

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMANDA JHENEFER SOTANA

CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE FOURIER E EQUAÇÃO DE LAPLACE

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

AMANDA JHENEFER SOTANA

CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE FOURIER E EQUAÇÃO DE LAPLACE

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Prof. Dra. Débora Aparecida Francisco Albanez

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Débora Aparecida Francisco Albanez
(Orientador)

Prof. Dr. Alisson de Carvalho Reinol

Prof. Me. Valter Henrique Biscaro Raposo

Dedico este trabalho ao meu Deus, por ter me dado força e perseverança.

Aos meus pais, por terem me incentivado e me amparado quando mais precisei.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Prof^a. Claudia Brunosi Medeiros, por ter me auxiliado e orientado no Trabalho de Conclusão de Curso 1 e nas disciplinas de estágio.

Agradeço a Prof^a. Débora Albanez por ter me orientado no Trabalho de Conclusão de Curso 2 e por ter me ajudado com as correções, e também, por ter me dado a oportunidade de participar do seu projeto de extensão.

Agradeço principalmente minha família e meus amigos, por terem me apoiado durante todos esses anos na graduação e ao Prof. Rafael Prado da Silva, por ter me ajudado em n partes da minha vida.

'Porque eu, o Senhor teu Deus, te tomo pela tua mão direita; e te digo:
Não temas, eu te ajudarei.'

Isaías 41 : 13

RESUMO

SOTANA, Amanda Jhenefer. **Convergência da Série de Fourier e Equação de Laplace**. 2018. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Neste trabalho estudamos a série de Fourier e suas propriedades, bem como os teoremas de convergência pontual e uniforme relacionados a estas séries. Além disso, utilizando as séries de Fourier, encontramos a solução para a equação de Laplace com condições de fronteira de Dirichlet e Neumann.

Palavras-chave: Série de Fourier. Equações diferenciais parciais. Convergência pontual. Convergência uniforme. Equação de Laplace.

ABSTRACT

SOTANA, Amanda Jhenefer. **Fourier Series convergence and Laplace's Equation**. 2018. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

In this work, we study Fourier series and properties, in addition to pointwise and uniform convergence theorems related to Fourier series. Besides, employing this serie, we solve the Laplace's equation with two boundary conditions: Dirchlet and Neumann.

Keywords: Fourier series. Partial differential equations. Pointwise convergence. Uniform convergence. Laplace's equation

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Gráfico $f(x)=\text{sen}(x)$	22
FIGURA 2 – Gráfico da função quadrática	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E SÉRIE DE FOURIER	21
2P	PERIODICIDADE	22
2O	ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES SENOS E COSENO	23
2S	SÉRIES DE FOURIER	26
3	CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE FOURIER	31
3C	CONVERGÊNCIA PONTUAL (OU CONVERGÊNCIA SIMPLES)	31
3U	CONVERGÊNCIA UNIFORME	37
4	FUNÇÕES ÍMPARES E PARES	41
4S	SÉRIES DE FOURIER PARA FUNÇÕES PARES E ÍMPARES	42
5	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS SEPARÁVEIS E EQUAÇÃO DE LAPLACE	45
5M	MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	45
5P	PROBLEMAS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO E CONDIÇÕES INICIAIS	46
5E	EQUAÇÃO DE LAPLACE	47
5D	PROBLEMA DE DIRICHLET	47
5N	PROBLEMA DE NEUMANN	51
6	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

As *Equações Diferenciais Parciais* (EDP's) são equações envolvendo derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis independentes

$$F\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0,$$

que descrevem fenômenos físicos cujo comportamento depende da posição, tais como eletrostática, eletrodinâmica, eletromagnetismo, dinâmica dos fluidos, difusão do calor, propagação de ondas, além de serem objetos de interesse nas mais diversas áreas do conhecimento como Física, Economia, Biologia, Mecânica dos fluidos, as quais possuem várias leis gerais descritas por essas equações.

O estudo dessas equações possui extensa pesquisa também em matemática pura. Pierre Simon Laplace foi um dos matemáticos do século XVIII de maior contribuição para os estudos das equações diferenciais parciais e um de seus principais trabalhos foi o estudo da *Equação de Laplace*:

$$\Delta u = 0, \quad (1.1)$$

onde o operador de Laplace (o Laplaciano) é definido por

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

e $u : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função harmônica caso satisfaça (1.1). Tal equação é relevante no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico. Por exemplo, a equação de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1.2)$$

é satisfeita pelas distribuições de temperatura no estado estacionário $u(x, y, z)$ no espaço. Já a equação de Laplace bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

é obtida eliminando-se o termo da terceira derivada da equação (1.2), e também descreve potenciais gravitacionais, eletrostáticos e distribuições de temperatura no estado estacionário no plano.

A teoria geral de soluções e propriedades da equação de Laplace é conhecida como *teoria do potencial*. Para mais informações, ver (AXLER; RAMEY, 2001).

A equação de Laplace (1.1) deve ser complementada com condições de contorno (dados de fronteira): Quando a condição de contorno é especificado o valor da função sobre o contorno $\partial\Omega$ do domínio Ω , esta é denominada condição de contorno de Dirichlet e no caso da condição de contorno ser dada em termos da derivada normal da função incógnita sobre o contorno $\partial\Omega$ do domínio Ω , esta é denominada condição de contorno de Neumann. No capítulo 3 deste trabalho encontramos solução para a equação de Laplace bidimensional homogênea no retângulo $\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ com a condição de contorno de Dirichlet:

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a. \quad (1.3)$$

e de Neumann:

$$\begin{aligned} u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad 0 < x < a, \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Para encontrarmos tais soluções, utilizamos o método de separação de variáveis, o qual essencialmente “substitui” a EDP por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que devem ser resolvidas sujeitas a condições iniciais e/ou de contorno. Para maiores detalhes, ver (SIMMONS; KRANTZ, 2008), (ZILL; M.CULLEN, 2009). Para encontrar as soluções, iremos abranger tais conteúdos necessários no capítulo 5 deste trabalho.

Ao impormos sobre a equação de Laplace as condições (1.3) e (1.4), é necessário a teoria de Séries de Fourier que será desenvolvido no capítulo 2, para respondermos a questão da existência ou não de soluções para a equação de Laplace sujeita à essas condições. Assim, neste trabalho, fazemos um estudo básico sobre séries de Fourier gerais, e casos particulares de séries de Fourier de funções ímpares e pares, como será visto no capítulo 4.

Ainda, complementamos o trabalho com dois teoremas sobre convergência da Série de Fourier: pontual e uniforme, especificando para quais condições teremos cada uma dessas convergências. Tal conteúdo será desenvolvido no capítulo 3 deste trabalho.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E SÉRIE DE FOURIER

Neste capítulo iremos introduzir os conteúdos necessários sobre equações diferenciais parciais para realizar as aplicações da equação de Laplace. E também, será realizado os estudos iniciais sobre a série de Fourier, que será de grande importância para o estudo da convergência pontual e uniforme.

Iniciaremos com a definição de equações diferenciais parciais e alguns exemplos (ver (ÍÓRIO; ÍÓRIO, 2010)).

DEFINIÇÃO 1. *Uma equação envolvendo derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis independentes é denominada uma Equação Diferencial Parcial (EDP).*

Representada pela forma

$$F\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \quad (2.1)$$

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, onde Ω é um conjunto aberto e convexo.

Dizemos que a EDP (2.1) possui ordem $n \in \mathbb{N}$, se n é a ordem da maior derivada encontrada na equação.

