satisfatório na obtenção da solução ótima, alocando cada tipo de cerveja a um fermentador, minimizando o tempo de produção.

# 7 CONCLUSÃO

Por meio da literatura, observa-se que a Pesquisa Operacional e suas ferramentas têm sido de grande importância no auxílio de tomada de decisão, possibilitando o planejamento da produção e a otimização de processos produtivos.

Neste trabalho, o Problema do Transporte e o Problema de Designação de Tarefas foram formulados como PPL´s e aplicados em uma micro-cervejaria do estado de São Paulo, com o objetivo de minimizar os custos de transporte das cervejas produzidas na fábrica para os centros consumidores e minimizar o tempo de preparação das quatro cervejas melhor avaliadas, designando-se fermentadores para sua produção. Os resultados obtidos por meio da aplicação do método Simplex e do Algoritmo Húngaro foram promissores na otimização dos problemas abordados, uma vez que apresentaram melhores resultados do que a prática da indústria.

A solução ótima obtida pelo Método Simplex no Problema do Transporte, apresentou um aumento no lucro de aproximadamente 5% em comparação com a prática de transporte da empresa, otimizando, desta forma, o transporte dos produtos a um custo mínimo. Para o problema de Designação de Tarefas, o algoritmo Húngaro apresentou uma solução que diminui em 2 dias o tempo de preparação das quatro cervejas melhor avaliadas no mercado, o que representa uma diminuição do tempo de preparação de 4,17% em comparação com a prática da micro-cervejaria em estudo.

Desta forma, a principal contribuição deste deste trabalho é oferecer auxílio na tomada de decisão nos processos produtivos da indústria de pequeno porte em estudo, no sentido de otimizar o transporte de produtos para seus destinos a um custo mínimo e otimizar também a designação de tarefas executadas por máquinas específicas para a produção de determinados produtos comercializados.

O desenvolvimento deste trabalho gerou as seguintes publicações, até o momento:

1. *Aplicação do Problema de Transporte em uma micro-cervejaria*. XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC) 19 a 22 de setembro de 2017, São José dos Campos,SP.

2. *2. Programação Linear E Aplicação no Problema de Transporte.* V Semana Acadêmica de Matemática (SEMAT) 26 a 30 de Setembro de 2016, Cornélio Procópio, PR.

3. *Programação Linear e Aplicações nos Problemas de Transporte e Designação de Tarefas*. XXI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR (SICITE) 9 a 11 de Novembro de 2016, Francisco Beltrão, PR.

4. *Problema de Designação de Tarefas: Modelagem e Solução Utilizando Programação Linear*. XXII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR (SICITE) 18 a 20 de Outubro de 2017, Londrina, PR.

5. *Aplicação do Problema de Designação de Tarefas em uma Micro-Cervejaria*. XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC) 17 a 21 de setembro de 2018, Campinas, SP.

## REFERÊNCIAS

ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa operacional: para cursos de engenharia**. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 21, 25, 29, 35, 46, 47, 48 e 49.

BRITO, João Paulo de; JUNIOR, José Claudio da Silva. **Utilizando o Método Húngaro e o Matlab em Problemas de Alocação de Tarefas**. [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação). 50p. Licenciatura em Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Birigui, 2015. Citado na página 52.

CAMARGO, Ramina Samoa Silva. **Introdução à programação linear no ensino médio utilizando a resolução gráfica**. Manaus: Dissertação (Mestrado em Matemática). 44f. Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal do Amazonas, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

FELIZARI, Luiz Carlos et al. Programação das atividades de transporte de derivados de petróleo em complexos dutoviários. In: **IV Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás. Campinas, Brasil**. [S.l.: s.n.], 2007. Citado na página 23.

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. [S.l.]: Elsevier, 2005. Citado 7 vezes nas páginas 21, 25, 26, 35, 36, 42 e 44.

HILLIER, Frederick S; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 51.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. [S.l.]: Person Prentice Hall, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 21, 25, 29 e 33.

MENEZES, Marco Antonio Figueiredo. **Programação Linear**. Disponível em: http://beneweb.com.br/resources/Livro%20Programação%20Linear.pdf. Acesso em: 15 maio. 2018: Departamento de Computaçao: Universidade Católica de Goiás, Cap, 2006. Citado na página 38.

MOREIRA, Daniel Augusto. **Pesquisa Operacional-Curso Introdutório.** [S.l.]: Cengage Learning, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 21, 31, 35, 51, 52, 53, 54 e 58.

NOGUEIRA, Thiago Henrique; VALLE, William Azalim do; MACHADO, Raiane Riberio. Desenvolvimento de um modelo de roteamento para suporte a mudança da estratégia de coleta de leite a granel. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Bento Gonçales, RS: [s.n.], 2010. Citado na página 23.

PINHEIRO, Manuel Duarte et al. Uma aplicação da programação linear para designação de acadêmicos em equipes de apoio a organização de eventos acadêmicos: o caso eepa-enpepro. **Revista Latino America de InovaÇão e Engenharia de ProduÇão**, v. 3, n. 4, p. 189–201, 2015. Citado na página 23.

SILVA, Fabiana Simões. **Designação de tarefas em aplicações de multiprocessadores de processamento digital de sinal utilizando algoritmos genéticos**. [S.l.]: Dissertação (Mestrado). 84p. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de São Carlos, 2003. Citado na página 24.

SILVA, Tânia Cordeiro Lindbeck da et al. Determinação de escalas de plantão para militares considerando preferências e hierarquia. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 24, n. 3, p. 373–391, 2004. Citado na página 24.

STARK, Felipe Sanches; CANTAO, Luiza Amalia Pinto; CANTAO, Renato Fernandes. Problema de roteamento na coleta seletiva: estudo na cooperativa reviver, sorocaba–sp. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Natal, RN: [s.n.], 2013. Citado na página 23.

STEINER, Maria Teresinha Arns et al. O problema de roteamento no transporte escolar. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 20, n. 1, p. 83–99, 2000. Citado na página 23.

TEIXEIRA, Vinicius Garcia. **Aplicação de Programação Linear na Alocação de Vagões Gôndola para o Transporte de Ferro Gusa na MRS Logística S.A.** [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação). 56p. Engenharia de Produção. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011. Citado na página 23.