

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

GLAUCIA FRANCCIELE RUIZ ISIDORO

**A FUNÇÃO DE COBB-DOUGLAS APLICADA A PROBLEMAS DE
OTIMIZAÇÃO RESTRITOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

GLAUCIA FRANCCIELE RUIZ ISIDORO

**A FUNÇÃO DE COBB-DOUGLAS APLICADA A PROBLEMAS DE
OTIMIZAÇÃO RESTRITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procopio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Elenice Weber Stiegelmeier
(orientador)

André Luís Machado Martinez

Renata Mascari De Souza

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

Dedico este trabalho aos meus amados e queridos pais, Marli Ruiz Isidoro e José Pedro Carneiro Isidoro, por me apoiarem nos momentos de angústia e por fazerem de tudo para que a faculdade se tornasse um sonho possível.

E em memória de minha avó, Aparecida da Silva Ruiz, exemplo de pessoa que nos deu todo seu amor, carinho, proteção e com suas sábias e carinhosas palavras construiu uma família linda.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me fortalecer em cada momento da minha vida, por me guiar e abençoar em todos os caminhos me concedendo saúde, forças e sabedoria.

A minha família, em especial meus pais Marli e José Pedro, por todo amor, apoio e por ser a fonte de conforto, sabedoria e aprendizagem. Devo minha vida à vocês. Aproveito para estender meus agradecimentos aos meus irmãos Luís, Ana Cláudia e Mariane, pelo apoio incondicional e momentos de descontração. Ao meu noivo pela compreensão e por me apoiar na realização dos meus sonhos. E todos os familiares que me apoiaram nesta jornada.

Agradeço, excepcionalmente, meu irmão caçula Pedro Rafael, por ser a luz da minha vida, que com seu sorriso e um simples abraço recarrega minhas energias, me motiva e dá forças para que eu continue lutando para vencer os obstáculos da vida.

A todos os meus amigos e colegas do curso pela companhia, amizade, aprendizados e troca de experiências, em especial à Jéssica de Paula Silva, Mirian Fernanda Dolores Granado Martins e Stephany Correia por terem me oferecido amor, sorrisos, abraços, alegria e por me apoiarem ao longo desses anos em todos os momentos, felizes ou tristes, com palavras e gestos de carinho.

Agradeço imensamente a minha orientadora Elenice Weber Stiegelmeier pela atenção, compreensão, paciência, ensinamentos, dedicação e pelo carinho com que me recebeu desde o início. Sou grata, pela dedicação e atenção para a realização deste trabalho e por acreditar no meu potencial. Além disso, agradeço por todas as oportunidades, conselhos, por se preocupar e me incentivar nos momentos difíceis.

Agradeço a professora Renata Mascari e ao professor André Martinez por aceitarem ser banca na defesa deste trabalho, contribuindo significativamente para a realização do mesmo.

RESUMO

ISIDORO, Glaucia Franciele Ruiz. A Função de Cobb-Douglas Aplicada a Problemas de Otimização Restritos. 2018. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação – Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Cornélio Procópio, 2018.

A produção de soja vem se destacando no cenário nacional e estadual devido sua grande contribuição na economia. Assim, o presente trabalho apresenta a função de produção de Cobb-Douglas e a teoria de otimização não linear para problemas com restrições de igualdade e desigualdade. O objetivo principal do trabalho é modelar a função de produção para a cultura da soja no estado do Paraná com o auxílio da função de produção de Cobb-Douglas. A função de produção é estimada com o auxílio do método dos mínimos quadrados.

Palavras-chave: Otimização não linear. Função Cobb-Douglas. Função de produção da soja.

ABSTRACT

ISIDORO, Glaucia Francilele Ruiz. Title in English. 2018. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação – Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Cornélio Procópio, 2018.

The soybean production has been emphasizing in the national and state scene due to its great contribution in the economy. Thus, the present paper presents the Cobb-Douglas production function and the theory of nonlinear optimization for problems with equality and inequality constraints. The main objective of the work is to model the production function for the soybean crop in the state of Paraná with the help of the Cobb-Douglas production function. The production function is estimated with the aid of the least squares method.

Keywords: Nonlinear optimization. Cobb-Douglas function. Soybean production function.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
2 – FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	3
2.1 RESULTADOS DA ÁLGEBRA LINEAR	3
2.2 RESULTADOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL	4
2.3 ELEMENTOS DE ANÁLISE CONVEXA	6
2.4 INTRODUÇÃO A TEORIA DE CONES	7
2.5 RESULTADOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	9
2.6 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	10
3 – OTIMIZAÇÃO RESTRITA	13
3.1 INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO	13
3.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES	14
3.3 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE	15
3.3.1 Problemas com restrições de igualdade	16
3.3.2 Problemas com restrições de igualdade e desigualdade	20
3.3.3 Condições de otimalidade de segunda ordem	27
4 – FUNÇÃO DE COBB-DOUGLAS	31
4.1 INTRODUÇÃO	31
4.2 FUNÇÃO DE PRODUÇÃO	31
4.3 A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COBB-DOUGLAS	33
4.3.1 Função Cobb-Douglas	33
4.3.2 Construção da Função Cobb-Douglas	35
4.3.3 Determinação dos parâmetros α e b da função de Cobb-Douglas	38
4.4 APLICAÇÃO	41
5 – MODELAGEM DA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DA SOJA PARA O ESTADO DO PARANÁ	45
5.1 CONTEXTO ECONÔMICO DE PRODUÇÃO DA SOJA NO ESTADO DO PARANÁ	45
5.2 MODELAGEM DA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO	46
5.2.1 Materiais e Métodos	46
5.2.2 Modelagem da função de produção da soja para o estado do Paraná	50
5.2.3 Determinação dos parâmetros da função de produção da soja	52
6 – CONCLUSÃO	55

Referências **56**

1 INTRODUÇÃO

O termo Pesquisa Operacional (PO) foi empregado pela primeira vez em 1939 durante a Segunda Guerra Mundial. As gerências militares britânicas e americanas empregaram uma abordagem científica para tratamento de problemas de gerenciamento de recursos escassos (radares, tropas, munição, remédios etc.), de forma eficaz, criando assim uma área do conhecimento que consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, com a finalidade de prever e comparar estratégias ou decisões alternativas, cujo objetivo é obter a melhor solução para o problema em questão (MARINS, 2011).

Os modelos de PO são utilizados para otimizar um critério objetivo específico sujeito a um conjunto de restrições. O critério é chamado de função objetivo, o qual busca-se otimizar, ou seja, maximizar ou minimizar de acordo com os critérios estabelecidos no problema. As soluções devem ser passíveis de execução indicando a presença de restrições que devem ser respeitadas, sendo que a busca de uma solução mais adequada entre diversas soluções alternativas traz consigo os elementos de um PO. Desta maneira, otimizar consiste em determinar uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou conjunto de funções.

O conceito de solução ótima é específico para cada tipo de problema que se deseja otimizar. Assim, pode-se ter um conjunto de soluções, uma única solução ou ainda não haver solução que satisfaça todas as funções do determinado problema. A dificuldade para a determinação de um conjunto de solução ótima cresce à medida que o número de funções e o número de variáveis aumentam.

Existem diferentes classes de problemas de otimização, para os quais existe uma variedade de métodos de solução, algumas são:

- Programação Linear;
- Programação Não Linear;
- Programação Dinâmica;
- Programação Inteira.

Neste trabalho é destacado o ramo de Programação Não Linear (PNL), desenvolvida em 1951 por H. Kuhn e A. Tucker, o qual consiste em um modelo matemático onde a função objetivo, as restrições ou ambas, apresentam não linearidade em seus coeficientes. Logo, a não linearidade pode estar presente na função objetivo ou no conjunto de restrições o qual é formado por equações ou inequações não lineares.

Em otimização existe outra classe importante relacionada com as restrições do problema, ou seja, quanto a existência de limitantes, restrições, ao problema, neste caso, tem-se a otimização irrestrita e a otimização restrita. Na otimização irrestrita deseja-se obter o ponto de mínimo da função sem restrições que delimitem a solução a uma determinada área do espaço \mathbb{R}^n . Já para o caso de otimização restrita, existe a redução do espaço factível para encontrar a solução de acordo com a função objetivo e suas restrições.

O presente trabalho tem como propósito buscar estratégias de resoluções para problemas de otimização não linear, o problema abordado possui restrições de igualdade e desigualdade. Para estes estudos serão apresentadas condições que garantem a existência de um minimizador para o problema de programação não linear, assim como, condições de otimalidade para os problemas de otimização com restrições. Nesta perspectiva, fez-se necessário a caracterização das Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que são condições de primeira ordem e condições necessárias e suficientes de segunda ordem, pois as condições de KKT generalizam, na programação não linear, o método de multiplicadores de Lagrange, que considera somente restrições de igualdade, para casos com restrições de desigualdade.

A motivação para esses estudos destacou-se diante a importância que os problemas de otimização apresentam na solução de problemas reais, como por exemplo, na área de matemática, engenharias, problemas físicos, problemas de investimentos, o ganho ou perda em problemas financeiros, etc. A partir das diversas aplicações de problemas de programação não linear, o presente trabalho abordará problemas relacionados à economia.

O presente trabalho tem por objetivo principal, estimar a função de produção da soja para o estado do Paraná. Para isso, será necessário definir os seguintes objetivos específicos: estudar a função de produção de Cobb-Douglas, estimar os parâmetros desta função, aplicar a função de produção de Cobb-Douglas em problemas da economia, relacionar problemas de produção com a teoria de otimização não linear com restrições de igualdade e desigualdade.

A fim de atingir os objetivos propostos, o trabalho está dividido em 6 Capítulos. O capítulo 2, seguinte a esta introdução, apresenta as ferramentas matemáticas necessários para o desenvolvimento do presente trabalho, tais como, conceitos de álgebra linear, de cálculo diferencial, elementos de análise convexa e de equações diferenciais parciais. No Capítulo 3, será introduzida a teoria de otimização, em que é caracterizada sua formulação padrão, os aspectos teóricos sobre existência de soluções e as condições de otimalidade para problemas com restrições de igualdade, seguindo de exemplo para aplicação dos estudos realizados. Em seguida, neste mesmo capítulo, são apresentados os problemas com restrições de igualdade e desigualdade e definidas as condições de KKT. O Capítulo 4, apresenta-se a caracterização da Função Cobb-Douglas, seu contexto histórico e, em seguida, será apresentado a determinação dos parâmetros da função de Cobb-Douglas. No Capítulo 5 é destacada a modelagem da função de produção da soja para o estado do Paraná, destacando a relevância econômica da produção de soja para o estado, a coleta de dados e, por fim, a modelagem da função em questão. Por fim, as conclusões deste trabalho no Capítulo 6.

2 FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Nesta seção apresenta-se a fundamentação teórica matemática, base para a realização deste trabalho. Serão apresentados os conceitos utilizados de álgebra linear, cálculo diferencial, elementos de análise convexa e alguns resultados de equações diferenciais parciais (EDP). As obras utilizadas como referências são Boldrini (1980), Guidorizzi (2001), Izmailov e Solodov (2014), Ribeiro e Karas (2013), Zill e Cullen (2001a) e Zill e Cullen (2001b), respectivamente.

2.1 RESULTADOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Quando trata-se da teoria de otimização é fundamental definir alguns conceitos de álgebra linear relacionados ao estudo de matrizes tais como, matriz simétrica e matriz definida positiva.

Definição 2.1.1. Considere a matriz real $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$. Denomina-se matriz transposta de A e indica-se por A^T a seguinte matriz $n \times m$: $A^T = (b_{ji})$ em que $b_{ji} = a_{ij}$, para todo $i = (1, 2, \dots, m)$ e $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Definição 2.1.2. Uma matriz quadrada é dita simétrica se $A = A^T$, ou seja, quando $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i e j com $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Definição 2.1.3. O núcleo de uma matriz quadrada $A \in M^{n \times n}$, denotado por $N(A)$, é um subconjunto de \mathbb{R}^n formado por todas as soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$, ou seja, $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$.

Definição 2.1.4. Seja $A \in M^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Diz que A é definida positiva quando $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tal propriedade é denotada por $A > 0$. Se $x^T Ax \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, A é dita semi definida positiva, fato este denotado por $A \geq 0$.

Definição 2.1.5. As seguintes propriedades são condições necessárias e suficientes para que uma matriz A seja positiva definida.

- $x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$;
- Todos os autovalores da matriz A são positivos;
- Todos os menores principais da matriz A possuem determinantes positivos. Os menores principais são as matrizes definidas pelas k primeiras linhas e colunas de A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\text{onde } A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ e } A_3 = \det(A).$$

- Todos os pivôs são positivos e não é preciso, teoricamente, fazer trocas de linhas na eliminação gaussiana em A .

Detalhes sobre as definições acima podem ser encontradas em [Boldrini \(1980\)](#).

2.2 RESULTADOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

A resolução de problemas de otimização requerem conhecimentos de cálculo diferencial, para tanto, o uso de algumas ferramentas do cálculo diferencial são fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Destacam-se as derivadas parciais e os conceitos relacionados ao gradiente de uma função e sua matriz Hessiana.

Definição 2.2.1. (Derivadas parciais) Seja $z = f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0 , pode-se considerar a função g de uma variável real dada por

$$g(x) = f(x, y_0). \quad (1)$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se derivada parcial de f , em relação a x , no ponto (x_0, y_0) e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}.$$

Seja A o subconjunto de D_f formado por todos os pontos (x,y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe; fica assim definida uma nova função, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e definida em A , que a cada $(x,y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Tal função denomina-se função derivada parcial de 1º ordem de f , em relação a x , ou simplesmente, derivada parcial de f em relação a x .

De maneira análoga, defini-se derivada parcial de f , em relação a y , no ponto (x_0, y_0) . O resultado pode ser verificado em [Guidorizzi \(2001\)](#)

Definição 2.2.2. (Derivadas parciais de funções de três ou mais variáveis reais)

Sejam $w = f(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$. Mantendo-se y_0 e z_0 constantes, pode-se considerar para função $g(x) = f(x, y_0, z_0)$. A derivada desta função, em $x = x_0$ (caso exista), denomina-se derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0, z_0) e indica-se por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}}.$$

De modo análogo, definem-se derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.\end{aligned}$$

Definição 2.2.3. Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . O gradiente de f é definido por

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

e a Hessiana de f é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.2.1. (Teorema de Weierstrass) (GUIDORIZZI, 2001)

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto não - vazio e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, os problemas de minimizar e de maximizar f em D têm soluções globais.

Teorema 2.2.2. (Método dos Multiplicadores de Lagrange) (MUNEM; FOULIS, 1982)

Suponha que f e g sejam funções definidas e tenham derivadas parciais contínuas num subconjunto D , do espaço xyz , onde D consiste inteiramente em pontos interiores. Suponha que, em cada ponto (x, y, z) em D , pelo menos uma das três derivadas parciais $g_1(x, y, z)$, $g_2(x, y, z)$, $g_3(x, y, z)$ seja diferente de zero. Então, os pontos (x, y, z) em D , nos quais f tem extremos relativos, sujeito à restrição:

$$g(x, y, z) = k, \quad (2)$$

onde k é uma constante, podem ser determinados como segue.

Seja a função L definida por:

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \quad (3)$$

para (x, y, z) em D e λ (chamado de Multiplicador de Lagrange) representa uma constante a ser determinada. Então, resolvendo o sistema de equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= k\end{aligned}$$

para x, y, z e λ . Diversas soluções podem ser obtidas, mas os pontos (x, y, z) desejados, onde f tem seus extremos sujeitos à restrição, estão entre essas soluções.

2.3 ELEMENTOS DE ANÁLISE CONVEXA

Nesta seção serão definidas funções convexas, caracterização de funções convexas diferenciáveis e, também, serão apresentados os Teoremas de Separação e de Alternativa de Motzkin. Detalhes sobre as definições e demonstrações dos teoremas a seguir podem ser encontrados em [Izmailov e Solodov \(2014\)](#).

Definição 2.3.1. Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto convexo se para quaisquer $x \in \Omega$, $y \in \Omega$ e $\lambda \in [0, 1]$, tem-se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$.

Exemplos de conjunto convexo e não convexo podem ser encontrados em [Izmailov e Solodov \(2014\)](#).

Definição 2.3.2. Uma função f definida em um conjunto convexo Ω é convexa se, e somente se, para todo $x, y \in \Omega$, $\lambda \in [0, 1]$ se verifica que:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (4)$$

Teorema 2.3.1. (Caracterização de funções convexas diferenciáveis)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em Ω . Então as propriedades seguintes são equivalentes:

1. A função é convexa em Ω .
2. Para todo $x \in \Omega$ e todo $y \in \Omega$,

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), x - y \rangle.$$

3. Para todo $x \in \Omega$ e todo $y \in \Omega$,

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 0.$$

Se f é duas vezes diferenciável em Ω , as propriedades acima são equivalentes a:

4. A matriz Hessiana de f é semi-definida positiva em todo ponto de Ω :

$$\langle f''(x)d, d \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

onde define, $\langle x, y \rangle$ - produto interno euclidiano entre $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, isto é, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Definição 2.3.3. Seja $H(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = c\}$ um hiperplano, onde $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$. Diz-se que $H(a, c)$ separa os conjuntos D_1 e D_2 se:

$$\langle a, x^1 \rangle \leq c \leq \langle a, x^2 \rangle \quad \forall x^1 \in D_1, \quad \forall x^2 \in D_2. \quad (6)$$

Diz-se que $H(a, c)$ separa estritamente D_1 e D_2 quando as desigualdades acima são estritas.