EXEMPLO 1. *A equação do calor unidimensional*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \alpha \in \mathbb{R}^*$$

é um exemplo de EDP de segunda ordem.

EXEMPLO 2. *A Equação de Korteweg de Vries é uma equação diferencial parcial de terceira ordem:*

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.2)$$

com $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$. *É a Equação de Burgers (invíscida)*

$$u_t + uu_x = 0, \quad (2.3)$$

é uma equação de primeira ordem.

Para as EDP's serem lineares, precisam cumprir certas condições. Portanto, uma equação diferencial parcial (2.1) é dita **linear** se cumprir as duas condições abaixo:

1. A variável dependente u e todas as suas derivadas são de primeiro grau.
2. Os coeficientes dependem no máximo da variável independente.

EXEMPLO 3. *A forma mais geral da EDP linear de segunda ordem é*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u(x) + d(x) = 0$$

onde algum dos coeficientes a_{ij} não é identicamente nulo. (ÍÓRIO; ÍÓRIO, 2010).

Quando as equações diferenciais parciais são não lineares, existem outras condições para serem classificadas, que são da seguinte forma:

1. Quando a EDP é linear com relação aos termos de maior ordem, ela é denominada de *equação semilinear*.
2. Quando a EDP é linear somente com relação às derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ela é dita *equação quasilinear*.

EXEMPLO 4. A equação da onda para $u(x, t)$ dada por

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

é linear, enquanto que a equação de Korteweg de Vries (2.2) é quasilinear.

2.1 PERIODICIDADE

Uma função é dita periódica quando os valores de $f(x) = y$ se repetem para determinados valores de x , isto é, o seu gráfico passa a se repetir em determinados períodos.

DEFINIÇÃO 2. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica se existe $L > 0$ tal que

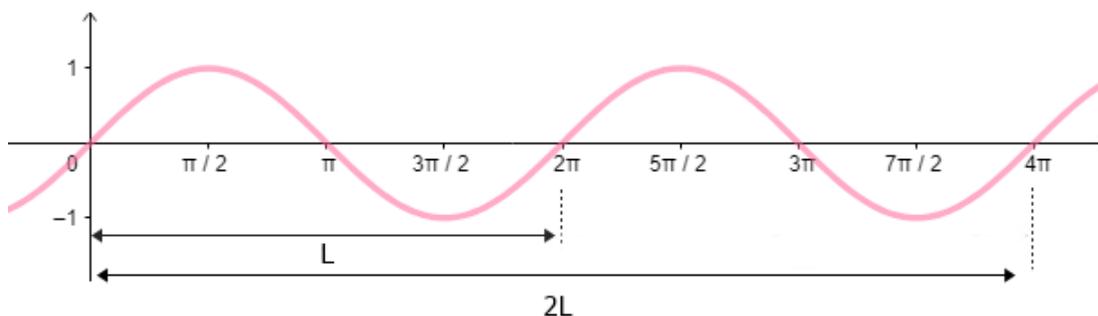
$$f(x + L) = f(x), \quad (2.5)$$

$\forall x, x + L$. O menor número $L > 0$ que satisfaz (2.5) é dito período da função.

As funções trigonométricas seno e cosseno, são periódicas de período de $L = 2\pi$, assim como a secante e a cossecante. Entretanto, a tangente e a cotangente são periódicas de período de $L = \pi$.

EXEMPLO 5. Por exemplo, o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, de período $L = 2\pi$, se repete nos intervalos $[0, 2\pi]$, e assim, sucessivamente para todo seu domínio.

Figura 1 – Gráfico $f(x)=\text{sen}(x)$.



EXEMPLO 6. Vamos provar que a função $f(x) = \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{p} \right)$ tem período $L = \frac{2p}{m}$, com $m \in \mathbb{Z}^+$ e $p \in \mathbb{R}$. Note então que

$$\begin{aligned} f \left(x + \frac{2p}{m} \right) &= \text{sen} \left(\frac{m\pi}{p} \left[x + \frac{2p}{m} \right] \right) \\ &= \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{p} + 2\pi \right) \\ &= \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{p} \right) = f(x), \end{aligned}$$

A periodicidade segue pela definição (2.5). Analogamente, prova-se que o período de $g(x) = \text{cos} \left(\frac{m\pi x}{p} \right)$ é $L = \frac{2p}{m}$.

2.2 ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Para compreendermos como será encontrado os coeficientes de Fourier, é necessário uma abordagem sobre ortogonalidade das funções seno e cosseno.

DEFINIÇÃO 3. Definimos o produto interno de duas funções integráveis f_1 e f_2 em um intervalo $[-p, p]$ por

$$(f_1, f_2) = \int_{-p}^p f_1(x)f_2(x)dx. \quad (2.6)$$

Segue facilmente via propriedades de integral de Riemann que a função definida acima é de fato um produto interno.

DEFINIÇÃO 4. Duas funções são ditas ortogonais em um intervalo $[-p, p]$ se

$$(f_1, f_2) = \int_{-p}^p f_1(x)f_2(x)dx = 0 \quad (2.7)$$

DEFINIÇÃO 5. Um conjunto de funções reais $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ é dito ser ortogonal em um intervalo $[-p, p]$ se

$$(f_n, f_m) = \int_{-p}^p f_n(x)f_m(x)dx = 0, \quad (2.8)$$

$\forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $m \neq n$.

EXEMPLO 7. Vamos mostrar que o conjunto das funções $\text{sen} \left(\frac{m\pi x}{p} \right)$ e $\text{cos} \left(\frac{n\pi x}{p} \right)$, $m, n = 1, 2, \dots$ formam um conjunto ortogonal. Note que

$$\begin{aligned}
\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p} + \frac{m\pi x}{p}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p} - \frac{m\pi x}{p}\right) \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{[n+m]\pi x}{p}\right) dx - \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{[n-m]\pi x}{p}\right) dx \right] \\
&= \left(\frac{p}{2[n+m]\pi} \left(-\cos\left(\frac{[n+m]\pi x}{p}\right) \right) \right) \Big|_{-p}^p \\
&\quad - \left(\frac{p}{2[n-m]\pi} \left(-\cos\left(\frac{[n-m]\pi x}{p}\right) \right) \right) \Big|_{-p}^p \\
&= \frac{1}{2} \frac{p}{[n+m]\pi} [-\cos([n+m]\pi) + \cos([n+m]\pi)] \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{p}{[n-m]\pi} [-\cos([n-m]\pi) + \cos([n-m]\pi)] = 0.
\end{aligned}$$

Assim

$$\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = 0, \quad (2.9)$$

se $m \neq n$. No caso $m = n$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{p}\right) dx \\
&= \frac{p}{4m\pi} \left[-\cos\left(\frac{2m\pi x}{p}\right) \right] \Big|_{-p}^p \\
&= \frac{p}{4m\pi} [-\cos(2m\pi) + \cos(2m\pi)] = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = 0. \quad (2.10)$$

Portanto, por (2.9) e (2.10) encontramos a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = 0, \forall m, n. \quad (2.11)$$

