

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CURSO SUPERIOR DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS GABRIEL RIBEIRO DE SOUZA

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH NA
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2015

LUCAS GABRIEL RIBEIRO DE SOUZA

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH NA
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina de Trabalho de Diplomação, do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática - DAMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: André Luiz Machado Martinez

CORNÉLIO PROCÓPIO

2015



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
CâmpusCornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

André Luis Machado Martinez
(orientador)

Anderson Paião dos Santos

Cristiane Aparecida Pendeza Martinez

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

AGRADECIMENTOS

A minha família que sempre me apoiou em todos os momentos que precisei.

Aos meus amigos que me deram forças para continuar.

Ao Prof. Dr. André Luis Machado Martinez pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos professores da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Cornélio Procópio que auxiliaram, de alguma forma na minha graduação.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

RESUMO

SOUZA, Lucas. APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

O uso de Teoremas de Ponto Fixo é um método eficiente na resolução de equações diferenciais, por isso, o presente trabalho trata de conceitos básicos que servem para a melhor compreensão do Teorema de Ponto Fixo de Banach, o qual é aplicado na resolução da equação de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira, a qual foi modelada como uma equação integral com a utilização de Funções de Green, para que seja possível a aplicação do Teorema.

Palavras-chave: Ponto Fixo, Teorema de Banach, Equações Diferenciais

ABSTRACT

SOUZA, Lucas. APLICATION OF BANACH'S FIXED POINT THEOREM IN THE RESOLUTION OF DIFERENTIAL EQUATIONS . 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

The use of Banach's fixed point theorem it's a efficient method in the resolution of differential equations, that is why this present work deal with basics concepts that serve to a better understanding of Banach's fixed point theorem , which is applied in the resolution of the equation of second order with multiples points of frontier which was modelled like a integral equation with the use of Green functions, to be possible the application of the theorem.

Keywords: Fixed Point, Banach's Theorem, Diferencial Equations

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	PRELIMINARES	9
2.1	MÉTRICAS E NORMAS	9
2.1.1	Normas Euclidianas	13
2.2	ABERTOS, FECHADOS E COMPACTOS	19
2.3	LIMITES E CONTINUIDADE	21
2.3.1	Funções Contínuas	24
2.3.2	Funções Contínuas e Compactos	26
2.3.3	Funções Contínuas e Conjuntos Conexos	28
2.3.4	Conjuntos Convexos e Funções Convexas	29
2.3.5	Continuidade Uniforme	31
3	TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH	33
3.1	TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH	33
3.2	SOLUÇÃO DO PROBLEMA	36
3.2.1	SOLUÇÕES ITERATIVAS	41
4	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

O foco principal deste trabalho está no estudo de existência e unicidade de solução para o seguinte problema de valor de fronteira não linear:

$$\begin{cases} u'' + f(t, u, u') = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = g(u(\eta_1), u(\eta_2), \dots, u(\eta_{m-2})) \end{cases}, \quad (1)$$

onde $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e, possivelmente, não lineares. Este problema é conhecido na literatura como problema de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira, ou simplesmente, como m -pontos. Os primeiros resultados de existência de solução foram apresentados por (IL'IN; MOISEEV, 1987a) e (IL'IN; MOISEEV, 1987b) cuja equação considerada foi:

$$\begin{cases} u'' = f(t, u, u') \\ u(0) = 0, u(1) = \sum_{k=1}^{m-2} u(\eta_k) \end{cases}, \quad (2)$$

Segundo (LIN; CUI, a) e (LIN; CUI, b) variações deste problema surgem no contexto de modelos de fluxo elástico e viscoelástico, aplicações relacionadas com designe de pontes são apresentadas por (ZOU et al., 2007). Devido à importância dessa classe de problemas em diversas aplicações, muitos autores têm desenvolvido estudos considerando variações e generalizações de (2). A maior parte desses estudos são relacionados à existência de solução, dentre eles, temos (GUPTA, 1992), (GUPTA; TROFIMCHUK, 1997), (MA, 1997a), (MA, 1997b), (WONG; AGARWAL, 1995). Porém também temos trabalhos que tratam da obtenção de solução numérica, dentre eles temos (CASTELANI; MA, 2007) e (MARTINEZ et al., 2012). Neste trabalho, nos baseamos especialmente em (MARTINEZ et al., 2013). Para a equação (1), implementaremos o algoritmo baseado na sequência iterativa definida pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach e realizaremos testes numéricos com o auxílio do programa MATLAB. Para tornar possível a aplicação do teorema será necessário utilizar funções de Green para representar o problema como uma equação integral. Esse trabalho contempla também uma revisão bibliográfica nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 sobre conceitos básicos de Espaços métricos e Análise no \mathbb{R}^n relacionados ao Teorema de Ponto Fixo de Banach. O trabalho foi dividido de forma que o estudo dos

