UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

NAYARA BIBIANO ZEBEDIFF

MODELAGEM MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GERENCIAMENTO DA PRODUÇÃO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2015

NAYARA BIBIANO ZEBEDIFF

MODELAGEM MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GERENCIAMENTO DA PRODUÇÃO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Licenciada em Matemática" – Área de Concentração: Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Glaucia Maria Bressan

CORNÉLIO PROCÓPIO

2015

TERMO DE APROVAÇÃO

NAYARA BIBIANO ZEBEDIFF

MODELAGEM MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GERENCIAMENTO DA PRODUÇÃO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Licenciada em Matemática” – Área de Concentração: Licenciatura em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof^{a}. Dr^{a}. Glaucia Maria Bressan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____

Prof^{a}. Dr^{a}. Elenice Weber Stiegelmeier
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____

Prof^{a}. Ma. Daniele Costa Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Cornélio procópio, 02 de Junho de 2015.

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

Dedico este trabalho a Deus, por sempre me abençoar e me proporcionar sabedoria, aos meus pais que acreditam em meus sonhos e em especial ao meu avô (in memoriam) Antônio Zebediff, que sempre me motivou a cursar matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo fim de mais esta etapa em minha vida, por sempre me abençoar e me ajudar a alcançar todos os meus sonhos e objetivos.

A minha família, em especial meus pais Sônia e Vladimir, que foram os primeiros a sonhar com meu sucesso na graduação e com muito carinho e amor me apoiaram em todas as etapas, e a minha irmã Jaqueline que me deu um grande apoio emocional.

Agradeço especialmente minha professora orientadora Glaucia Maria Bressan, pela oportunidade de orientação, por ter se dedicado a me ensinar, pela atenção, compreensão, paciência, por ter acreditado em mim, me motivando nas situações mais difíceis, por comemorar junto comigo nos momentos de conquistas. E, por ser esse exemplo de professora no qual quero seguir por toda a minha vida.

As professoras Elenice Weber e Daniele Costa por aceitarem ser banca na defesa deste trabalho.

Ao Luiz Claudio, meu amado companheiro, por estar sempre ao meu lado me apoiando e me motivando em todas as situações.

Aos meus amigos de Iniciação Científica, Marila Aguiar e Pedro Mazini pela companhia, amizade e aprendizados que adquirimos juntos.

RESUMO

ZEBEDIFF, Nayara Bibiano. MODELAGEM MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GERENCIAMENTO DA PRODUÇÃO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR . 75 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

Este estudo consiste de um levantamento bibliográfico dos modelos matemáticos de gerenciamento da produção que utilizam a programação linear para sua formulação, cujo objetivo é comparar, por meio dos resultados computacionais, as soluções ótimas obtidas e assim, estudá-las e analisá-las. O estudo caracteriza-se metodologicamente como uma pesquisa bibliográfica, baseado a partir de registros disponíveis decorrentes de pesquisas anteriores. O trabalho apresenta uma contextualização sobre a programação linear, o gerenciamento de produção, a modelagem matemática e uma revisão bibliográfica sobre o tema. O Método Simplex é abordado durante o estudo e aplicado como método de resolução para a obtenção das soluções ótimas. Os resultados são obtidos através da execução dos modelos com apoio computacional do software LINDO. A partir das soluções ótimas obtidas, é feita a análise de sensibilidade dos parâmetros dos modelos e a comparação destas soluções do ponto de vista computacional.

Palavras-chave: Programação Linear, Método Simplex, Gerenciamento de Produção.

ABSTRACT

ZEBEDIFF, Nayara Bibiano. MATHEMATICAL MODELING AND PRODUCTION MANAGEMENT PROBLEM SOLVING USING LINEAR PROGRAMMING. 75 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

This study consists of a literature review about mathematical models of production management using linear programming, which aims to compare, from computational results, optimal solutions obtained and thus study them and analyze them. The study is methodologically characterized as a literature search, based on available previous researches. This work presents a background on linear programming, production management, mathematical modeling and a literature review on the topic. The simplex method is presented and applied as resolution method to obtain the optimal solutions. The results are obtained by running the models with computational support from the LINDO software. From the obtained optimal solutions, sensitivity analysis of the model parameters is implemented and the comparison of these solutions is made from computational point of view.

Keywords: Linear Programming, Simplex Method, Production Management.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Brasil vem apresentando, nos últimos anos, um visível crescimento de seu parque industrial, o que tem resultado em relevantes contribuições para o país e, também, para sua projeção no mercado internacional. Devido aos aspectos econômicos e avanços computacionais, as indústrias brasileiras, têm sido estimuladas a tornar seus processos produtivos mais eficientes e competitivos no mercado internacional, incentivando, assim, o crescimento do estudo de modelos de otimização para o controle e planejamento de sistemas produtivos. Neste sentido, métodos de otimização presentes na Matemática tem auxiliado na modelagem e na resolução de problemas envolvendo processos tecnológicos e produtivos.

Neste contexto, a Pesquisa Operacional é uma ciência que visa o desenvolvimento e a aplicação de métodos científicos para a resolução de problemas e tomadas de decisão (GOLDBARG; LUNA, 2005; ARENALES et al., 2007). Os métodos desenvolvidos pela Pesquisa Operacional para analisar sistemas e tomar decisões têm sido cada vez mais utilizados em vista dos acontecimentos do século XXI. A globalização, a internet e as telecomunicações, principalmente, permitem novas relações entre clientes e fornecedores. Tais métodos desenvolvidos podem ser aplicados a problemas de orientação e administração de certos tipos de operações ou atividades em uma determinada organização. Desta forma, a Pesquisa Operacional tem sido altamente aplicada em diversas áreas, tais como manufatura, transportes, construção, telecomunicações, planejamento financeiro, assistência médica, militar e serviços públicos, entre outros (HILLIER; LIEBERMAN, 2006).

A utilização das ferramentas e dos métodos desenvolvidos pela Pesquisa Operacional, em todos os níveis da gestão, é uma realidade viabilizada pelo avanço da tecnologia e da literatura.

Diante deste cenário, a Pesquisa Operacional agrega métodos matemáticos e estatísticos empregados para auxiliar a tomada de decisões. Esta ciência destina-se ao desenvolvimento e à aplicação de métodos para a resolução de problemas e tomadas de decisão. É aplicada a problemas em que se faz necessário especificar, de forma quantitativa, a condução e a coordenação das operações ou atividades dentro de uma organização. Possui grande utilidade na solução de problemas de otimização, na tomada de decisões e no gerenciamento de sistemas, selecionando as melhores decisões, dentre todas as possíveis (GOLDBARG; LUNA, 2005; ARENALES et al., 2007). Por exemplo, maximizar o lucro ou minimizar o custo (ou as perdas) é o principal objetivo na tomada de decisão de processos produtivos da pesquisa operacional

Os mesmos autores afirmam que as soluções encontradas pelos métodos aplicados auxiliam na tomada de decisões, pois, é preciso reconhecer que existem outros aspectos importantes que devem ser considerados para se desenvolver uma boa estratégia de gestão. Os problemas não se esgotam no ideal quantitativo, pois nem tudo pode ser quantificado; a prioridade de um bom gestor deve ser, de fato, o ser humano.

Os algoritmos e as técnicas da pesquisa operacional buscam estruturar e solucionar modelos quantitativos que podem ser expressos matematicamente. Os modelos são estruturados logicamente com o objetivo de determinar as melhores condições de funcionamento para os sistemas representados. Os principais modelos de Pesquisa Operacional são chamados de *Programação Matemática*, onde as técnicas de solução se reúnem em algumas subáreas como a Programação Linear, que pode ser consultada em Goldbarg e Luna (2005) e Lins e Calôba (2006), a Programação Não Linear, cujo tema é abordado por Izmailov e Solodov (2009), e a Programação Inteira que pode ser encontrada em Nemhauser e Wolsey (1988).

A Programação Linear auxilia no processo de gerenciamento da produção, pois utiliza um modelo matemático para descrever o problema e planeja as atividades com o objetivo de obter um resultado que atenda, da melhor maneira possível, uma determinada finalidade. Este resultado é chamado de *solução ótima*.

Desta forma, buscando unir os modelos e as técnicas da Programação Matemática com a necessidade do planejamento da produção, este trabalho propõe um estudo sobre os problemas de planejamento e controle da produção presentes na literatura, modelando-os como problemas de programação linear e buscando suas soluções ótimas pela aplicação do Método Simplex, cuja descrição pode ser encontrada em Goldbarg e Luna (2005). As soluções obtidas são analisadas e comparadas do ponto de vista computacional.

O estudo sobre a importância e a grande necessidade de maximizar os lucros das produções nas empresas e auxiliar no processo de Planejamento e Controle da Produção utilizando modelos matemáticos na Programação Linear é a principal motivação para escolha do tema.

Um breve comentário sobre o conteúdo dos próximos capítulos é apresentado a seguir.

No Capítulo 2 é feita a Revisão Bibliográfica do tema, apresentando o estado da arte e os principais trabalhos de autores que atuam no tema de Gerenciamento da Produção.

O terceiro capítulo aborda a Pesquisa Operacional e a descrição de seus conceitos e aplicações, destacando-se que um de seus principais modelos é a Programação Matemática, que por sua vez, possui técnicas de soluções, como a Programação Linear, a Programação Não Linear e a Programação Inteira. Depois disso, será realizada uma descrição mais detalhada da Programação Linear, que é a técnica utilizada neste trabalho. Em sequência, apresenta os passos para a formulação matemática de um Problema de Programação Linear, seguido de um exemplo e um método para resolvê-lo, o Método Simplex. Aborda-se também a Dualidade e a Análise de Sensibilidade dos parâmetros do modelo.

O Capítulo 4, por sua vez, descreve conceitos e aplicações do Planejamento e Controle da Produção (PCP). Possui como objetivo, apresentar os dois tipos de problemas de Gerenciamento da Produção os quais podem ser modelados por Programação Linear: o Problema de Mix de Produção e o Dimensionamento de Lotes (Monoestágio), juntamente com suas formulações matemáticas.

Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas problemas de gerenciamento da produção e os resultados numéricos obtidos via método simplex..

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A solução de modelos matemáticos aplicados a situações reais são grandes desafios para pesquisadores. Além das dificuldades encontradas na própria modelagem do problema, surge a dificuldade de provar a competência do modelo matemático encontrado para a otimização dos processos. (RANGEL; FERREIRA, 2003)

Segundo Tubino (2007), as empresas são estudadas como um sistema que converte, por um processamento, entradas (insumos) em saídas (produtos) aproveitáveis pelos clientes, este sistema é chamado de sistema produtivo. Para que um sistema produtivo transforme as entradas em saídas, é necessário um gerenciamento rigoroso, deve-se pensar nos prazos, nos estoques, nas demandas, nos gastos e nos lucros que a empresa irá obter.

Para organizar e coordenar os trabalhos de fabricação é necessário que o setor de Planejamento e Controle da Produção (PCP) faça um planejamento de todas as suas ações, elaborando um plano-mestre da produção, com base nele e nos registros de controle de estoques, a programação da produção tem o objetivo de definir quanto e quando comprar, fabricar ou montar de cada item importante para a composição dos produtos acabados propostos pelo plano. As atividades desta programação, para efeito de estudos são divididas em três grupos, a administração de estoques, o sequenciamento, a emissão e liberação de ordens. Mas, vale lembrar que essas ações são realizadas simultaneamente (TUBINO, 2007).

Para Kotler (2000), ”um mix de produto é o conjunto de todos os produtos e itens que um vendedor põe à venda”, ou seja, são produtos que a empresa fabrica e que estão à disposição para a venda, lembrando que há empresas que possuem uma diversidade de produtos a serem oferecidos aos compradores, estes, são os chamados *mix de produtos*. Estes produtos são fabricados por um sistema de produção.

Laugeni e Martins (2005) dizem que um grande mix de diferentes produtos, podem ser unidos em famílias para facilitar a previsão da demanda, denominada *demanda agregada*, no qual existem vários planos que podem atende-la. A escolha deve ser feita em função dos custos de cada plano sempre mantendo o atendimento ao cliente o que pode levar a cenários complexos de custos, que podem ser resolvidos com a ajuda das técnicas de Programação Linear.

Segundo Lachtermacher (2004), a Programação Linear pode ser aplicada em diferentes áreas, dentre elas: administração da produção; análise de investimentos; alocação de recursos limitados; planejamento regional; logística; custo de transporte; localização da rede de distribuição e alocação de recursos de marketing em diversos meios de comunicação.

Os Problemas de Programação Linear são descritos por expressões matemáticas, contendo as variáveis de decisão que se deseja maximizar ou minimizar e um conjunto de restrições, expressas por equações ou inequações matemáticas, que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo em que se quer minimizar ou maximizar a função objetivo. Segundo Goldbarg e Luna (2005) deve-se seguir três passos para a resolução de um problema de programação linear, o primeiro é a definição das variáveis de decisão, o segundo passo é a definição da função objetivo e o terceiro é a definição das restrições do problema em questão.

No âmbito do Gerenciamento da Produção, dois problemas são possíveis de ser modelados como um problema de programação linear: os chamados Problemas de Mix de Produção e o Problema do Dimensionamento de Lotes (ARENALES et al., 2007). A partir de sua modelagem, é possível obter soluções ótimas por meio da aplicação de um dos métodos de resolução, dentre eles, o Método Simplex (LACHTERMACHER, 2004; GOLDBARG; LUNA, 2005).

Luche e Morabito (2005) realizaram um trabalho no qual propõe modelos de otimização para ajudar em decisões do Planejamento e Controle da Produção (PCP) na indústria de grãos eletrofundidos de uma empresa no estado de São Paulo, foi realizado um estudo de caso com o objetivo de contribuir para aumentar a produtividade e melhorar o nível de serviço aos clientes no atendimento dos prazos de entrega. Após os testes dos modelos resultantes da aplicação da Programação Linear na otimização do gerenciamento de produção, os resultados obtidos são mais eficazes do que as estratégias utilizadas pelas empresas.

Barbosa e Lima (2001) apresenta de uma maneira didática métodos quantitativos na resolução de problemas de gerenciamento de produção utilizando modelos matemáticos da Programação Linear de maneira a contribuir para os profissionais da área contábil. Através de seus estudos e artigos científicos , concluíram sobre a dificuldade dos profissionais da contabilidade em operar com os modelos matemáticos e incentivam encarar a Matemática e a Estatística como instrumentos naturais capazes de lhes auxiliarem no processo gerencial de decisões.

Outro exemplo de gerenciamento de produção utilizando Programação Linear é sobre o trabalho de Neto et al. (2006) que propõe a aplicação da Programação Linear no planejamento e controle de produção de uma indústria de bebidas com o objetivo de definir o seu mix ideal de produção. Comparando os resultados obtidos através dos modelos matemáticos com a produção atual da empresa, notaram que com a programação linear obteve-se melhores resultados, portanto concluíram que esse modelo pode ser utilizado pela empresa na definição de seu mix ideal de produção obtendo maiores lucros.

O problemas de gerenciamento da produção modelado por Programação Linear é um tema bastante explorado na literatura por trazer resultados promissores, portanto, destaca-se que a literatura é vasta, porém aqui foram apresentados apenas alguns dos autores mais atuais.