Teorema 2.3.2. (Teorema de separação) Sejam $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, fechados e não vazios tais que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Então existe $H(a,c)$ que separa D_1 e D_2 .

Teorema 2.3.3. Sejam $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, fechados e não vazios. Suponha que um deles também seja limitado. Então $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ se, e somente se, existe um $H(a,c)$ que separa estritamente D_1 e D_2 .

Teorema 2.3.4. (Teorema de alternativa de Motzkin)

Para quaisquer matrizes $A_i \in \mathbb{R}(m_i, n), i = 0, 1, 2, A_0 \neq 0$, um, e somente um, dos seguintes dois sistemas possui solução:

$$A_0x > 0, \quad A_1x = 0, \quad A_2x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

ou

$$\begin{aligned} A_0^T y^0 + A_1^T y^1 + A_2^T y^2 &= 0, \\ (y^0, y^1, y^2) &\in (\mathbb{R}_+^{m_0} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}_+^{m_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

2.4 INTRODUÇÃO A TEORIA DE CONES

Alguns aspectos gerais da teoria de cones são fundamentais para as condições de Karush-Kuhn-Tucker, deste modo, destacam-se algumas definições importantes. Detalhes sobre este assunto pode ser encontrado em [Izmailov e Solodov \(2014\)](#) e [Ribeiro e Karas \(2013\)](#).

Definição 2.4.1. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é um cone quando:

$$d \in K \Rightarrow td \in k, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (9)$$

Definição 2.4.2. O cone dual de um cone $K \in \mathbb{R}^n$ é definido por:

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, d \rangle \leq 0, \quad \forall d \in K\}. \quad (10)$$

Definição 2.4.3. O cone tangente pode ser definido como

$$\mathcal{T}_D(x^*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \forall \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+, \{t_k\} \rightarrow 0_+, \\ \exists \{d_k\} \subset \mathbb{R}^n, \{d_k\} \rightarrow d, \text{ tal que} \\ x^* + t_k d, d \in D \text{ para todo } k \in N \end{array} \right. \right\} \quad (11)$$

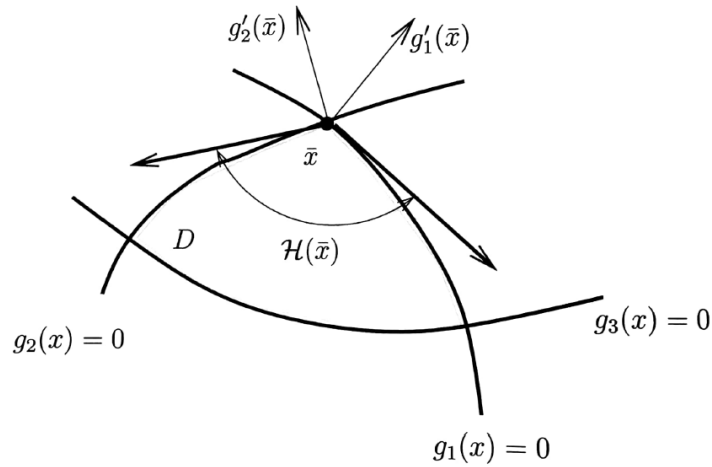
Definição 2.4.4. O cone tangente de Bouligand é dado por:

$$\mathcal{B}_D(x^*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \exists \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+, \{t_k\} \rightarrow 0_+, \text{ tal que} \\ \text{dist}(x^* + t_k d, D) = o(t_k) \end{array} \right. \right\} \quad (12)$$

Considere D o conjunto viável de solução e suponha que h , função restrição, seja diferenciável numa vizinhança do ponto $x \in D$, com derivadas contínuas em x e g diferenciável em x . Sob essas condições pode-se afirmar que

$$\mathcal{T}_D(x^*) = \mathcal{B}_D(x^*) \quad (13)$$

Figura 1 – Caso $\mathcal{T}_D(x^*) = \mathcal{B}_D(x^*)$



Fonte: (IZMAILOV; SOLODOV, 2014, p. 200)

A igualdade (13) é fundamental pois, a visualização do cone tangente é de melhor compreensão, entretanto, no desenvolvimento de condições necessárias e suficientes de primeira ordem é mais natural trabalhar com o cone de Bouligand. A Figura 1 ilustra um caso em que vale a igualdade .

Definição 2.4.5. *Suponha que g seja diferenciável em $x^* \in D$, e h seja diferenciável numa vizinhança de x^* . O cone obtido pela linearização (no ponto x^*) das restrições de igualdade e restrições de desigualdade, é dado por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^*) &= \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \langle h'_i(x^*), d \rangle = 0, i = 1, \dots, l, \\ \langle g'_i(x^*), d \rangle \leq 0 \forall i \in I(x^*) \end{array} \right\} \\ &= \{d \in \ker h'(x) \mid \langle g'_i(x^*), d \rangle \leq 0 \forall i \in I(x^*)\} \end{aligned} \quad (14)$$

onde $\ker A$ - o núcleo do operador linear A (ou da matriz) isto é, o conjunto $\{x \mid Ax = 0\}$; são necessárias algumas hipóteses adicionais para obter-se uma descrição precisa do cone tangente, isto é, para que a igualdade $\mathcal{B}_D(x^*) = \mathcal{H}(x^*)$ seja satisfeita. A seguir são apresentadas três condições suficientes para que a igualdade ocorra.

Definição 2.4.6. *Diz-se que o ponto $x^* \in D$ satisfaz a condição de regularidade de:*

(i) *independência linear dos gradientes das restrições, quando:*

$$\{h'_i(x^*), i = 1, \dots, l\} \cup \{g'_i(x), i \in I(x^*)\} \quad (15)$$

é um conjunto linearmente independente.

(ii) *Mangasarian-Fromovitz, quando*

$$\{h'_i(x^*), i = 1, \dots, l\} \quad (16)$$

é um conjunto linearmente independente e existe $d^ \in \ker h'(x^*)$ tal que $\langle g'_i(x^*), d^* \rangle < 0 \forall i \in I(x^*)$.*

(iii) Slater, quando h é uma função afim, g é uma função convexa, e $\exists \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(\hat{x}) = 0, g_i(\hat{x}) < 0, i = 1, \dots, m.$$

Essas condições são ditas condições de regularidade das restrições.

2.5 RESULTADOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Ao se tratar da determinação da Função de Cobb-Douglas, além dos conceitos de derivadas parciais, devem ser definidos alguns conceitos de Equações Diferenciais sendo estes: Variáveis Separáveis e Equações de Derivadas Parciais Separáveis. As referências para este assunto são Zill e Cullen (2001a) e Zill e Cullen (2001b), respectivamente.

Definição 2.5.1. (Equação Separável) Uma equação diferencial da forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (17)$$

é chamada separável ou tem variáveis separáveis.

Observe que uma equação separável pode ser escrita como:

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (18)$$

É imediato que (18) se reduz (17) quando $h(y) = 1$. Agora, se $y = f(x)$ denota uma solução para (18), tem-se:

$$h(f(x))f'(x) = g(x), \quad (19)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c. \quad (20)$$

com c uma constante de integração.

Mas $dy = f'(x)dx$, assim (20) é o mesmo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c. \quad (21)$$

A equação (21) indica o procedimento para a resolução de equações separáveis. Uma família a um parâmetro de soluções, em geral dada implicitamente, é obtida integrando ambos os lados de $h(y)dy = g(x)dx$.

De acordo com Zill e Cullen (2001a), não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável, pois c é completamente arbitrária. Normalmente as constantes podem ser indexadas de maneira que possa ser mais conveniente para uma dada equação. Por exemplo, múltiplos de constantes ou combinações de constantes podem ser trocadas por uma única constante.

Definição 2.5.2. (Equações de derivadas parciais separáveis) A forma geral de uma equação de derivadas parciais de segunda ordem linear (EDP) em duas variáveis independentes x e y é:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (22)$$

onde A, B, C, \dots, G são funções de x e y . Quando $G(x, y) = 0$, a equação se diz homogênea; em caso contrário, é não-homogênea.

Embora haja vários métodos para encontrar as soluções particulares para a equação do tipo (22), o método mais utilizado é o método chamado método de separação de variáveis. Quando procura-se uma solução particular na forma do produto de duas funções, uma de x e uma de y , dadas por:

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

é possível reduzir uma equação de derivadas parciais linear em duas variáveis a duas equações diferenciáveis ordinárias. Para tanto, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

em que as "linhas" denotam diferenciação ordinária. Os demais métodos para a solução de equação diferencial separável podem ser encontradas em Zill e Cullen (2001b) e serão omitidas neste trabalho.

2.6 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Neste trabalho será realizada a determinação dos parâmetros α e b da função de Cobb-Douglas e para que isso seja possível será utilizado o Método dos Mínimos Quadrados descrito a seguir.

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é utilizado em muitas ciências quando deseja-se obter um valor aproximado para a função fora do intervalo de tabelamento. Em muitas situações, conhece-se uma tabela de pontos (x_i, y_i) , onde cada y_i é obtido experimentalmente, e deseja-se obter a expressão analítica de uma dada curva $y = f(x)$ que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos. Assim, o objetivo deste processo é aproximar uma função $f(x)$ por outra função $g(x)$, escolhida de uma família de funções ou por uma soma de funções em duas situações distintas: Domínio discreto, quando a função f é dada por uma tabela de valores; Domínio contínuo, quando a função f é dada por sua forma analítica. A seguir será apresentado o caso discreto, uma vez que o problema abordado utilizará esta ferramenta para sua resolução. A referência utilizada aqui é Barroso et al. (1987).

O problema de ajuste de curvas consiste em obter n constantes a_1, a_2, \dots, a_n tais que a função:

$$g(x) = a_1 g_1(x), a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x),$$

se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Considere o caso em que tem-se uma tabela contendo m pontos:

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_m, f(x_m)),$$

com $x_1, x_2, \dots, x_m \in I = [a, b]$.

São "escolhidos a contendo" n funções, $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$, contínuas em $[a, b]$.

Seja $d_k = f(x_k) - g(x_k)$ o desvio em $x_k, k = 0, \dots, m$. O método dos mínimos quadrados consiste em escolher $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ de modo que

$$\sum_{k=0}^m d_k^2 = \sum_{k=0}^m [f(x_k) - g(x_k)]^2$$

seja mínimo, ou seja, que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima.

Assim, os coeficientes $a_k, k = 0, \dots, m$, são os que minimizam a função:

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=0}^m d_k^2 &\Rightarrow \min \sum_{k=0}^m [f(x_k) - g(x_k)]^2 \Rightarrow \\ \min \sum_{k=0}^m [f(x_k) - a_n g_n(x_k) - a_{n-1} g_{n-1}(x_k) - \dots - a_1 g_1(x_k) - a_0 g_0(x_k)]^2 \end{aligned}$$

Considere o caso em que $g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)$ será aproximada por uma reta.

Assim, pode-se tomar $g(x)$ como sendo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x$$

onde β_0 e β_1 são os parâmetros do modelo.

Um modo de estimar os coeficientes β_0 e β_1 é determinar o mínimo da função $D(\beta_0, \beta_1)$. No processo de minimização, calculam-se as derivadas parciais de D em relação a β_0 e β_1 :

$$\begin{aligned} D(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i^2)^2 \\ \frac{\partial D}{\partial \beta_0} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ \frac{\partial D}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i \end{aligned}$$

Os valores β_0 e β_1 em que a função $D(\beta_0, \beta_1)$ apresenta um valor mínimo são obtidos igualando-se as derivadas a zero.

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) &= 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Para simplificar a notação, daqui por diante o símbolo $\sum_{i=1}^n$ será trocado por \sum .

Deste modo, as equações (23) tornam-se:

$$\begin{aligned}\sum y_i - \sum \beta_0 - \sum \beta_1 x_i &= 0 \\ \sum x_i y_i - \sum \beta_0 x_i - \sum \beta_1 x_i^2 &= 0\end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{cases} (n)\beta_0 + (\sum x_i) \beta_1 = \sum y_i \\ (\sum x_i) \beta_0 + (\sum x_i^2) \beta_1 = \sum x_i y_i \end{cases} \quad (24)$$

Assim, a solução do sistema de equações lineares (24) são os valores encontrados para β_0 e β_1 , e com estes valores a função $D(\beta_0, \beta_1)$ apresenta seu menor valor.

Para o presente trabalho destaca-se também o método de Regressão Linear Múltipla. De acordo com Chapra e Canale (2008), este método é uma extensão da regressão linear, no caso o qual y é uma função linear de duas ou mais variáveis independentes. Por exemplo, y poderia ser uma função linear de x_1 e x_2 :

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + e \quad (25)$$

em que a_i são os coeficientes da função e 'e' é o erro.

A equação (25) é utilizada para ajustar dados experimentais, para os quais as variáveis sendo estudadas são frequentemente uma função de duas outras variáveis. Neste caso bidimensional, a reta de regressão se torna o plano de regressão.

Os valores dos coeficientes são determinados escrevendo-se a soma dos quadrados dos resíduos:

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})^2 \quad (26)$$

derivando com relação a cada um dos coeficientes desconhecidos, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2 \sum x_{1i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_2} &= -2 \sum x_{2i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})\end{aligned}$$

Os coeficientes fornecendo a soma mínima dos quadrados dos resíduos são obtidos igualando-se as derivadas parciais a zero e expressando o resultado na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \end{bmatrix} \quad (27)$$

A solução do sistema (27) fornece os coeficientes da função (a_i).

3 OTIMIZAÇÃO RESTRITA

Neste capítulo será apresentada a formulação matemática dos problemas de otimização não linear, com destaque para problemas de otimização restrita. Resultados de existência de soluções e as condições necessárias e suficientes de otimalidade para essa classe de problemas são apresentadas. Para ilustrar o uso das condições de otimalidade para problemas restritos, serão apresentados alguns exemplos da literatura.

3.1 INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO

O termo otimização refere-se ao estudo de problemas que buscam otimizar alguma variável através de uma escolha sistemática, otimizar significa encontrar a melhor maneira de se fazer algo, dada uma medida do que é ser melhor. Sendo assim, otimização visa encontrar pontos de mínimo ou de máximo de uma função sobre um conjunto de restrições, em que busca-se encontrar um elemento do domínio de f que atinge o menor ou maior valor da função, respectivamente.

Um problema de otimização não linear, também conhecido como problema de programação não linear, pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{sujeito a} \\ & h_i(x) = a_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, l \\ & g_j(x) \geq b_j, \text{ para } j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{28}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x)$ funcional objetivo ou função que deve ser minimizada, $h_i(x)$ restrições de igualdade, $g_j(x)$ restrições de desigualdades e a_i e b_j constantes sendo l e m as quantidades de restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Note que um problema de maximizar f pode ser substituído por minimizar $-f$.

Problemas de otimização em geral podem ser escritos usando a formulação (28), chamada de formulação padrão. Uma distinção importante entre os problemas do tipo (28) é dada de acordo com a forma do funcional objetivo $f(x)$ e suas restrições. Nesse contexto, se $f(x)$ for não linear e/ou as restrições forem não lineares, tem-se o caso da programação não linear. Além disso, se não existir nenhuma restrição, tem-se o problema irrestrito, mas se houver ao menos uma restrição tem-se os problemas de otimização restrita.

No presente trabalho será utilizada a teoria de otimização para os problemas restritos de acordo com [Izmailov e Solodov \(2014\)](#) e [Izmailov e Solodov \(2012\)](#).

3.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Seja o conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tais que $D \subset \Omega$, e uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. O problema a ser considerado é o de achar um minimizador de f no conjunto D .

Esse problema pode ser escrito como:

$$\min f(x), x \in D, \quad (29)$$

onde o conjunto D será chamado *conjunto viável* do problema, os pontos de D serão chamados *pontos viáveis*, e f será chamada *função objetivo*. O objetivo do problema (29) é encontrar o ponto $x \in D$ tal que o valor de f seja o menor possível (IZMAILOV; SOLODOV, 2014).

Definição 3.2.1. Um ponto x^* é um minimizador global de (29) se,

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in D \quad (30)$$

Definição 3.2.2. Um ponto $x^* \in D$ é um minimizador local de (29), se existe uma vizinhança U de x^* tal que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in D \cap U \quad (31)$$

De forma equivalente, $x^* \in D$ é um minimizador local se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \{x \in D \mid \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$.