Além disso, fazendo o produto interno de $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right)$ com $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$, com $m \neq n$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \left[\operatorname{sen}\left(\frac{[m-n]\pi x}{p}\right) - \cos\left(\frac{[m+n]\pi x}{p}\right) \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{[m-n]\pi x}{p}\right) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{[m+n]\pi x}{p}\right) dx \\
&= \frac{-p}{2[m-n]\pi} \left(\cos\left(\frac{[m-n]\pi x}{p}\right) \right) \Big|_{-p}^p \\
&\quad - \frac{p}{2[m+n]\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{[m+n]\pi x}{p}\right) \right) \Big|_{-p}^p \\
&= \frac{-p}{2[m-n]\pi} [\cos([m-n]\pi) - \cos([m-n]\pi)] \\
&\quad - \frac{p}{2[m+n]\pi} [\operatorname{sen}([m+n]\pi) - \operatorname{sen}([m+n]\pi)] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = 0 \quad (2.12)$$

quando $m \neq n$. Se $m = n$,

$$\begin{aligned}
\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= \int_{-p}^p \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-p}^p 1 - \cos\left(\frac{2xm\pi}{p}\right) dx \\
&= \frac{x}{2} \Big|_{-p}^p - \frac{p}{4m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2xm\pi}{p}\right) \Big|_{-p}^p \\
&= \frac{1}{2} \left[2p - \frac{p}{2m\pi} [\operatorname{sen}(2m\pi) + \operatorname{sen}(2m\pi)] \right] \\
&= p.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = p. \quad (2.13)$$

Logo, por (2.12) e (2.13) obtemos a segunda relação de ortogonalidade:

$$\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ p, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (2.14)$$

Agora nos resta fazer o produto interno entre as funções $\cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)$ e $\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$, com $m \neq n$.

$$\begin{aligned}
 \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \left[\int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p} - \frac{n\pi x}{p}\right) dx + \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p} + \frac{n\pi x}{p}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_{-p}^p \cos\left(\frac{[m-n]\pi x}{p}\right) dx + \int_{-p}^p \cos\left(\frac{[m+n]\pi x}{p}\right) dx \right] \\
 &= \frac{p}{2[m-n]\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{[m-n]\pi x}{p}\right) \Big|_{-p}^p \\
 &\quad + \frac{p}{2[m+n]\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{[m+n]\pi x}{p}\right) \Big|_{-p}^p \\
 &= \frac{1}{2} \frac{p}{[m-n]\pi} [\operatorname{sen}([m-n]\pi) + \operatorname{sen}([m-n]\pi)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{p}{[m+n]\pi} [\operatorname{sen}([m+n]\pi) + \operatorname{sen}([m+n]\pi)] = 0.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = 0 \tag{2.15}$$

com $m \neq n$. Para $m = n$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{-p}^p \cos^2\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p 1 + \cos\left(\frac{2m\pi x}{p}\right) dx \\
 &= \frac{x}{2} \Big|_{-p}^p + \frac{p}{4m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{p}\right) \Big|_{-p}^p \\
 &= p + \frac{p}{4m\pi} [\operatorname{sen}(2m\pi) + \operatorname{sen}(2m\pi)] = p,
 \end{aligned}$$

e assim,

$$\int_{-p}^p \cos^2\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = p. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16), resulta na última relação de ortogonalidade entre seno e cosseno:

$$\int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ p, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{2.17}$$

Estas relações de ortogonalidade nos serão úteis para a determinação dos coeficientes das séries de Fourier, que veremos a seguir.

2.3 SÉRIES DE FOURIER

O estudo das séries de Fourier é motivado pelo interesse em encontrar soluções para alguns tipos de EDP's, como a equação do calor

$$u_t = k u_{xx}, \tag{2.18}$$

com $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ em Ω . Onde $\Omega = [0, L] \times \mathbb{R}_+$, sujeita à condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e, além disso, $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

É demonstrado em (FIGUEIREDO, 2007), que se $f(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$, então uma solução de (2.18) é da forma

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.19)$$

As séries de Fourier nos ajudam a responder para quais tipos de dado inicial $f(x)$ encontraremos soluções para o problema (2.18).

Suponha que $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ a qual queremos expressar da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) + b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right], \quad (2.20)$$

onde a_n e b_n são coeficientes reais para todo n .

Para determinarmos tais coeficientes, utilizaremos o método de expansão de séries ortogonais, integrando ambos os lados de (2.20), temos que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) dx &= \int_{-p}^p \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-p}^p \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) + b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right] dx \\ &= \frac{a_0 x}{2} \Big|_{-p}^p + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-p}^p a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-p}^p b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{p} \right) dx \\ &= \left(\frac{a_0 p}{2} - \frac{a_0(-p)}{2} \right) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n p}{n\pi} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \Big|_{-p}^p}_{=0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n p}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \Big|_{-p}^p \\ &= a_0 p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n p}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi)] = a_0 p \end{aligned}$$

E assim,

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx.$$

Para encontrarmos o coeficiente a_n devemos multiplicar ambos os lados de (2.20) por $\cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right)$ e depois integrar em relação a variável x :

$$\begin{aligned}
\int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-p}^p a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-p}^p b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \right] \\
&= \underbrace{\frac{a_0 p}{2m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \Big|_{-p}^p}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-p}^p a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-p}^p b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx.
\end{aligned}$$

Pela ortogonalidade (2.11) e (2.17), temos que

$$b_n \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = 0, \forall m, n.$$

e também,

$$a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ p, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

e assim nos resta que $m = n$. Portanto,

$$\int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = a_n p,$$

E temos que

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx.$$

Por último, para encontrarmos o coeficiente b_n devemos multiplicar (2.20) por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right)$ e integramos a equação obtida no intervalo $[-p, p]$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Usando as propriedades de ortogonalidade (2.11) e (2.14), sabemos que

$$a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = 0, \quad \forall m, n.$$

Dessa forma, teremos que $m = n$ pela relação de ortogonalidade de senos (2.14). Então,

$$b_n \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = b_n p.$$

Substituindo em (2.21), segue que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx + b_n p \\ &= \frac{a_0 p}{2m\pi} \underbrace{\left[-\cos\frac{m\pi x}{p} \right]_{-p}^p}_0 + b_n p \\ &= b_n p. \end{aligned}$$

Como $m = n$, temos que

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx.$$

Assim, a definição da Série de Fourier é dada seguir:

DEFINIÇÃO 6. A Série de Fourier de uma função $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)$$

onde os coeficientes a_0 , a_n e b_n , $n \in \mathbb{N}$ são dados por

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx, \quad (2.22)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad (2.23)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx. \quad (2.24)$$

3 CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE FOURIER

Uma vez definida a série de Fourier na seção anterior, é natural o surgimento das questões: sob quais condições a série de Fourier converge? Caso convirja, para qual valor?

Em busca de tais respostas para o estudo de convergência da série de Fourier, é importante estabelecer o conceito de descontinuidade de primeira espécie.

DEFINIÇÃO 7. Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma descontinuidade de primeira espécie em $x_i \in X$ quando os limites laterais existem e são diferentes, isto é, $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$.

Ao decorrer do texto, denotaremos os limites laterais (quando existirem) por:

$$f(x_i^+) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$$

e

$$f(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$$

os limites laterais, especificamente quando estes existirem.

DEFINIÇÃO 8. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua se ela possuir apenas um número finito de descontinuidades de primeira espécie em qualquer intervalo limitado.

A seguir, um exemplo de função seccionalmente contínua (FIGUEIREDO, 2007):

EXEMPLO 8. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

é seccionalmente contínua, pois possui apenas uma descontinuidade de primeira espécie (em $x = 0$).

DEFINIÇÃO 9. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente diferenciável se possuir um número finitos de pontos em um intervalo fechado onde f não é diferenciável.

3.1 CONVERGÊNCIA PONTUAL (OU CONVERGÊNCIA SIMPLES)

DEFINIÇÃO 10. Dizemos que uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R} (n = 1, 2, \dots)$ converge pontualmente (ou converge simplesmente) para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando para todo $x \in X$, a seqüência numérica $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ converge para $f(x)$; isto é, $f_n \rightarrow f$ se dado $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que pode depender de ε e x , tal que se $n > n_0$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Para mostrar a convergência da série de Fourier em um ponto fixado x introduziremos os conceitos e resultados necessários que garantem a convergência.