3 PESQUISA OPERACIONAL E PROGRAMAÇÃO LINEAR

A pesquisa operacional (PO) é aplicada, por exemplo, a problemas que envolvem o gerenciamento de atividades, visando o desenvolvimento e a aplicação de métodos científicos para a resolução de problemas e tomadas de decisão. (GOLDBARG; LUNA, 2005; ARENALES et al., 2007). E ainda, possui grande importância na solução de problemas de otimização e no gerenciamento de sistemas, selecionando as melhores soluções dentre as possíveis.

No processo de tomada de decisão, a PO contribuiu significativamente no aumento da produtividade das economias de diversos países (HILLIER; LIEBERMAN, 2006). Dessa forma, a PO desempenha um papel importante nas áreas de projeto, planejamento, redes de suprimento, com aplicações que se estendem as mais diversas áreas de conhecimento como a agricultura, processos produtivos, recursos naturais, ambientais, entre muitos outros. A partir destas perspectivas, destaca-se a importância dos métodos de Pesquisa Operacional no auxílio da tomada de decisão.

3.1 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Os principais modelos de pesquisa operacional são denominados de Programação Matemática, uma das mais importantes variedades dos modelos quantitativos que apresenta uma grande utilidade na solução exata de problemas de otimização (GOLDBARG; LUNA, 2005). Os algoritmos e os métodos da Programação Matemática buscam estruturar e solucionar modelos quantitativos que podem ser expressos matematicamente. Os modelos são estruturados logicamente com o objetivo de determinar as melhores condições de funcionamento para os sistemas representados.

Na programação matemática, as técnicas de solução são agrupadas em algumas subáreas, descritas brevemente a seguir.

✓Programação Linear

Nos modelos matemáticos descritos por Programação Linear, todas as variáveis envolvidas (valores a serem determinados) no processo de modelagem são contínuas e apresentam comportamento linear (equações de 1o grau). A literatura que trata dessa classe de problemas é vasta e particularmente rica. Vale destacar que entre as obras mais recentes estão as de Goldbarg e Luna (2005), Arenales et al. (2007), Lins e Calôba (2006).

✓Programação Não Linear

Os modelos de Programação Não Linear são aqueles que, no processo de modelagem, apresentam qualquer aspecto que prejudique a linearidade, seja nas variáveis ou em uma de suas equações. A não linearidade é bem tratável nos casos de convexidade; algoritmos eficientes podem resolver grandes problemas reais. Mais informações desse tipo de modelagem podem ser encontradas em Izmailov e Solodov (2009).

✓Programação Inteira

Um modelo de otimização se refere a um problema de Programação Inteira se qualquer variável desse problema não puder assumir valores contínuos (reais), estando condicionada a assumir apenas valores discretos (inteiros). A exigência de que variáveis tenham de assumir valores inteiros implica maior complexidade computacional. (NEMHAUSER; WOLSEY, 1988).

3.2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

A Programação Linear (PL) tem como objetivo encontrar a melhor solução, chamada *solução ótima*, para problemas que possuem seus modelos representados por expressões lineares. E, ainda, consiste na maximização ou na minimização de uma função linear, a *Função Objetivo*, respeitando um conjunto de *restrições* expressas em forma de igualdades ou desigualdades, as quais constituem um sistema linear (MARINS, 2011).

Para a resolução de um Problema de Programação Linear é necessário primeiramente a modelagem do problema e após, utilizar um método para a solução do modelo. O método adotado neste trabalho é o Método Simplex, que consiste em um procedimento numérico, exerce uma sequência de passos repetidamente, até se alcançar a melhor solução do problema. Este método consiste em um processo iterativo e, por isso, é executado computacionalmente em qualquer linguagem de programação.

3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)

A pesquisa operacional, em particular a Programação Matemática, trata de problemas de tomada de decisão e utiliza modelos matemáticos que representam o problema real. As variáveis do problema são definidas e as relações entre elas são estabelecidas matematicamente por meio de equações, descrevendo o comportamento do sistema. Com a aplicação de um método científico, o modelo matemático é então resolvido, ou seja, são determinados valores para as variáveis, que dependem de alguns dados do problema. Em seguida, deve ser feita a validação do modelo, ou seja, verificar se a solução obtida pela resolução do modelo matemático é compatível com a realidade.

A solução do modelo apoia o processo de tomada de decisões. Convém ressaltar que os modelos não substituem totalmente os tomadores de decisão. Por exemplo, soluções que não consideram o comportamento humano podem falhar.

A abordagem de resolução de um problema por meio da pesquisa operacional envolve várias fases, conforme mostra a Figura 1, descritas a seguir.

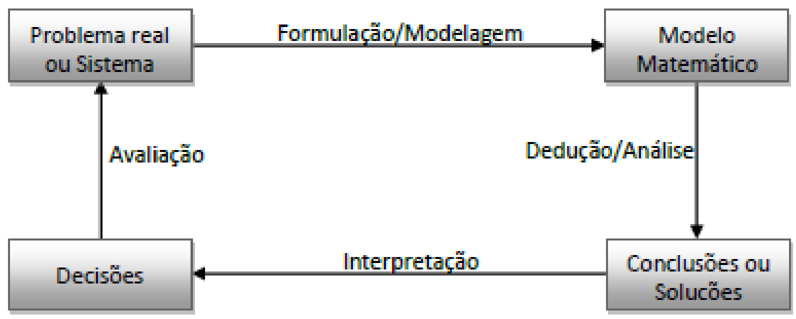

Figura 1: Fases do processo.

Fonte: (ARENALES et al., 2007)

Definição do problema: o que se pretende solucionar, o que se deseja maximizar ou minimizar, quanto produzir, a pergunta que se quer responder. O problema deve ser colocado de forma clara e coerente, definindo-se os objetivos e os possíveis caminhos.

Modelagem matemática: construção do modelo, formulação por meio de variáveis e equações. Aqui devem ser levantadas as limitações técnicas do sistema, ou seja, as restrições, que serão expressas por meio de equações.

Solução do problema: aplicação de um método científico de resolução do problema proposto.

Validação do modelo: verificação se o modelo proposto representa o comportamento do sistema. Essa verificação é realizada com dados empíricos do sistema. Se houver dados históricos, eles serão aplicados no modelo, gerando um desempenho que pode ser comparado ao observado no sistema. Se o desvio verificado não for aceitável, a reformulação do modelo deve ser considerada (SILVA et al., 2009) .

A representação de problemas reais é feita por um conjunto de equações. Se existem n valores quantitativos a serem determinados, ou seja, n decisões a serem tomadas, associa-se uma variável a cada uma delas, chamada de variável de decisão. Desta forma, as variáveis de decisão são representadas por x_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$ e, ao aplicar um método de solução, os valores destas variáveis são determinados.

O objetivo principal do problema é aquilo que se pretende maximizar (lucros, receitas, vendas) ou minimizar (custos, perdas, recursos). Uma função numérica das variáveis de decisão, a *função objetivo*, é então estruturada para representá-lo.

Identificadas as variáveis de decisão e a função objetivo, deve-se analisar quais são as limitações impostas ao problema real. Geralmente, os recursos disponíveis, matéria-prima, mão-de-obra e horas de equipamentos são limitados e apresentam algumas condições. Estas limitações podem ser expressas matematicamente por meio de equações e inequações lineares, constituindo as restrições do problema.

Inerente aos problemas de programação linear está a condição de que todas as variáveis de decisão pertencem ao primeiro quadrante, ou seja, são maiores ou iguais a zero: $x_i \geq 0$. Denominados de *condição de não-negatividade*.

Para que um problema real possa ser representado por um modelo de Programação Linear, deve apresentar as seguintes características :

✓*Proporcionalidade:* as variáveis de decisão são multiplicadas pelos coeficientes na função objetivo e nas restrições. Estes coeficientes são valores conhecidos, pois são os dados que o problema deve ter.

✓*Aditividade:* a função objetivo e as restrições constituem na soma das parcelas, como uma combinação linear.

✓*Divisibilidade:* as variáveis de decisão podem ser fracionadas.

✓*Determinismo:* os coeficientes (valores conhecidos) do problema não incorporam a natureza probabilística do que representam.

De acordo com Lachtermacher (2004), diversas vantagens podem ser citadas quando o decisor utiliza um processo de modelagem para a tomada de decisão. Dentre elas, os modelos forçam a identificação das variáveis a serem incluídas e em que termos serão quantificáveis. Além disso, forçam também o reconhecimento de limitações dos problemas, expressas pelas restrições.

A formulação geral de um PPL deve então conter 3 partes fundamentais: a *função objetivo*, as *restrições* e as *condições de não-negatividade*. Para a função objetivo e para cada uma das restrições consideradas, escreve-se uma equação linear, relacionando as *variáveis de decisão* com os coeficientes conhecidos. Desta forma, um PPL é formulado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar (Minimizar) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \text{ (sinal) } b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \text{ (sinal) } b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \text{ (sinal) } b_m, \end{gathered} \tag{2}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \tag{3}$$

onde,

a_{ij}, $(i = 1,2,\ldots,m\ ;\ j = 1,2,\ldots,n) \rightarrow$ coeficientes técnicos ou tecnológicos (reais);

b_1, b_2,..., $b_m \rightarrow$ termos independentes (constantes de restrição ou segundos membros);

c_1 , c_2,..., $c_n \rightarrow$coeficientes da função objetivo (coeficientes de custo);

x_1, x_2,..., $x_n \rightarrow$ variáveis de decisão (principais ou controláveis);

$'sinal' \rightarrow$ esta palavra significa que as restrições poderão receber os sinais $\leq, =, ou, \geq$;

A equação (1) representa a função objetivo;

A equação (2) representa as restrições (restrições funcionais), em que apenas se verifica uma das relações;

A equação (3) representa as condições de não negatividade.

Uma formulação equivalente, obtida por operações elementares, é muito utilizada para a aplicação dos métodos de resolução e é chamada de forma padrão. Nesta, todas as restrições são transformadas em igualdades pela inserção de outras variáveis. Além disso, todas as variáveis envolvidas x_j e as constantes b_m são também maiores ou iguais à zero.

Logo, um modelo de programação linear pode ser reescrito na forma padrão aplicando-se as seguintes operações elementares:

Operação 1: mudança no critério de otimização - transformar a maximização de uma função $f(x)$ em minimização ou vice-versa.

Max $f(x)$ corresponde a Min $(-f(x))$

Min $f(x)$ corresponde a Max $(-f(x))$

Operação 2: transformar uma variável livre, ou seja, uma variável que assume valores reais (positivos, negativos, racionais) em uma variável não negativa (maior ou igual a zero).

A variável livre x_n é substituída por duas variáveis auxiliares x_{1n} e x_{2n}, ambas maiores ou iguais à zero, mas a soma das duas é igual à variável original, como

$$x_n = x_{1n} - x_{2n},$$

Operação 3: transformar as inequações em equações. Para o caso da transformação de restrições de menor ou igual $\leq$ em igualdade, soma-se uma variável chamada variável de folga, capaz de completar a desigualdade, tornando-a igualdade. Por exemplo, seja a restrição representada por

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leq b,$$

introduzindo a variável de folga $x_{n+1} \geq 0$, obtém-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} = b.$$

Para o caso da transformação de restrições de maior ou igual $\geq$ em igualdade, subtrai-se uma variável de folga, tornando-a igualdade. Por exemplo, seja a restrição representada por

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq b,$$

introduzindo a variável de folga $x_{n+1} \geq 0$, obtém-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - x_{n+1} = b.$$

Assim, conforme for modelado o problema, pode-se aplicar as operações elementares para reescrever o modelo na forma padrão e aplicar os métodos de resolução.

3.3.1 ESTUDO DE CASO: MODELAGEM DE UM PPL APLICADA À UMA FÁBRICA DE MÓVEIS

Os dados deste estudo de caso foram obtidos de Goldbarg e Luna (2005).

Uma fábrica dispõe em estoque de 250 metros de tábuas, 600 metros de pranchas e 500 metros de painéis de conglomerado. A fábrica oferece uma linha de móveis composta por um modelo de escrivaninha, uma mesa de reunião, um armário e uma prateleira. Cada tipo de móvel consome uma certa quantidade de matéria prima, conforme a Figura 2. A escrivaninha é vendida por 100 unidades monetárias (u.m.), a mesa por 80 u.m., o armário por 120 u.m. e a prateleira por 20 u.m. Formule um modelo de programação linear que maximize a receita com a venda dos móveis.

	Quantidade de material em metros consumidos por unidade de produto				**Disponibilidade do recurso (m)**
	Escrivaninha	Mesa	Armário	Prateleira	
Tábua	1	1	1	4	200
Prancha	0	1	1	2	600
Painéis	3	2	4	0	500
Valor revenda	100	80	120	20	

Figura 2: Quantidade de material e disponibilidade de recurso

SOLUÇÃO: Primeiramente, é necessário definir as variáveis de decisão. Deseja-se saber quantos produtos devem ser produzidos (em unidades) para que a receita de revenda seja máxima. Portanto, as variáveis de decisão são:

x_1: quantidade a ser produzida de escrivaninhas,

x_2: quantidade a ser produzida de mesa,

x_3 quantidade a ser produzida de armário,

x_4: quantidade a ser produzida de prateleira.

A função objetivo, que busca maximizar a receita de revenda, é escrita como função das variáveis de decisão, ou seja:

$$\text{Max } 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4.$$

As restrições são referentes à disponibilidade de recursos, garantindo que a quantidade de material utilizado não ultrapasse a quantidade de recurso disponível. Então, tem-se:

disponibilidade de tábuas: $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 250$,

disponibilidade de pranchas: $x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 600$,

disponibilidade de painéis: $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500$.

As condições de não-negatividade são: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$.

Assim, o PPL é formulado como:

$$\text{Max } 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4$$

Sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 250$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 600$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ e } x_4 \geq 0$$

Este conjunto de equações constitui a modelagem matemática do problema da fábrica de móveis como um problema de programação linear.

3.4 MÉTODO SIMPLEX

A seguir, é apresentada uma descrição matemática, baseada em Bressan (2003), sobre o Método Simplex em sua forma geral.

Considere o problema primal de otimização linear na forma padrão (BAZARAA et al., 1990; VANDERBEI, 1996):

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.a: } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

onde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ e, sem perda de generalidade, assuma que posto $(A) = m$

Todo problema primal tem um problema dual a ele associado. A dualidade será tratada com mais detalhes na Seção 3.5.

A solução geral do sistema em $Ax = b$ pode ser descrita considerando uma partição nas colunas de A:

$$A = (B, N)$$

tal que $B \in \mathbb{R}^{mxn}$, formada por m colunas da matriz A, seja não singular. A partição equivalente é feita no vetor das variáveis:

$$x = (x_B, x_N),$$

onde x_B é chamado *vetor de variáveis básicas* e x_N *vetor de variáveis não básicas*. Assim,

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Dada uma escolha qualquer para x_N, tem-se x_B bem determinado, de modo que o sistema está verificado.

Definição 1 *A solução particular x obtida por $x_B^0 = B^{-1}b, x_N^0 = 0$ é chamada solução básica. Se $x_B^0 = B^{-1}b \geq 0$, então a solução básica é primal factível.*

Considere também a partição nos coeficientes do gradiente da função objetivo c:

$$c^T = (c_B, c_N)^T.$$

Definição 2 *O vetor $y \in \mathbb{R}^m$, dado por*

$$y^T = c_B^T B^{-1}$$

é definido como vetor das variáveis duais ou vetor multiplicador simplex. Se

$$c_j - y^T a_j \geq 0,$$

para $j = 1, \ldots, n$ então y é uma solução básica dual factível, e diz-se que a partição é dual factível, onde a_j representa a coluna j da matriz de restrições A.