A partir das Definições 3.2.1 e 3.2.2, conclui-se que todo minimizador global também é um minimizador local, mas não reciprocamente. Observe que para todo $x \neq x^*$ a desigualdade (30) ou (31) é estrita, então, x^* será chamado minimizador *estrito* (global ou local, respectivamente).

Para garantir a existência de solução global, o Teorema de Weierstrass 2.2.1, definido na seção 2.2 faz-se necessário, assim como, alguns critérios definidos a seguir:

Definição 3.2.3. O conjunto de nível da função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ associado a $c \in \mathbb{R}$ é o conjunto dado por:

$$L_{f,D}(c) = \{x \in D \mid f(x) \leq c\}$$

Corolário 3.2.1. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto D . Suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto de nível $L_{f,D}(c)$ seja não-vazio e compacto. Então, o problema de minimizar f em D possui uma solução global.

Definição 3.2.4. Dados o conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e o ponto $y \in \mathbb{R}^n$, uma projeção (ortogonal) de y sobre D é uma solução global do problema

$$\min \|x - y\| \text{ sujeita a } x \in D.$$

Corolário 3.2.2. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado não-vazio. Então, a projeção de y sobre D existe para todo ponto $y \in \mathbb{R}^n$.

3.3 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

A seguir serão apresentadas as condições que devem ser satisfeitas para os problemas de otimização não linear, chamadas de condições necessárias e suficientes de otimalidade.

Considere o problema de minimização irrestrito dado por:

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (32)$$

Estes resultados são também verdadeiros para um problema com restrições, expresso por:

$$\min f(x) \text{ sujeita a } x \in D,$$

desde que o ponto de interesse x^* esteja no interior do conjunto viável, isto é, $x^* \in \text{int } D$.

Mais detalhes sobre o teorema a seguir, assim como, sua demonstração pode ser encontrada em [Izmailov e Solodov \(2014\)](#).

Teorema 3.3.1. *(Condições de otimalidade no caso irrestrito)*

(a) *Suponha que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ e, também, x^* seja um minimizador local do problema (32). Então*

$$f'(x^*) = 0. \quad (33)$$

Se f é duas vezes diferenciável em x^ , então além de (33) tem-se que a Matriz Hessiana de f no ponto x^* é semi-definida positiva, isto é,*

$$\langle f''(x^*)d, d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n. \quad (34)$$

(b) *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* satisfaz (33) e se a matriz Hessiana de f em x^* é definida positiva, isto é, se existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\langle f''(x^*)d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n, \quad (35)$$

então x^ é minimizador local estrito do problema (32).*

A condição (33) se chama *condição necessária de 1° ordem* para o problema (32) e os pontos que a satisfazem chamam-se *pontos críticos ou pontos estacionários* do problema.

A combinação de (33) com (34) chama-se *condição necessária de 2° ordem*, e a combinação de (33) com (35) é chamada *condição suficiente de 2° ordem* para o problema (32).

A seguir, apresenta-se as condições de otimalidade para o caso de problemas com restrições de igualdade.

3.3.1 Problemas com restrições de igualdade

Considere o problema com restrições de igualdade:

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\} \quad (36)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo e $h(x)$ é uma restrição de igualdade.

Seja $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$, então a função *Lagrangiana* do problema (36) é dada por:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle = f(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(x) \quad (37)$$

onde λ são os multiplicadores de Lagrange. Note que calculando as derivadas parciais da função Lagrangiana (37), tem-se:

$$\begin{aligned} L'_x(x, \lambda) &= f'(x) + (h'(x))^T \lambda = f'(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h'_i(x), \\ L'_\lambda(x, \lambda) &= h(x). \end{aligned}$$

As condições de otimalidade do ponto de vista computacional, são aquelas na forma *primal-dual*, em termos da Lagrangiana do problema. Condições deste tipo necessitam de hipóteses de regularidade das restrições. Em particular, ao menos uma das condições de regularidades apresentadas a seguir devem ser satisfeitas:

(i) de independência linear dos gradientes,

$$\{h'_i(x^*), i = 1, \dots, l\} \quad (38)$$

(ii) ou de linearidade

h é uma função afim, isto é,

$$h(x) = Ax - a, \text{ onde } A \in \mathbb{R}(l, n), a \in \mathbb{R}^l \quad (39)$$

onde $\mathbb{R}(l, n)$ é o espaço de matrizes reais de dimensão $l \times n$.

Sob qualquer umas das hipóteses acima, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.3.2. (*Condições de otimalidade de Lagrange*)

Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ e que $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ seja diferenciável numa vizinhança deste ponto, com derivada contínua em x^* . Suponha também, que x^* seja um minimizador local do problema (36). Se vale uma das condições de regularidade das restrições (38) ou (39), então existe $\lambda \in \mathbb{R}^l$ tal que

$$L'_x(x^*, \lambda^*) = 0. \quad (40)$$

Sob a condição (38), o elemento $\lambda \in \mathbb{R}^l$ satisfazendo (40) é único.

O sistema de equações formado por:

$$\begin{aligned} L'_x(x, \lambda) &= 0, \\ h(x) &= 0 \end{aligned}$$

com $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, caracteriza os *pontos estacionários* do problema (36) e os *multiplicadores de Lagrange* associados, este sistema é denominado de *sistema de Lagrange*. De forma equivalente, tem-se:

$$L'(x, \lambda) = 0$$

onde as derivadas parciais são obtidas em relação a todas as variáveis da função Lagrangiana. Note que o número de variáveis neste sistema será igual ao número de equações (IZMAILOV; SOLODOV, 2014).

A seguir apresenta-se as condições de otimalidade de segunda ordem, em que para um ponto $x^* \in D$ estacionário dado, denotado por:

$$\mathcal{M}(x^*) = \{\lambda \in \mathbb{R}^l \mid L'_x(x^*, \lambda) = 0\}$$

o conjunto de multiplicadores de Lagrange associados a x^* .

Mais detalhes sobre os teoremas a seguir, assim como, suas demonstrações podem ser encontradas em Izmailov e Solodov (2014).

Teorema 3.3.3. (*Condição necessária de segunda ordem*) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ sejam duas vezes diferenciáveis no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Suponha também que x^* seja um minimizador local do problema (36). Se uma das condições de regularidade das restrições, (38) ou (39), é satisfeita, então para todo $\lambda \in \mathcal{M}(x^*)$, tem-se o seguinte:

$$\langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)d, d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \ker h'(x^*). \quad (41)$$

Teorema 3.3.4. (*Condição suficiente de segunda ordem*) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ sejam duas vezes diferenciáveis no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se $x^* \in D$ e

$$\forall d \in \ker h'(x^*) \setminus \{0\} \exists \lambda \in \mathcal{M}(x^*) \text{ t.q. } \langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)d, d \rangle \geq 0, \quad (42)$$

então f satisfaz no conjunto D em torno de x^* a condição de crescimento quadrático: existem uma vizinhança U de x^* e um número $\beta > 0$ tais que:

$$f(x) - f(x^*) \geq \beta \|x - x^*\|^2 \quad \forall x \in D \cap U. \quad (43)$$

Em particular, x^* é minimizador local estrito do problema (36). Reciprocamente, se uma das condições de regularidade das restrições (38) ou (39), é satisfeita e vale (43), então a condição (42) está satisfeita.

Para exemplificar a teoria apresentada até o momento será realizado um exemplo que consiste na determinação do ponto ótimo global para problemas sujeitos a restrição de igualdade. Realizando testes para a função do tipo G11, do grupo de funções G, do inglês G-suite. Mais detalhes sobre este exemplo encontram-se em Marchand (2016).

Exemplo 3.3.1. A função $G11$ é representada por,

$$f(x,y) = x^2 + (y - 1)^2 \quad (44)$$

sujeito a

$$y - x^2 = 0$$

A teoria dos Máximos e Mínimos condicionados com o emprego do Método dos Multiplicadores de Lagrange é aplicada na determinação do ponto ótimo. Deste modo obtêm-se os seguintes resultados para o problema.

Empregando o método dos Multiplicadores de Lagrange, tem-se:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + (y - 1)^2 - \lambda(y - x^2) \quad (45)$$

Aplicando as derivadas de 1º ordem obtêm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2 - \lambda = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -y + x^2 = 0 \quad (48)$$

Colocando o termo $2x$ em evidência na equação (46), tem-se:

$$2x(1 + \lambda) = 0$$

Logo, obtêm-se duas condições: $x = 0$ e $\lambda = -1$.

1º caso: $x = 0$.

Substituindo o valor de x em (48), tem-se, $y = 0$. Tendo o valor de y , determinar-se-á o valor de λ realizando a substituição do valor encontrado em (47), logo $\lambda = -2$.

Neste caso, o ponto crítico encontrado para o 1º caso é o ponto $(0, 0, 1)$ e o Multiplicador de Lagrange, $\lambda = -2$.

Com o valor do par de pontos (x,y) , pode-se determinar a coordenada z a partir da função $f(x,y)$, isto é, a função objetivo f sujeita a restrição g do problema $G11$ de G -suite, observe a [Figura 2](#).

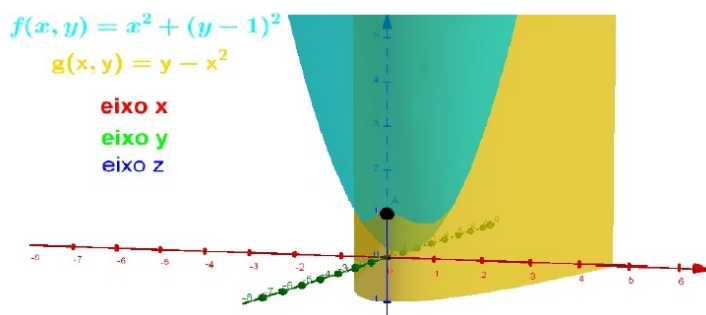
2º caso: $\lambda = -1$.

Para o 2º caso $\lambda = -1$, obtêm-se o seguinte resultado:

Substituindo $\lambda = -1$ em (47), obtêm-se $y = \frac{1}{2}$. Uma vez obtido o valor de y , substitui-se na equação (48), logo, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Neste caso, os pontos críticos encontrados são $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ e $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, com o multiplicador de Lagrange $\lambda = -1$.

Figura 2 – Representação do ponto $(0, 0, 1)$ para o 1º caso, $x = 0$, da função G11.

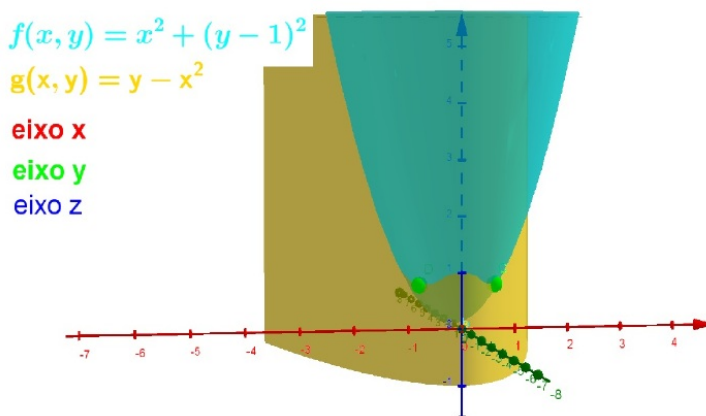


Fonte: (MARCHAND, 2016, p. 35)

Com os novos pares de pontos de (x, y) pode-se determinar a coordenada z a partir da função $f(x, y)$. É importante ressaltar que deve-se analisar o caso para $x > 0$ e $x < 0$.

A partir desta análise, pode-se obter o gráfico da função, para o 2º caso, veja [Figura 3](#). Uma vez obtido o resultado para as coordenadas (x, y, z) , representam-se os pontos no gráfico.

Figura 3 – Representação do ponto Crítico para o 2º caso da função G11.



Fonte: (MARCHAND, 2016, p. 36)

Observe na [Figura 3](#) que na interseção das funções, tem-se os pontos determinados, ou seja, os pontos de mínimo. A existência de minimizadores globais é assegurada pelo Teorema 2.2.1, Seção 2.2.

Para verificar que os pontos obtidos nos dois casos, são de fato pontos de máximo ou de mínimo, pode-se aplicar o método do Hessiano Orlado (Aumentado), o qual não será exibido neste trabalho, mas pode ser verificado em [Marchand \(2016\)](#).

A seguir, apresenta-se as condições de otimalidade para o caso de restrições de igualdade e desigualdade. Estas são definidas como as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). As condições de KKT definem um ponto estacionário da função de Lagrange.

3.3.2 Problemas com restrições de igualdade e desigualdade

Considere os problemas com restrições de igualdade e desigualdade, dada por:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \text{ sujeito a } x \in D, \\ D = \{ & x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}, \end{aligned} \quad (49)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções dadas.

O problema (49) pode ser transformado em um problema com restrições de igualdade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \text{ sujeita a } (x, \sigma) \in \tilde{D} \\ \tilde{D} = \{ & (x, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid h(x) = 0, g_i(x) + \sigma_i^2 = 0, i = 1, \dots, m. \} \end{aligned} \quad (50)$$

Note que as soluções (locais ou globais) do problema (49) estão em correspondência com as soluções (locais ou globais) do problema modificado (50). Utilizando a teoria apresentada na Seção 3.3 para obtenção da solução do problema (49), via as condições de otimalidade do problema modificado, nota-se que esta abordagem apresenta resultados mais fracos do que os resultantes das restrições de desigualdade de maneira direta e independente (IZMAILOV; SOLODOV, 2014).

Existe ainda outra maneira de reduzir o estudo local do problema (49) ao estudo de um problema com restrições de igualdade de acordo com a seguinte definição.

Definição 3.3.1. *Seja $x^* \in D$, onde D é definido por (49). Diz-se que a restrição de desigualdade que corresponde ao índice $i \in \{1, \dots, m\}$ é ativa no ponto x^* quando $g_i(x^*) = 0$, ou seja, quando a desigualdade é satisfeita como igualdade.*

O conjunto dos índices das restrições ativas no ponto $x^* \in D$ será denotada por:

$$I(x^*) = \{i = 1, \dots, m \mid g_i(x^*) = 0\}.$$

Como pode ser verificado, um minimizador local de x^* do problema (49) também é minimizador local do problema dado a seguir:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \text{ sujeita a } x \in \tilde{D}, \\ \tilde{D} = \{ & x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g_i(x) = 0, i \in I(x^*)\}, \end{aligned} \quad (51)$$

em que são removidas todas as restrições inativas em x^* . As condições de otimalidade para o problema (49) podem ser obtidas através das condições de otimalidade para o problema (51). No entanto, esta abordagem também produz resultados relativamente fracos. A condição de regularidade neste caso seria a seguinte:

$$\{h'_i(x^*), i = 1, \dots, l\} \cup \{g'_i(x^*), i \in I(x^*)\} \quad (52)$$

é um conjunto linearmente independente.

Sendo assim, as condições para uma solução ótima do problema de otimização (51) são apresentadas pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Considere (33), a condição necessária de primeira ordem, esta pode ser escrita na forma prima-dual:

$$-f'(x^*) \in (\mathcal{H}(x^*))^* \quad (53)$$

onde $\mathcal{H}(x^*)$ é o cone tangente no caso de restrições de igualdade e desigualdade. Para mais resultados pode-se consultar [Izmailov e Solodov \(2014\)](#).

As condições clássicas de KKT são obtidas através do cone dual citado na Seção 2.4 definição 2.4.2.

Lema 3.3.1. (*Lema de Farkas*)

Seja

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = 0, A_2 x \leq 0\},$$

onde $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$. Então

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = A_1^T y^1 + A_2^T y^2, y^1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y^2 \in \mathbb{R}_+^{m_2}\} \quad (54)$$

Demonstração: Denota-se por Q o conjunto do lado direito de (54).

Para todo $\xi \in Q$ e $x \in K$, existem $y^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ e $y^2 \in \mathbb{R}_+^{m_2}$ tais que:

$$\begin{aligned} \langle \xi, x \rangle &= \langle A_1^T y^1 + A_2^T y^2, x \rangle \\ &= \langle A_1^T y^1, x \rangle + \langle A_2^T y^2, x \rangle \\ &= \langle y^1, A_1 x \rangle + \langle y^2, A_2 x \rangle \\ &= \langle y^2, A_2 x \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

pela definição de cone dual, $\xi \in K^*$, isto é, $Q \subset K^*$.

Suponha agora que $\xi \in K^*$. Pela definição de cone dual, $\langle \xi, x \rangle \leq 0 \forall x \in K$, isto é, o sistema:

$$\langle \xi, x \rangle > 0, A_1 x = 0, A_2 x \leq 0$$

não tem solução $x \in \mathbb{R}^n$. Usando o Teorema da Alternativa de Motzkin, veja a Seção 2.3 Teorema 2.3.4, conclui-se que existem $y^0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $y^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ e $y^2 \in \mathbb{R}_+^{m_2}$ tais que:

$$y^0 \xi + A_1^T y^1 - A_2^T y^2 = 0.$$

Dividindo por $y^0 > 0$, obtêm-se $\xi = -A_1^T y^1 / y^0 + A_2^T y^2 / y^0$, onde $y^2 / y^0 \geq 0$. Isso mostra $\xi \in Q$, isto é, $K^* \subset Q$, logo, $K^* = Q$.