Além disso, a partir de agora, trabalharemos com funções periódicas de período 2π .

DEFINIÇÃO 11. Para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, definimos a função

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx), \quad (3.1)$$

a qual chamaremos de Núcleo de Dirichlet.

O núcleo de Dirichlet possui algumas propriedades, sendo elas:

1. $D_n(x)$ é uma função par, isto é, $D_n(-x) = D_n(x)$. De fato, como $D_n(-x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(-kx)$, e a função $\cos(-kx)$ é par, então

$$D_n(-x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(-kx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = D_n(x)$$

2. Temos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\text{sen}(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1. \end{aligned}$$

3. $D_n(x)$ é uma função periódica de período 2π . De fato, sendo a função cosseno periódica de período 2π , temos que cosseno também é periódica de período $2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} D_n(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos[k(x + 2\pi)] \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx + 2k\pi) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \\ &= D_n(x). \end{aligned}$$

4. Vale a seguinte expressão compacta com $x \neq 0$ em $[-\pi, \pi]$:

$$D_n(x) = \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{2 \text{sen} \left(\frac{x}{2} \right)} \quad (3.2)$$

De fato, note que (3.2) é equivalente a

$$2 \text{sen} \left(\frac{1}{2} x \right) D_n(x) = \text{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) x,$$

Logo basta provar a igualdade acima. Temos que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) D_n(x) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=1}^n \cos(kx) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx). \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de adição de arcos da trigonometria, segue que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + kx\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2} + kx\right) \right].$$

Desenvolvendo o lado direito acima, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + kx\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2} + kx\right) \right] \\ = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + x\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2} + x\right) \\ + \dots + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + nx\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2} + nx\right). \end{aligned}$$

Note que o termo $-\operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2} + nx\right)$ se cancela com o termo quando $k = n - 1$, isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + (n-1)x\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2} + (nx)\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x + 2nx - 2x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{-x + 2nx}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{-x + 2nx}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{-x + 2nx}{2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) D_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + nx\right).$$

TEOREMA 1. (Integral de Dirichlet) *Seja f uma função integrável, periódica de período 2π . A n -ésima soma parcial da série de Fourier gerada por f , denotada por $S_n(x)$, pode ser representada por*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt.$$

Demonstração: Substituindo os valores dos coeficientes da definição de série de Fourier (equação 2.22, 2.23 e 2.24) na n -ésima soma parcial da série gerada por f , temos

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) \cos(mx) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(mt) \operatorname{sen}(mx) dt \right]. \quad (3.3)$$

Reorganizando (3.3), temos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n (\cos(mt)\cos(mx) + \text{sen}(mt)\text{sen}(mx)) \right] f(t) dt. \quad (3.4)$$

Utilizando identidade trigonométrica $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$ em (3.4), segue

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos[m(t-x)] \right] f(t) dt.$$

Aplicando a definição de núcleo de Dirichlet, temos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt.$$

Fazendo a mudança de variável $t = x + u \rightarrow u = t - x$, então

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x-u) D_n(u) du$$

Como f possui os mesmos valores nos intervalos $[\pi, -\pi]$ e $[-\pi-x, \pi-x]$, podemos escrever (3.1) como

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du.$$

TEOREMA 2. (Riemann-Lebesgue) Se a função f é integrável no intervalo $[a, b]$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \text{sen}(tx) dx = 0.$$

A demonstração do Teorema de Riemann-Lebesgue pode ser encontrada em (FIGUEIREDO, 2007).

Finalmente, apresentamos o teorema da convergência pontual de Fourier, encontrado em (BOBADILLA; MARTINEZ, 1996).

TEOREMA 3. (de Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período 2π . Então a série de Fourier da função f , converge em cada ponto x para o valor

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

OBS: Como f é seccionalmente diferenciável, então f é seccionalmente contínua. Desta forma, os limites laterais existem, e assim podemos obter as derivadas laterais de f .
Demonstração: Devemos provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)], \quad (3.5)$$

onde $S_n(x)$ é a n -ésima soma parcial da série de Fourier de f , isto é,

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)].$$

Pelo Teorema da Integral de Dirichlet, temos

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt, \quad (3.6)$$

isto é,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t+x) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt. \quad (3.7)$$

Note que, da propriedade (2) do núcleo de Dirichlet e do fato de $D_n(x)$ ser função par, segue que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2}, \quad (3.8)$$

Em (3.8), multiplicando a igualdade da integral no intervalo $[-\pi, 0]$ por $f(x^-)$, e a igualdade da integral em $[0, \pi]$ por $f(x^+)$, obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) f(x^-) dt = \frac{1}{2} f(x^-) \quad (3.9)$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) f(x^+) dt = \frac{1}{2} f(x^+). \quad (3.10)$$

Somando ambos os lados das equações (3.9) e (3.10), temos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) f(x^-) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) f(x^+) dt = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]. \quad (3.11)$$

Agora, note que provar (3.5) é equivalente a provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]) = 0. \quad (3.12)$$

Fazendo a diferença das equações (3.11) de (3.7), temos

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t+x) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) f(x^-) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) f(x^+) dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(t+x) - f(x^-)] D_n(t) dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(t+x) - f(x^+)] D_n(t) dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo $D_n(t)$ pela propriedade (4) do núcleo de Dirichlet, segue que

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(t+x) - f(x^-)] \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(t+x) - f(x^+)] \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} dt. \end{aligned}$$

Tomando limite quando $n \rightarrow \infty$ de ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(t+x) - f(x^-)] \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} dt \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(t+x) - f(x^+)] \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para a conclusão, devemos provar que o lado direito de (3.15) é zero. Utilizaremos o Teorema de Riemann-Lebesgue para mostrar tal resultado. Para isso, mostraremos que as funções a seguir são integráveis em um intervalo fechado: sejam

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(t+x) - f(x^-)}{2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}, & \text{se } t \neq 0; \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

a qual é seccionalmente contínua no intervalo $[-\pi, 0)$, e

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(t+x) - f(x^+)}{2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}, & \text{se } t \neq 0; \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

também seccionalmente contínua em $(0, \pi]$.

Como a função f é seccionalmente contínua em $(0, \pi]$ e $\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$ é contínua em $(0, \pi]$, $h(t)$ também é contínua em $(0, \pi]$.

Desta forma, resta verificar se $h(t)$ é contínua em $t = 0$. Para isso devemos mostrar que $\lim_{h \rightarrow 0^+} h(t)$ existe. Caso o limite existe, teremos que $h(t)$ é contínua em um intervalo fechado, como desejado.

Multiplicando e dividindo $h(t)$ por $\frac{t}{2}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[f(t+x) - f(x^+)] \frac{t}{2}}{2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[f(t+x) - f(x^+)]}{t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t}{2}}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (3.16)$$

Note que,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t}{2}}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} 1}{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}} = 1$$

Substituindo o resultado do limite acima em (3.16), temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[f(t+x) - f(x^+)]}{t} = f'_+(x),$$

segue que, como f é seccionalmente contínua, então $f'_+(x)$ existe em x . Assim, $h(t)$ é integrável no intervalo $[0, \pi]$.

Da mesma forma, se mostra que o limite $g(t)$ quando $t \rightarrow 0^-$ existe, obtendo $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = f'_-(x)$ e portanto $g(t)$ é contínua e integrável em $[-\pi, 0]$.