Teorema 1 *Se uma partição básica for primal e dual factível, então as soluções básicas associadas resolvem os problemas primal e dual, respectivamente, e diz-se que a partição básica é ótima.*

Prova: (VANDERBEI, 1996)

Teorema 2 *Se o problema primal tiver uma solução ótima, então existe uma partição básica ótima.*

Prova: (VANDERBEI, 1996).

Definição 3 *Denomina-se estratégia simplex a seguinte perturbação da solução básica: escolha $k \in N$, onde N é o conjunto de índices de variáveis não básicas, tal que $c_k - y^T a_k < 0$; faça $x_k = \varepsilon \geq 0$, $x_j = 0, \forall j \in N - k$.*

A estratégia simplex produz uma nova solução dada por

$$\begin{cases} x_B = x_B^0 + \varepsilon d_B \\ x_N = \varepsilon e_k \end{cases}$$

e o valor da função objetivo dado por:

$$f(x) = f(x^0) + (c_k - y^T a_k)\varepsilon$$

onde $d_B = -B^{-1}a_k$ e $e_k = (0,\ldots,1,\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^{m-n}$ com 1 na k-ésima componente.

A direção $d \in \mathbb{R}^n$, dada por $d = (d_B, d_N)^T = (d_B, e_k)^T$, define uma perturbação da solução básica e é chamada *direção simplex*. Se a solução básica for não-degenerada, isto é, $x_B^0 > 0$, então d é uma direção factível. Note ainda que o produto escalar entre d e o gradiente da função objetivo é $c^T d = c_k - y^T a_k < 0$. Portanto d é uma direção de descida.

Da estratégia simplex, pode-se determinar o maior valor de ε, impondo $x_B \geq 0$:

$$\varepsilon^0 = min\left\{-\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} | d_{B_e} < 0, i = 1,\ldots,m\right\}$$

onde $x_{B_e}^0$ é a e-ésima componente de x_B^0, que sai da base.

Para uma melhor visualização sobre a organização dos conceitos acima, são descritos a seguir todos os passos necessários para a realização do método primal simplex.

Método Primal-Simplex

fase I

Encontre uma partição básica primal-factível: $A = (B, N)$.

Faça PARE=FALSO, IT=0

(Será FALSO até que a condição de otimalidade seja verificada. IT indica o número da iteração.)

fase II

Enquanto NÃO PARE faça:

- Determine a solução básica primal factível: $x_B = B^{-1}b$.
- Teste de otimalidade:
  Determine a solução básica dual: $y^T = c_B^T B^{-1}$;
  Encontre x_k com custo relativo: $c_k - y^T a_k < 0$.

Se $c_k - y^T a_k \geq 0, \;\; \forall\; k = 1,\ldots,n-m$, então a solução na iteração IT é ótima.

PARE=VERDADE.

Senão:

- Determine a direção simplex: $d_B = -B^{-1} a_k$, de mudança nos valores das variáveis básicas.

- Determine o passo: $\varepsilon^0 = min\left\{ -\frac{x^0_{B_e}}{d_{B_e}} | d_{B_e} < 0, i = 1,\ldots,m \right\}$.

  Se $d_B \geq 0$, o problema não tem solução ótima finita. PARE=VERDADE.

  Senão:

- Atualize a partição básica: $a_{B_l} \leftrightarrow a_k, IT \leftarrow IT + 1$.

  Fim enquanto.

Detalhes sobre a Fase I e determinação da variável que entra na base podem ser vistos em Luenberger (1984), Bazaraa et al. (1990), Vanderbei (1996).

3.4.1 SIMPLEX NA FORMA TABULAR (TABLEAUX SIMPLEX)

A Forma Tabular do Método Simplex é uma maneira de esquematizar os problemas de programação linear para sua resolução. O quadro escrito por esta forma apresenta os coeficientes das variáveis de decisão e de folga em colunas e as restrições e função objetivo em linhas.

Depois de escrever o problema a ser resolvido na forma padrão, monta-se um quadro (o tableaux) com uma coluna para cada variável. Identifica-se então as *variáveis básicas*, ou seja, aquelas variáveis que constituem uma *matriz identidade*; e coloca-se estas variáveis na coluna referente à base do método. De forma geral, as variáveis correspondentes à base são as variáveis de folga. Com isso, tem-se uma solução inicial para o problema. Após, busca-se a solução ótima trocando as variáveis da base e atualizando a solução.

A seguir, é apresentado um problema proposto por Lins e Calôba (2006) para ilustrar o Método Simplex na forma tabular: uma manufatura produz mesas e bancos, sendo capaz de vender toda a sua produção no período. O único recurso restrito é a mão de obra, cuja produtividade, juntamente com os lucros, são dados na Figura 3.

	Homens hora por unidade produzida		
Produto	**Lucro unitário**	**Montagem**	**Acabamento**
Mesas	R$20	3	4
Bancos	R$24	6	2
Homens/h		60	32

Figura 3: Dados do problema de uma manufatura

As variáveis de decisão são as quantidades de mesas e bancos a serem produzidos, x_1 e x_2. A função objetivo é $Max 20x_1 + 24x_2$. As restrições são homens hora disponíveis nos departamentos de montagem e acabamento:

$3x_1 + 6x_2 \leq 60$ restrição de montagem;

$4x1 + 2x2 \leq 32$ restrição de acabamento.

Escrevendo o problema na forma padrão, tem-se

$$\text{Min} - 20x_1 - 24x_2$$

$$\text{s.a.} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 60$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 32$$

Com $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ e sendo x_3 e x_4 variáveis de folga. O primeiro quadro é montado com os coeficientes das variáveis

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-20	-24	0	0	0
x_3	3	6	1	0	60
x_4	4	2	0	1	32

Variável que entra na base: x_2 (maior valor negativo em módulo: 24).

Variável que sai da base: x_3 (pois 60/6 é menor que 32/2).

Pivô = 6. Deve-se escalonar a coluna x_2 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_3 por 6. Obtem-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-20	-24	0	0	0
x_3	1/2	1	1/6	0	10
x_4	4	2	0	1	32

Os outros elementos da coluna do pivô devem ser zerados, ou seja, -24 e 2. Para isso, multiplica-se a linha do pivô por 24 e soma-se com a linha correspondente à função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -2 e soma-se com a linha da variável x_4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-8	0	4	0	240
x_2	1/2	1	1/6	0	10
x_4	3	0	-1/3	1	12

Como ainda há elementos negativos na linha referente à função objetivo, esta ainda não é a solução ótima. Logo,

Variável que entra na base: x_1

Variável que sai da base: x_4

Pivô = 3.

Deve-se escalonar a coluna x_1 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_4 por 3. Obtem-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-8	0	4	0	240
x_2	1/2	1	1/6	0	10
x_4	1	0	-1/9	1/3	4

Os outros elementos da coluna do pivô devem ser zerados, ou seja, -8 e 1/2. Para isso, multiplica-se a linha do pivô por 8 e soma-se com a linha correspondente à função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -1/2 e soma-se com a linha da variável x_2. Tem-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	0	0	28/9	8/3	272
x_2	0	1	2/9	-1/6	8
x_1	1	0	-1/9	1/3	4

Como não há nenhum coeficiente negativo na linha da função objetivo, a solução ótima foi alcançada. Portanto, o lucro máximo é de 272 reais, produzindo-se para isso, 4 mesas e 8 bancos.

3.4.2 SITUAÇÕES QUE PODEM OCORRER

Um problema de programação linear pode apresentar outros tipos de solução, ou até mesmo não possuir nenhuma solução. No Método Simplex, estes casos se manifestam em alguns problemas de cálculo descritos a seguir.

✓**Problema Ilimitado**

O problema ilimitado acontece quando a solução pode ser melhorada, mas não há uma restrição que a limite. Graficamente, este caso se caracteriza por uma região de soluções ilimitada (infinita), a qual torna a solução cada vez melhor, infinitamente. Com o método simplex, esta situação é caracterizada pela falta de opção para a variável que deve sair da base, sendo todos os coeficientes negativos. Por exemplo, considere o seguinte quadro:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-4	0	0	3	0
x_3	-1	0	1	2	10
x_2	-1	1	0	1	3

A variável a entrar na base é x_1, que possui coeficiente negativo. Para decidir qual variável deve sair da base, divide-se os elementos da coluna constantes pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. Porém, todos os elementos da coluna x_1 são negativos. Logo, a solução pode ser melhorada, mas não é possível determiná-la. Neste caso, a solução é ilimitada.

✓**Infinitas Soluções**

Graficamente, um problema possui infinitas soluções ótimas quando a reta que representa a função objetivo é paralela a uma das retas das restrições e seu ótimo se encontra exatamente sobre esta reta. No método simplex, esta situação é caracterizada pela presença de zeros além dos obtidos pelas variáveis básicas. Por exemplo, suponha que, após um pivoteamento, o seguinte quadro foi obtido:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	0	0	2	0	8
x_1	1	0	1/3	-2/3	2/3
x_2	0	1	1/3	1/3	5/3

Apesar de não haver coeficientes negativos na linha da função objetivo, existe um zero além dos obtidos pelas variáveis básicas (na coluna x_4). Desta forma, existe uma outra solução, que pode ser determinada pela entrada da variável x_4 na base. A variável que sai é x_2, já que x_1 possui coeficiente negativo. Logo,

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	0	0	2	0	8
x_1	1	2	1	0	4
x_4	0	3	1	1	5

Portanto, x_1, x_2 e x_1, x_4 fornecem soluções básicas ótimas. Em verdade, qualquer combinação linear das duas será solução ótima, por isso há infinitas soluções.

Para os casos em que a base inicial não está disponível, aplica-se o Método BigM. Neste, como a inclusão das variáveis de folga não é suficiente para formar solução básica inicial, precisa-se incluir as variáveis artificiais, para nos ajudar a iniciar as operações. A diferença é que, diferente das variáveis de folga, é adicionada uma penalidade muito grande às variáveis artificiais na função objetivo, colocando como coeficiente para elas um número muito grande, simbolicamente representado por ”M”. Mais detalhes podem ser vistos em Lins e Calôba (2006).

3.5 DUALIDADE

Com o desenvolvimento da programação linear, foi descoberto o conceito da dualidade e suas ramificações de extrema necessidade. Essa descoberta mostrou que todo problema de programação linear (PRIMAL) tinha associado a ele outro problema chamado dual.

Os modelos a seguir descrevem a forma padrão de um problema primal P e seu respectivo problema dual D (LINS; CALÔBA, 2006):

P: Mín $c^T x$
s.a.: $Ax \geq b$
$x_j \geq 0$

D: Máx $b^T w$ ou $w^T b$
s.a.: $A^T w \leq c$ ou $w^T A \leq c$
$w \geq 0$

Com o problema primal na forma de minimização, o problema dual, se encontra na forma de maximização. Além disso, o problema dual utiliza os mesmos parâmetros do problema primal, porém, em posições diferentes. As variáveis de decisão do primal correspondem às variáveis de folga do dual e as variáveis básicas do primal, correspondem às variáveis não básicas do dual. As restrições do dual são do tipo $\geq$, enquanto as do primal são do tipo $\leq$. O número de incógnitas do dual, y_i, é o número de restrições do primal, o número de restrições do dual é igual ao número de incógnitas do primal, x_i. A matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do primal.

Por meio da teoria da programação linear, para cada problema Primal existe um problema Dual associado, possuindo mesma solução ótima, mas com características distintas e é sempre possível encontrar o Dual de um problema Primal, desde que este esteja escrito na forma padrão (LINS; CALÔBA, 2006).

Abaixo, um exemplo proposto por Lachtermacher (2004) para descrever essa relação primal/dual.

Primal			**Dual**		
Maximizar	Z =	$5x_1 + 2x_2$	Minimizar	Z =	$3y_1 + 4y_2 + 9y_3$
Sujeito a:		$x_1 \leq 3$	Sujeito a:		$y_1 + y_3 \geq 5$
		$x_2 \leq 4$			$y_2 + 2y_3 \geq 2$
		$x_1 + 2x_2 \leq 9$			$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
		$x_1, x_2 \geq 0$			

Note que, neste exemplo, o problema primal está na forma padrão de maximização, então seu dual está na forma de minimização. Além disso, os termos constantes das restrições do dual são os coeficientes da função objetivo do primal e o número de incógnitas do dual é igual ao número de restrições do primal.

3.5.1 TEORIA DA DUALIDADE

Os Teoremas 3 a 6 são enunciados e demonstrados por Lins e Calôba (2006).

Teorema 3 (Dualidade Fraca) *Seja X_0 o conjunto viável do P que satisfaz $Ax \geq b$, $x \geq 0$, e w_0 o conjunto viável do D. Se $x_0 \in X_0$ e $w_0 \in W_0$, $Q(x_0)$ é a função objetivo do primal P e $Q_D(w_0)$ na função objetivo de seu dual, D, então: $Q(x_0) \geq Q_D(w_0)$.*

Sem perda de generalidade, considere-se o Primal ”P”na forma:
P: Mín $c^T x$

s.a. $Ax \geq b$

$x \geq 0$

Demonstração:

Deseja-se mostrar que $c^T x_0 \geq w_0^T b$ ou $c^T x_0 - w_0^T b \geq 0$. A maneira de demonstrar inicia-se pela adição e subtração do termo $w_0^T A x_0$ à:

$c^T x_0 - w_0^T b = c^T x_0 - w_0^T b - w_0^T A x_0 + w_0^T A x_0$

Cada um dos termos adicionados será agrupado segundo o esquema abaixo:

$$(c^T - w_0^T A x_0) x_0 + w_0^T (A x_0 - b)$$

Para o P ser viável, $x \geq 0$, bem como para o D ser viável, $w_0 \geq 0$. Pelas formulações acima, respeita-se ainda as condições: $Ax_0 \geq b$ e $w^T A \leq c$.

Do primeiro produto notável $(c^T - w_0^T A x_0) x_0$:

$$x_0 \geq 0 \text{ e } w^T A \leq c \therefore c^T - w_0^T A \geq 0$$

Do segundo produto notável $w_0^T (A x_0 - b)$:

$$w_0 \geq 0 \text{ e } Ax \geq b \therefore Ax_0 - b \geq 0$$

Note que, todos os termos multiplicados são positivos. Como à inequação inicial foi somado e subtraído o mesmo termo, conclusões acerca do sistema expandido valem para o sistema inicial. Assim, $c^T x_0 - w_0^T b \geq 0$, e a solução do primal $c^T x_0$ é sempre maior ou igual que a do dual, $w_0^T b$.

Corolário 1

Se x^* e w^* são soluções viáveis respectivamente de P e D, tal que $c^T x^* = b^T w^*$, então x^* e w^* são soluções ótimas dos respectivos PPL's.

Seja $c^T x \geq b^T w^*$, para todo x viável.

Sabe-se ainda que, $b^T w^* = c^T x^*$. Logo, $c^T x \geq c^T x^*$, para todo x viável, e resta que x^* é a solução ótima do primal visto que este é um problema de minimização.

Por outro lado, pode-se fazer a seguinte igualdade:

$c^T x^* \geq b^T w$, para todo w viável.

Igualando $c^T x^*$ a $b^T w^*$, a equação fica: $b^T w^* \geq b^T w$, para todo w viável, e w^* será solução ótima do dual, uma vez que é um problema de maximização.