Como consequência do Lema de Farkas, pode-se reescrever $\mathcal{H}(x^*)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{H}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid A_1 d = 0, A_2 d \leq 0\},$$

onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} h'_1(x^*)^T \\ h'_2(x^*)^T \\ \vdots \\ h'_l(x^*)^T \end{bmatrix}, A_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}, A_2 = \begin{bmatrix} g'_{k_1}(x^*)^T \\ g'_{k_2}(x^*)^T \\ \vdots \\ g'_{k_j}(x^*)^T \end{bmatrix}, A_2 \in \mathbb{R}^{i \times n}, \{k_1, k_2, \dots, k_j\} \in I(x^*).$$

Dessa forma tem-se que:

$$(\mathcal{H}(x^*))^* = \{d \in \mathbb{R}^n \mid x = A_1^T \lambda^* + A_2^T \mu^*; h^* \in \mathbb{R}^l, \mu_i^* \geq 0, i \in I(x^*)\}$$

e usando (53), obtém-se:

$$\begin{aligned} -f'(x^*) &= A_1^T \lambda^* + A_2^T \mu^* \\ &= \sum_{i=1}^l \lambda_i^* h'_i(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i^* g'_i(x^*). \end{aligned} \quad (55)$$

Para escrever a condição 55 no formato conhecido como o Teorema de Karush-Kuhn-Tucker, deve-se introduzir a *Langrangiana* do problema (49). Seja $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, a função Lagrangiana é dada por:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle.$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} L'_x(x, \lambda, \mu) &= f'(x) + \lambda(h'(x))^T + \mu(g'(x))^T, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^l, \mu \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Teorema 3.3.5. (Condições de Karush-Kuhn-Tucker) *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções diferenciáveis no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$, e seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ uma função diferenciável numa vizinhança do ponto x^* , com derivada contínua neste ponto. Seja x^* um minimizador local do problema (49). Então, sob qualquer uma das condições de regularidade das restrições, existem $\lambda^* \in \mathbb{R}^l$ e $\mu^* \in \mathbb{R}_+^m$ tais que:*

$$L'_x(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (56)$$

$$\mu_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (57)$$

Sob a condição de independência linear dos gradientes das restrições ativas (52), $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m$ que satisfaz (57) é único.

Demonstração:

De (56) sabe-se que, existem $\lambda^* \in \mathbb{R}^l$ e $\mu^* \geq 0, i \in I(x^*)$, tais que

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* h'_i(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i^* g'_i(x^*) \\ &= f'(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* h'_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* g'_i(x^*) \\ &= L'_x(x^*, \lambda^*, \mu^*), \end{aligned}$$

onde defini-se $\mu_i^* = 0, i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(x^*)$, para obter a segunda igualdade. Como também tem-se $g_i(x^*) = 0, i \in I(x^*)$, a condição (56) é satisfeita (IZMAILOV; SOLODOV, 2014).

A condição (56) se chama *condição de complementariedade* e consiste em:

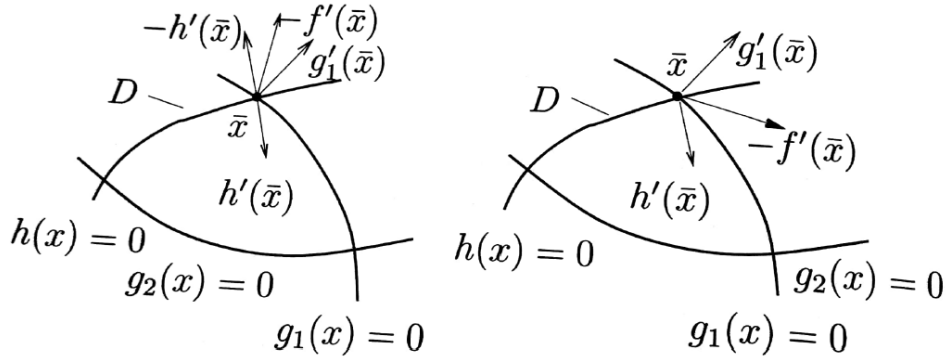
$$\mu_i^* = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(x^*) \quad (58)$$

Em outras palavras, somente os gradientes das restrições ativas participam na caracterização de otimalidade de um ponto dado. Observa-se ainda que se $g_i(x^*) \leq 0$ e $\mu_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$, a condição (56) é satisfeita se, e somente se, $\langle \mu^*, g(x^*) \rangle = 0$. Além disso, o conjunto das relações $g_i(x^*) \leq 0, \mu_i^* \geq 0, \mu_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$, pode ser escrito na forma curta de um sistema de equações não lineares:

$$\min \{ \mu_i^*, -g_i(x^*) \} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Definição 3.3.2. Diz-se que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto estacionário do problema (49) (ou ainda, um ponto de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)), quando $x^* \in D$ e existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^l$ e $\mu^* \in \mathbb{R}_+^m$ tais que as condições (56) e (57) são satisfeitas. Estes elementos λ^* e μ^* serão chamados os multiplicadores de Lagrange associados ao ponto estacionário x^* .

Figura 4 – Interpretação geométrica das condições de Karush-Kuhn-Tucker



Fonte: (IZMAILOV; SOLODOV, 2014, p. 214)

A Figura 4 ilustra a interpretação geométrica das condições de KKT.

Teorema 3.3.6. Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto estacionário do problema (49), no sentido da definição 3.3.2. Sejam f e g funções convexas e seja h uma função afim. Então x^* é um minimizador do problema (49).

Demonstração:

Sejam $\lambda^* \in \mathbb{R}^l$ e $\mu^* \in \mathbb{R}_+^m$ um par de multiplicadores associados ao ponto estacionário x^* . Para todo $x \in D$, tem-se que $h(x) = 0, g \leq 0$ e portanto,

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* h_i(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* g_i(x). \quad (59)$$

Pela convexidade de f e g , usando o Teorema 2.3.1, obtêm-se:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \langle f'(x^*), x - x^* \rangle, \\ g_i(x) &\geq g_i(x^*) + \langle g'_i(x^*), x - x^* \rangle, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (60)$$

e, como h é uma função afim, tem-se:

$$h_i(x) = h_i(x^*) + \langle h'_i(x^*), x - x^* \rangle = \langle h'_i(x^*), x - x^* \rangle, i = 1, \dots, l. \quad (61)$$

Combinando (59), (60), (61), para todo $x \in D$ obtêm-se:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \langle f'(x^*), x - x^* \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^l \lambda_i^* \langle h'_i(x^*), x - x^* \rangle + \sum_{i=1}^m \mu_i^* (g_i(x^*) + \langle g'_i(x^*), x - x^* \rangle) \\ &= f(x^*) + \langle L'_x(x^*, \lambda^*, \mu^*), x - x^* \rangle + \sum_{i=1}^m \mu_i^* g_i(x^*) \\ &= f(x^*), \end{aligned}$$

onde usou-se (56) e (57) para obter a última igualdade. A desigualdade acima mostra que x^* é um minimizador (global) de f em D .

A seguir será apresentado um exemplo com o objetivo de aplicar as condições de otimalidade de KKT.

Exemplo 3.3.2. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sujeita a } c_1(x) &= x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ c_2(x) &= x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Resolução:

Para obter a solução do problema as condições necessárias de 1º de KKT devem ser satisfeitas:

$$f'(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h'_i(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i g'_i(x^*) = 0 \quad (63)$$

$$\mu_i^* g_i(x^*) = 0 \quad (64)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad (65)$$

$$g_i(x^*) \leq 0 \quad (66)$$

Empregando o método dos multiplicadores de Lagrange, tem-se:

$$\begin{aligned} L(x, \mu) &= f(x) + \mu \sum c_i(x) \\ &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + \mu_1(x_1 + x_2 - 2) + \mu_2(x_1^2 - x_2) \end{aligned} \quad (67)$$

Calculando as derivadas de 1° ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + \mu_1 + 2x_1\mu_2 \quad (68)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1) + \mu_1 - \mu_2 \quad (69)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = x_1 + x_2 - 2 \quad (70)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = x_1^2 - x_2 \quad (71)$$

Assim, obtêm-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 2) + \mu_1 + 2x_1\mu_2 = 0 & (i) \\ 2(x_2 - 1) + \mu_1 - \mu_2 = 0 & (ii) \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 & (iii) \\ x_1^2 - x_2 = 0 & (iv) \end{cases}$$

Isolando x_1 em (iii) tem-se:

$$x_1 = 2 - x_2 \quad (v)$$

Substituindo $x_1 = 2 - x_2$ em (iv), obtém-se:

$$\begin{aligned} (2 - x_2)^2 - x_2 &= 0 \\ 4 - 4x_2 + x_2^2 - x_2 &= 0 \\ x_2^2 - 5x_2 + 4 &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

Resolvendo a equação (72), tem-se:

$$x_2 = 5 \pm \frac{\sqrt{9}}{2}$$

Portanto, a solução de (72) é $x_2 = 4$ e $x_2 = 1$. Substituindo os valores de x_2 em (v), tem-se:

$$x_1 = 2 - x_2$$

$$x_1 = 2 - 4 \quad e \quad x_1 = 2 - 1$$

$$x_1 = -2 \quad e \quad x_1 = 1$$

Portanto, obtém-se $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\tilde{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Substituindo $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ em (i),

tem-se:

$$2(x_1 - 2) + \mu_1 + 2x_1\mu_2 = 0$$

$$2(1 - 2) + \mu_1 + 2 \cdot 1\mu_2 = 0$$

$$-2 + \mu_1 + 2\mu_2 = 0$$

$$\mu_1 = 2 - 2\mu_2 \quad (vi)$$

Substituindo $x_2 = 1$ e $\mu_1 = 2 - 2\mu_2$ em (ii), tem-se:

$$\begin{aligned} 2(x_2 - 1) + \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ 2(1 - 1) + 2 - 2\mu_2 - \mu_2 &= 0 \\ 2 - 3\mu_2 &= 0 \\ \mu_2 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Substituindo $\mu_2 = \frac{2}{3}$ em (vi):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \\ \mu_1 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Logo, $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com multiplicador de Lagrange $\mu^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ é solução para o problema (62), pois fazendo a verificação em (63), (64), (65) e (66), ambas as condições de KKT são satisfeitas.

No entanto, substituindo $x^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ em (i), tem-se:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 2) + \mu_1 + 2x_1\mu_2 &= 0 \\ -8 + \mu_1 - 4\mu_2 &= 0 \\ \mu_1 &= 4\mu_2 + 8 \quad (vii) \end{aligned}$$

Substituindo $x_2 = 4$ e $\mu_1 = 4\mu_2 + 8$ em (ii):

$$\begin{aligned} 2(x_2 - 1) + \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ 6 + 4\mu_2 + 8 - \mu_2 &= 0 \\ 14 + 4\mu_2 - \mu_2 &= 0 \\ 3\mu_2 &= -14 \\ \mu_2 &= \frac{-14}{3} \end{aligned}$$

Como \tilde{x} não satisfaz a condição $\mu_i \geq 0$ então, não é solução para o problema (62). Portanto, apenas x^* é a solução para o problema (62).

A seguir serão apresentadas as condições de otimalidade de segunda ordem, e assim, o sistema de KKT pode ser utilizado para encontrar as soluções do problema (49), seguindo os passos seguintes:

- i. formular e resolver o sistema obtido a partir das condições de KKT;
- ii. analisar os pontos estacionários encontrados, usando as condições de otimalidade de segunda ordem.

Vale lembrar que, resolver um sistema de KKT de maneira analítica, ou seja, sem utilizar métodos iterativos, só é possível em casos bem simples, como nos exemplos a seguir. Métodos computacionais para resolução de sistemas de KKT são apresentados em [Izmailov e Solodov \(2012\)](#).

3.3.3 Condições de otimalidade de segunda ordem

Considere o problema com restrições de igualdade e desigualdade (49), repetido aqui para facilitar o entendimento:

$$\begin{aligned} \min f(x) \text{ sujeito a } x \in D, \\ D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}, \end{aligned} \quad (73)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções dadas. Desenvolver-se-á as condições necessárias e as suficientes de segunda ordem para o problema (73).

Para formular estes resultados é necessário o *cone crítico* (ou do *cone de direções críticas*) do problema (73) no ponto $x^* \in D$:

$$\mathcal{K}(x^*) = \{d \in \mathcal{H}(x^*) \mid \langle f'(x^*), d \rangle \leq 0\} \quad (74)$$

$$= \left\{ d \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \langle f'(x^*), d \rangle \leq 0, \\ \langle g'_i(x^*), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I(x^*), \\ \langle h'_i(x^*), d \rangle = 0, i = 1, \dots, l. \end{array} \right. \right\}$$

sendo que, naturalmente, supõe-se que f , h e g são diferenciáveis em x^* .

A seguir são apresentadas algumas definições alternativas do cone crítico, sua demonstração encontra-se em [Izmailov e Solodov \(2014\)](#).

Lema 3.3.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções diferenciáveis em $x^* \in \mathbb{R}^n$ e seja x^* um ponto estacionário do problema (73). Então para todo par $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m$ de multiplicadores de Lagrange associados a x^* , tem-se que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x^*) &= \{d \in \mathcal{H}(x^*) \mid \langle f'(x^*), d \rangle = 0\} \\ &= \{d \in \mathcal{H}(x^*) \mid \mu^* \langle g'_i(x^*), d \rangle = 0 \quad \forall i \in I(x^*)\} \\ &= \left\{ d \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} h'(x^*)d = 0, \\ \langle g'_i(x^*), d \rangle = 0 \quad \forall i \in I_+(x^*), \\ \langle g'_i(x^*), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I_0(x^*). \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \quad (75)$$

onde

$$\begin{aligned} I_+(x^*) &= \{i \in I(x^*) \mid \mu_i^* > 0\}, \\ I_0(x^*) &= I(x^*) \setminus I_+(x^*) = \{i \in I(x^*) \mid \mu_i^* = 0\}. \end{aligned}$$

Se $\mu_i^* > 0 \quad \forall i \in I(x^*)$, diz-se que o ponto estacionário x^* satisfaz a *condição de complementariedade estrita* (com multiplicadores de Lagrange λ^* e μ^*). Observe que, sob a condição (75) implica que:

$$\mathcal{K}(x^*) = \{d \in \ker h'(x^*) \mid \langle g'_i(x^*), d \rangle = 0 \quad \forall i \in I(x^*)\}.$$

Em particular, neste caso o cone crítico é um subespaço.

Denota-se o conjunto dos multiplicadores de Lagrange associados a um ponto estacionário x^* por:

$$\mathcal{M}(x^*) = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m \mid \begin{array}{l} L'_x(x^*, \lambda, \mu) = 0, \\ \mu_i g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

Exibida as definições alternativas do cone crítico, serão apresentadas as condições necessárias e suficientes de segunda ordem para o problema (73) com restrições de igualdade e desigualdade. A demonstração destes teoremas podem ser encontradas em [Izmailov e Solodov \(2014\)](#).

Primeiramente, considere o caso quando os gradientes das restrições ativas são linearmente independentes (neste caso os multiplicadores de Lagrange são únicos) e o caso das restrições lineares.

Teorema 3.3.7. *(Condições necessária de segunda ordem)*

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ duas vezes diferenciáveis no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Suponha também que x^* seja uma solução local do problema (73). Se x^* satisfaz a condição de regularidade (52) de independência linear dos gradientes das restrições ativas, ou se as restrições são lineares, então para todo $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathcal{M}(x^*)$, tem-se que:

$$\langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*, \mu^*)d, d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{K}(x^*), \quad (76)$$

onde $\mathcal{K}(x^*)$ é o cone crítico dado por (74).

Como no caso das restrições lineares, veja definição 2.4.6, a matriz Hessiana da Lagrangiana não depende dos multiplicadores, a condição necessária de segunda ordem (76) neste caso reduz-se o seguinte:

$$\langle f''(x^*)d, d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{K}(x^*).$$

Para restrições não-lineares, no Teorema 3.3.7, o multiplicador de Lagrange é único. Quando este não é o caso, a desigualdade em (76) pode não valer para todo $d \in \mathcal{K}(x^*)$ e $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathcal{M}(x^*)$ fixo. O teorema a seguir, mostra que no caso da condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz (16), veja Seção 2.4, a desigualdade em (76) vale escolhendo diferentes multiplicadores para diferentes direções críticas.