conceitos básicos e demonstração do Teorema de Ponto Fixo de Banach ficassem para um primeiro momento, e no segundo momento fosse realizada a modelagem do problema (1) como uma equação integral e estabelecidas hipóteses sobre as funções componentes do problema de modo que tornem possível a aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Banach. Motivados pela tese do teorema de Banach realizamos testes numéricos. A escolha do tema levou em consideração a possibilidade de se trabalhar com conceitos básicos de Análise que não são vistos nas disciplinas regulares do curso, deste modo no desenvolvimento do TCC estamos contribuindo para enriquecimento curricular.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo faremos um estudo relacionado a alguns conceitos básicos, dos quais se destacam os de espaços métricos, limite e continuidade. Estes servirão de base para o desenvolvimento de conceitos relacionados ao Teorema de Ponto Fixo de Banach e equações diferenciais, bem como suas aplicações. Esses conceitos são baseados em (CIPOLATTI,) e (LIMA, 2013)

2.1 MÉTRICAS E NORMAS

Chamamos de métricas às funções que permitem "medir distâncias" entre pontos de um dado conjunto A , e chamamos de normas às funções que permitem "medir comprimentos" de um espaço vetorial X .

Definição 2.1.1 (*Métricas*)

Seja X um conjunto. Uma métrica em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$.

Exemplo 2.1.2 *A definição 2.1.1 é geral o suficiente para que se possa medir distâncias num conjunto qualquer não vazio. De fato, se X é um conjunto qualquer não vazio, defina $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Com efeito a função $d(x, y)$ é uma métrica, pois

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$, pois, pela construção da função temos que $d(x, y) = 0$ ou $d(x, y) = 1$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Com efeito, pela construção da função temos que $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$, pois se $x \neq y$, então $y \neq x$, logo para $x \neq y$ temos que $d(x, y) = 1 = d(y, x), \forall x, y \in X$, e para o caso em que $x = y$, temos que $y = x$, então $d(x, y) = 0 = d(y, x), \forall x, y \in X$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$. De fato, se $x \neq y$ então temos que $x = z \Rightarrow z \neq y$, ou seja, $d(x, y) = 1 \leq 1 = 0 + 1 = d(x, z) + d(z, y)$ ou $y = z \Rightarrow x \neq z$, que implica em $d(x, y) = 1 \leq 1 = 1 + 0 = d(x, z) + d(z, y)$ ou $x \neq z$ e $y \neq z$, isto é, $d(x, y) = 1 \leq 2 = 1 + 1 = d(x, z) + d(z, y)$. Se $x = y$, então $d(x, y) = 0$, e pelo item 1 de 2.1.1 temos que uma métrica é sempre positiva, ou seja, $d(x, z) \geq 0$ e $d(z, y) \geq 0$, portanto $d(x, z) + d(z, y) \geq 0 = d(x, y)$.

Por 1, 2, 3 e 4, temos que a função $d(x, y)$ é uma métrica.

Definição 2.1.3 (*Espaços Métricos*)

Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .

Definição 2.1.4 (*Normas*)

Seja X um espaço vetorial. Uma norma em X é qualquer função $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in X$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

A desigualdade em 4 é denominada desigualdade triangular.

Observação 2.1.5 *Através das definições de métricas e normas, nota-se que toda norma num espaço vetorial induz uma métrica nesse mesmo espaço. Com efeito, se $\| \cdot \|$ é uma norma num espaço vetorial X , temos que $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em X .*

De fato,

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$: Pois, pela definição de norma, temos que $\|x - y\| \geq 0$, ou seja, $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$: Pois, pela definição de norma, temos que $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$: Por construção, temos que $d(x, y) = \|x - y\|$, então pela propriedade (3) de norma temos: $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = 1\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$: Por construção, temos que $d(x, y) = \|x - y\|$, então pela desigualdade triangular temos:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Por 1, 2, 3 e 4, temos que $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em X .

Por outro lado, nem toda norma provém de uma métrica.