Corolário 2
Se o PPL primal é ilimitado, então o PPL dual é inviável.

O PPL primal ser ilimitado, significa que a função objetivo poderá decrescer infinitamente. Pelo Teorema da Dualidade Fraca $Q(x) \geq Q_D(w)$, dado que x e w sejam viáveis. A solução ilimitada é viável, porém indeterminada. Se $Q(x)$ é infinito negativo, para que vetor w viável $Q_D(w)$ será menor que $Q(x)$. Como não existe tal vetor, o PPL não possui nenhuma solução viável, sendo desta forma inviável.

O inverso também é válido, isto é, se o PPL dual for ilimitado, o primal será inviável.

Teorema 4 *O dual do dual é o primal.*

Demonstração:
Seja o primal em sua forma padrão:
P: Mín $c^T x$
s.a. $Ax = b$
$x_j \geq 0.$
Seu dual será:
D: Máx $w^T b$
s.a. $w^T A \leq c^T$
w irrestrito.
Colocando o dual na forma de mínimo, ficará da seguinte forma:
D: -Mín $-w^T b$
s.a. $w^T A \leq c^T$
w irrestrito.
Tal que
D.D.: -Máx $c^T x$
s.a. $Ax = -b$
$x \leq 0.$
Transformando Máx(x) em -Mín (-x), o PPL fica:
D.D.: Mín $c^T x$
s.a. $Ax = -b$
$x \leq 0.$

Fazendo $x' = -x$: D.D.: Mín $c^T x'$

s.a. $Ax' = b$

$x' \geq 0$.

Concluindo o resultado, o dual do dual é igual ao primal.

Teorema 5 (Dualidade Forte) *Se um PPL P tem solução ótima e finita x^*, então:*

1. O dual tem solução ótima e finita w^*.

2. $c^T x^* = b^T w^*$.

Demonstração:

Considere um PPL Primal na forma padrão:

P: Mín $c^T x$

s.a. $Ax = b$

$x_j \geq 0$.

Seu dual será:

D: Máx $w^T b$

s.a. $w^T A \leq c^T$

$w \geq 0$.

Considere-se x^* a solução ótima de P, associada a uma base B. Uma das condições para que tal ocorra é a ausência de elementos menores que zero na linha da função objetivo, o que caracterizaria a possibilidade de melhoria da mudança da solução através da mudança de base. Logo, $[c^T - c_B^T B^{-1} A] \geq 0$.

Qualquer solução viável do dual D deverá atender às restrições $w^T A \leq c^T$, que também podem ser escritas da forma $c^T - w^T A \geq 0$. Assim, o vetor $w^{T*} = c_B^T . B^{-1}$ é solução viável do dual.

Nota-se que $c_B^T . B^{-1}$ é o valor ótimo da função objetivo do primal e que o vetor ótimo de variáveis básicas é $x_B^* = B^{-1} . b$, onde B é a base ótima. Vale lembrar que:

$$c^T x = [c_R \vdots c_B] \begin{bmatrix} x_R \\ \dots \\ x_B \end{bmatrix} = c_R^T x_R + c_B^T x_B = c_B^T x_B,$$

pois toda variável não básica (x_R) é igual a zero. Portanto, $c_B^T x_B^* = c_B^T B^{-1} b = w^{T*} b$.

Como as soluções x_B^* e w^{T*} são soluções P-viável e D-viável, e, aplicadas às respectivas funções objetivo, assumem valores iguais, então pelo Corolário 1 do Teorema da Dualidade Fraca, $w^{T*} = c_B^T B^{-1}$ é solução ótima do PPL Dual, conforme desejava-se provar.

O Teorema Fundamental da Dualidade resume as condições que podem ser encontradas em um dual, dada a situação do problema primal.

A Figura 4 ilustra as possíveis relações das soluções entre os problemas Primal e Dual.

DUAL / PRIMAL		Tem Soluções Viáveis		Sem Soluções Viáveis
		Ótima	Ilimitado	Inviável
Tem Soluções Viáveis	Ótima	Possível	Impossível	Impossível
	Ilimitado	Impossível	Impossível	Possível
Sem Soluções Viáveis	Inviável	Impossível	Possível	Possível

Figura 4: Possíveis Relações entre as soluções dos problemas Primal e Dual
Fonte: (LACHTERMACHER, 2004)

- **Primal com Solução Ótima:** Provou-se pelo Teorema da Dualidade Forte que se o Primal tem solução ótima, o dual também terá solução ótima e finita.

- **Primal com Solução Ilimitada:** O Corolário 2 do Teorema da Dualidade Fraca colocou que se o primal é ilimitado, o dual será inviável.

- **Primal com Solução Inviável:** Conforme no corolário 2, se o dual for ilimitado, o primal será inviável, lembrando que os dois problemas poderão ser inviáveis.

Condições Complementares de Folga

Seja o PPL primal:

$$\text{P: Mín } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (i = 1,2,...,m)$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = 1,2,...,n)$$

com n variáveis naturais, m restrições e m variáveis de folga. O dual deste PPL será

$$\text{D: Máx } \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} w_i \leq c_j \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$
$$w_i \geq 0, \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

Com m variáveis naturais, n restrições e variáveis de folga.

Duas soluções básicas x e w satisfazem às condições complementares de folga se:

(1) Para cada restrição i do primal: $[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j - b_i]\bar{w}_i = 0, i = 1, ..., m$

(2) Para cada restrição j do dual: $[c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{w}_i - b_i]\bar{x}_j = 0, j = 1, ..., n$

Com relação à (1), cada variável natural do dual diferente de zero implica na ausência de folga na restrição primal e o contrário também é válido.

Com relação à (2) cada variável natural do primal diferente de zero implica na ausência de folga na restrição do dual, e vice-versa.

Incluindo a variável de folga no primal e dual, obtém-se:

$$\text{P: Mín } \sum c_j x_j$$
$$\text{s.a.} \sum a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$
$$x_j \geq 0 \; x_{n+1} \geq 0 \qquad \forall j, i$$

$$\text{D: Máx } \sum b_i w_i$$
$$\text{s.a.} \sum a_{ij} w_i + w_{m+j} = c_j \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$
$$w_i \geq 0 \; w_{mrj} \geq 0 \qquad \forall i, j$$

Alterando as equações das restrições do dual e do primal:
$\sum a_{ij} x_j - x_{n+1} = b \qquad (i = 1, 2, ..., m) \rightarrow \sum a_{ij} x_j - b_i = x_{n+1}$; e
$\sum a_{ij} w_i + w_{m+j} = c_j \qquad (j = 1, 2, ..., n) \rightarrow w_{m+j} = c_j - \sum a_{ij} w_i$

As condições complementares de folga se encontram da seguinte maneira:

1. Para cada restrição i do primal: $[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j - b_i]\bar{w}_i = 0, i = 1,...,m$
ficará da forma $\bar{w}_i.\bar{x}_{n+1} = 0, i = 1,...,m$

2. Para cada restrição j do dual: $[c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{w}_i - b_i]\bar{x}_j = 0, j = 1,...,n$
ficará da forma $\bar{x}_j.\bar{w}_{m+j} = 0, j = 1,...,n$

Onde:

$\bar{w}_i$ Variáveis naturais do D;

$\bar{w}_{m_j}$ Variáveis de folga do D;

$\bar{x}_j$ Variáveis naturais do P;

$\bar{x}_{n+i}$ Variáveis de folga do P.

Teorema 6 (Complementariedade de folga) *$\bar{x}$ e $\bar{w}$ são soluções ótimas de P e D se e, somente se, forem viáveis e satisfizerem as Condições Complementares de Folga.*

Demonstração

Considere os problemas primal e dual abaixo:

P: Mín $c^T x$ D: Máx $w^T b$

s.a. $Ax \geq b$ s.a. $w^T A \leq c^T$

$x \geq 0$ $w \geq 0$.

Se $\bar{x}$ e $\bar{w}$ são soluções ótimas $\Rightarrow c^T\bar{x} - \bar{w}^T b = 0$.

Somando e subtraindo um termo da equação, obtém-se:

$$c^T\bar{x} - \bar{w}^T b = c^T\bar{x} - \bar{w}^T b - \bar{w}^T A\bar{x} + \bar{w}^T A\bar{x} = [c^T - \bar{w}^T A]\bar{x} + \bar{w}^T[A\bar{x} - b] = 0.$$

Para que isso aconteça, cada uma das parcelas tem que ser nula, pois nenhuma delas pode ser negativa pela definição do par primal/dual:

$$[c^T - \bar{w}^T A]\bar{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \bar{w}^T[A\bar{x} - b] = 0.$$

Portanto, as Condições Complementares de Folga são válidas.

Analogamente, se x̄ e w̄ forem viáveis e satisfizerem as Condições Complementares de Folga, x̄ e w̄ são soluções ótimas de P e D.

3.5.2 INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA

As variáveis originais (w_i) do problema dual que estão associadas às variáveis de folga incluídas nas restrições do problema Primal representam economicamente o valor marginal do recurso da restrição (i) em relação ao valor da função objetivo, ou seja, o valor pelo qual a função objetivo seria melhorada, caso a quantidade de recurso i (b_i) fosse aumentada em uma unidade. A interpretação econômica do teorema da folga complementar pode ser vista de inúmeras formas, dependendo dos valores das variáveis do Primal e Dual na solução ótima (LACHTERMACHER, 2004).

Para a interpretação econômica, é necessário definir os conceitos de preço-sombra e custo reduzido:

✓**Preço-sombra:** Os preços-sombra equivalem à solução ótima do dual, onde as constantes das restrições são os coeficientes da função objetivo.

Cada variável y_i do dual está relacionada com a restrição i do problema primal. O valor ótimo desta variável, y_i* é justamente o preço-sombra do recurso i.

O preço-sombra para cada recurso mede o valor marginal deste recurso em relação ao lucro total

✓**Custo Reduzido:** Cada variável do problema primal possui um determinado custo reduzido, que significa:

• O total que o seu coeficiente na função objetivo deve melhorar para que ela deixe de ser zero na solução ótima, ou seja, se tornar básica;

• O quanto a função objetivo irá melhorar ou piorar para cada unidade que ela aumente ou diminua.

Cada variável de folga do dual está relacionada a uma variável de decisão do primal. Se uma variável de decisão primal for positiva, o valor da variável do dual relacionada será zero, isto é, o custo reduzido será zero. O custo reduzido só se aplica nas variáveis que são nulas na solução ótima.

A seguir, a interpretação de quatro casos aplicados a um problema primal na forma padrão proposto por Lachtermacher (2004).

Caso A: $w_i^* = 0$ e $x_{n+i}^* > 0$

Como a variável de folga x_{n+i}^* é maior que zero, na solução ótima do primal tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i.$$

Pode-se dizer que nem todo recurso i está sendo consumido pelas n atividades, havendo sobra do recurso i. Logo, o preço-sombra (y_I) deve ser zero.

Caso B: $w_i^* > 0$ quando $x_{n+i}^* = 0$

Como a variável de folga x_{n+i}^* é igual a zero, na solução ótima do primal tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i.$$

Pode-se dizer que nem todo recurso i está sendo consumido pelas n atividades, não havendo sobra do recurso i. Logo, o preço-sombra (y_i) deve ser maior que zero.

Caso C: $x_j^* = 0$ e $w_{m+j}^* > 0$

Como a variável de folga w_j^* é igual a zero, na solução ótima do dual tem-se:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}w_j^* - w_{m+j}^* = c_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ji}w_i^* > c_j.$$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}w_j^*$ representa o valor implícito da produção de uma unidade do produto j. O que leva a concluir que essa atividade (x_j) não seria realizada, já que o custo seria maior que o valor do benefício da mesma. Isto é, já que $x_j = 0$, este não será produzido ou consumido.

Cado D: $x_j^* > 0$ quando $w_{m+j}^* = 0$

Como a variável x_j^* é maior que zero significa que ele estará sendo produzido na solução ótima. Isto quer dizer que o valor implícito da produção de uma unidade do produto $j(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}w_j^*)$, deve ser igual a c_j.

3.5.3 O MÉTODO SIMPLEX DUAL

O método simplex dual é baseado na teoria da dualidade. Esse algoritmo simplex executa a partir de bases compostas de variáveis naturais e de folga de um PPL. Como foi estudado, existe uma equivalência estrutural entre as soluções do primal e do dual, com o mesmo valor da função objetivo e complementariedade de folga entre as variáveis do primal e do dual, e também, que se um PPL possui solução viável e limitada, e se a solução atual não é a ótima, o primal ou o dual é viável e a outra é inviável.

O método simplex dual pode ser espelhado no método simplex. O método simplex atua em soluções básicas do problema primal que são viáveis primais, mas não viáveis duais. O objetivo, então, é obter uma solução ótima tentando também alcançar a viabilidade dual. Já o método simplex dual trabalha com soluções básicas no problema primal que são viáveis duais, porém, não viável primal.

As regras para o método simplex dual são muito parecidas com as do método simplex, a única diferença entre eles se encontra nos critérios usados para selecionar as variáveis básicas que entram e que saem e na interrupção do algoritmo (HILLIER; LIEBERMAN, 2006).

Algoritmo Dual-Simplex

Neste estudo, o dual-simplex será formalizado supondo que ele sempre trabalhe como tableau primal (LINS; CALÔBA, 2006).

1. Partir da 1ª solução básica dual viável.
2. É possível melhorar se existir $b < 0$. O valor mais negativo será a variável que sai da base. Fica determinada a linha pivô, r.
3. Para todas as variáveis não básicas, faz-se o teste da razão: Mín $|c_j/a_{ij}|$ sendo necessário que $a_{rj} < 0$, o PPL primal é inviável.
4. Continua-se até que todos os c_j e b_i sejam maiores que zero, garantindo que a solução do problema é ótima.

Uma aplicação importante do método simplex dual é a sua utilização na análise de sensibilidade. Este algoritmo também pode ser viável em solucionar problemas de programação linear de grandes dimensões a partir da estaca zero, pois ele também demonstrando eficiencia nesses casos.

3.6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A análise de sensibilidade é utilizada para prever o comportamento da função objetivo após algumas mudanças de algum parâmetro da mesma. A utilidade dessa prática se dá por exemplo, no planejamento a longo prazo e nos novos requisitos, visando uma melhoria na formulação do PPL.

Algumas alternativas dessas mudanças são abordadas por Lins e Calôba (2006), descritas a seguir:

- Alterações no vetor de preços (função objetivo).
- Alterações do lado direito das restrições (RHS).
- Adição de uma nova variável.
- Adição de uma nova restrição.
- Verificação do custo de oportunidade de variáveis.
- Verificação do preço-sombra de restrições (recursos).

Para estudar os desenvolvimentos a seguir, considere a Tabela 1:

Tabela 1: Representação Matricial para a solução Ótima

LINHAS	V.B.	V.N.B.	R.H.S.
Restrições	I	$B^{-1}R$	$B^{-1}b$
F.O.	Vetor Nulo	$c_R^t - c_B^t B^{-1}R$	$Q(x) - c_B^t B^{-1}b$

Fonte: Lins e Calôba (2006)

Onde:

V.B. Variáveis Básicas;

V.N.B. Variáveis Não Básicas;

R.H.S. Right Hand Side, termo do lado direito (termo independente);

F.O. Função Objetivo.

A solução para este determinado problema é dado por $x_B^* = B^{-1}b$, $x_R^* = 0$ e $Q(x^*) = c + B^T B^{-1}b$.