Teorema 3.3.8. *(Condições necessárias de segunda ordem)* Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções duas vezes diferenciáveis no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é uma solução local do problema (73) que satisfaz a condição de regularidade das restrições de Mangasarian-Fromovitz (16), Seção 2.4.6, então:

$$\forall d \in \mathcal{K}(x^*) \exists (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}(x^*) \text{ t.q. } \langle L''_{xx}(x^*, \lambda, \mu)d, d \rangle \geq 0 \quad (77)$$

A seguir, será apresentado um resultado que admite um cone crítico não-trivial. Na condição suficiente de segunda ordem, em lugar de uma das condições de regularidade das restrições pode-se admitir a própria existência de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 3.3.9. (Condição suficiente de segunda ordem) *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções duas vezes diferenciáveis no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se $x^* \in D$ e*

$$\forall d \in \mathcal{K}(x^*) \setminus \{0\} \exists (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}(x^*) \text{ t.q. } \langle L''_{xx}(x^*, \lambda, \mu)d, d \rangle > 0 \quad (78)$$

onde $\mathcal{K}(x^*)$ é cone crítico, então x^* é um minimizador local estrito do problema (73).

Exemplo 3.3.3. *Considere o Exemplo anterior 3.3.2:*

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 & (79) \\ \text{sujeita a } c_1(x) &= x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ c_2(x) &= x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Sabe-se que empregando o método de Lagrange, obtém-se:

$$\begin{aligned} L(x, \mu) &= f(x) + \mu \sum c_i(x) \\ &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + \mu_1(x_1 + x_2 - 2) + \mu_2(x_1^2 - x_2) \end{aligned} \quad (80)$$

Então, existem vetores μ_1 e μ_2 , tais que $\mu_i > 0, i = 1, 2$ e satisfazem a condição de 1º ordem:

$$-2 \begin{pmatrix} (x_1 - 2) \\ x(x_2 - 2) \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

calculando as derivadas de 2º, tem-se:

$$-2 \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Substituindo os valores de x_1, x_2, μ_1 e μ_2 encontrados no Exemplo 3.3.2, tem-se a matriz Hessiana dada por:

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculando os menores principais obteve-se $a_{11} = 4 > 0$ e $a_{22} = 8 > 0$.

Portanto, a matriz Hessiana é definida positiva, então $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é ponto de mínimo do problema (79).

A partir dos estudos realizados algumas observações importantes devem ser enfatizadas:

- As condições de KKT não especificam o ponto de mínimo, mas sim candidatos a mínimos da função. Sendo assim, após os resultados deve-se avaliar manualmente o ponto procurado.
- O teorema de KKT só pode ser aplicado em problemas de maximização onde a restrição em desigualdade deve estar na forma $g \leq b$. Se a restrição em desigualdade for do tipo $g \geq b$ basta multiplica-las por -1 e terá uma restrição na forma $g \leq b$ sem alterar o conjunto admissível.

4 FUNÇÃO DE COBB-DOUGLAS

Neste capítulo será apresentada a função de produção de Cobb-Douglas. Para tal, faz-se necessário o estudo da fundamentação teórica de economia, mais especificamente a Função Produção que, por sua vez, relaciona as quantidades de fatores utilizadas na produção com quantidade máxima de produto que deve ser obtido. Em seguida, será apresentado o contexto histórico da função de Cobb-Douglas e, logo após, a estimação dos parâmetros da função através da aplicação do método dos mínimos quadrados. Algumas referências para estes assuntos são [Stigum \(1973\)](#), [Vasconcellos e Garcia \(2009\)](#), [Stewart \(2011\)](#) e [Cobb e Douglas \(1928\)](#).

4.1 INTRODUÇÃO

De acordo com [Cobb e Douglas \(1928\)](#) no ano de 1920, o economista Paul Douglas estava trabalhando no problema de relacionar insumos e a produção no nível agregado nacional americano. Uma pesquisa realizada pela Bureau of Economic Research dos EUA, revelou que durante o período de 1909 - 1918 a parcela da produção paga ao trabalho foi constante em cerca de 74%, apesar da razão capital/trabalho não ser constante. Diante destes resultados, Douglas estabeleceu uma parceria com Charles Cobb, um matemático, para saber se qualquer função de produção específica pudesse explicar este fato. Os resultados obtidos deram origem a função Cobb-Douglas.

Cobb e Douglas foram influenciados pela evidência estatística de que em países desenvolvidos o custeio do trabalho e do capital para a produção de determinado produto ou serviço eram constantes.

De acordo com [Stewart \(2011\)](#), ao longo dos anos, desde sua estimação, a função de produção de Cobb-Douglas vem sendo testada em empresas de pequeno, médio e grande porte. Os resultados são considerados satisfatórios, entretanto é possível que para períodos maiores do que o período em que a função foi determinada, haja maior inconsistências nos resultados.

Em economia a função Cobb-Douglas é amplamente utilizada para representar a relação das variáveis de saída com as variáveis de entrada. Essa função mostra de que maneira os insumos devem ser combinados para gerar um serviço ou um produto de forma mais eficiente.

4.2 FUNÇÃO DE PRODUÇÃO

Segundo [Stigum \(1973, p. 77\)](#) a função de produção “refere-se a relação física entre os fatores empregados no processo de produção e a quantidade de produtos decorrentes de tal processo”.

Portanto, a definição da função de produção de uma empresa ou processo de fabricação requer conhecimentos específicos de matemática para a sua construção, uma vez que se busca

"determinar as combinações dos fatores que devem ser empregados para produzir volumes diferentes de produtos a custo mínimo" (STIGUM, 1973, p. 77).

O conceito de função produção não se restringe a um produto ou serviço, pois pode ser aplicado a uma empresa, a um setor de atividade ou mesmo a toda uma economia. Cabe ao empresário relacionar de maneira adequada os fatores de produção, para que assim obtenha o melhor resultado possível.

De acordo com Vasconcellos e Garcia (2009), algebricamente a função produção pode ser apresentada da seguinte forma:

$$P = P(L, K) \quad (81)$$

em que P representa a quantidade de produto produzido; L e K a quantidade de fatores produtivos, trabalho e capital, respectivamente.

Sendo assim, "supõe-se que todas as variáveis (P, L, K) são expressas num fluxo no tempo, isto é, consideradas ao longo de um dado período de tempo (produção mensal, produção anual etc.). Supõe-se também que o nível tecnológico está dado" (VASCONCELLOS; GARCIA, 2009, p. 59).

Na análise microeconômica¹ são considerados dois tipos de relações entre a quantidade produzida e a quantidade utilizada dos fatores sendo denominadas *situação de curto prazo* e *situação de longo prazo*. A caracterização dessas situações são necessárias para este trabalho, pois a função Cobb-Douglas tem forte relação com a função produção.

Na função de produção, quando alguns fatores são considerados fixos e outros variáveis, identifica-se o que a teoria denomina uma situação de *Curto Prazo*. Ou seja, curto prazo é o período de tempo onde pelo menos um fator de produção se mantém fixo. Nesse sentido, o curto prazo para uma siderúrgica será maior que o que o curto prazo de uma padaria, já que as instalações de uma siderúrgica demandam mais tempo para ser alteradas do que as instalações de uma padaria. (VASCONCELLOS; GARCIA, 2009, p. 59).

No que refere a situação de longo prazo, tem-se a hipótese de que todos os fatores são variáveis. A suposição de que todos os fatores de produção variam dá origem aos conceitos de economias ou deseconomias de escala. Estes rendimentos de escala ou economias de escala representam o resultado da quantidade produzida a uma variação da quantidade utilizada em relação a todos os fatores de produção. Os rendimentos a escala podem ser:

a) Rendimentos crescentes de escala (ou economias de escala): Ocorre quando a variação na quantidade do produto total é mais do que proporcional à variação da quantidade utilizada dos fatores de produção. Por exemplo, aumentando-se a utilização dos fatores em 10%, o produto cresce 20%. Equivale a dizer que a produtividade dos fatores aumentou. Pode-se apontar como causas geradoras dos rendimentos crescentes de escala: maior

¹Análise microeconômica consiste na formação de preços, bens e serviços de fatores de produção em mercados específicos, ou seja, como a empresa e o consumidor interagem e decidem qual o preço e a quantidade de um determinado bem ou serviço.

especialização no trabalho, quando a empresa cresce; a existência de indivisibilidades entre os fatores de produção. Por exemplo: numa siderúrgica, como não existe a compra de “meio forno”; quando se adquire mais um forno, deve ocorrer um grande aumento na produção. b) Rendimentos constantes de escala: Ocorrem quando a variação do produto total é proporcional à variação da quantidade utilizada dos fatores de produção: aumentando-se a utilização dos fatores em 10%, o produto também aumenta em 10%. c) Rendimentos decrescentes de escala (ou deseconomias de escala: quando a variação do produto é menos do que proporcional à variação na utilização dos fatores: por exemplo, aumenta-se a utilização dos fatores em 10% e o produto cresce em 5%. Houve, nesse caso, uma queda na produtividade dos fatores. (VASCONCELLOS; GARCIA, 2009, p. 59).

A função de produção Cobb-Douglas é uma forma particular da função de produção, pois o produto marginal é decrescente e positivo, sua elasticidade de produção é constante e igual a K , α ou β de L e os retornos de escala são $\alpha + \beta$.

4.3 A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COBB-DOUGLAS

Esta seção discutirá a determinação da função Cobb-Douglas. Assim, as derivadas parciais e a solução de EDP são usadas para mostrar como este modelo deriva de certas hipóteses que Cobb e Douglas fizeram sobre a economia. Tais resultados são encontrados em Stewart (2011).

4.3.1 Função Cobb-Douglas

Em 1928 Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo em que modelaram o crescimento da economia americana durante o período de 1899-1922, utilizando dados oficiais dos boletins econômicos americanos publicados pelo governo. Para construir a Tabela 1, tomaram o ano de 1899 como base e P , L e K foram tomados valendo 100 nesse ano. Os valores para outros anos foram expressos como porcentagem dos valores de 1899. Para mais detalhes Stewart (2011) e Cobb e Douglas (1928) podem ser consultados.

Para determinação do modelo, Cobb e Douglas levaram em consideração que o produto é determinado pela quantidade de mão-de-obra envolvida e pela quantidade de capital investido. Embora tenham considerado uma visão simplificada de economia, pois existem muitos outros fatores que afetam o desempenho econômico, o modelo provou ser significativamente preciso. A função usada para modelar a produção é dada por:

$$P(L, K) = bL^\alpha K^\beta \quad (82)$$

P : Produção total (valor monetário de todos os bens produzidos por um ano);

L : Trabalho (o número total de pessoas/horas trabalhadas em um ano);

K : Entrada de capital (o valor monetário de todas as máquinas, equipamentos e edifícios);

b : Fator total de produtividade;

Tabela 1 – Proporções relativas à mão-de-obra e capital de acordo com o modelo de economia americana.

Ano	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Fonte: (STEWART, 2011, p. 817)

α e β : são as elasticidades², produto do trabalho e do capital, respectivamente. Esses valores são constantes determinadas pela tecnologia disponível.

Seu domínio é $\{(L, K) \mid L \geq 0, K \geq 0\}$ pois, L e K representam trabalho e capital, os quais não podem ser negativos.

Como α e β são as elasticidades, estas fornecem os retornos a escala, ou seja se:

$$\alpha + \beta = 1 \quad (83)$$

a função de produção tem retornos constantes à escala, ou seja, se L e K são cada um aumentado 20%, então P aumenta 20%. No entanto, se:

$$\alpha + \beta < 1, \quad (84)$$

os retornos a escala estão diminuindo e a proporção de aumento da produção será inferior a proporção dos fatores de aumento. Neste caso, diz-se que a função de produção tem retornos

²Em economia o termo elasticidade refere-se ao tamanho de impacto que a alteração de uma variável exerce sobre outra variável.

decrecentes de escala. Agora, se:

$$\alpha + \beta > 1, \quad (85)$$

os retornos a escala estão aumentando e, nesse caso, diz-se que a função de produção tem retornos crescentes à escala. Assumindo uma concorrência perfeita, α e β podem ser demonstradas como a participação do trabalho e do capital na produção.

A seguir será apresentado a determinação da função produção Cobb-Douglas, baseado em [Stewart \(2011\)](#) e [Cobb e Douglas \(1928\)](#).

4.3.2 Construção da Função Cobb-Douglas

Se a função de produção for indicado por $P = P(L, K)$, então a derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial L}$ é a taxa na qual a produção muda em relação à quantidade de mão-de-obra. Os economistas chamam-no de *produção marginal* em relação ao trabalho ou à *produtividade marginal do trabalho*. Da mesma forma, a derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial K}$ é a taxa de variação da produção em relação ao capital e é chamada *produtividade marginal do capital*.

Nestes termos, as hipóteses feitas por Cobb e por Douglas podem ser apresentadas da seguinte forma:

- (i) Se o trabalho ou o capital desvanece, então assim será a produção;
- (ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho;
- (iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

Com base nas hipóteses levantadas, pode-se definir a função de Cobb-Douglas:

Como a produção por unidade de trabalho é P/L , a hipótese (ii) diz:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L} \quad (86)$$

Suponha α constante. Se mantiver K constante ($K = K_0$), então a equação diferencial parcial (86) torna-se uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L} \quad (87)$$

Assim, tem-se uma equação diferencial separável, onde sua solução pode ser obtida através do método de variáveis separáveis (veja Seção 2.5).

Reorganizando os termos da equação diferencial separável obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dL} &= P\alpha \frac{1}{L} \\ \frac{1}{P} dP &= \alpha \frac{1}{L} dL \end{aligned} \quad (88)$$

Integrando ambos os lados da equação (88):

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{P} dP &= \alpha \int \frac{1}{L} dL \\ \ln |P| &= \alpha \cdot \ln |L| + c_1, \end{aligned}$$

c_1 constante de integração, aplicando propriedade de logaritmo, tem-se:

$$\begin{aligned} e^{\ln|P|} &= \alpha \cdot e^{\ln|L|+c_1} \\ P &= c_1 \cdot L^\alpha \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$P(L, K_0) = c_1(K_0)L^\alpha \quad (89)$$

Note que a constante c_1 é escrita como função de K_0 , pois pode depender do valor de K_0 .

Analogamente, a hipótese (iii) diz que:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

para alguma constante β . Com L constante ($L = L_0$), então esta equação diferencial parcial torna-se uma equação diferencial ordinária do tipo:

$$\frac{dP}{dK} = \alpha \frac{P}{K} \quad (90)$$

Resolvendo esta equação diferencial separável de maneira análoga a equação (87), obtém-se:

$$P(L_0, K) = c_2(L_0)K^\beta \quad (91)$$

Combinando as equações (89) e (91), de acordo com a teoria desenvolvida na Seção 2.5 tem-se:

$$P(L, K) = bL^\alpha K^\beta. \quad (92)$$

onde $b = c_1 \cdot c_2$ é uma constante independente de L e de K . A hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Observe que, pela equação (92), se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m , tem-se:

$$P(mL, mK) = b(mL)^\alpha (mK)^\beta = m^{\alpha+\beta} bL^\alpha K^\beta = m^{\alpha+\beta} P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m . Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$, então tem-se a função de produção de Cobb - Douglas definida por:

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}. \quad (93)$$

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da Tabela 1 à função, encontrando os valores de $b = 1,01$ e $\alpha = 0,75$. Assim sendo, a função de produção introduzida por Cobb e Douglas representava rendimentos constantes a escala, sendo uma função homogênea de grau um. Deste modo obtiveram:

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75} K^{0,25}. \quad (94)$$

A Figura 5 apresenta o gráfico dos dados da Tabela 1, a Figura 6 apresenta a função de Cobb-Douglas (94) e na Figura 7 pode-se observar as curvas de nível do problema.

A equação (94), descreve a modelagem da economia americana. A determinação dos parâmetros α e b da função de Cobb - Douglas, através do método dos mínimos quadrados, será apresentada na subsecção a seguir.