Lema 2.1.6 Se $\|\cdot\|$ é uma norma em X , então para todo $x, y \in X$ temos

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \text{ e } |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Demonstração: Da desigualdade triangular temos que

$$\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|.$$

Logo,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \tag{3}$$

Analogamente,

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x + y\| + \|-x\| = \|x + y\| + \|x\|$$

Portanto,

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|. \tag{4}$$

As desigualdades 3 e 4 nos fornecem a primeira desigualdade:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

Analogamente temos que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|,$$

pois

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \text{ e} \\ \|y\| &= \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Definição 2.1.7 *Seja X um espaço vetorial e $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_{**}$ duas normas definidas em X . Dizemos que essas normas são equivalentes se:*

$$\exists a, b > 0 \text{ tais que } a\|x\|_* \leq \|x\|_{**} \leq b\|x\|_*, \forall x \in X.$$

2.1.1 NORMAS EUCLIDIANAS

Sabemos que o conjunto \mathbb{R}^n , munido das operações usuais de soma e produto por escalar, é um espaço vetorial de dimensão n . As expressões abaixo definem normas equivalentes em \mathbb{R}^n : se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

De maneira mais geral,

Teorema 2.1.8 *Se $1 \leq p < +\infty$, então*

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$$

é uma norma em \mathbb{R}^n .

A demonstração deste resultado faz uso da Desigualdade de Young, que enunciamos e demonstramos a seguir:

Lema 2.1.9 *Sejam p e $q \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p, q < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade:*

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Demonstração: *Seja a função real $t \mapsto \ln(t)$. Para todos $\alpha, \beta > 0$ temos que:*

$$\ln(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \geq \lambda \ln \alpha + (1-\lambda) \ln \beta, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Fazendo $\lambda = \frac{1}{p}$ e $(1-\lambda) = \frac{1}{q}$ temos que

$$\ln\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right) \geq \frac{\ln \alpha}{p} + \frac{\ln \beta}{q} = \ln \alpha^{\frac{1}{p}} + \ln \beta^{\frac{1}{q}} = \ln(\alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}}).$$

Como $\ln(t)$ é crescente, então temos que

$$\ln\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right) \geq \ln(\alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}}) \Rightarrow \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} \geq \alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}}.$$

Considerando $\alpha = |x|^p$ e $|y|^q = \beta$, temos:

$$(|x|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|y|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \Rightarrow |x| \cdot |y| = |x \cdot y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

□

Definição 2.1.10 Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de \mathbb{R}^n , definimos o produto escalar usual de \mathbb{R}^n por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Como consequência do lema anterior, temos a desigualdade de Hölder, enunciada e demonstrada a seguir.

Corolário 2.1.11 Sejam p e $q \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p, q < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale a desigualdade:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Demonstração: Considere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vetores de \mathbb{R}^n . Assim pela desigualdade de Young, temos

$$|\langle \lambda x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| |y_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^p |x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right), \forall \lambda > 0. \quad (5)$$

Dividindo a desigualdade 5 por λ , teremos:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^{p-1} |x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{\lambda q} \right), \forall \lambda > 0. \quad (6)$$

Fixando x e y em 6, temos que a segunda parte da desigualdade define uma função na variável $\lambda \in]0, +\infty[$, isto é,

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^{p-1} \|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{\lambda}.$$

Logo, $|\langle x, y \rangle| \leq \min_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)$. Calculando o valor mínimo de $\varphi(\lambda)$ teremos:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \frac{q\lambda^p \|x\|_p^p + p\|y\|_q^q}{\lambda pq} \\ \Leftrightarrow \varphi'(\lambda) &= \frac{p^2 q^2 \lambda^p \|x\|_p^p - pq(q\lambda^p \|x\|_p^p + p\|y\|_q^q)}{p^2 q^2 \lambda^2} \\ \Leftrightarrow \varphi'(\lambda) &= \frac{pq^2 \lambda^p \|x\|_p^p (p-1) - p^2 q \|y\|_q^q}{p^2 q^2 \lambda^2}.\end{aligned}$$

Igualando a derivada primeira a zero teremos:

$$\begin{aligned}\frac{pq^2 \lambda^p \|x\|_p^p (p-1) - p^2 q \|y\|_q^q}{p^2 q^2 \lambda^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow pq^2 \lambda^p \|x\|_p^p (p-1) - p^2 q \|y\|_q^q &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^p pq^2 \|x\|_p^p (p-1) &= \|y\|_q^q p^2 q \\ \Leftrightarrow \lambda^p q \|x\|_p^p (p-1) &= \|y\|_q^q p.\end{aligned}$$