Alterando os Coeficientes da Função Objetivo

Deve-se dividir em duas diferentes análises: o parâmetro alterado pode ser relativo a uma variável que pertença ou não à sequência básica ótima.

Caso o coeficiente modificado for de uma variável que **não está** na base, uma mudança de base só pode suceder da entrada da própria variável. Para fazer esta verificação, deve-se calcular $c_i^T - c_B^T B^{-1} A_{.i}$, lembrando que $A_{.i}$ equivale à i-ésima coluna da matriz A. Se a solução for menor que zero, a variável x_i deve entrar na base, pois a linha da função objetivo terá valores menores que zero, e terá que ser feita uma nova iteração do simplex padrão.

Porém, se o coeficiente modificado corresponder a uma variável que **está** na base, significa que houve uma alteração em c_B^T. Assim, todos os novos coeficientes da função objetivo deverão ser recalculados: $c_i - c_B^T B^{-1} A_{.i}$, exceto para as variáveis básicas.

Alterando o lado direito das restrições(RHS)

Modificando-se o vetor b, equivalente ao lado direito das restrições, o vetor final de preços ficará alterado, visto que $b^* = B^{-1}b$, no qual B é a base ótima.

Esta alteração também modificará a função objetivo, na qual é $Q(x^*) = c_B^T B^{-1}b$.

Se aparecer um elemento negativo no vetor b^*, tornar-se-á essencial fazer uma nova iteração pelo método dual-simplex para alterar a base.

Deve-se também substituir o valor de b_i da restrição i que se deseja analisar por uma incógnita k e descobrir o valor de k que iguala a b_i^* a zero, o limite para a nova iteração do dual-simplex.

Alteração em um elemento A_{ij}

Um coeficiente equivalente à contribuição unitária de uma variável para o lado esquerdo de uma restrição poderá ser reavaliado, o que acarretará em uma modificação do valor de um elemento A_{ij}. Lembrando que deve-se verificar se o elemento modificado pertence a uma coluna de variável básica ou não básica.

Caso o elemento pertença a uma coluna de variável **não básica**, o procedimento é análogo ao anterior, recalculando-se os valores de c_i^T. Porém, se o elemento A_{ij} modificado estiver em uma coluna de **variável básica**, será essencial recalcular a inversa da base, logo, todo tableau final estará modificado.

Introdução de uma Restrição no Problema

Se for necessária a introdução de mais uma restrição, esta tem que ser acrescentada ao problema no tableau final, introduzindo também as variáveis de folga.

Caso as restrições adicionais sejam em forma de desigualdade, elementos de valor 1 ou -1 surgirão automaticamente nas colunas das variáveis de folga. Assim, o PPL poderá ser colocado na forma canônica, para isto, basta multiplicar por -1 as linhas novas que possuam elementos -1 na coluna das variáveis de folga e fazer operações de maneira que coloque o PPL na forma canônica. Então, o dual-simplex poderá ser utilizado para resolver o problema.

Se as restrições adicionais serem em forma de igualdade, o problema não conterá mais uma variável de folga e não estará na forma canônica. Portanto, aconselha-se a introdução de uma variável artificial de folga e a solução em duas fases do problema.

Inclusão de uma Nova Variável

Introduzindo uma nova variável no problema, por exemplo um novo processo de manufatura, ou um novo produto a ser fabricado, tem que analisar se o mesmo processo ou produto será utilizado. Para isto, calcula-se o coeficiente no tableau final da nova variável x_i: $c_i^T - c_B^T B^{-1} A_{.i}$. Se este valor for negativo, será vantajoso colocar um novo produto/processo em funcionamento, e aplica-se o simplex para alcançar a nova base ótima.

4 PROBLEMAS DE GERENCIAMENTO DA PRODUÇÃO

Uma eficaz programação da produção pode trazer para a empresa um aumento no lucro de produtividade na medida em que permita um gerenciamento otimizado de seus recursos. Um benefício para as empresas pode existir a partir da definição de uma metodologia de programação para a produção, a fim de obter um mix produtivo (produção de diversos produtos) com maiores rendimentos. Uma das metodologias disponíveis é a Programação Linear que é considerada uma eficiente ferramenta para a programação de produção.

Nas seções abaixo são descritos os conceitos do Planejamento e Controle da Produção das empresas e, na sequência, os dois tipos de problemas que podem ser modelados como problemas de programação linear: o problema de mix de produção e o problema de dimensionamento de lotes, juntamente com suas formulações matemáticas de acordo com Arenales et al. (2007).

4.1 PLANEJAMENTO E CONTROLE DA PRODUÇÃO (PCP)

A empresa que não controla, planeja e programa o que produz, possivelmente terá dificuldades em atingir os índices de produtividade e qualidade que o mercado exige, isso acarretará em um dano muito grave à mesma e, para isto não ocorrer, o empresário deve buscar gerenciar sua empresa para garantir que a mesma atinja o objetivo de produzir com qualidade e produtividade.

Para obter bons resultados é preciso relacionar bom planejamento, programação e controle em todo o processo de produção. Desse modo, torna-se necessário a introdução do Planejamento e Controle da Produção (PCP) nas empresas, em forma de departamento bem organizado e estruturado referente aos produtos a serem fabricados, para que possua um Sistema de Produção muito bem planejado.

Definindo de uma maneira mais técnica o que é Sistema de Produção dentro de uma empresa, é necessário citar Riggs (1970) que a define como um processo planejado, no qual os insumos, que são as entradas (mão de obra, materiais, capitais), são transformados em produtos úteis, que variam desde materiais montados até todo tipo de serviços.

Para organizar o sistema de produção é necessário a implantação do PCP para que, assim, haja uma programação geral dentro do estabelecimento, desde os materiais que entram e são utilizado como matéria prima, até os produtos finais, levado em consideração o tempo que levará nesta produção, a demanda do estoque e outros fatores que deverão ser considerados.

O PCP é a técnica ou processo utilizado no gerenciamento da produção e dos processos de fabricação. De acordo com Tubino (2007) pode-se confirmar estas afirmações, pois o mesmo afirma que "como departamento de apoio, o PCP é responsável pela coordenação e aplicação dos recursos produtivos de forma a atender da melhor maneira possível aos planos estabelecidos [...]".

Russomano (2000) diz que para um bom funcionamento do PCP é necessário dois pré-requisitos, o roteiro da produção, que informa como o produto será montado e como as peças serão fabricadas e o planejamento da capacidade, no qual consiste no acerto de um modelo de produção que une as perspectivas de vendas com a capacidade da fábrica.

Ainda, para Russomano (2000), o PCP possui várias funções, como por exemplo, a gestão de estoques, verifica a disponibilidade dos produtos necessários à produção; a emissão de ordens, auxilia na tomada de providências para se ter a tempo os ítens necessários, como matérias-primas, peças compradas e fabricadas e produtos acabados; a programação de ordens de fabricação, verifica a viabilidade do atendimento às ordens de fabricação; a movimentação das ordens de fabricação, no qual registra, informa, transfere e entrega as peças produzidas; e acompanhamento da produção, compara o planejamento com a execução e controla sua correção.

Portanto, o objetivo geral do PCP não envolve apenas o planejamento, mas também a programação e o controle do que foi determinado, decidindo ainda sobre algumas mudanças que possam ocorrer, caso defeitos ou falhas do planejado passem a atuar no sistema.

Como foi dito, o PCP visa a programação da produção, que está encarregada de definir quanto e quando comprar, fabricar ou montar de cada ítem necessário à composição dos produtos acabados (TUBINO, 2007).

Portanto, o PCP constitui-se no planejamento da sequência de operações, na programação da movimentação da produção, da coordenação de inspeções; e no controle de materiais, métodos, ferramentas e tempo operacional. Ou seja, este departamento existe para dar apoio à gerência na tomada de decisão, auxiliando no gerenciamento dos métodos planejados.

4.2 PROBLEMAS DE MIX DE PRODUÇÃO

Problemas de mix de produção ocorrem em inúmeras situações reais e é necessário a decisão do quanto e quais produtos são necessários para fabricação em determinado tempo, visando a capacidade limitada de fabricação (máquinas, recursos humanos, capital, armazenagem) e os diferentes produtos que a empresa pode fabricar e vender. O objetivo é determinar quais fabricar e quanto fabricar de cada produto, de modo a maximizar o lucro da empresa.

Seja x_j a quantidade do produto j, $j = 1, 2, ..., n$, a ser fabricado em determinado intervalo de tempo do planejamento (por exemplo, um mês). Seja C_i a capacidade do recurso i, $i = 1, 2, ..., m$, disponível no período. Suponha que, para a produção de uma unidade do produto j, são consumidas a_{ij} unidades do recurso i. Uma produção mínima do produto j, diz-se d_j, precisa ser realizada no período, devido aos pedidos em carteira e a uma política de estoque mínimo para preservação do produto no mercado. O setor de vendas da empresa acredita que as vendas desse produto não ultrapassem v_i unidades no período de tempo analisado. Cada unidade do produto j resulta em uma contribuição ao lucro l_j para a empresa. Com isso, o problema de mix de produção pode ser formulado como:

$$\text{Maximizar } f(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq C_i \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{5}$$

$$d_j \leq x_j \leq v_j \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

A função (4) representa a contribuição ao lucro da empresa a ser maximizada. As restrições (5) limitam a fabricação devido à disponibilidade dos diversos recursos e as restrições (6) impõem que a quantidade fabricada de cada produto não pode ser inferior à mínima preestabelecida, nem ultrapassar o que o mercado suporta.

4.3 DIMENSIONAMENTO DE LOTES - MONOESTÁGIO

Empresas de manufatura geralmente fabricam diferentes tipos de produtos solicitados pelos clientes, muitas vezes em grandes quantidades, que devem estar prontos na data da entrega agendada. Como as fábricas têm capacidades de produção limitadas devido à mão de obra, as máquinas, o tempo de trabalho dos operadores é necessário um planejamento da produção, ou seja, decidir o que e quanto produzir, isto é, dimensionar os lotes de produção em um período pré-determinado. A necessidade de estocar produtos de um período para outro gera custos e algumas dificuldades operacionais. No planejamento da produção, deseja-se determinar o tamanho dos lotes de produção para atender a demanda na data solicitada de modo que a soma dos custos de produção e estocagem sejam mínima.

Considere uma empresa que fabrica n produtos e deseja programar sua produção nos próximos T períodos de tempo. Este conjunto de períodos de tempo para qual a empresa planeja sua produção é denominado *horizonte de planejamento*. Suponha que a demanda de cada produto em cada período do horizonte de planejamento é conhecida. Em cada período, os recursos necessários para a produção são limitados e renováveis, ou seja, em cada período, uma quantidade de recursos está disponível e não depende de como foram utilizados nos períodos anteriores. Exemplos desses recursos renováveis são mão de obra, energia elétrica e horas de máquinas, e exemplos de recursos não renováveis são matérias primas que sobram em um período e podem ser utilizadas por períodos seguintes. Existe a possibilidade de estocagem de produtos de um período para outro. Considere os seguintes dados do problema:

d_{it} demanda do item i no período t, $i = 1, ..., n; t = 1, ..., T$,

R_t disponibilidade de recursos (renováveis) no período t,

r_i quantidade de recursos necessários para a produção de uma unidade do item i,

c_{it} custo de produzir uma unidade do item i no período t,

h_{it} custo de estocar uma unidade do item i no período t.

As variáveis de decisão são:

x_{it} o número de itens do tipo i produzidos no período t,

I_{it} o número de itens do tipo i em estoque no final do período t.

Os primeiros estoques do horizonte de planejamento I_{i0} são dados. Abaixo, segue as restrições detalhadas do problema apresentado.

✓ *Equações de conservação de estoque*

Para cada item i, o nível de estoque no final do período t é igual ao que se tinha em estoque no final do período anterior $(t-1)$, adicionado ao montante que foi produzido no período t, menos o que foi demandado no período t, ou seja,

$$I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} \qquad i = 1, ..., n; t = 1, ..., T.$$

Tais restrições são típicas em modelos dinâmicos.

✓ *Restrições de capacidade de produção*

A capacidade requerida para a produção dos itens em cada período t não pode superar a capacidade disponível da fábrica, ou seja,

$$r_1x_{1t} + r_2x_{2t} + \ldots + r_nx_{nt} \leq R_t \qquad t = 1,...,T.$$

✓ *Garantia de atendimento às demandas*

A demanda de cada produto i em cada período t precisa ser atendida, isso significa que a quantidade total disponível no período deve ser maior ou igual à demanda, ou seja, a quandidade produzida no período (x_{it}) mais a quantidade em estoque no final do período anterior ($I_{i,t-1}$) deve ser maior ou igual a d_{it}, isto é, $x_{it} + I_{i,t-1} \geq d_{it}$, ou, ainda $x_{it} + I_{i,t-1} - d_{it} \geq 0$. Essa quantidade foi definida anteriormente como I_{it} de modo que pode-se garantir o atendimento às demandas impondo:

$$I_{it} \geq 0 \qquad i = 1,...,n; t = 1,...,T.$$

Além disso, por definição das variáveis de produção x_{ij}, tem-se:

$$x_{it} \geq 0 \qquad i = 1,...,n; t = 1,...,T.$$

Os custos incorridos são os de produção e de estocagem dos produtos. Dessa maneira, a função custo a ser minimizada é

$$f(x_{11}, I_{11}, x_{12}, I_{12}, ...) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}.$$

O modelo completo de otimização linear é dado por:

$$\text{Minimizar } f(x_{11}, I_{11}, x_{12}, I_{12}, ...) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$\begin{aligned} x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} \geq d_{it} \qquad & i = 1,...,n;\ t = 1,...,T \\ r_1x_{1t} + r_2x_{2t} + \ldots + r_nx_{nt} \leq R_t \qquad & t = 1,...,T \end{aligned}$$

$$x_{it}, I_{it} \geq 0 \qquad i = 1,...,n;\ t = 1,...,T$$

Modelos desse tipo também são utilizados para apoiar decisões no planejamento agregado da produção em que os produtos são agregados em famílias de produtos, as demandas dos produtos são agregadas por região e as máquinas são agregadas em centros de trabalho.

5 RESULTADOS E SIMULAÇÕES

Neste capítulo, são apresentadas simulações e resultados de problemas de gerenciamento da produção modelados como problemas de programação linear. As soluções ótimas desses modelos foram obtidas com apoio computacional do software LINDO [1]. Por fim, são feitas a análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo e a comparação das soluções obtidas.

5.1 EXEMPLO MIX DE PRODUÇÃO

Os dados deste ambiente de produção foram obtidos de Arenales et al. (2007).