Figura 5 – Função Cobb-Douglas - Dados Tabelados

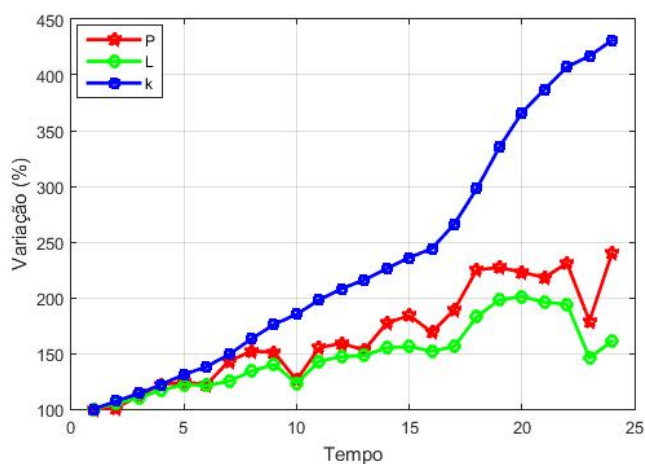
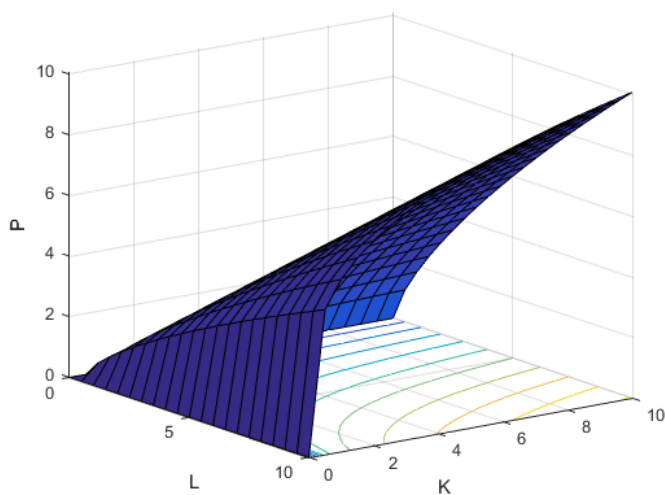


Figura 6 – Função Cobb-Douglas



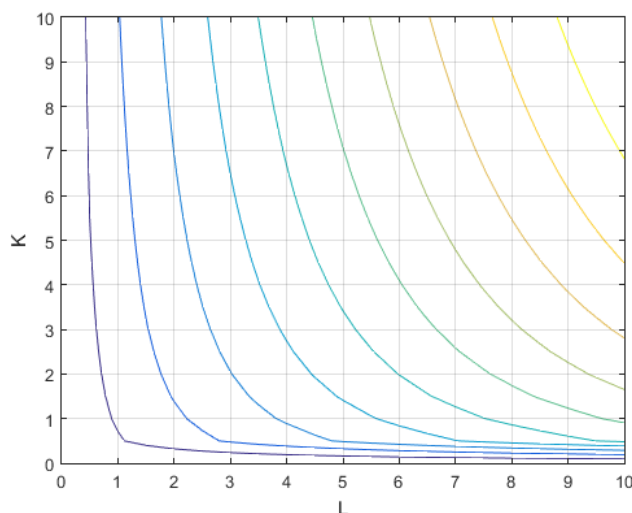
Exemplo 4.3.1. Para validação da função de Cobb-Douglas, calculou-se a produção nos anos de 1907 e 1917, a partir da mão de obra e do capital investidos naquela época de acordo com a Tabela 1 e obtiveram os valores aproximados, a saber:

$$1907 \Rightarrow P(140,176) = 1,01 \cdot (140)^{0,75} \cdot (176)^{0,25} = 149,7$$

$$1917 \Rightarrow P(198,335) = 1,01 \cdot (198)^{0,75} \cdot (335)^{0,25} = 228,0$$

que estão muito próximos dos valores reais 151 e 227, respectivamente.

Figura 7 – Curvas de Nível da Função Cobb-Douglas.



4.3.3 Determinação dos parâmetros α e b da função de Cobb-Douglas

Para a determinação dos parâmetros α e b da função de Cobb-Douglas faz-se necessário a linearização da equação (93), realizada a seguir:

$$P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

reescrevendo a equação e dividindo por k em ambos os lados:

$$\begin{aligned} \frac{P}{K} &= \frac{bL^\alpha K \cdot K^{-\alpha}}{K} \\ \frac{P}{K} &= bL^\alpha K^{-\alpha} \\ \frac{P}{K} &= b \left(\frac{L^\alpha}{K^\alpha} \right) \\ \frac{P}{K} &= b \left(\frac{L}{K} \right)^\alpha \end{aligned}$$

aplicando o logaritmo natural em ambos os membros, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{P}{K} \right) &= \ln \left(b \left(\frac{L}{K} \right)^\alpha \right) \\ \ln \left(\frac{P}{K} \right) &= \ln(b) + \alpha \ln \left(\frac{L}{K} \right) \end{aligned} \tag{95}$$

Note que a equação (95) é uma função afim:

$$Y = A + Bx \tag{96}$$

onde $Y = \ln \left(\frac{P}{K} \right)$, $x = \ln \left(\frac{L}{K} \right)$ e os termos A e B são:

$$A = \ln(b) \Rightarrow b = e^A \tag{97}$$

e

$$B = \alpha \tag{98}$$

Como se sabe, o objetivo é encontrar os valores para α e b da equação (93). Note que, ao determinar o valor de A e substituindo em (97) o parâmetro b será encontrado e uma vez obtido o valor de B , equação (98), tem-se de imediato o parâmetro α . Deste modo, para a determinação dos parâmetros α e b da função de Cobb - Douglas, basta determinar os valores de A e B .

Para se determinar os parâmetros A e B , utiliza-se o Método dos Mínimos quadrados para o caso discreto através da solução do sistema linear:

$$\begin{cases} nA + B \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ A \sum_{i=1}^n x_i + B \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \tag{99}$$

Na Tabela 2, são apresentados os dados utilizados para a solução do sistema linear (99).

Tabela 2 – Dados utilizados para a determinação dos parâmetros α e b , da função de Cobb-Douglas.

Ano	P	L	K	L/K	P/K	$\ln(L/K)$	$\ln(P/K)$	$[\ln(L/K)]^2$	$x \cdot y$
1899	100	100	100	1	1	0	0	0	0
1900	101	105	107	0.981	0.944	-0.0189	-0.0577	0.0004	0.0011
1901	112	110	114	0.96491	0,98246	-0.03572	-0.01770	0.00128	0.00063
1902	122	117	122	0.95905	1	-0.04185	0	0.00175	0
1903	124	122	131	0.93130	0.94657	-0.07118	-0.05492	0.00507	0.00391
1904	122	121	138	0.87681	0.88406	-0.13146	-0.12323	0.01728	0.01620
1905	143	125	149	0.83893	0.95973	-0.17563	-0.04110	0.03085	0.00722
1906	152	134	163	0.82209	0.93252	-0.19591	-0.06987	0.03838	0.01369
1907	151	140	176	0.79545	0.85796	-0.22884	-0.15320	0.05237	0.03506
1908	126	123	185	0.66487	0.68108	-0.40817	-0.38407	0.16660	0.15677
1909	155	143	198	0.72222	0.78283	-0.32542	-0.24484	0.10590	0.07968
1910	159	147	208	0.70673	0.76442	-0.34711	-0.26863	0.12048	0.09324
1911	153	148	216	0.68519	0.70833	-0.37807	-0.34484	0.14293	0.13037
1912	177	155	226	0.68584	0.78319	-0.37711	-0.24439	0.14221	0.09216
1913	184	156	236	0.66102	0.77966	-0.41398	-0.24890	0.17138	0.10304
1914	169	152	244	0.62295	0.69262	-0.47329	-0.36727	0.22400	0.17382
1915	189	156	266	0.58647	0.71053	-0.53364	-0.34175	0.28477	0.18237
1916	225	183	298	0.61409	0.75503	-0.48761	-0.28100	0.23776	0.13701
1917	227	198	335	0.59104	0.67761	-0.52586	-0.38918	0.27653	0.20466
1918	223	201	366	0.54918	0.6029	-0.59933	-0.49546	0.35920	0.29694
1919	218	196	387	0.50646	0.56331	-0.68031	-0.56640	0.54901	0.39045
1920	231	194	407	0.47666	0.56757	-0.74096	-0.56640	0.54901	0.41967
1921	179	146	417	0.35012	0.42926	-1.04948	-0.84570	1.10141	0.88755
1922	240	161	431	0.37355	0.55685	-0.98470	-0.58547	0.96964	0.57651
Σ	3982	3533	5620	16.96620	18.56878	-9.2245	-6.69955	5.46198	4.00205
-	-	-	-	-	-	x	y	x^2	$x \cdot y$

O Algoritmo 1, descreve a implementação do Método dos Mínimos Quadrados utilizado para a obtenção dos parâmetros da função de produção de Cobb-Douglas. O Algoritmo 1 foi implementado em linguagem de programação com apoio do software matemático Matlab.

Algoritmo 1: Determinação dos parâmetros b e α da função de Cobb-Douglas

Input: P (produção), L (produção) e K (capital)
Output: coeficientes A e b

- 1 Aplicando a linearização na equação (92)
- 2 $LK = L/K$
- 3 $PK = P/K$
- 4 $x = \log(LK)$
- 5 $y = \log(PK)$
- 6 $m \leftarrow$ tamanho do vetor x
- 7 $n \leftarrow$ tamanho do vetor y
- 8 $m \neq n$ imprimir mensagem de erro
- 9 Calculando os elementos do sistema linear (97)
- 10 $xx \leftarrow x^2$
- 11 $xy \leftarrow xy$
- 12 $Sxx \leftarrow \sum x^2$
- 13 $Sxy \leftarrow \sum xy$
- 14 $Sx \leftarrow \sum x$
- 15 $Sy \leftarrow \sum y$
- 16 Resolvendo o sistema linear
- 17 $a(1) \leftarrow (m \cdot Sxy - Sx \cdot Sy/m \cdot Sxx - Sx * Sx)$
- 18 $a(2) \leftarrow (Sy/m) - (Sx/m) * a(1)$
- 19 Imprimir a solução $a(1)$ e $a(2)$
- 20 Imprimir os coeficientes da equação linearizada
- 21 $A \leftarrow a(1)$
- 22 $b \leftarrow exp(a(2))$

Os resultados correspondente a última linha da Tabela 2, cujos valores são os somatórios de suas respectivas colunas, são substituídos no sistema linear (99), sendo $n = 24$:

$$\begin{cases} 24 \cdot A + B(-9.2245) = -6.69955 \\ A(-9.2245) + B \cdot 5.46198156 = 4.002048 \end{cases} \quad (100)$$

Resolvendo o sistema (100) obtém-se $A = 0,006902618755$ e $B = 0,7442384666$. Substituindo estes valores nas equações (97) e (98), tem-se:

$$b = e^A \Rightarrow b = 1.006926496 \quad (101)$$

e

$$\alpha = B \Rightarrow \alpha = 0.744238466 \quad (102)$$

arredondando estes valores para duas casas decimais e substituindo em (93), obtém-se:

$$P(L,K) = 1,01L^{0.75}K^{0.25},$$

o que resulta nos parâmetros α e b da função de Cobb-Douglas.

4.4 APLICAÇÃO

A seguir será apresentada uma situação problema, para a qual pretende-se encontrar a quantidade de insumos³ para que tenha-se uma produção máxima.

Considere uma produção expressa pela função de Cobb-Douglas $f(x,y) = 2xy$, onde x e y representam quantidade de insumo cujos preços são respectivamente 8 e 4. Calcule as quantidades de insumos que promovem produção máxima, bem como seu valor, sabendo-se que a quantidade total de insumo não deve ultrapassar 20 e a verba destinada a sua compra não deve ser superior a 96 (HARIKI; ABDOUNUR, 2003).

Solução:

Para obter os resultados do problema, tem-se a seguinte formulação:

$$\max f(x,y) = 2xy \quad (103)$$

$$\text{sujeita a } (x,y) \in D,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x,y) = x + y - 20 \leq 0, \quad g_2(x,y) = 8x + 4y - 96 \leq 0\}.$$

A função Lagrangiana do problema é dada por:

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = 2xy + \mu_1(x + y - 20) + \mu_2(8x + 4y - 96).$$

Aplicando a derivada de 1º ordem, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y + \mu_1 + 8\mu_2 \quad (104)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + \mu_1 + 4\mu_2 \quad (105)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = x + y - 20 \quad (106)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = 8x + 4y - 96 \quad (107)$$

Pelas condições de Karush-kuhn-Tucker, tem-se

$$L''(x,y,\mu_1,\mu_2) = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8\mu_2 \\ 4\mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

³elementos fundamentais para o desenvolvimento de certo produto ou serviço.

Obtendo o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2y + \mu_1 + 8\mu_2 = 0, & (i) \\ 2x + \mu_1 + 4\mu_2 = 0, & (ii) \\ \mu_1 \leq 0, & (iii) \\ \mu_2 \leq 0, & (iv) \\ x + y - 20 \leq 0, & (v) \\ 8x + 4y - 96 \leq 0, & (vi) \\ \mu_1(x + y - 20) = 0 & (vii) \\ \mu_2(8x + 4y - 96) = 0. & (viii) \end{array} \right. \quad (108)$$

O sistema será dividido em quatro casos para obter a solução do problema.

1° caso: $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Substituindo μ_1 e μ_2 nas equações (i) e (ii), terá como resultado $y = 0$ e $x = 0$. Logo, $x = 0$, $y = 0$, $\mu_1 = 0$ e $\mu_2 = 0$. Obtendo, assim, $\hat{x} = (0, 0, 0, 0)$, ponto estacionário do problema, pois não contradiz nenhuma das equações e inequações do sistema.

2° caso: $\mu_1 = 0$ e $8x + 4y - 96 = 0$

Deve-se considerar o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y + 8\mu_2 = 0 \\ 2x + 4\mu_2 = 0 \\ 8x + 4y - 96 = 0 \end{array} \right.$$

Fazendo a solução do sistema, os valores encontrados são $x = 6$, $y = 12$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -3$. Estes valores não contrariam nenhuma das equações e inequações do primeiro sistema, ou seja também são pontos estacionários $\tilde{x} = (6, 12, 0, -3)$.

3° caso: $\mu_2 = 0$ e $x + y - 20 = 0$.

Substituindo $\mu_2 = 0$ nas duas primeiras equações do primeiro sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y + \mu_1 = 0 \\ 2x + \mu_1 = 0 \\ x + y - 20 = 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, obtém-se os seguintes resultados; $x = 10$, $y = 10$, $\mu_1 = -20$ e $\mu_2 = 0$. Entretanto não são pontos estacionários, pois contradiz a equação $8x + 4y - 96 \leq 0$.

4° caso: $x + y - 20 = 0$ e $8x + 4y - 96 = 0$.

O sistema que deve-se resolver é:

$$\begin{cases} 2y + \mu_1 + 8\mu_2 = 0 \\ 2x + \mu_1 + 4\mu_2 = 0 \\ x + y - 20 = 0 \\ 8x + 4y - 96 = 0 \end{cases}$$

Dividindo o sistema acima em dois casos, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - 20 = 0 \\ 8x + 4y - 96 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema fornece os valores $x = 4$ e $y = 16$. Substituindo esses valores em :

$$\begin{cases} 2y + \mu_1 + 8\mu_2 = 0 \\ 2x + \mu_1 + 4\mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 + \mu_1 + 8\mu_2 = 0 \\ 8 + \mu_1 + 4\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Então $\mu_1 = -32$ e $\mu_2 = -6$. Dessa forma os pontos encontrados são $x = 4$, $y = 16$, $\mu_1 = -32$ e $\mu_2 = -6$. Fazendo a verificação dos valores no sistema (108), conclui-se que $x^* = (4, 16, -32, -6)$ é ponto estacionário do problema.

Logo os pontos estacionários do problema são: $\hat{x} = (0, 0, 0, 0)$, $\tilde{x} = (6, 12, 0, -3)$ e $x^* = (4, 16, -32, -6)$. Agora, é necessário verificar quais destes pontos são pontos de máximo do problema. Para isso sera usado o Teorema 3.3.9, veja Subseção 3.3.3.

Substituindo cada um dos pontos estacionários encontrados, \hat{x} , \tilde{x} e x^* , na função objetivo $f(x, y) = 2xy$, percebe-se que $f(\tilde{x}, \tilde{y}) > f(\hat{x}, \hat{y})$ e que $f(\tilde{x}, \tilde{y}) > f(x^*, y^*)$.

Logo $\tilde{x} = (6, 12, 0, -3)$ é ponto de máximo do problema em questão. No entanto é necessário verificar que:

$$\langle L''_{xx}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)d, d \rangle < 0 \quad \forall d \in \mathcal{K}(\tilde{x}, \tilde{y}) \setminus \{0\}. \quad (109)$$

Para isso, usa-se o conceito da Subseção 3.3.3, para construção de $\mathcal{K}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Logo

$$\mathcal{K}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} \langle g'_i(\tilde{x}, \tilde{y}), d \rangle \leq 0, \quad i = 1, 2. \\ \langle f'(\tilde{x}, \tilde{y}), d \rangle \geq 0. \end{array} \right\}$$

$$\langle g'_1(\tilde{x}, \tilde{y}), d \rangle = d_1 + d_2$$

$$\langle g'_2(\tilde{x}, \tilde{y}), d \rangle = 4(2d_1 + d_2)$$

$$\langle f'_1(\tilde{x}, \tilde{y}), d \rangle = 12(2d_1 + d_2).$$

Portanto,

$$\mathcal{K}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid 3d_1 + 2d_2 \leq 0\}.$$

Tem-se, também, que:

$$L''(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (110)$$

e

$$\langle L''(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)d, d \rangle = 2d_2d_1 + 2d_2d_1 \quad (111)$$

Dividindo o problema em dois casos, tem-se:

1º caso: $3d_1 + 2d_2 = 0$

Como $d \neq 0$ ou $d_1 \neq 0$ ou $d_2 \neq 0$, mas $d_1 \neq 0 \Rightarrow d_2 \neq 0$ e $d_2 \neq 0 \Rightarrow d_1 \neq 0$, logo $d_1 \neq 0$ e $d_2 \neq 0$.

$$3d_1 + 2d_2 = 0 \Rightarrow -3d_1 = 2d_2$$

e, assim,

$$\langle L''(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)d, d \rangle = -3d_1^2 - 3d_1^2 = -6d_1^2 < 0.$$

para concluir a última desigualdade usa-se o fato de que $d_1 \neq 0$.