Como $\frac{p}{q} = p-1$, então

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^p \|x\|_p^p &= \|y\|_q^q \\ \Leftrightarrow \lambda &= \left(\frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } \|x\|_p \neq 0.\end{aligned}$$

Substituindo λ encontrado acima em $\varphi(\lambda)$ teremos:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \frac{q\|y\|_q^q + p\|y\|_q^q}{\lambda pq} \\ &= \frac{\|y\|_q^q}{\lambda} \left(\frac{q}{pq} + \frac{p}{pq} \right) \\ &= \frac{\|y\|_q^q}{\lambda} \\ &= \frac{\|y\|_q^q \|x\|_p}{\|y\|_q^{\frac{q}{p}}} \\ &= \|y\|_q^{q-\frac{q}{p}} \|x\|_p \\ &= \|y\|_q^{\frac{pq-q}{p}} \|x\|_p \\ &= \|y\|_q \|x\|_p.\end{aligned}$$

Logo, como $|\langle x, y \rangle| \leq \min_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)$, e $\min_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) = \|x\|_p \|y\|_q$, temos que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. \square

Observação 2.1.12 A desigualdade de Hölder no caso $p = 2$ é denominada *Desigualdade de Schwarz*.

Na sequência, faremos a demonstração do Teorema 2.1.8.

Com efeito, basta mostrar a desigualdade triangular, as outras propriedades são imediatas. Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, temos da definição:

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Considerando os vetores

$$a = (|x_1|, \dots, |x_n|), \quad b = (|y_1|, \dots, |y_n|) \quad \text{e} \quad c = (|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|),$$

podemos expressar a desigualdade acima na forma

$$\|x + y\|_p^p \leq \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle.$$

Decorre, então, da desigualdade de Hölder,

$$\|x + y\|_p^p \leq \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle \leq \|a\|_p \|c\|_q + \|b\|_p \|c\|_q.$$

Observando que

$$\|a\|_p = \|x\|_p, \quad \|b\|_p = \|y\|_p \quad \text{e} \quad \|c\|_q = \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x + y\|_p^{p-1},$$

obtemos

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1}.$$

□

Outros espaços vetoriais que desempenham um papel importante na Análise são: Espaços Vetoriais de Polinômios, Espaços Vetoriais de Matrizes e Espaços Vetoriais de Funções Contínuas.

Espaços Vetoriais de Polinômios:

Seja $V = \mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a n , munido das operações

usuais de soma de polinômios e produto por escalar. Então, V é um espaço vetorial de dimensão $n + 1$.

As expressões abaixo definem normas equivalentes em V : se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, então

$$\|P\|_p = \left(\sum_{i=0}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } p \in [1, +\infty[,$$

$$\|P\|_\infty = \max\{|a_i|; i = 0, \dots, n\}.$$

Espaços Vetoriais de Matrizes:

Seja $V = \mathcal{M}_{m \times n}$ o conjunto das matrizes a coeficientes reais de ordem $m \times n$, munido das operações usuais de soma de matrizes e produto por escalar. Então, V é espaço vetorial de dimensão mn .

As expressões abaixo definem normas equivalentes em V : se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

então:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } p \in [1, +\infty[,$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{ij}|; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}.$$

Teorema 2.1.13 *Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão n e $T : V \rightarrow W$ um isomorfismo. Se $\|\cdot\|_W$ é norma em W , então a expressão*

$$\|u\|_V = \|T(u)\|_W \tag{10}$$

define uma norma em V . Além disso, se $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ são normas equivalentes em W , então as normas de V definidas pela relação 10 são normas equivalentes em V .

Espaços Vetoriais de Funções Contínuas:

Seja $V = C([a, b]; \mathbb{R})$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[a, b]$, munido das operações usuais de soma de funções e produto por escalar. Então, V é um espaço vetorial de dimensão infinita. As expressões abaixo definem normas em V :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } p \in [1, +\infty[,$$

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in [a, b]\}.$$

2.2 ABERTOS, FECHADOS E COMPACTOS

Nesta seção introduziremos conceitos básicos de Topologia em Espaços Normados.

Definição 2.2.1 *Sejam V um espaço vetorial munido de uma norma $\| \cdot \|$, $x_0 \in V$ e $r > 0$. O conjunto*

$$B_r(x_0) = \{x \in V; \|x - x_0\| < r\}$$

é denominado bola aberta de centro em x_0 e raio r .