Um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica recentemente instalada. O departamento de marketing e vendas realizou uma pesquisa de mercado que indicou que, no máximo, 1.500 unidades do modelo de luxo e 6.000 unidades do modelo básico podem ser vendidas no próximo mês. A empresa já contratou um certo número de empregados e, com isso, dispõe de uma força de trabalho de 25.000 homens-hora por mês. Cada modelo de luxo requer dez homens-hora e cada modelo básico requer oito homens-hora para ser montado. Além disso, uma mesma linha de montagem é compartilhada pelos dois modelos e considere que a capacidade de produção desta linha seja de 4.500 geladeiras por mês. O lucro unitário do modelo de luxo é de \$100,00, e do modelo básico é de \$50,00. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

Define-se a variável x_j como a quantidade de geladeiras do tipo j, j = luxo, básico, a ser produzida no mês, de modo que o lucro da empresa é representado por $f(x_{luxo}, x_{básico}) = 100x_{luxo} + 50x_{básico}$. As restrições de produção devido à limitação de capacidade ficam: $10x_{luxo} + 8x_{básico} \leq 25.000$, devido à limitação da força de trabalho por mês e, $x_{luxo} + x_{básico} \leq 4.500$, devido à limitação da linha de montagem. As restrições devido ao mercado e à não-negatividade são: $0 \leq x_{luxo} \leq 1.500$ e $0 \leq x_{básico} \leq 6.000$. O modelo completo para este problema é dado

[1] www.lindo.com

pela seguinte função objetivo e pelas restrições (10) a (15).

$$\text{Maximizar } f(x_{luxo}, x_{básico}) = 100x_{luxo} + 50x_{básico}$$

$$10x_{luxo} + 8x_{básico} \leq 25.000 \tag{10}$$

$$x_{luxo} + x_{básico} \leq 4.500 \tag{11}$$

$$x_{luxo} \geq 0 \tag{12}$$

$$x_{luxo} \leq 1.500 \tag{13}$$

$$x_{básico} \geq 0 \tag{14}$$

$$x_{básico} \leq 6.000 \tag{15}$$

Solução Ótima

Ao executar este modelo, a solução ótima obtida aponta que o lucro máximo da empresa é de $212.500, com suas variáveis básicas $x_{luxo} = 1.500$ e $x_{básico} = 1.250$.

Nas Tabelas 2 e 3, pode-se observar a análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo. Os intervalos de variação dos valores dos coeficientes da função objetivo são apresentados na Tabela 2 e das constantes das restrições são apresentados na Tabela 3.

Tabela 2: Análise de Sensibilidade (Função Objetivo)

Variáveis	Valor Mínimo	Valor máximo
x_{luxo}	62.5	∞
$x_{básico}$	0	80

De acordo com a Tabela 2, o lucro obtido por cada geladeira do modelo de luxo pode variar em um intervalo de $62,50 até ∞. E, para as geladeiras do modelo básico, pode variar de 0 até $80,00, que as variáveis básicas irão se manter na base.

Tabela 3: Análise de Sensibilidade (Limite das Restrições)

Restrições	Valor Mínimo	Valor máximo
10	15.000	39.000
11	2.750	∞
12	-∞	1.500
13	0	2.500
14	-∞	1.250
15	1.250	∞

De acordo com a Tabela 3, pode-se observar o intervalo de variação das constantes das restrições, indicado por seus valores máximos e mínimos.

Por exemplo, se o lucro unitário de geladeiras do modelo básico aumentar para \$80,00, que é o valor máximo, a função objetivo terá como solução ótima $30 * 1250 = 37.500$ unidades monetárias a mais em seus lucros, ou seja, $\$212.500 + \$37.500 = \$250.000$ será a nova solução ótima para o problema. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para deduzir o valor da função objetivo para a alteração dos demais coeficientes da função objetivo.

Conclusão: Para a empresa maximizar o seu lucro é necessário que produza 1.500 unidades de geladeiras do modelo de luxo e 1.250 quantidades de geladeiras do modelo básico, obtendo um lucro de \$212.500, podendo variar o lucro unitário de cada tipo, de acordo com a Tabela 2 e variar as restrições de acordo com a Tabela 3.

5.2 EXEMPLO DIMENSIONAMENTO DE LOTES

Os dados deste problema foram obtidos a partir de Arenales et al. (2007).

Considere uma fábrica de pré-moldados que produz dois tipos de vigas, cujas demandas para as próximas três semanas são conhecidas conforme Tabela 4.

Os produtos utilizam os mesmos tipos de recursos, porém em quantidades diferentes. Suponha, por simplicidade, que apenas um centro de trabalho esteja disponível para a produção dos dois itens, cuja disponibilidade é de 60 horas por período e que a produção de uma unidade do item 1 consuma 15 minutos e uma unidade do item 2 consuma 20 minutos. Os custos de produção por período são conhecidos e dados na Tabela 5.

Admite-se que a produção possa ser antecipada e estocada para ser utilizada nos períodos seguintes. Os custos de estocagem são dados na Tabela 6 (por exemplo, uma unidade do item 1 pode ser produzida no período 2 e guardada em estoque para atender a demanda no período 3, por R$3,00/unidade).

Deseja-se definir um plano da produção de modo que os pedidos sejam atendidos ao menor custo de produção e estocagem. Os estoques iniciais dos dois produtos são nulos e deseja-se que seus estoques ao final do horizonte de planejamento também sejam nulos. Seja a variável de decisão x_{it} a quantidade da viga tipo i produzida no período t, e I_{it} a quantidade da viga tipo i estocada no final do período t. Então pode-se escrever as restrições seguindo o modelo genérico apresentado na Seção 4.3, obtendo:

Tabela 4: Demanda de Vigas

Demanda de Vigas	*Período 1*	*Período 2*	*Período 3*
Item 1	100	90	120
Item 2	40	50	80

Fonte: Arenales et al. (2007)

Tabela 5: Custos de Produção

Custos de Produção	*Período 1*	*Período 2*	*Período 3*
Item 1	20	20	30
Item 2	20	20	30

Fonte: Arenales et al. (2007)

Tabela 6: Custos de Estocagem

Custos de Estocagem	*Período 1*	*Período 2*
Item 1	2	3
Item 2	2,5	3,5

Fonte: Arenales et al. (2007)

• *Restrições de conservação de estoque*

De $I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}, i = 1,2$ e $t = 1,2,3$, tem-se

$$I_{11} = x_{11} - 100$$

$$I_{12} = I_{11} + x_{12} - 90$$

$I_{13} = I_{12} + x_{13} - 120 = 0$ (estoque final da viga tipo 1 foi fixado em zero)

$$I_{21} = x_{21} - 60$$

$$I_{22} = I_{21} + x_{22} - 70$$

$I_{23} = I_{22} + x_{23} - 80 = 0$ (estoque final da viga tipo 2 foi fixado em zero).

• *Restrições de capacidade de produção*

De $r_1 x_{1t} + r_2 x_{2t} + \ldots + r_n x_{nt} \leq R_t$, $t = 1,2,3$, tem-se:

$$1/4x_{11} + 1/3x_{21} \leq 60$$

$$1/4x_{12} + 1/3x_{22} \leq 60$$

$$1/4x_{13} + 1/3x_{23} \leq 60$$

• *Garantia de atendimento às demandas*

De $I_{it} \geq 0$, $i = 1,2$ e $t = 1,2$ (note que para $t = 3$ o estoque é dado), tem-se:

$$I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22} \geq 0.$$

Além disso, por definição das variáveis x_{it}, deve-se ter

$x_{it} \geq 0, i = 1,2, t = 1,2,3$, ou seja,

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

• *Custo*

De $f(x_{11}, I_{11}, x_{12}, I_{12}, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} c_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T-1} h_{it} I_{it}$ (estoque final é fixado), tem-se:

$$f(x_{11}, x_{12}, \ldots, I_{22}) = 20x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 20x_{22} + 30x_{23} + 2I_{11} + 3I_{12} + 2,5I_{21} + 3,5I_{22}.$$

O modelo completo de otimização linear é dado pela seguinte função objetivo e pelas restrições (16) a (25).

$$\text{Minimizar } f(x_{11}, x_{12}, \ldots, I_{22}) = 20x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} +$$

$$+20x_{21} + 20x_{22} + 30x_{23} + 2I_{11} + +3I_{12} + 2,5I_{21} + 3,5I_{22}$$

$$x_{11} - I_{11} = 100 \tag{16}$$

$$x_{12} - I_{11} - I_{12} = 90 \tag{17}$$

$$x_{13} + I_{12} = 120 \tag{18}$$

$$x_{21} - I_{21} = 40 \tag{19}$$

$$x_{22} + I_{21} - I_{22} = 70 \tag{20}$$

$$x_{23} + I_{22} = 80 \tag{21}$$

$$1/4x_{11} + 1/3x_{21} \leq 60 \tag{22}$$

$$1/4x_{12} + 1/3x_{22} \leq 60 \tag{23}$$

$$1/4x_{13} + 1/3x_{23} \leq 60 \tag{24}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22} \geq 0 \tag{25}$$

Solução Ótima

Ao executar este modelo utilizando o LINDO, a solução ótima obtida é que o custo mínimo de produção e estocagem é de R$11.203,03, com as variáveis básicas $x_{11} = 100$; $x_{12} = 210$; $x_{13} = 0$; $x_{21} = 106,06$; $x_{22} = 22,72$; $x_{23} = 61,21$; $I_{11} = 0$; $I_{12} = 120$; $I_{21} = 66,06$ e $I_{22} = 18,78$.

A Tabela 7 mostra o intervalo de variação dos coeficientes da função objetivo, de maneira que as varáveis básicas continuarão na base.

Tabela 7: Análise de Sensibilidade (Função Objetivo)

Variáveis	Valor Mínimo	Valor Máximo
x_{11}	19,893938	∞
x_{12}	-∞	20,106062
x_{13}	27,924242	∞
x_{21}	-∞	20,140002
x_{22}	14,859998	26,5
x_{23}	26	32,74
I_{11}	1,893938	∞
I_{12}	-∞	5,075758
I_{21}	-∞	2,640002
I_{22}	0,76	7,5

Da mesma forma, a Tabela 8 exibe os intervalos de variação das constantes das restrições.

Tabela 8: Análise de Sensibilidade (Limite das Restrições)

Restrições	Valor Mínimo	Valor Máximo
16	19,199997	124,799999
17	9,199997	114,799999
18	39,199997	144,799999
19	-21,21212	58,787878
20	8,78788	88,787878
21	18,78788	200,606056
22	53,8	80,200001
23	53,8	80,200001
24	20,200001	-∞

Por exemplo, se a restrição 16 aumentasse de 100 para 124, a solução ótima para a função objetivo passará a ser $11.755,76.

Observando a Tabela 7, note que, na função objetivo, o valor do coeficiente da variável x_{23} pode diminuir até 26, então, caso isto ocorra, a função objetivo terá como solução ótima $4 * 61,21212 = 244,84848$, unidades a menos do item 2, no período 3, portanto, $11.203,03 - 244,84848 = 10.908,18$ será a nova solução ótima. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para verificar o impacto da variação no valor da função objetivo.

Conclusão: Nota-se que o plano da produção ideal para que os pedidos sejam atendidos ao menor custo de produção e estocagem, indica quanto deverá ser produzido e estocado de cada item em cada período, observando as possibilidades de variações das Tabelas 7 e 8.

5.3 ESTUDO DE CASO: PLANEJAMENTO AGREGADO DA PRODUÇÃO

Este estudo de caso foi abordado por Lins e Calôba (2006).

A South Sails Ltda. fabrica velas para barcos tendo uma demanda altamente sazonal, sendo as estimativas de demanda em cada período segundo a Tabela 9. Um planejamento está sendo feito com o principal objetivo de fazer com que as demandas de cada período do ano sejam convenientemente atendidas. A companhia considera a possibilidade de utilizar a mão de obra extra e até mesmo, contratar e demitir funcionários durante o ano para fazer face à grande variação da demanda. Como os produtos são muito similares do ponto de vista de produção, decidiu-se, para efeito de planejamento, agregar todos os produtos em um só que está posteriormente desagregado no planejamento mais detalhado a ser feito para um prazo mais curto.

Alguns dados mais relevantes são apresentados abaixo:

Tabela 9: Demanda ao Longo do Ano - Demanda Agregada (em 1000 m^2)

Mês	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Total
Demanda	$1,0$	$2,0$	$1,0$	$0,5$	$0,8$	$1,2$	$2,0$	$3,0$	$3,5$	$2,5$	$2,0$	$1,0$	$20,5$

Fonte: Lins e Calôba (2006)

A companhia terá, ao início de abril, 19 operários. O estoque nesse mesmo mês deverá estar muito baixo e pode ser desprezado. Existem ainda restrições que devem ser respeitadas no plano.

Restrições

• A capacidade máxima de armazenagem de produto acabado é de $2.000m^2$.

• O total de horas extras utilizadas em um mês não deve exceder 20% das horas regulares de trabalho.

• Não se pode subcontratar produção.

• O estoque ao final do horizonte de planejamento deve ser estudado, pois há opiniões de que não se deveria ter estoque nulo em abril;

• A política de companhia não permite demitir mais de 2 operários em um mesmo mês;

• Não se pode ficar com menos de 8 operários;

• Não é possível produzir mais de $2.500m^2$ por mês (gargalo na máquina de corte);

•Para efeito de férias, é necessário se ter uma ociosidade de mão de obra de 8% sobre o total de empregados-mês.

Dados de Custos

Mão de Obra Regular: $\$500,00$ por empregado, incluindo todos os encargos trabalhistas para uma jornada (turno único) equivalente a 160 horas por mês (considerando todos os meses com 20 dias úteis).

Mão de Obra Extra: Acréscimo de 50% sobre o preço da hora regular, incluindo encargos trabalhistas, ou seja, $\$4,69$ por hora.

Contratação: $\$500,00$ por empregado contratado.

Demissão: $\$1.000,00$ por empregado.

Manutenção de Estoques: $4,0\%$ mês sobre o valor da mercadoria ($\$30/m^2$), incluindo custo de oportunidade do capital, seguro e manipulação.

Vendas Pendentes: $\$4,0$ por m^2 mês (estimado como sendo o desconto que faria o cliente não se importar com o atraso).

Produtividade:
A mão de obra variável necessária para se produzir $1.000m^2$ é de 800 horas.

Numa reunião da gerência foram propostas três estratégias, a saber:

1. Produção com mão de obra constante: Contratar apenas uma vez no ano e não demitir ninguém. Absorver as flutuações de demanda com estoque de antecipação e mão de obra extra, sem incorrer em nenhuma venda pendente.

2. Ajuste de mão de obra. Absorver toda a variação de demanda contratando e demitindo mão de obra, sem utilizar horas extras ou permitir vendas pendentes.

3. Custo mínimo. Utilizar, se necessário, todas as formas possíveis de ajustar a produção à demanda de forma a obter o menos custo total possível.

Os gerentes responsáveis pelo plano ainda não chegaram a uma conclusão. A política 1 é defendida por alguns, argumentando que contratar e demitir é muito caro e prejudica o relacionamento da empresa com os empregados e a utilização de horas extras agregada aos empregados. Outros acham que a política 2 é melhor porque existe claramente um período de demanda baixa e a forma mais econômica de se tratar o problema parece ser ajustar a mão de obra às necessidades da produção.

Como apenas um gerente conhece programação matemática, a proposta 3 foi recebida com desconfiança porque os demais gerentes acham que ninguém seria capaz de obter uma solução que tenha o menor custo total possível porque não se pode minimizar simultaneamente todos os componentes do custo total e, encontrar um equilíbrio que dê custo total mínimo, é muito difícil em vista da existência de muitas variáveis.

O proponente da política 3 lhe pediu para analisar o problema e comparar, do ponto de vista econômico, as três propostas para que ele possa argumentar por uma proposta não extrema como as duas primeiras.

Como poderão ser modelados os três planos gerenciais através de PPL's? Inicia-se modelando o PPL da política 3.