2º caso: $3d_1 + 2d_2 < 0$.

$$2d_2 < -3d_1$$

então,

$$\langle L''(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)d, d \rangle = 2d_2d_1 + 2d_2d_1 < -3d_1^2 - 3d_1^2 \leq 0$$

isto é,

$$\langle L''(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)d, d \rangle < 0$$

como desejava-se mostrar.

5 MODELAGEM DA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DA SOJA PARA O ESTADO DO PARANÁ

Neste capítulo será apresentado um breve contexto da atividade agrícola para o estado do Paraná e sua relevância econômica, bem como, a modelagem da função de produção para a cultura da soja.

5.1 CONTEXTO ECONÔMICO DE PRODUÇÃO DA SOJA NO ESTADO DO PARANÁ

O Paraná está localizado na Região Sul do Brasil, sendo uma das 27 unidades federativas, ocupa 199.307,939 Km^2 , o equivalente a 2,3% do território brasileiro. Em 2010, segundo o [Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE \(2017a\)](#), a população paranaense era de 10.444.526 habitantes, com uma distribuição espacial estimada de 85,33% na área urbana e 14,66% no meio rural. A estimativa para a população paranaense no ano de 2017 foi de 11.320.892 habitantes.

A capital do estado é Curitiba e conta com importantes cidades como Londrina, Maringá além de outras cidades da Região Metropolitana de Curitiba, como Araucária que possui o segundo maior Produto Interno Bruto (PIB)¹ do estado, sendo o quinto estado mais rico do Brasil pelo PIB, ficando atrás apenas de São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Rio Grande do Sul.

A economia do estado é caracterizada pela sua diversidade, compreendendo setores como a agricultura, pecuária, mineração, extrativismo vegetal e o setor industrial. Dentre estes destacar-se-á a agricultura, uma das atividades econômicas predominante, pois a região paranaense conta com solos férteis, além de um clima propícia para o cultivo de diversos alimentos entre eles o café, cana-de-açúcar, o milho, a soja, a mandioca, o trigo, o algodão e a laranja de acordo com [Portal Paraná Turismo \(2018\)](#).

Como pode-se notar, o setor agropecuário do Paraná tem grande diversificação. Segundo [Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico Social \(Ipardes\) \(2017\)](#), os mais importantes produtos da agricultura paranaense são o trigo, o milho e a soja, nos últimos anos estes produtos tem obtidos recordes de safra, competindo com os demais estados do país. Embora o cultivo da soja seja o mais novo dos três, este foi se expandido tanto no norte como no oeste do estado e depois no sul. No presente trabalho, destaca-se o cultivo de soja no estado do Paraná, devido seu constante crescimento de produção e seu impacto sobre a economia do estado.

De acordo com [Bonato e Bonato \(1987\)](#), o primeiro registro histórico da soja no Paraná data de 1936, quando agricultores gaúchos e catarinenses começaram a se fixar nas Regiões Oeste e Sudeste. Ainda, [Bonato e Bonato \(1987\)](#), destaca em seu trabalho que, no

¹caracterizado pelo total de valores contabilizados, de todos os bens e serviços finais produzidos numa determinada região, durante um determinado período.

ano de 1953 a ocorrência de geadas, que afetou drasticamente a plantação de café, no norte do estado, os agricultores foram forçados a cultivar cereais, a fim de equilibrar o custeio da renovação dos cafezais. Em 1955, após a geada afetar novamente as plantações de café, foi sugerido o cultivo da soja. Assim, pelo retorno financeiro significativo devido a plantação de soja, os agricultores do norte do Paraná foram aumentando a produção. Na safra de 1956/57 assumia a posição de segundo maior produtor nacional. Já na década de 70, atingiu o máximo de 2.410.800 hectares em 1979/80. Em 1985, o estado respondia por 24,1% da produção brasileira de soja.

Hoje, segundo dados da [Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária \(Embrapa\) \(2018\)](#), o Brasil é o segundo maior produtor mundial de soja, atrás apenas dos EUA. Na safra 2016/2017, a cultura ocupou uma área de 33,89 milhões de hectares, o que totalizou uma produção de 113,92 milhões de toneladas. A produtividade média da soja brasileira foi de 3.362 kg por hectare.

Portanto, a produção de soja, hoje, movimenta de forma significativa a economia do estado do Paraná. Assim, a modelagem da função de produção para a cultura da soja pode ajudar a estimar os custos de produção e contribuir para a tomada de decisão em relação ao manejo de recursos na agricultura, tais como mão de obra, custos fixos e variáveis, entre outros.

5.2 MODELAGEM DA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO

Devido a importância da produção de soja no estado do Paraná, o presente trabalho tem por objetivo estimar os parâmetros da função de produção de Cobb-Douglas para a atividade agrícola da produção de soja do estado.

5.2.1 Materiais e Métodos

Para a modelagem da função de produção para a cultura da soja, buscou-se dados sobre o custo de produção de soja, pois é necessário ter conhecimento da combinação de insumos utilizados para a produção do bem pretendido. Para tal caracterização escolheu-se o custo de produção de soja para região de Londrina.

De acordo com as informações disponibilizadas pela [Prefeitura do Município de Londrina \(2018\)](#), o município fica localizado no norte e interior do estado do Paraná, a 369 km da capital paranaense, Curitiba. No ano de 2017 a população estimada foi de 558.439 habitantes e é a segunda cidade mais populosa do Paraná e a terceira mais populosa da região Sul do Brasil de acordo com o [Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE \(2017b\)](#). A cidade é um importante polo de desenvolvimento regional e nacional, composta de comércios, serviços e agroindústrias. Neste último setor, destaca-se aqui a produção de soja.

Para a obtenção dos dados, referente ao custo de produção estimado para o cultivo da soja da região de Londrina, foram utilizadas as informações disponíveis pela [Companhia Nacional de Abastecimento \(CONAB\) \(2017\)](#) no período de 1998 à 2016. Os dados coletados

trazem informações sobre o preço de grãos, uso de fertilizantes químicos, manutenção periódica de máquinas agrícolas, mão-de-obra rural entre outros fatores. A Figura 8 ilustra o custo de produção disponível pela CONAB para a produção da soja no ano de 1998/99, destacando cada um dos fatores envolvidos.

Figura 8 – Custo de Produção estimado para a soja utilizando os sistema de plantio direto para a região de Londrina - PR no ano de 1998/99.

FAIXA DE PRODUTIVIDADE: 2.200 a 3.000kg/ha	Média: 2.600 kg/ha		PARTICIPAÇÃO (%)
	A PREÇOS DE:	abr/1999	
DISCRIMINAÇÃO	(R\$/ha)	(R\$/60 kg)	
I - DESPESAS DE CUSTEIO DA LAVOURA			
1 - Operação com avião	0,00	0,00	0,00%
2 - Operação com máquinas	52,95	1,22	9,34%
3 - Aluguel de máquinas	30,34	0,70	5,35%
4 - Mão-de-obra temporária	3,52	0,08	0,62%
5 - Mão-de-obra fixa	7,80	0,18	1,38%
6 - Sementes	39,00	0,90	6,88%
7 - Fertilizantes	53,22	1,23	9,39%
8 - Defensivos	115,75	2,67	20,42%
TOTAL DAS DESPESAS DE CUSTEIO DA LAVOURA (A)	302,58	6,98	53,38%
II - DESPESAS PÓS-COLHEITA			
1 - Transporte externo	16,38	0,38	2,89%
2 - Recepção, limpeza, secagem e armazenagem 30-d	15,16	0,35	2,67%
3 - PROAGRO	11,80	0,27	2,08%
4 - Assistência Técnica	6,05	0,14	1,07%
Total das Despesas Pós-Colheita (B)	49,39	1,14	8,71%
III - DESPESAS FINANCEIRAS			
1 - Juros	12,01	0,28	2,12%
Total das Despesas Financeiras (C)	12,01	0,28	2,12%
CUSTO VARIÁVEL (A+B+C = D)	363,98	8,40	64,21%
IV - DEPRECIÇÕES			
1 - Depreciação de benfeitorias/instalações	35,21	0,81	6,21%
2 - Depreciação de implementos	16,73	0,39	2,95%
3 - Depreciação de máquinas	18,73	0,43	3,30%
Total de Depreciações (E)	70,67	1,63	12,47%
V - OUTROS CUSTOS FIXOS			
1 - Manutenção periódica de máquinas	13,27	0,31	2,34%
2 - Encargos sociais	4,60	0,11	0,81%
3 - Seguro do capital fixo	2,17	0,05	0,38%
Total de Outros Custos Fixos (F)	20,04	0,47	3,54%
Custo Fixo (E+F = G)	90,71	2,10	16,00%
CUSTO OPERACIONAL (D+G = H)	454,69	10,50	80,21%
VI - RENDA DE FATORES			
1 - Remuneração esperada sobre capital fixo	42,02	0,97	7,41%
2 - Terra	70,15	1,62	12,38%
Total de Renda de Fatores (I)	112,17	2,59	19,79%
CUSTO TOTAL (H+I = J)	566,86	13,09	100,00%

Fonte: Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB) (2017)

Devido a falta de dados para a estimação do modelo, optou-se por considerar os dados

disponíveis para o sistema de plantio direto² e o sistema de plantio direto alta tecnologia. A diferença entre os dois sistemas está no nível de tecnologia empregado.

Após a coleta dos dados foi realizada uma análise dos mesmos para determinar os fatores de entrada do modelo. Sendo assim, foram selecionados os dados referentes ao custo de produção (R\$/hectare (ha)) para a modelagem do problema referente a produção de soja, considerando como fatores de entrada o Custo Variável, Custo Fixo e Renda dos Fatores.

Conforme ilustra a [Figura 8](#), para a determinação do custo variável leva-se em consideração as despesas de custeio da lavoura (I), que corresponde as despesas de aluguel de máquinas, mão de obra temporária e fixa, sementes, fertilizantes entre outros, o total das despesas de (I) é dado por A; as despesas pós-colheita (II), que refere-se aos custos após a colheita como transporte, limpeza, etc, o total das despesas de (II) é representado por B; e as despesas financeiras (III), que corresponde os juros relacionado aos gastos de produção, o total das despesas de (III) é dado por C. Sendo assim, o total de despesas do Custo Variável é dado pela soma de:

$$A + B + C = C_v.$$

Já o Custo Fixo abrange a depreciação (IV), que refere-se aos custos ou despesas gerados pelo desgaste natural das máquinas e/ou outros bens, seu valor final é dado por E; os outros custos fixos (V), que são os gastos referente a manutenção periódica de máquinas e outros gastos oriundos da produção, o total das despesas são dados por F. Logo, o total de despesas do Custo Fixo é dado por:

$$E + F = C_f.$$

A Renda dos Fatores representa a soma das remunerações desses diversos fatores de produção (salários, lucros, juros e alugueis). O total de renda dos fatores é dado por R_f .

Logo, extraindo o total de despesas gerado por cada uma das entradas, em seus respectivos anos, obteve-se a [Tabela 3](#) com os custos de produção para a produção de soja da região de Londrina.

Em seguida, para o ano de 1998 o Custo Variável (C_v), Custo Fixo (C_f) e Renda dos Fatores (R_f) foram tomados valendo 100 nesse ano e os valores para os outros anos foram expressos como porcentagem dos valores de 1998, assim, obtiveram-se os seguintes resultados apresentados na [Tabela 4](#).

Desse modo, tem-se os valores para cada um dos custos de produção de soja em R\$/ha de acordo com a estimativa de custo de produção da região de Londrina. Como o objetivo é estimar a função de produção de soja para o estado do Paraná, considerou-se a faixa de produtividade para o estado nos respectivos anos.

Os dados de produção da soja para o estado do Paraná nos anos de 1998 à 2015 estão disponíveis no site [Secretaria da Agricultura e do Abastecimento \(2016b\)](#) já para o ano de 2016

²O Sistema Plantio Direto, consiste na plantação sem o manejo do terreno a ser plantado, ou seja, é a técnica de semeadura na qual a semente é colocada no solo não revolvido (sem prévia aração ou gradagem) usando semeadeiras especiais.

Tabela 3 – Dados do custo de produção de soja para a região de Londrina-PR.

ANO	C_v	C_f	R_f
1998	363,98	90,71	112,17
1999	434,28	91,12	105,78
2000	452,34	105,50	109,53
2001	502,10	118,44	108,29
2002	576,67	132,61	137,26
2003	804,27	153,67	181,10
2004	855,88	189,19	193,14
2005	899,38	204,05	204,41
2006	931,45	184,40	203,81
2007	854,30	205,86	209,70
2008	1.203,01	186,48	255,75
2009	1.381,29	242,54	259,16
2010	1.071,53	186,70	298,27
2011	1.090,97	184,76	329,63
2012	1.277,46	194,63	332,02
2013	1.514,19	266,30	159,40
2014	1.613,45	335,62	170,73
2015	2.237,60	405,60	710,43
2016	2.187,61	408,64	759,38

Tabela 4 – Dados estimados para o custo de produção de soja da região de Londrina-PR.

ANO	C_v	C_f	R_f
1998	100	100	100
1999	119	101	94
2000	124	116	98
2001	138	131	97
2002	159	146	122
2003	221	170	162
2004	235	209	172
2005	247	225	182
2006	251	203	182
2007	135	227	187
2008	331	206	228
2009	380	267	231
2010	294	206	266
2011	300	204	294
2012	351	215	296
2013	416	294	143
2014	443	370	152
2015	615	447	633
2016	601	451	677

foram usadas as estimativas disponíveis no site [Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária \(Embrapa\)](#) (2016) e estão dispostos na [Tabela 5](#).

Tabela 5 – Dados da produção de soja do estado do Paraná.

ANO	Área(ha)	Produção (t)	Rendimento (kg/ha)	Saca 60kg (R\$)
1998	2.858.697	7.313.460	2.558	13,08
1999	2.786.852	7.752.472	2.782	15,63
2000	2.859.362	7.199.810	2.518	17,15
2001	2.821.906	8.628.469	3.058	21,02
2002	3.316.379	9.565.905	2.884	29,99
2003	3.653.266	11.018.749	3.016	37,43
2004	4.014.820	10.241.894	2.551	38,42
2005	4.150.106	9.552.662	2.302	27,56
2006	3.948.520	9.466.405	2.397	25,31
2007	4.006.075	11.944.323	2.982	31,12
2008	3.970.533	11.800.464	2.972	42,03
2009	4.077.242	9.407.847	2.307	43,22
2010	4.479.042	14.095.253	3.147	35,96
2011	4.555.312	15.457.911	3.393	42,08
2012	4.456.040	10.925.878	2.452	59,41
2013	4.754.076	15.924.318	3.350	59,02
2014	5.011.446	14.782.738	2.950	59,03
2015	5.247.032	17.261.788	3.290	61,50
2016	5.250.000	19.534.000	3.721	69,59

Assim, com o Rendimento (Kg/ha) e o valor médio da saca de soja para cada um dos anos, obteve-se uma estimativa do Lucro Bruto (R\$/ha) para o estado do Paraná (denotado por P). Os dados referentes ao valor das sacas foi obtido no site da [Secretaria da Agricultura e do Abastecimento](#) (2016a). A partir da coleta dos dados disponíveis para a produção de soja, organizou-se a [Tabela 6](#), a qual representa os dados coletados que serão utilizados para a modelagem da função de produção. A [Figura 9](#) representa o gráfico dos dados da [Tabela 6](#).

5.2.2 Modelagem da função de produção da soja para o estado do Paraná

De acordo com os estudos realizados, a função de produção pode ser definida como sendo a relação que indica a quantidade máxima que se pode obter de um produto, por unidade de tempo, a partir da utilização de uma determinada quantidade de fatores de produção, e mediante a escolha do processo de produção mais adequado (VARIAN, 2000).