Assim, pelo teorema de Riemann-Lebesgue, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 [f(t+x) - f(x^-)] \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} [f(t+x) - f(x^+)] \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 0$$

Consequentemente, por (3.15),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = 0$$

E assim

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)] \rightarrow \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

com $n \rightarrow \infty$.

3.2 CONVERGÊNCIA UNIFORME

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos necessários para a demonstração da convergência uniforme da série de Fourier.

DEFINIÇÃO 12. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$.

DEFINIÇÃO 13. Uma série $\sum a_n$ diz-se absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ converge.

EXEMPLO 9. (LIMA, 2017) Um série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Quando $-1 < a < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é absolutamente convergente, pois $|a^n| = |a|^n$.

DEFINIÇÃO 14. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de quadrado-integrável se f e $|f|^2$ forem integráveis.

TEOREMA 4. (Desigualdade de Bessel) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π , quadrado-integrável no intervalo $[-\pi, \pi]$. Então

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (3.17)$$

onde a_0, a_n e b_n são coeficientes de Fourier.

A demonstração pode ser encontrada no livro de (FIGUEIREDO, 2007).

Como estamos trabalhando com série de Fourier, a mesma é formada por conjunto de funções trigonométricas ortogonais, então é válido o uso da desigualdade a seguir:

DEFINIÇÃO 15. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Sejam $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ dois vetores do \mathbb{R}^n . Então é válida a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^2 \right). \quad (3.18)$$

A demonstração pode ser encontrada em (FIGUEIREDO, 2007).

O lema a seguir é essencial para a demonstração do teorema de convergência uniforme da série de Fourier.

LEMA 1. Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo $[-\pi, \pi]$, com $f(-\pi) = f(\pi)$, com derivada seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$. Se a_n e b_n são os coeficientes da série de Fourier da função f , a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

converge.

Demonstração: Seja $f'(x)$ seccionalmente contínua e os coeficientes da série de Fourier de f' sendo

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx \quad (3.19)$$

e

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sen(nx) dx \quad (3.20)$$

com $\alpha_0 = 0$, pois

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0,$$

pelo teorema fundamental do cálculo.

Integrando (3.19) por partes, temos

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sen(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} f(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + nb_n = nb_n. \end{aligned}$$

Da mesma forma se tem que $\beta_n = -na_n$. Assim

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n} \quad (3.21)$$

e

$$b_n = \frac{\alpha_n}{n}. \quad (3.22)$$

Considere a n -ésima soma parcial

$$S_N = \sum_{n=1}^N \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \quad (3.23)$$

substituindo (3.21) e (3.22) em (3.23), temos

$$S_N = \sum_{n=1}^N \sqrt{\left(-\frac{\beta_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}. \quad (3.24)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.24), obtemos

$$(S_N)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right) \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2\right) \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right) \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \sum_{n=1}^N \beta_n^2\right).$$

Pela desigualdade de Bessel, temos

$$\sum_{n=1}^N (\alpha_n)^2 + \sum_{n=1}^N (\beta_n)^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx < \infty,$$

portanto as séries $\sum_{n=1}^N \alpha_n^2$ e $\sum_{n=1}^N \beta_n^2$ são limitadas. Além disso, a p -série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. Então, pelo teste da comparação de séries numéricas, temos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

converge.

TEOREMA 5. (Teste M de Weierstrass) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções reais definidas em um conjunto X . Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$, exista $M_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.

TEOREMA 6. (Convergência uniforme e absoluta) Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(-\pi) = f(\pi)$ e que sua derivada é seccionalmente contínua sobre $(-\pi, \pi)$. Então a série de Fourier da função $f(x)$ converge absolutamente e uniformemente em $[-\pi, \pi]$.

Demonstração: Estenda periodicamente $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida a toda reta \mathbb{R} , de período 2π .

Sendo f construída dessa forma uma função contínua, então sua série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \quad (3.25)$$

converge pontualmente para $f(x)$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$ pelo Teorema 3. Note que, pela desigualdade triangular e o fato que $|\cos(nx)| \leq 1$ e $|\operatorname{sen}(nx)| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} |a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)| &\leq |a_n \cos(nx)| + |b_n \operatorname{sen}(nx)| \\ &\leq |a_n| + |b_n| \\ &= \sqrt{a_n^2} + \sqrt{b_n^2} \\ &\leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{b_n^2 + a_n^2} \\ &= 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pelo Lema 1, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge; portanto por (3.26) e Teorema 5 a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ converge uniformemente e absolutamente em $[-\pi, \pi]$. Consequentemente a série de Fourier (3.25) converge absolutamente e uniformemente, como queríamos demonstrar.

4 FUNÇÕES ÍMPARES E PARES

Expandir uma função f em série de Fourier demanda muitas contas a serem feitas para encontrar os coeficientes a_0 , a_n e b_n . Esse processo pode ser simplificado caso a função f seja ímpar ou par.

DEFINIÇÃO 16. Dizemos que uma função f é par se seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se $f(-x) = f(x)$ para cada x no domínio de f . Analogamente, f é uma função ímpar se seu domínio contém $-x$ sempre que contiver x e se $f(-x) = -f(x)$ para cada x no domínio de f .

As funções ímpares e pares são caracterizadas pela simetria que possuem em relação à origem e com o eixo das ordenadas, respectivamente.

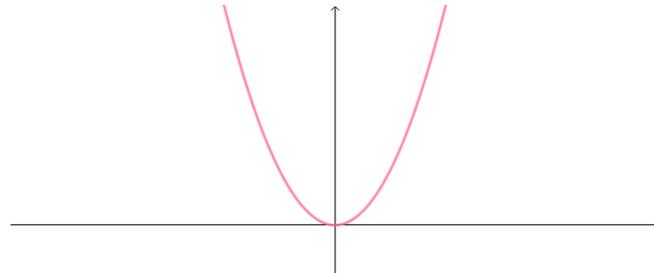
Daremos três exemplos clássicos:

EXEMPLO 10. Seja $f(x) = x^2$. Usando a definição, temos

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Desta forma $f(x) = x^2$ é par.

Figura 2 – Gráfico da função quadrática



Fonte: A autora.

Portanto, a função é simétrica em relação ao eixo y .

EXEMPLO 11. Dada a função $f(x) = x^3$. Por definição, temos

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$

o que nos mostra que a função é ímpar.

EXEMPLO 12. Seja $f(x) = \tan(x)$. Teremos que,

$$f(-x) = \tan(-x) = -\tan(x) = -f(x).$$

Logo, a função é ímpar e conseqüentemente, o gráfico de f será simétrico em relação à origem.

As propriedades a seguir irão facilitar os cálculos que faremos para encontrar as Série de Fourier de Senos e Cossenos.

PROPRIEDADE 1. *Propriedades das funções pares e ímpares:*

1. O produto de duas funções pares é par;
2. O produto entre duas funções ímpares é par;
3. A soma e a diferença entre duas funções pares é par;
4. A soma e a diferença entre duas funções ímpares é ímpar;
5. O produto entre uma função par e uma função ímpar o resultado será uma função ímpar.