Variáveis de Decisão

- x_{1i}: Número de empregados trabalhando no mês i;
- x_{2i}: Número de empregados demitidos no mês i;
- x_{3i}: Número de empregados contratados no mês i;
- x_{4i}: Número total de horas extras realizadas no mês i;
- x_{5i}: Número de empregados ociosos no mês i;
- x_{6i}: Estoque no mês i;
- x_{7i}: Vendas pendentes no mês i;

Dados Conhecidos: Estoques iniciais, mão de obra inicial;
D_i: Demanda no mês i;
Produtividade dos operários.

Restrições: Será utilizada a categorização das restrições:

Balanço de Empregados:

Mês 1: $19 - x_{21} + x_{31} = x_{11} + x_{51}$

Mês 2: $x_{11} + x_{51} - x_{22} + x_{32} = x_{12} + x_{52}$

$\ldots$

Mês i: $x_{1(i-1)} + x_{5(i-1)} - x_{2i} + x_{3i} = x_{1i} + x_{5i}$.

O raciocínio utilizado é: o número de empregados do mês anterior (trabalhando mais ociosos) menos o número de empregados demitidos mais o número de empregados contratados será igual ao número de empregados trabalhando mais os ociosos no mês atual.

Balanço de Materiais:

Mês 1: $200x_{11} + 1,25x_{41} - D_1 = x_{61} - x_{71}$

Mês 2: $x_{61} - x_{71} + 200x_{12} + 1,25x_{42} - D_2 = x_{62} - x_{72}$

$\ldots$

Mês i: $x_{6(i-1)} - x_{7(i-1)} + 200x_{1i} + 1,25x_{4i} - D_i = x_{6i} - x_{7i}$.

A mão de obra média necessária para se produzir $1.000m^2$ é de 800 horas. Cada empregado trabalha 160 horas por mês. Logo, em um mês, cada empregado produz $200m^2$. desta forma, cada hora extra trabalhada corresponde a $1,25m^2$.

O estoque no mês anterior mais a quantidade produzida no mês i (por produção normal ou hora extra) menos a demanda do mês i é igual ao estoque do mês i (ou a falta do produto).

Outras restrições:

$x_{6i} \leq 2.000$ (a capacidade de armazenagem é de $2.000m^2$)

$x_{4i} \leq X_{1i}.32$ (total das horas extras não podem exceder 20% das horas regulares)

$x_{2i} \leq 2$ (a empresa não pode demitir mais de 2 funcionários por mês

$x_{1i} + x_{5i} \geq 8$ (não se pode ficar com menos de 8 funcionários na fábrica)

$200x_{1i} + 1,25x_{4i} \leq 2.500$ (a capacidade máxima da fábrica é de $2.500m^2$)

$x_{5i} \geq 0,08.(x_{1i} + x_{5i})$ (é necessário que 8% da mão de obra esteja ociosa pelas férias)

$x_{ji} \geq 0, \forall i, j$

Função Objetivo:

Como visto, o objetivo da empresa na política 3 é a minimização dos custos globais. Isto pode ser obtida na seguinte função:

$$\text{Mín } \{\sum_{i=1}^{12}(500(x_{1i} + x_{5i}) + 500x_{3i} + 4,69x_{4i} + 1000x_{2i} + 1,2x_{6i} + 4x_{7i})\}$$

O primeiro termo refere-se a custos por empregado; o segundo, a custos de contratação; o terceiro termo onera os custos de horas extras. O quarto termo representa as demissões, o penúltimo, a taxa de manutenção de estoque (4% de \$ $30/m^2$, ou seja, 1,2) e , por último, o custo de vendas pendentes por m^2/mês.

Enfoques Alternativos:

Na primeira estratégia não eram permitidas demissões e vendas pendentes, permitindo apenas uma contratação ao ano. Isto pode ser obtido adicionando-se as seguintes restrições:

$x_{2i} = 0$ (demissões nulas), $\forall i$

$x_{7i} = 0$ (vendas pendentes zeradas), $\forall i$

$x_{3i} = 0$ para $i > 1$ (contratações apenas no 1º mês).

No caso da estratégia 2, não são permitidas vendas pendentes nem horas extras. Assim:

$x_{4i} = 0$ (horas extras nulas), $\forall i$

$x_{7i} = 0$ (vendas pendentes zeradas), $\forall i$

Sempre que se adicionam restrições a um problema, a área de solução vai ficando mais reduzida. Isto pode gerar uma redução no valor ótimo da função objetivo, sendo que nunca será capaz de melhorá-la (isto não se aplica a casos em que restrições são adicionadas e outras são modificadas).

Note então que o modelo completo de otimização linear é dado pelas equações a seguir.

$$\text{Mín } \{\sum_{i=1}^{12}(500(x_{1i}+x_{5i})+500x_{3i}+4,69x_{4i}+1000x_{2i}+1,2x_{6i}+4x_{7i})\}$$

$$\begin{gathered}\text{Mês 1:}19-x_{21}+x_{31}=x_{11}+x_{51} \\ \text{Mês 2:}x_{11}+x_{51}-x_{22}+x_{32}=x_{12}+x_{52} \\ \dots \\ \text{Mês i:}x_{1(i-1)}+x_{5(i-1)}-x_{2i}+x_{3i}=x_{1i}+x_{5i}\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\text{Mês 1:}200x_{11}+1,25x_{41}-D_1=x_{61}-x_{71} \\ \text{Mês 2:}x_{61}-x_{71}+200x_{12}+1,25x_{42}-D_2=x_{62}-x_{72} \\ \dots \\ \text{Mês i:}x_{6(i-1)}-x_{7(i-1)}+200x_{1i}+1,25x_{4i}-D_i=x_{6i}-x_{7i}\end{gathered} \tag{27}$$

$$x_{6i} \leq 2.000 \tag{28}$$

$$x_{4i} \leq X_{1i}.32 \tag{29}$$

$$x_{2i} \leq 2 \tag{30}$$

$$x_{1i}+x_{5i} \geq 8 \tag{31}$$

$$200x_{1i} + 1,25x_{4i} \leq 2.500 \tag{32}$$

$$x_{5i} \geq 0,08.(x_{1i} + x_{5i}) \tag{33}$$

$$x_{ji} \geq 0, \forall i, j \tag{34}$$

Solução Ótima

Para a solução deste estudo de caso, foi considerado inicialmente o mês 1.

A solução encontrada para o mês 1 é de $9.500,00 (custo mínimo), com a variável básica $x_{51} = 19$, que se refere ao número de empregados ociosos no mês 1, e as demais poderão ser nulas neste período. Isto representa que todos os funcionários estão ociosos, pois inicialmente ainda não lhes foram atribuídas tarefas.

Pode-se observar na Tabela 10 os intervalos de variações dos coeficientes da função objetivo para que as variáveis básicas permaneçam na base.

Tabela 10: Análise de Sensibilidade (Função Objetivo)

Variáveis	Valor Mínimo	Valor Máximo
x_{11}	500	∞
x_{51}	-500	0
x_{31}	-500	∞
x_{41}	0	∞
x_{21}	500	∞
x_{61}	0	∞
x_{71}	0	∞
D_1	0	1,2

Analogamente, a Tabela 11 exibe os intervalos de variação para as constantes das restrições.

Tabela 11: Análise de Sensibilidade (Limite das Restrições)

Restrições	Valor Mínimo	Valor Máximo
26	8	∞
27	-∞	0
28	0	∞
29	0	∞
30	0	∞
31	-∞	19
32	0	∞
33	-∞	17,48

Desta forma, através da análise de sensibilidade do problema descrito, pode-se obter informações do quanto pode-se aumentar ou diminuir o coeficiente conhecido mantendo assim, as variáveis básicas na base.

Observe agora, as soluções encontradas, além do mês 1 visto anteriormente, para os meses 2, 3, 4 e 5.

Tabela 12: Soluções

Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4	Mês 5
F.O.=9.500	F.O. = 19.000	F.O.= 27.500	F.O.=35.000	F.O. =41.500
$x_{51} = 19$	$x_{51} = 17$	$x_{51} = 17$	$x_{51} = 17$	$x_{51} = 17$
N^{o} de iterações = 1	$x_{21} = 2$	$x_{21} = 2$	$x_{21} = 2$	$x_{21} = 2$
	$x_{12} = 12.5$	$x_{12} = 12.5$	$x_{12} = 12.5$	$x_{14} = 10.12$
	$x_{52} = 4.5$	$x_{52} = 2.5$	$x_{52} = 2.5$	$x_{52} = 15$
	$D_2 = 2.500$	$D_2 = 2.500$	$D_2 = 2.500$	$x_{55} = 11$
	Iterações = 8	$x_{22} = 2$	$x_{22} = 2$	$x_{22} = 2$
		$x_{53} = 15$	$x_{53} = 15$	$x_{53} = 13$
		Iterações = 8	$x_{54} = 15$	$x_{54} = 0.88$
			Iterações = 9	$x_{23} = 2$
				$x_{24} = 2$
				$D_4 = 2.024$
				Iterações = 10

Por meio da execução dos modelos, é notável que cada mês há um aumento da quantidade de variáveis, isto ocorre devido à demanda altamente sazonal durante os períodos, como descrito no problema. Ocorre mudanças com o número de trabalhadores ociosos no decorrer dos meses, variável x_{5i}, assim como o número de empregados trabalhando, x_{1i}, o número de empregados demitidos, x_{2i} e a demanda, D_i. E devido esse aumento das variáveis durante os meses, há também um aumento do número de iterações para resolver o problema.

Conclusão: A empresa fabricante de velas para barcos, conseguiu elaborar um planejamento cujo objetivo foi fazer com que as demandas de cada período do ano fossem atendidas, sempre levando em consideração todas as suas restrições.

5.4 ESTUDO DE CASO: TREINAMENTO *ON THE JOB*

No trabalho de Bressan e Souza (2011) foi proposto um modelo geral para o problema de treinamento de funcionários *On the Job*, que consiste no seguinte problema:

Em uma empresa, o tipo de treinamento chamado "*on the job*" é aquele em que o funcionário recém contratado é colocado em treinamento para a função a qual irá exercer, ou já no departamento em que será destinado. Desta forma, o treinamento do funcionário é realizado durante o próprio trabalho e é baseado na observação do desenvolvimento das atividades de outro(s) profissional(ais) atuante(s).

Suponha que uma empresa tenha uma encomenda de produção, podendo contratar e demitir empregados, e que esta empresa realize o treinamento *on the job*, ou seja, funcionários atuantes treinando funcionários novatos reduzem sua produção ou até mesmo deixam de produzir. A modelagem matemática desta situação pode ser formulada como um problema de programação linear (PPL).

Modelagem Matemática do Problema - Caso Geral

Suponha que uma empresa produza um determinado produto P e receba uma encomenda para os próximos n meses, com $n \geq 2$. Inicialmente, esta empresa dispõe de W funcionários e de E_0 unidades do produto P em estoque. Os seguintes dados são conhecidos:

- Cada funcionário produzindo, produz N unidades de P por mês.
- O salário mensal de cada funcionário é S.
- O custo de demissão de cada funcionário é D.
- O custo de estocagem é C por produto/mês.
- A multa por atraso na entrega é M por produto/mês.

- Toda a encomenda deve ser entregue até o final do n-ésimo mês.
- Cada novo funcionário deve ficar 1 mês em treinamento *on the job*.

A encomenda recebida foi de E_1 unidades de P para o 1º mês, E_2 unidades de P para o 2º mês, E_3 unidades de P para o 3º mês, ... e E_n unidades de P para o n-ésimo mês. O problema consiste em formular e resolver um plano de contratação de pessoal e de produção do produto P. O objetivo é minimizar todos os custos. Portanto, devem ser definidas as variáveis de decisão, as restrições do problema e a função objetivo.

Definição das variáveis de decisão: os funcionários e a quantidade de produtos podem ser categorizados da seguinte forma:

x_{1j}: funcionários admitidos no mês j
x_{2j}: funcionários demitidos no mês j
x_{3j}: funcionários produzindo no mês j
y_{1j}: Quantidade de produto que sobrou ao final do mês j (estoque)
y_{2j}: Quantidade de produto que faltou ao final do mês j

Todas as variáveis são maiores ou iguais a zero: $x_{ij}\ \forall i,j \geq 0$ e $y_{ij}\ \forall i,j \geq 0$. Além disso, como todos os funcionários admitidos estarão sendo treinados por um funcionário mais experiente da empresa, a variável x_{1j} representa o número de funcionários admitidos, dando treinamento e sendo treinados no mês j, apresentando o mesmo valor para as 3 categorias.

Restrições do problema: o problema apresenta restrições referentes aos funcionários e à produção.

As restrições do balanço de funcionários podem ser descritas da seguinte forma: a quantidade de funcionários no início do mês, menos os demitidos e mais os admitidos é maior ou igual ao número de funcionários que estão produzindo neste mês, mais os que estão em treinamento e os que estão dando treinamento (isto é, 2 vezes o número de funcionários admitidos). Matematicamente, para cada um dos n meses de encomenda, tem-se

Mês 1: $W + x_{11} - x_{21} \geq x_{31} + 2x_{11}$
$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq W$

Mês 2: $[W + x_{11} - x_{21}] + x_{12} - x_{22} \geq x_{32} + 2x_{12}$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq W + x_{11} - x_{21}$

Mês 3: $[W+x_{11}-x_{21}+x_{12}-x_{22}]+x_{13}-x_{23} \geq x_{33}+2x_{13}$

$x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq W+x_{11}+x_{12}-x_{21}-x_{22}$

Mês 4: $[W+x_{11}-x_{21}+x_{12}-x_{22}+x_{13}-x_{23}]+x_{14}-x_{24} \geq x_{34}+2x_{14}$

$x_{14}+x_{24}+x_{34} \leq W+x_{11}+x_{12}+x_{13}-x_{21}-x_{22}-x_{23}$

Mês k: $\sum_{i=1}^{3} x_{ik} \leq W+\sum_{j=1}^{k-1}(x_{1j}-x_{2j})$ para $2 \leq k \leq n$.

As restrições relativas à produção podem ser descritas da seguinte forma: o estoque inicial, mais a produção do mês, menos a encomenda do mês é igual à quantidade de produto que sobrou menos a quantidade que faltou ao final de cada mês. Matematicamente, para cada um dos n meses, tem-se

Mês 1: $E_0+Nx_{31}-E_1 = y_{11}-y_{21}$
Mês 2: $[y_{11}-y_{21}]+Nx_{32}-E_2 = y_{12}-y_{22}$
Mês 3: $[y_{12}-y_{22}]+Nx_{33}-E_3 = y_{13}-y_{23}$
Mês 4: $[y_{13}-y_{23}]+Nx_{34}-E_4 = y_{14}-y_{24}$
Mês k: $[y_{1(k-1)}-y_{2(k-1)}]+Nx_{3k}-E_k = y_{1k}-y_{2k}$ para $2 \leq k \leq n$.

Observe ainda que y_{2n} deverá ser igual a zero, pois toda a encomenda deve ser entregue até o final do n-ésimo mês, não podendo haver falta.

Salário total dos funcionários é composto pela soma dos salários de todos os funcionários em cada um dos n meses.