A função de Cobb-Douglas pode ser expressa, de forma geral por:

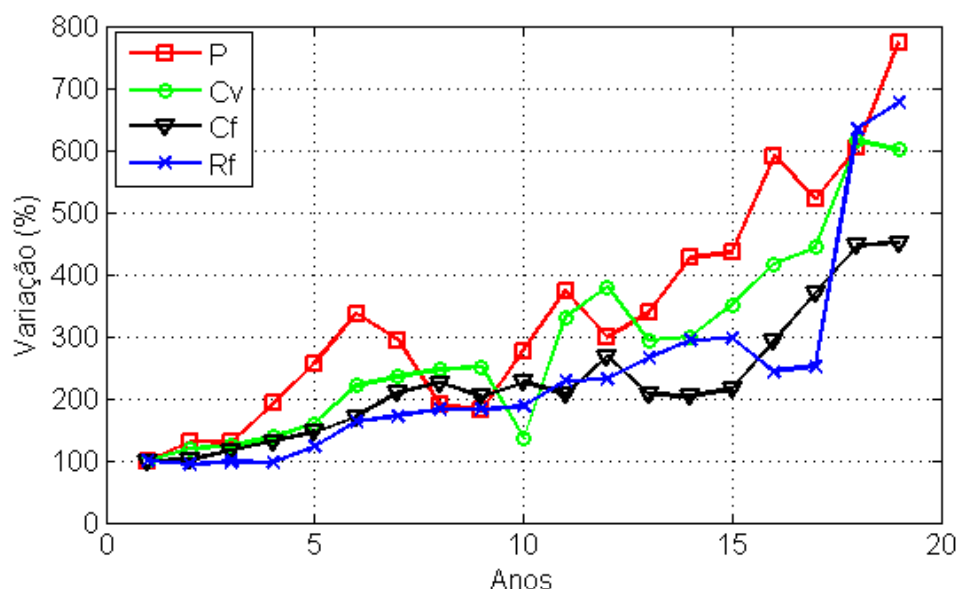
$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i} \tag{112}$$

com $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, x_i são os fatores de entradas e α_i são os coeficientes de elasticidades.

Tabela 6 – Dados para a determinação da função de produção de soja do estado do Paraná.

ANO	P	Área(ha)	C_f	C_v	R_f
1998	100	100	100	100	100
1999	130	97	101	119	94
2000	129	100	116	124	98
2001	192	99	131	138	97
2002	257	116	146	159	122
2003	337	128	170	221	162
2004	293	141	209	235	172
2005	190	145	225	247	182
2006	181	138	203	251	182
2007	277	140	227	135	187
2008	373	139	206	331	228
2009	298	143	267	380	231
2010	338	157	206	294	266
2011	427	159	204	300	294
2012	435	156	215	351	296
2013	591	166	294	416	143
2014	521	175	370	443	152
2015	605	184	447	615	633
2016	774	184	451	601	677

Figura 9 – Gráfico dos dados da Tabela 6 para a determinação da função de produção da soja do estado do Paraná.



Segundo Oliveira (1966), uma função de Cobb-Douglas possui características tais como, permitir a realização de uma regressão linear múltipla, além disso, outra vantagem da função é a natureza dos rendimentos de escala que pode ser determinada pela soma dos coeficientes estimados pela regressão. Deste modo, a função de Cobb-Douglas permite uma

série de inferências que possibilitam a análise e interpretação dos procedimentos e tecnologias que influenciam com maior peso a produção de soja no estado do Paraná.

Para a modelagem da função de produção de soja do estado do Paraná, considera-se como fatores de entrada do modelo a Área Cultivada, A_c , o Custo Fixo, C_f , o Custo Variável, C_v , a Renda dos Fatores, R_f , tendo como saída a Produção P (em R\$). A área cultivada representa a área total, em hectare, da produção de soja do estado do Paraná e ambas as entradas estão fixadas em relação ao ano, (t). Assim, a relação entre os fatores de entrada e saída podem ser expressos como:

$$P(t) = f(A_c(t), C_f(t), C_v(t), R_f(t)) \quad (113)$$

Em economia a função de Cobb-Douglas pode ser utilizada para representar a relação entre os fatores de entrada e saída. Então, através da função de Cobb-Douglas, modelou-se a seguinte função de produção da cultura da soja:

$$P(t) = bA_c(t)^\alpha C_f(t)^\beta C_v(t)^\gamma R_f(t)^\sigma \quad (114)$$

onde b é o fator de produtividade, α , β , γ e σ são as elasticidades e satisfazem $\alpha + \beta + \gamma + \sigma = 1$.

Os parâmetros da função de produção (114) serão estimados utilizando o método de Regressão Linear Múltipla apresentado na Seção 2.6.

Espera-se que os parâmetros α , β , γ e σ sejam positivos e atendam as seguintes hipóteses a serem testadas neste trabalho:

- i) espera-se que um aumento (redução) na área total plantada tende a aumentar (reduzir) o valor da produção;
- ii) um aumento (redução) nos custos tende a aumentar (reduzir) o valor da produção.

Como α , β , γ e σ são as elasticidades, estas fornecem os retornos a escala, espera-se que assim seus valores estejam entre 0 e 1. De acordo com o resultado será determinado se a função de produção tem retornos decrescentes, constantes ou crescentes à escala, deste modo, espera-se que os retornos a escala sejam constantes ou crescentes.

5.2.3 Determinação dos parâmetros da função de produção da soja

Para a determinação dos parâmetros da função de produção da soja faz-se necessário a linearização da equação (114):

$$P = bA_c^\alpha \cdot C_f^\beta \cdot C_v^\gamma \cdot R_f^\sigma$$

Tomando $\gamma = 1 - \alpha - \beta - \sigma$, tem-se:

$$P = bA_c^\alpha \cdot C_f^\beta \cdot C_v^{(1-\alpha-\beta-\sigma)} \cdot R_f^\sigma, \quad (115)$$

e reescrevendo a equação (115):

$$P = bA_c^\alpha \cdot C_f^\beta \cdot C_v \frac{1}{C_v^\alpha} \cdot \frac{1}{C_v^\beta} \cdot \frac{1}{C_v^\sigma} R_f^\sigma$$

$$\left(\frac{P}{C_v}\right) = b \left(\frac{A_c}{C_v}\right)^\alpha \left(\frac{C_f}{C_v}\right)^\beta \left(\frac{R_f}{C_v}\right)^\sigma$$

Para simplificar a notação, toma-se $z_1 = \left(\frac{A_c}{C_v}\right)$, $z_2 = \left(\frac{C_f}{C_v}\right)$, $z_3 = \left(\frac{R_f}{C_v}\right)$ e ainda, $Y = \left(\frac{P}{C_v}\right)$:

$$Y = bz_1^\alpha \cdot z_2^\beta \cdot z_3^\sigma \quad (116)$$

Aplicando o logaritmo natural em (116), obtêm-se:

$$\ln(Y) = \ln(b) + \alpha \ln(z_1) + \beta \ln(z_2) + \sigma \ln(z_3) \quad (117)$$

Tomando $y = \ln(Y)$, $x_i = \ln z_i$, $a_i = \alpha, \beta, \sigma$ e $a_0 = \ln(b)$, tem-se:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3. \quad (118)$$

Aplicando o método de regressão linear múltipla, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \sum x_{3i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{1i}x_{3i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{3i} & \sum x_{3i}x_{1i} & \sum x_{3i}x_{2i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{bmatrix} \quad (119)$$

Os valores dos somatórios do sistema linear (119) foram calculados com base na Tabela 6 e retorna o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 19 & -11.3744 & -3.7256 & -4.1273 \\ -11.3744 & 9.2259 & 3.3237 & 2.8611 \\ -3.7256 & 3.3237 & 1.6498 & 1.2036 \\ -4.1273 & 2.8611 & 1.2036 & 1.8505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0436 \\ -1.3738 \\ -0.2247 \\ -0.2860 \end{bmatrix} \quad (120)$$

O sistema linear (120) foi resolvido pelo o método de regressão linear múltipla (veja Seção 2.6), obtendo os seguintes resultados:

$$a_0 = 0.2854, a_1 = 0.0246, a_2 = 0.2566, a_3 = 0.2771$$

Logo, os coeficientes de elasticidade são:

$$\alpha = 0.0246, \beta = 0.2566, \sigma = 0.2771$$

e, ainda,

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta - \sigma$$

$$\gamma = 0.44172$$

Como,

$$a_0 = \ln(b) \Rightarrow b = e^{a_0}$$

então o fator de produtividade é dado por $b = 1.33$.

Os resultados foram obtidos com base no Algoritmo 1, o qual utiliza o método dos mínimos quadrados para obtenção dos parâmetros. No entanto, para a obtenção dos parâmetros do sistema (119), linha 16, do Algoritmo 1, passa a ser o sistema (119) o qual é resolvido usando o método de Eliminação de Gauss. A Figura 10 ilustra a saída do programa usando o software MatLab.

Figura 10 – Saída do programa implementado em Matlab para a determinação dos parâmetros, baseado no Algoritmo 1.

```
Solução sistema linear MMQ
0.2854
0.0246
0.2566
0.2771

Parâmetros do Modelo
b      Ac      Cf      Rf      Cv
b      alpha   beta   sigma  gamma
1.33   0.02463   0.25658  0.27706  0.44172
Elasticidade é 1.00
>>
```

Portanto, arredondando estes valores para duas casas decimais e substituindo em (114), tem-se a função de produção para a cultura da soja do estado do Paraná, dada por:

$$P = 1.33A_c^{0.02} \cdot C_f^{0.26} \cdot C_v^{0.44} \cdot R_f^{0.28}. \quad (121)$$

Portanto, a equação (121), descreve a modelagem da função de produção da soja para o estado do Paraná. O coeficiente de elasticidade do custo variável (com 0,44) é o maior, o que indica que o custo variável é o maior fator influente na produção; seguido pela renda dos fatores (com 0,28) e custo fixo (com 0,26), enquanto que a área de terra cultivada (com 0,02) têm influência relativamente pequena sobre a saída.

Note que, a soma da elasticidade total de produção é igual a um, o que traduz retornos constantes à escala; dessa maneira, quando todos os fatores de produção forem aumentados a produção aumentará proporcionalmente, ou seja, aumentando-se a utilização dos fatores em 10%, o produto também aumenta em 10%.

A função de produção da soja do estado do Paraná, aqui determinada, é uma estimativa e deve-se levar em consideração a interferência da quantidade dos dados no modelo. De acordo com as informações disponíveis na literatura, a quantidade de dados afeta diretamente no modelo e por este motivo, devido a escassez de dados para a modelagem da função de produção da soja para o estado do Paraná, os resultados apresentam uma discrepância relevante. Sendo assim, com a atualização dos dados o modelo pode ser aprimorado.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se o desenvolvimento teórico das condições de otimalidade para problemas de otimização restrito, no caso de restrições de igualdade e desigualdade, bem como, o estudo teórico das condições de otimalidade para esta classe de problemas. Para exemplificar o uso desta teoria foram introduzidos alguns problemas da literatura.

A fim de aplicar a teoria de otimização não linear em casos da economia apresentou-se a função de produção de Cobb-Douglas, bem como a estimação da função com apoio do referencial teórico citado. A função de produção de Cobb-Douglas é frequentemente utilizada em problemas da área de economia, a qual muitas vezes obtém-se sua solução, de acordo com o problema em que está inserida utilizando as condições de Karush-kuhn-Tucker (KKT). Consequentemente, realizou-se uma aplicação da teoria de otimização para casos restritos em uma situação problema envolvendo a função de Cobb-Douglas.

Através da solução do problema pode-se concluir que os métodos de otimização aqui estudados são eficazes para obtenção de soluções e análise de melhorias. Além disso, a programação não linear vêm avançando profundamente na economia, pois muitos dos economistas estão conduzindo pesquisas notáveis nesta área.

Nesta perspectiva, através da função de Cobb-Douglas, estimou-se a função de produção da soja para o estado do Paraná, por meio dos dados disponíveis. De acordo com a análise dos termos de elasticidade, chegou-se a conclusão de que estes fornecem retornos constante a escala, ou seja, a variação na quantidade do produto total é proporcional à variação da quantidade utilizada dos fatores de produção. Além disso, verificou-se que o custo variável, renda dos fatores e custo fixo são os fatores de maior influência na produção. Sendo assim, estes resultados refletem a importância do estado do Paraná na produção de soja, e o mesmo influencia significativamente na economia do país.

Entretanto, destaca-se a interferência da quantidade de dados no modelo. Com o aumento dos dados o modelo pode ser aprimorado, e assim, obter uma melhor compatibilidade dos resultados.

Espera-se que com a determinação da função de produção da soja para o estado do Paraná em correspondência com os estudos de problemas de otimização não linear, em que o caso particular abordado foi o de problemas com restrições de igualdade e desigualdade, contribua na solução de problemas de economia.

Referências

- BARROSO, L. et al. **cálculo Numérico: com aplicações**. 2. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1987. Citado na página 10.
- BOLDRINI, J. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.
- BONATO, E.; BONATO, A. V. **A soja no Brasil: história e estatística**. Documentos, 21. Londrina: EMBRAPA-CNPSo, 1987. Citado na página 45.
- CHAPRA, S.; CANALE, R. **Métodos Numéricos para Engenharias**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. Citado na página 12.
- COBB, C.; DOUGLAS, P. A theory of production. *american economic review*. **Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association.**, v. 18, p. 139–165, 1928. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 35.
- Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB). **Série Histórica - Custos - Soja - 1998 - 2017**. 2017. Disponível em: <<https://www.conab.gov.br/index.php/info-agro/custos-de-producao/planilhas-de-custo-de-producao/item/1983-serie-historica-custos-soja-1998-2017>>. Acesso em: 24 de maio de 2018. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa). **Soja em números (safra 2016/2017)**. 2016. Disponível em: <<https://www.embrapa.br/soja/cultivos/soja1/dados-economicos>>. Acesso em: 23 de abril de 2018. Citado na página 50.
- Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa). **Soja**. 2018. Disponível em: <<https://www.embrapa.br/soja/cultivos/soja1>>. Acesso em: 14 de abril de 2018. Citado na página 46.
- GUIDORIZZI, L. **Um curso de Cálculo Volume 2**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 3, 4 e 5.
- HARIKI, S.; ABDOUNUR, O. **Matemática aplicada: administração, economia, contabilidade**. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2003. Citado na página 41.
- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. **Brasil/Paraná**. 2017. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/panorama>>. Acesso em: 24 de maio de 2018. Citado na página 45.
- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. **Censo Londrina**. 2017. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/londrina/panorama>>. Acesso em: 24 de maio de 2018. Citado na página 46.
- Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico Social (Ipardes). **Agronegócio e exportações vão impulsionar economia do Paraná**. 2017. Disponível em: <http://www.ipardes.gov.br/index.php?pg_conteudo=1&cod_noticia=816#main-content>. Acesso em: 24 de maio de 2018. Citado na página 45.

IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização v 2., Métodos Computacionais**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 26.

IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização v 1., Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Citado 13 vezes nas páginas 3, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 23, 27 e 28.

MARCHAND, L. **Multiplicadores de Lagrange: uma aplicação em problemas de otimização global restrita**. Novembro 2016. 52 f. Dissertação (Curso de Matemática Aplicada Bacharelado) — Universidade Federal do Rio Grande - FURG Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF Curso de Matemática Aplicada Bacharelado, Rio Grande do Sul, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

MARINS, F. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica : Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011. Citado na página 1.

MUNEM, M.; FOULIS, D. **Cálculo Volume 2**. 1. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1982. Citado na página 5.

OLIVEIRA, E. **Análise econométrica de uma função de produção – milho na Região de Patos de Minas, Minas Gerais. Ano Agrícola 1964/65**. 1966. 60 f. Dissertação (Dissertação, Mestrado em Economia Rural) — UFV/MG, Viçosa, MG, 1966. Citado na página 51.

Portal Paraná Turismo. **Economia do Paraná**. 2018. Disponível em: <https://www.paranaturismo.com.br/?page_id=32>. Acesso em: 24 de maio de 2018. Citado na página 45.

Prefeitura do Município de Londrina. **Londrina**. 2018. Disponível em: <http://www.londrina.pr.gov.br/index.php?option=com_content&view=category&id=5&Itemid=4>. Acesso em: 24 de maio de 2018. Citado na página 46.

RIBEIRO, A.; KARAS, E. **Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais**. 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 7.

Secretaria da Agricultura e do Abastecimento. **Preços médios nominais mensais recebidos pelos produtores, no Paraná – 1995-2017**. 2016. Disponível em: <www.agricultura.pr.gov.br/arquivos/File/deral/prpsh95.xls>. Acesso em: 23 de abril de 2018. Citado na página 50.

Secretaria da Agricultura e do Abastecimento. **Área e Produção Agrícola no Estado do Paraná e comparativo com o Brasil**. 2016. Disponível em: <<http://www.agricultura.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=137>>. Acesso em: 23 de abril de 2018. Citado na página 48.

STEWART, J. **Cálculo, volume 2**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 31, 33, 34 e 35.

STIGUM, B. **Economia I**. 2. ed. Brasília: Edgard Blucher, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

VARIAN, H. **Microeconomia: Princípios básicos**. 5. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2000. Citado na página 50.

VASCONCELLOS, M.; GARCIA, M. **Fundamentos de Economia**. 3. ed. São Paulo: SaraivaUni, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.

ZILL, D.; CULLEN, M. **Equações Diferenciais, volume 1**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.

ZILL, D.; CULLEN, M. **Equações Diferenciais, volume 2**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 3, 9 e 10.