6. Se f for par, então

$$\int_{-p}^p f(x)dx = 2 \int_0^p f(x)dx.$$

7. Se f for ímpar, teremos que

$$\int_{-p}^p f(x)dx = 0.$$

4.1 SÉRIES DE FOURIER PARA FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Usando das propriedades de funções ímpares e pares, podemos encontrar com mais facilidade a série de Fourier de funções desse tipo, pois alguns coeficientes se anulam neste caso. Mais precisamente, seja $f(x)$ uma função par. Utilizando o item (6) das propriedades de funções pares e ímpares, temos que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x)dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx \quad (4.1)$$

Além disso, sabemos que a função cosseno também é par, e como o produto de duas funções pares resulta em uma função par, temos que

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

isto é,

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx. \quad (4.2)$$

Para b_n temos,

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = 0$$

uma vez que a função seno é ímpar, pelo item (7) da propriedade 1 a integral é nula. Consequentemente, teremos que a série de Fourier de uma função par no intervalo $(-p, p)$ é a *Série de Cossenos*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

onde os coeficientes a_0 e a_n são dados pelas integrais (4.1) e (4.2), respectivamente.

Seja agora $f(x)$ uma função ímpar. Pelo item (6) da propriedade (1), temos que o coeficiente a_0 é nulo, pois a integral de uma função $f(x)$ ímpar no intervalo $[-p, p]$ é igual a 0.

Para a_n temos,

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = 0,$$

pois $f(x)$ é ímpar e a função cosseno é par, sendo o produto de ambos uma função ímpar.

Por fim, pelo item (2) da propriedade (1), o b_n é dado por

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx.$$

Portanto, a série de Fourier de uma função ímpar no intervalo $(-p, p)$ é a *Série de Senos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p}$$

onde b_n é dado pela integral (4.1).

5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS SEPARÁVEIS E EQUAÇÃO DE LAPLACE

5.1 MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O método de separação de variáveis é utilizado para resolver equações diferenciais parciais lineares, o qual consiste em supor a existência de uma solução particular do tipo

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (5.1)$$

O objetivo do método é reduzir a equação diferencial parcial linear em duas equações diferenciais ordinárias lineares através da substituição (5.1). Derivando parcialmente a equação (5.1), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y). \quad (5.2)$$

Por exemplo, a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

fazendo as substituições (5.2), temos

$$X'Y = XY''.$$

Por um momento, admitimos que $X(x)$ e $Y(y)$ não se anulam e assim

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y''}{Y}. \quad (5.3)$$

Como a igualdade acima é válida para todos (x, y) , então ambos os lados independem de x e y . Logo podemos escrever

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

onde λ é um parâmetro independente de x e y . Dessa forma, temos duas EDO's

$$X' + \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Note que a primeira equação dependente de x pode ser resolvida através de integração direta. Assim,

$$\begin{aligned} X'(x) &= -\lambda X(x) \\ \Rightarrow \int \frac{X'(x)}{X(x)} dx &= \int -\lambda dx \\ \Rightarrow \ln|X(x)| &= -\lambda x + c_1 \\ \Rightarrow e^{\ln|X(x)|} &= e^{-\lambda x + c_1} \end{aligned}$$

Logo, a solução para tal EDO é dada por

$$X(x) = ce^{-\lambda x}. \quad (5.4)$$

Agora, a equação dependente de y é linear de segunda ordem com coeficientes constantes e utilizamos o método da equação característica para resolvê-la.

Temos que a equação característica relativa a EDO $Y'' + \lambda Y = 0$ é dada por

$$r^2 + \lambda = 0,$$

sendo suas raízes $r = \pm\sqrt{-\lambda}$.

Desta forma, buscaremos soluções não triviais $Y(y)$ que dependem apenas de λ . Vamos analisar os três casos para λ , quando $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$.

1. Quando $\lambda = 0$, temos raízes reais repetidas, e a solução é do tipo

$$Y(y) = c_1 + c_2x. \quad (5.5)$$

2. Para $\lambda < 0$, as raízes são reais distintas e a solução é dada por

$$Y(y) = c_3e^{\sqrt{-\lambda}y} + c_4e^{-\sqrt{-\lambda}y}. \quad (5.6)$$

3. E com $\lambda > 0$ temos raízes complexas, e a solução é dada por

$$Y(y) = c_5\cos(\sqrt{\lambda}y) + c_6\sen(\sqrt{\lambda}y). \quad (5.7)$$

Após encontrarmos as soluções não triviais, a solução particular final para a equação diferencial parcial é dado pelo seguinte teorema:

TEOREMA 7. (Princípio da Superposição) Se u_1, u_2, \dots, u_n forem soluções de uma equação diferencial parcial linear homogênea, então a combinação linear

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n,$$

com $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ constantes, também será uma solução.

5.2 PROBLEMAS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO E CONDIÇÕES INICIAIS

Problemas de condições iniciais surgem em equações diferenciais parciais que modelam fenômenos que dependem do tempo. Por exemplo, se $f(x)$ representa a distribuição de temperatura inicial por uma barra de metal, então uma solução $u(x, t)$ tem que satisfazer a condição inicial única $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$.

Como ocorre a mudança de temperatura da barra ao passar do tempo, então temos que

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Problemas de condições de contorno ocorrem em equações diferenciais parciais onde o domínio das equações possuem fronteira. Exemplificando, suponha uma corrente de comprimento $0 \leq x \leq L$, com suas extremidades presas por todo o tempo ao eixo x . Uma maneira de

estabelecer condições de contorno é supor, por exemplo, que

$$u(0, t) = 0, \quad e \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Se tivermos um problema com as seguintes condições

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{5.8}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \tag{5.9}$$

dizemos que este problema é um problema misto.

5.3 EQUAÇÃO DE LAPLACE

"A equação de Laplace aparece em muitos modelos na física, sendo sua solução interpretada na maioria das vezes como uma distribuição de temperatura de regime permanente". (BOYCE; DIPRIMA, 2010)

Modelar em estado estacionário ou em equilíbrio, por exemplo, problemas de densidade de energia térmica, calor e gravitação.

Os estudos realizados sobre função potencial de uma partícula livre no espaço e a função potencial elétrico em um meio dielétrico sem cargas elétricas, entre outros, satisfazem a Equação de Laplace. Em vista disso, "o estudo da equação, suas soluções, subsoluções e suas aplicações também é denominado de teoria do potencial". (SIMMONS; KRANTZ, 2008).

"Para resolver a equação, é necessário que a solução satisfaça certas condições de contorno em uma curva ou superfície que marca a fronteira da região a qual a equação diferencial vai ser resolvida". (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Generalizando, para problemas multidimensionais, é natural então dar uma condição sobre a função u em cada ponto da fronteira da região onde procuramos uma solução para a equação. A condição de contorno mais comum ocorre quando é especificado o valor de u em cada ponto na fronteira; em termos do problema de condução de calor, isso corresponde a descrever a temperatura na fronteira. (BOYCE; DIPRIMA, 2010)

Vamos estudar apenas dois problemas de valores de contorno da teoria do potencial, sendo eles o *Problema de Dirichlet* e *Problema de Neumann*. O problema de Dirichlet surge quando a solução para o problema satisfaz os valores de contorno dados na fronteira da superfície ou da curva, ou seja, são condições sobre a função u . Já o problema de Neumann, surge quando as condições de contorno na fronteira são sobre as derivadas.

5.4 PROBLEMA DE DIRICHLET

Resolveremos a Equação de Laplace bidimensional homogênea no retângulo $\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.10}$$

onde $u = u(x, y)$, sujeito as condições:

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0 \tag{5.11}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0. \quad (5.12)$$

Buscaremos obter a solução $u(x, y)$ da temperatura em estado estacionário de uma placa retangular; podemos supor a variável x relacionada ao comprimento e a y relacionada a altura da placa.

As extremidades laterais estarão isoladas, e as extremidades superior e inferior serão mantidas respectivamente nas temperaturas 0 e $f(x)$.