Mês 1: $S(2x_{11})+S(W-x_{11}) =$

$S(W+x_{11})$

Mês 2: $S(2x_{12})+S[(W+x_{11}-x_{21})-x_{12}] =$

$S(W+x_{11}+x_{12}-x_{21})$

Mês 3: $S(2x_{13})+S[(W+x_{11}+x_{12}-x_{21}-x_{22})-x_{13}] =$

$S(W+x_{11}+x_{12}+x_{13}-x_{21}-x_{22})$

Mês 4: $S(2x_{14})+S[(W+x_{11}+x_{12}+x_{13}-x_{21}-x_{22}-x_{23})-x_{14}] =$

$S(W+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}-x_{21}-x_{22}-x_{23})$

Mês k: $S.W+S.x_{1k}+S\sum_{j=1}^{k-1}(x_{1j}-x_{2j})=$
$S[W+x_{1k}+\sum_{j=1}^{k-1}(x_{1j}-x_{2j})]$ para $2\leq k\leq n$.

Soma dos salários dos n meses : $S.n.W+S.n.x_{11}+S\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(x_{1(j+1)}-x_{2j})=$
$S[n.W+n.x_{11}+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(x_{1(j+1)}-x_{2j})]$.

Função Objetivo: consiste na minimização de todos os custos que, por sua vez, são compostos de - salários dos funcionários, mais custos de demissão, mais custos de estoques de um período para outro, mais multa por atraso na entrega. Matematicamente, temos a função

$S[n.W+n.x_{11}+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(x_{1(j+1)}-x_{2j})]+D\sum_{j=1}^{n}x_{2j}+C\sum_{j=1}^{n}y_{1j}+M\sum_{j=1}^{n-1}y_{2j}$

Observe que a parcela $S.n.W$ é constante, podendo ser retirada da função objetivo para o cálculo da solução ótima e, posteriormente, sendo adicionada ao resultado final. O Problema do Treinamento *On The Job* pode apresentar outras variantes, como por exemplo, ser modelado com mais de um produto, ou com equipes especializadas em processos específicos, ou seja, processos distintos, com salários distintos.

Exemplo Numérico:

Bressan e Souza (2011) propôs ainda, um exemplo numérico para o Problema do Treinamento *On The Job* com o intuito de comparar com as soluções propostas por Lins e Calôba (2006):

Suponha que uma empresa produza um produto P e receba uma encomenda para os próximos 3 meses. Inicialmente, esta empresa dispõe de 60 funcionários e de 10 unidades do produto P em estoque. Os seguintes dados são conhecidos:

$N=8$ unidades de P por mês.
$S=R\$100,00$
$D=R\$300,00$
$C=R\$10,00$ por produto/mês
$M=R\$30,00$ por produto/mês
Toda a encomenda deve ser entregue até o final do 3º mês.
$E_1=600, E_2=300$ e $E_3=1000$

Estes dados de entrada do problema possui os mesmos valores do modelo proposto por

Lins e Calôba (2006), para fins de comparação entre soluções, número de variáveis e iterações.

Restrições do problema: Matematicamente, para cada um dos 3 meses de encomenda, tem-se as restrições de balanço de funcionários:

Mês 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 60$
Mês 2: $[-x_{11} + x_{21}] + x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 60$
Mês 3: $[-x_{11} + x_{21} - x_{12} + x_{22}] + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 60$

Observe que a quantidade de funcionários no início de cada mês, representada entre colchetes, é igual à quantidade de empregados que terminou o mês anterior.

E para cada um dos 3 meses de encomenda, tem-se as restrições relativas à produção:

Mês 1: $10 + 8x_{31} - 600 = y_{11} - y_{21}$
Mês 2: $[y_{11} - y_{21}] + 8x_{32} - 300 = y_{12} - y_{22}$
Mês 3: $[y_{12} - y_{22}] + 8x_{33} - 1000 = y_{13}$

Observe que a quantidade de estoque inicial de cada mês, representada entre colchetes, é igual à quantidade de produtos que terminou o mês imediatamente anterior.

Função Objetivo: as funções relativas aos salários de cada mês são:
Mês 1: $6000 + 100x_{11}$
Mês 2: $6000 + 100x_{11} - 100x_{21} + 200x_{12}$
Mês 3: $6000 + 100x_{11} - 100x_{21} + 100x_{12} - 100x_{22} + 200x_{13}$

Portanto, a função objetivo é
Min $300x_{11} + 200x_{12} + 100x_{13} + 100x_{21} + 200x_{22} + 300x_{23} + 10y_{11} + 10y_{12} + 10y_{13} + 30y_{21} + 30y_{22}$

Logo, o modelo completo para o exemplo numérico do problema *On The Job* é:

$$min\ 300x_{11} + 200x_{12} + 100x_{13} + 100x_{21} + 200x_{22} + 300x_{23} + 10y_{11} + 10y_{12} + 10y_{13} + 30y_{21} + 30y_{22}$$

s.a

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 60 \tag{35}$$

$$-x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 60 \tag{36}$$

$$-x_{11} + x_{21} - x_{12} + x_{22} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 60 \tag{37}$$

$$8x_{31} - y_{11} + y_{21} = 590 \quad (38)$$

$$y_{11} - y_{21} + 8x_{32} - y_{12} + y_{22} = 300 \quad (39)$$

$$y_{12} - y_{22} + 8x_{33} - y_{13} = 1000 \quad (40)$$

Solução Ótima:

O problema original de Lins e Calôba (2006) tem 24 variáveis, com a necessidade de 9 iterações para resolve-lo. Já na versão do modelo proposto por Bressan e Souza (2011) possui apenas 14 variáveis e 5 iterações para resolve-lo e chegar na mesma solução ótima.

Para chegar na solução, utilizou-se como apoio computacional o software LINDO.

Tem-se que a solução ótima foi obtida na quinta iteração do método simplex, com um custo mínimo de R$34.375,00 para a otimização do plano de contratação de pessoal e de produção do produto P.

As variáveis básicas são as variáveis primais $x_{11} = 56,25,\ x_{32} = 116,25,\ x_{33} = 116,25,$ $y_{21} = 560,\ y_{12} = 70,\ x_{31} = 3,75$ e o restante, que são as variáveis não básicas, apresentam valor nulo.

A solução ótima do dual, chamada também de preço sombra, que é entendido como o impacto marginal da variação do elemento respectivo das constantes sobre a função objetivo; isto é, representa o quanto a função objetivo (custo) irá diminuir para cada unidade adicionada da variável correspondente, por exemplo, se o número de funcionários no início do 1° mês (60), representado pelo valor da constante da primeira restrição for aumentado em 1 unidade o custo total sofrerá uma redução de R$700,00 ficando em R$33.675 = 34.375 - 700.

Observe na Tabela 13, a análise de sensibilidade para os coeficientes da função objetivo do problema.

Tabela 13: Análise de Sensibilidade (Função Objetivo)

Variáveis	Valor Mínimo	Valor Máximo
x_{11}	-160	∞
x_{12}	80	∞
x_{13}	-540	∞
x_{21}	-1700	∞
x_{22}	-1000	∞
x_{23}	-540	∞
y_{11}	-30	∞
y_{12}	-30	37.5
y_{13}	-67.5	∞
y_{21}	-10	∞
y_{22}	-10	∞
x_{31}	-∞	350
x_{32}	-540	220
x_{33}	-220	∞

Da mesma forma, a Tabela 14 exibe os intervalos de variação das constantes das restrições.

Tabela 14: Análise de Sensibilidade (Limite das Restrições)

Restrições	Valor Mínimo	Valor Máximo
35	58.125	95
36	56.25	116.25
37	56.25	116.25
38	310	560
39	-150	330
40	550	1030

Observe na Tabela 13, a variável primal y_{12}, que representa a quantidade de produto que sobrou ao final do mês 2 (estoque). O valor atual do coeficiente na função objetivo é 10, podendo aumentar até 37,5. Se isso ocorrer, o custo total se elevará em $27,5 * 70 = 1.925$ reais, ou seja, $34.375 + 1.925 = R\$36.300$.

Agora observe que na Tabela 14 a constante da primeira restrição, que representa o número de funcionários no início do 1° mês (60), pode aumentar até 95. Se isso ocorrer, o custo total se reduzirá em $35 * 700 = 24.500$ reais, ou seja, $34.375 - 24.500 = 9.875$ reais.

A modelagem matemática para o Problema do Treinamento *On The Job* originalmente proposta por Lins e Calôba (2006), com 60 funcionários iniciais, apresenta a seguinte formulação:

$$min 100x_{31} + 100x_{41} + 100x_{51} + 100x_{61} + 100x_{32} + 100x_{42} + 100x_{52} + 100x_{62} + 100x_{33} + 100x_{43} +$$

$$+ 100x_{53} + 100x_{63} + 300x_{21} + 300x_{22} + 300x_{23} + 10y_{11} + 10y_{12} + 10y_{13} + 30y_{21} + 30y_{22} + 30y_{23}$$

s.a

$$x_{11} - x_{21} - x_{31} - x_{41} - x_{51} - x_{61} = -60$$

$$x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{12} - x_{22} - x_{32} - x_{42} - x_{52} - x_{62} = 0$$

$$x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{13} - x_{23} - x_{33} - x_{43} - x_{53} - x_{63} = 0$$

$$8x_{31} - y_{11} + y_{21} = 590$$

$$y_{11} - y_{21} + 8x_{32} - y_{12} + y_{22} = 300$$

$$y_{12} - y_{22} + 8x_{33} - y_{13} + y_{23} = 1000$$

$$x_{11} - x_{51} = 0$$

$$x_{11} - x_{61} = 0$$

$$x_{12} - x_{52} = 0$$

$$x_{12} - x_{62} = 0$$

$$x_{13} - x_{53} = 0$$

$$x_{13} - x_{63} = 0$$

$$y_{23} = 0$$

Esta modelagem, com as mesmas necessidades, apresenta a mesma solução ótima obtida com o modelo proposto, com as variáveis básicas primais $x_{11} = 56,25$, $x_{32} = 116,25$, $x_{33} = 116,25$, $y_{21} = 560$, $y_{12} = 70$, $x_{31} = 3,75$ e o restante $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{23} = y_{11} = 0$. As vantagens do modelo proposto são o número de iterações e o número de variáveis envolvidas no modelo, conforme ilustra a Tabela 15.

Tabela 15: Comparação entre os dois modelos matemáticos

	Modelo Original	Modelo Proposto
Número de Variáveis	24	14
Número de Iterações	9	5

Fonte: (BRESSAN; SOUZA, 2011)

Portanto, a modelagem proposta Bressan e Souza (2011) fornece a mesma solução ótima com um número de variáveis menor e com menos iterações. Note que a função objetivo do modelo original apresenta como solução ótima o custo mínimo de R$52.375,00, enquanto que o modelo proposto apresenta R$34.375,00 que, adicionados aos R$18.000,00, correspondentes aos salários S = R$100,00 pagos aos 60 funcionários (R$6.000,00) no início de cada um dos três meses, tem-se o mesmo valor: R$52.375,00.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar a programação linear como técnica de solução de problemas da pesquisa operacional, empregada para minimizar os custos ou maximizar os lucros de produção. Após esta abordagem, este trabalho apresenta alguns problemas de gerenciamento da produção, formulados por Programação Linear, resolve-os, analisa-os e compara os resultados obtidos.

No decorrer dos estudos, observou-se a importância da modelagem matemática como forma de estruturar e solucionar problemas que possam ser resolvidos matematicamente, para assim diminuir custos de produção, possíveis desperdícios e, consequentemente, aumentando os lucros, por meio do planejamento e da capacidade de produção.

As empresas que visam sucesso no mercado precisam ter um planejamento rigoroso em sua produção, função esta que é atribuída ao PCP, garantindo assim, uma empresa com potencial mais competitivo.

Este trabalho proporcionou a interação entre a representação matemática e os problemas de gerenciamento da produção resolvidos pela programação linear, por meio do cálculo de minimização dos custos ou maximização dos lucros de produção, obtendo as melhores soluções (soluções ótimas) por meio do método simplex, executado com apoio computacional.

É notável que o gerenciamento da produção se mostra muito importante para as empresas obterem melhores resultados. A utilização de modelos matemáticos para esse gerenciamento auxilia para a agilidade deste processo, notando a relevância da presença da programação linear dentro do PCP das empresas, pois utilizar métodos para diminuição de custos e maximização de lucros é uma boa alternativa para que uma empresa tenha maiores lucros e se destaque no mercado.

6.1 PUBLICAÇÕES

Este estudo gerou os seguintes artigos relacionados.

1. *Minimização do Custo da Produção dos Alimentos de um Restaurante Universitário de Acordo com o Cardápio Diário.*

   XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), 08 a 12 de setembro de 2014, Natal, RN.

2. *Otimização da Produção dos Alimentos de um Restaurante Universitário.*

   XIX Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR, 19 a 21 de novembro de 2014, Medianeira, PR.

3. *Otimização da Produção dos Alimentos de um Restaurante Universitário.*

   Revista TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (Submetido - abril de 2015).

REFERÊNCIAS

ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional: para cursos de engenharia.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BARBOSA, A.; LIMA, S. C. Aplicação gerencial da programação linear: Uma contribuição ao gerenciamento de produção. **Cruzando Fronteras: Tendencias de Contabilidad Directiva para el Siglo XXI**, Leon, Espanha, v. 1, n. 1, p. 4–6, 2001.

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear Programming and Network Flows**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1990.

BRESSAN, G. M. **Solução de Sistemas Lineares Esparsos - Aplicação à Programação de Lotes e Cortes**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo (ICMC - USP), 2003.

BRESSAN, G. M.; SOUZA, B. A. Modelagem e simulação para o problema de treinamento *on the job*. **XLIII Simpósio Brasileiro de PESQUISA OPERACIONAL**, Ubatuba-SP, p. 2282–2293, 2011.

GOLDBARG, H. P.; LUNA, L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa Operacional.** São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização Volume 1. Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e dualidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

KOTLER, P. **Administração de Marketing a edição do novo milênio.** 10. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2000.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 2. ed. Rio de Janeiro: Saraiva, 2004.

LAUGENI, F. P.; MARTINS, P. G. **Administração Administração da Produção.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

LINS, M. p. E.; CALÔBA, G. M. **Programação Linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

LUCHE, J. R. D.; MORABITO, R. Otimização na programação da produção de grãos eletrofundidos: Um estudo de caso. **G & P**, Gestão & Produção, v. 12, n. 1, p. 135–149, 2005.

LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1984.

NEMHAUSER, G.; WOLSEY, L. **Integer and Combinatorial Optimization**. [S.l.]: Wiley Interscience, 1988.

NETO, A. R.; DEIMLING, M. F.; TOSATI, M. C. **Aplicação da programação linear no planejamento e controle de produção: definição do mix de produção de uma indústria de bebidas**. 2006. Disponível em: <http://www.simpep.feb.unesp.br/>. Acesso em: 05 de setembro de 2014.

RANGEL, M. S.; FERREIRA, D. **Um Modelo de Dimensionamento de Lotes para uma Fábrica de Refrigerantes.** 2003. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/tema/seer/index.php/tema/article/view/374>. Acesso em: 29 de agosto de 2014.

RIGGS, J. L. **Production Systems: Planning, Analysis and Control**. [S.l.]: John Wiley and Sons Inc., 1970.

RUSSOMANO, V. H. **PCP, planejamento e controle da produção**. São Paulo: Pioneira, 2000.

SILVA, E. M. et al. **Pesquisa Operacional: para cursos de economia, administração e ciências contábeis.** 3. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

TUBINO, D. F. **Planejamento e Controle da Produção: Teoria e Prática**. São Paulo: Atlas, 2007.

VANDERBEI, R. J. **Linear Programming Foundations and Extensions**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.