Vamos encontrar um solução particular para a equação de Laplace usando o método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais, como visto na Seção 5.1. Temos que

$$X''(x)Y(y) + Y(y)''X(x) = 0,$$

isto é,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Igualando a equação acima a constante de separação $-\lambda$, temos as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

e

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Aplicando as condições de contorno em

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

temos

$$u(0, y) = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \quad (5.13)$$

e

$$u(a, y) = 0 \Rightarrow X(a)Y(y) = 0 \quad (5.14)$$

Note que, para serem satisfeitas as equações (5.13) e (5.14). Então,

$$X(0) = 0 \text{ e } X(a) = 0,$$

que são as condições de contorno em relação a x , ou seja, condições em relação ao comprimento da placa retangular. Portanto temos a seguinte P.V.I

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & \text{se } 0 < x < a; \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Resolvendo a equação diferencial ordinária (5.15) pelo método dos coeficientes indeterminados, temos o polinômio característico

$$r^2 + \lambda = 0 \quad (5.16)$$

Portanto as raízes serão $r = \pm\sqrt{-\lambda}$. Analisando as possibilidades para as raízes da equação característica (5.16), temos:

1. Para $\lambda = 0$, as raízes serão reais repetidas, ou seja, $r = \pm\sqrt{0} = 0$. Então a solução será do tipo, $X(x) = c_1 + c_2x$, conforme visto em (5.5). Fazendo as substituições de acordo com as condições de contorno em (5.15), temos

$$X(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0$$

$$X(a) = 0 + c_2a = 0.$$

E portanto $c_1 = c_2 = 0$, e a solução é a trivial $X(x) = 0$.

2. Para $\lambda < 0$, as raízes serão reais distintas, e por (5.6) a solução é dada por:

$$X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Fazendo as substituições, obtemos

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

o que implica $c_1 = -c_2$. Além disso, para $x = a$ temos:

$$X(a) = -c_2e^{\sqrt{-\lambda}a} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}a} = 0.$$

Como a exponencial é sempre positiva, temos que $c_2 = c_1 = 0$ e a solução é a trivial.

3. Para $\lambda > 0$, teremos raízes complexas, pois $r = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$. A solução é do tipo

$$X(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sen(\sqrt{\lambda}x).$$

Substituindo as condições de contorno, temos

$$X(0) = c_1\cos(0) + c_2\sen(0) = 0,$$

o que resulta em $c_1 = 0$.

Ainda,

$$X(a) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}a) + c_2\sen(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Como $c_1 = 0$, para obtermos a igualdade $c_2\sen(\sqrt{\lambda}a) = 0$ o $\sen(\sqrt{\lambda}a)$ deve ser múltiplo de π , ou seja, $\sqrt{\lambda}a = n\pi$. Dessa forma, teremos que

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad (5.17)$$

são os autovalores do problema para todo $n \in \mathbb{Z}$, e assim as soluções não-triviais são as autofunções

$$X_n(x) = c_2\sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (5.18)$$

Vamos agora encontrar a solução para a equação diferencial ordinária (5.4). Como já encontramos o valor de λ dado por (5.17), então faremos a substituição na equação diferencial ordinária em relação a y dada por (5.4). Logo

$$Y''(y) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y(y) = 0.$$

As raízes da equação característica são

$$m = \pm \frac{n\pi}{a},$$

os quais são reais e distintas, e portanto as soluções são

$$Y_n(y) = c_3 e^{\frac{n\pi y}{a}} + c_4 e^{-\frac{n\pi y}{a}} = c_3 \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + c_4 \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (5.19)$$

Assim, como a solução possui o formato $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$, que é a multiplicação entre as autofunções (5.18) e (5.19):

$$u_n(x, y) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left[c_2 c_3 \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + c_4 \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right]$$

Considerando agora a condição de contorno que representa a temperatura nula nas extremidades $y = b$, temos que $u_n(x, b) = X_n(x)Y_n(b) = 0$, isto é, $Y_n(b) = 0$. Logo

$$0 = c_3 \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + c_4 \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

E assim

$$c_4 = -c_3 \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \left[\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \right]^{-1} = -c_3 \operatorname{cotanh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

Portanto, sendo as funções $\cosh(y)$ e $\sinh(y)$, par e ímpar, respectivamente,

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= c_3 \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - c_3 \operatorname{coth}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\ &= \frac{c_3 \left[\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) - \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right]}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \\ &= \frac{c_3 \left[\cosh\left(\frac{n\pi(-y)}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(-y)}{a}\right) \right]}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \\ &= c_3 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Denotando por $A_n = c_2 c_3$, temos que por (5.18) e (5.20) que

$$u_n(x, y) = A_n \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

para $n = 1, 2, \dots$. Tendo em vista o método de Fourier, queremos que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

seja solução para (5.10), (5.11) e (5.12). Para isso, falta considerar o último dado inicial $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{cosech} \left(\frac{n\pi b}{a} \right) \sinh \left(\frac{n\pi}{a}(b-0) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) = f(x)$$

Denotando $a_n = A_n \operatorname{cosech} \left(\frac{n\pi b}{a} \right) \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right) = A_n 1 = A_n$, temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right),$$

a qual é uma expansão em série de senos de $f(x) = u(x, b)$. Portanto

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx,$$

Finalmente, a solução de (5.10), (5.11) e (5.12) é

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \operatorname{cosech} \left(\frac{n\pi b}{a} \right) \sinh \left(\frac{n\pi}{a}(b-y) \right) \\ &\quad \times \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx, \end{aligned}$$

e assim a solução acima representa a distribuição de temperatura na placa retangular. Note que, se atribuírmos valores para y e x no intervalo $[0, b]$ e $[0, a]$, respectivamente, obteremos a temperatura no ponto de coordenadas (x, y) da placa.

5.5 PROBLEMA DE NEUMANN

Para a equação de Laplace (3.1), encontraremos uma solução $u(x, y)$ para o retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$. Que satisfaça as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= 0, & u_x(a, y) &= f(y), & 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) &= 0, & u_y(x, b) &= 0, & 0 < x < a, \end{aligned}$$

onde as extremidades superior e inferior estão isoladas.

Usando o método de separação de variáveis, como visto na Seção 5.1, supomos

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

e por (5.10), temos que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (5.21)$$

Igualando (5.21) a constante $-\lambda$, surge que

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (5.22)$$

e

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (5.23)$$

Inicialmente resolveremos a equação (5.23) através do método de coeficientes indeterminados, com equação característica dada por

$$r^2 - \lambda = 0,$$

Cujas raízes são dadas por

$$r = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Considerando as condições de contorno da variável y , temos que

$$0 = u_y(x, 0) = X(x)Y'(0)$$

e

$$0 = u_y(x, b) = X(x)Y'(b)$$

o que implica $Y'(0) = 0$ e $Y'(b) = 0$ e assim temos a seguinte P.V.I

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{cases}$$

1. Analisando para $\lambda = 0$, temos que as raízes encontradas serão reais repetidas. Portanto, a solução será do tipo

$$Y_0(y) = c_1 + c_2 y.$$

Além disso, pela condição de contorno $Y'(0) = Y'(b) = 0$, temos que

$$Y'_0(y) = c_2.$$

Assim, substituindo as condições de contorno na derivada, segue que

$$Y'_0(0) = c_2 = 0 = Y'_0(b)$$

e portanto a solução é $Y_0(y) = c_1$ para todo $y \in (0, b)$.

2. Para $\lambda > 0$, teremos que as raízes $\sqrt{\lambda}$ e $-\sqrt{\lambda}$ são reais e distintas. Desta forma, a solução é

$$Y(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}. \quad (5.24)$$

Derivando a solução (5.24), temos

$$Y'(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}y} \sqrt{\lambda} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}y} \sqrt{\lambda}.$$

Substituindo as condições de contorno,

$$Y'(0) = c_1 \sqrt{\lambda} - c_2 \sqrt{\lambda} = 0,$$

isto é, $c_1 = c_2$. Além disso,

$$Y'(b) = c_2 e^{\sqrt{\lambda}b} \sqrt{\lambda} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}b} \sqrt{\lambda} = 0,$$

o que implica $c_2 e^{2\sqrt{\lambda}b} = 0$. Sendo a exponencial sempre positiva, concluímos que $c_1 = c_2 = 0$.

3. Para $\lambda < 0$, a solução será de raízes complexas. Então,

$$Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}y) + c_2 \sen(\sqrt{-\lambda}y) \quad (5.25)$$

Derivando a solução acima, temos que

$$Y'(y) = -c_1 \sen(\sqrt{-\lambda}y) \sqrt{-\lambda} + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}y) \sqrt{-\lambda}.$$

Substituindo as condições de contorno, segue que

$$Y'(0) = -c_1 \sen(0) \sqrt{-\lambda} + c_2 \cos(0) \sqrt{-\lambda} = 0.$$

Desta forma, $c_2 = 0$. Além disso,

$$Y'(b) = -c_1 \sen(\sqrt{-\lambda}b) \sqrt{-\lambda} + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}b) \sqrt{-\lambda} = 0.$$

Como $c_2 = 0$, então nos resta que $-c_1 \sen(\sqrt{-\lambda}b) \sqrt{-\lambda} = 0$. Note que, para a função $\sen(\sqrt{-\lambda}b) \sqrt{-\lambda} = 0$, teremos que $\sqrt{-\lambda}b$ deve ser múltiplo de π . Logo,

$$\sqrt{-\lambda}b = n\pi \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{b} \Rightarrow -\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (5.26)$$

Portanto, temos que

$$Y'(y) = -c_1 \frac{n\pi}{b} \sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (5.27)$$

Note que a solução encontrada é a derivada da solução que realmente estamos interessados, ou seja, $Y(y)$. Portanto, de (5.25) temos que a solução não-trivial é dada por

$$Y_n(y) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (5.28)$$

Agora, resolveremos a equação diferencial ordinária dada por (5.22). Para os autovalores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, dado por (5.26), substituindo em (5.22), temos a equação característica

$$r^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = 0$$

Logo, a raiz é $r = \pm \frac{n\pi}{b}$. Portanto, a solução em relação a variável x , será do tipo

$$X_n(x) = c_3 e^{\frac{n\pi x}{b}} + c_4 e^{-\frac{n\pi x}{b}}.$$

ou, equivalentemente, denotando com as mesmas constantes (sem risco de confusão),

$$X_n(x) = c_3 \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + c_4 \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right). \quad (5.29)$$

Derivando a solução (5.29), para aplicarmos a condição de contorno $X'(0) = 0$, temos

$$X'_n(x) = c_3 \frac{n\pi}{b} \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + c_4 \frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (5.30)$$

Fazendo a constante $c_3 \frac{n\pi}{b} = d_n$ com $n = 1, 2, \dots$ da equação $X'(x)$ e aplicando a condição $X'(0) = 0$, temos $0 = X'(0) = d_n \sinh(0) + c_4 \frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$, o que implica $c_4 = 0$.

Portanto

$$X_n(x) = d_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right),$$

que é a autofunção em relação a variável x . Portanto, para cada $n = 1, 2, \dots$ temos

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = c_3 \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) c_1 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Denotando $c_3 c_1 = A_n$, temos

$$u_n(x, y) = A_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Agora, para o autovalor $\lambda = 0$, temos que $X_0(x) = c_5 + c_6 x$ e $X'(x) = c_6$. Como $X'(0) = 0$, segue que $c_6 = 0$ e portanto $X_0(x) = c_5$. Logo,

$$u_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = c_5 c_1 := A_0$$

Portanto $u_0(x, y) = a_0$ e $u_n(x, y) = c_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$, $n = 1, 2, \dots$ resolvem a equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{em } (0, a) \times (0, b); \\ u_x(0, y) = 0, & \text{se } y \in (0, b) \\ u_y(x, 0) = 0, & u_y(x, b) = 0, \quad x \in (0, a) \end{cases} \quad (5.31)$$

Por outro lado, queremos, em vista do método de Fourier que

$$u(x, y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.32)$$

seja solução para (5.31) e ainda, com a condição

$$u_x(a, y) = f(y), \quad y \in (0, b). \quad (5.33)$$

Derivando (5.32) com relação à x , temos

$$u_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (5.34)$$

Aplicando a condição (5.33) em (5.34), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y).$$

Denotando

$$a_n = A_n \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right),$$

vemos que (5.5) é uma expansão em série de cossenos de $f(y) = u_x(a, y)$. Portanto,

$$A_n \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sinh \left(\frac{n\pi a}{b} \right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy,$$

e assim temos

$$A_n = \frac{2}{n\pi \sinh \left(\frac{n\pi a}{b} \right)} \int_0^b f(y) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy$$

Além disso,

$$A_0 = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) dy.$$

Portanto

$$u(x, y) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) dy + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi \sinh \left(\frac{n\pi a}{b} \right)} \int_0^b f(y) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \right) \times \cosh \left(\frac{n\pi x}{b} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

é a solução do problema de Neumann.

6 CONCLUSÃO

Em relação a convergência da Série de Fourier, teoremas de convergência nos mostram que nos pontos onde f é descontínua, por exemplo, onde f apresenta um salto, a série de Fourier converge para a média das imagens nos extremos do salto e, caso f seja contínua, sua série de Fourier converge para a própria imagem de f .

Em vista das aplicações realizadas nas Seções 5.4 e 5.5, encontramos as soluções analíticas para a Equação de Laplace com condições de contorno de Dirichlet e Neumann via métodos de separação de variáveis e Fourier. Podemos perceber que tais soluções estão ligadas com a representação em série de Fourier dos valores de contorno f .

Um exemplo da importância das equações diferenciais, é a aplicação da equação de Laplace na fabricação mecânica. Alguns componentes das máquinas industriais precisam ser mantidas em temperaturas específicas, para manterem o ritmo de produtividade e não causarem nenhum tipo de prejuízo. Desta forma, é feito um estudo em uma amostra (pequena placa) do material que será usado para a fabricação destes componentes. O estudo é realizado para descobrir como a distribuição da temperatura se comporta no material, evitando qualquer tipo de problema no componente que venha comprometer a produção na indústria.

REFERÊNCIAS

- AXLER, P.; BOURDON, S.; RAMEY, W. **Harmonic Function Theory**. 2. ed. New York: Springer Verlag, 2001. Citado na página 19.
- BOBADILLA, J.; MARTINEZ, H. **Análisis de la Convergencia de las Series de Fourier**. 1. ed. Hermosillo: Universidad de Sonora, 1996. Citado na página 34.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. Citado na página 47.
- FIGUEIREDO, D. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. IMPA Rio de Janeiro: LTC, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 27, 31, 34 e 38.
- IÓRIO, R.; IÓRIO, V. **Equações Diferenciais Parciais: uma introdução**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Citado na página 21.
- LIMA, E. Lages. **Análise Real: Funções de uma variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Citado na página 37.
- SIMMONS, G.; KRANTZ, S. **Equações diferenciais: teoria, técnica e prática**. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 47.
- ZILL, D.; CULLEN, M. **Matemática Avançada para Engenharia**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. Citado na página 20.