Definição 2.2.2 *Seja A um subconjunto de V e $x_0 \in V$.*

- *Dizemos que x_0 é ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.*
- *Dizemos que x_0 é ponto de acumulação de A se para todo $r > 0$, $(B_r(x_0) - \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.*

Definição 2.2.3 *O conjunto de todos os pontos interiores de A é denominado interior de A , e denotado por $\overset{\circ}{A}$:*

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A; x \text{ é ponto interior de } A\}$$

Definição 2.2.4 *O conjunto dos pontos de acumulação de A é denominado derivado de A , denotado por A' :*

$$A' = \{x \in A; x \text{ é ponto de acumulação de } A\}$$

Definição 2.2.5 *Dizemos que um subconjunto A de V é aberto se todos os seus pontos são pontos interiores, isto é, $A = \overset{\circ}{A}$.*

Definição 2.2.6 *Dizemos que um subconjunto A de V é fechado, se A^c é aberto.*

Definição 2.2.7 *Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de V é denominada cobertura de um dado conjunto B se*

$$B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Se A_λ é conjunto aberto para todo $\lambda \in \Lambda$, dizemos que a cobertura é aberta. Se Λ é um conjunto finito, dizemos que a cobertura é finita.

Definição 2.2.8 Um conjunto $K \subset V$ é compacto, se toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita, isto é, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura aberta de K , então existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_k}.$$

2.3 LIMITES E CONTINUIDADE

Nesta seção denotaremos por $\| \cdot \|$ as normas euclidianas, ($\| \cdot \|_2$) sobre \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m .

Definição 2.3.1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A'$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que b é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 em A se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A \text{ e } 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$$

Notação: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Observação 2.3.2 *A definição acima pode ser escrita utilizando-se a notação de bolas, ou seja,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in A \cap (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b).$$

Ou ainda,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; f(A \cap (B_\delta(x_0))) \subset B_\varepsilon(b).$$

Teorema 2.3.3 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, onde $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, m$, $x_0 \in A'$ e $b \in \mathbb{R}^m$, $b = (b_1, \dots, b_m)$. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i, \forall i = 1, \dots, m.$$

Demonstração: Suponha $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i$ e seja $\varepsilon > 0$. Então existem $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$ tais que $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \frac{\varepsilon}{m}$. Se $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m , então considerando-se $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ para $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta$, temos:

$$\|f(x) - b\| \leq |f_1(x) - b_1| \|e_1\| + \dots + |f_m(x) - b_m| \|e_m\| < \varepsilon.$$

Agora, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta$, então $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. Como $|f_i(x) - b_i| \leq \|f(x) - b\|$, para todo $i = 1, \dots, m$, segue o resultado.

□

Teorema 2.3.4 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in A'$. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \text{Para todo } \{x_k\}_k \subset A \text{ tal que } x_k \neq x_0, \forall k \text{ e } x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_k) \rightarrow b.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (CIPOLATTI,).

Teorema 2.3.5 *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = b \pm c \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = bc. \quad (12)$$

Além disso, se $c \neq 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{b}{c} \quad (13)$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (CIPOLATTI,).

Corolário 2.3.6 *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in A'$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$, então,*
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle.$

Observação 2.3.7 *É preciso ter cuidado com o limite de funções compostas, já que é intuitivo esperar que se*

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in A' \text{ e } g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k, y_0 \in B'$$

são tais que $f(A) \subset B$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = z_0.$$

Porém, isso nem sempre é verdadeiro, para mostrarmos isso, daremos o contra-exemplo a seguir:

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad e \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad e \quad \lim_{y \rightarrow 1} g(y) = 1.$$

Mas,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = 0.$$

Lema 2.3.8 *Sejam $\| \cdot \|_*$ e $\| \cdot \|_{**}$ normas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respectivamente, equivalentes às normas euclidianas. Então, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ relativamente às normas $\| \cdot \|_*$ e $\| \cdot \|_{**}$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ relativamente às normas euclidianas.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em (CIPOLATTI,).

2.3.1 FUNÇÕES CONTÍNUAS

Definição 2.3.9 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in A \cap A'$. Dizemos que f é contínua em x_0 se*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Mais precisamente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A \text{ e } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Observação 2.3.10 *Também podemos utilizar a noção de bolas para definir uma função contínua, ou seja:*

$$f \text{ é contínua em } x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A \cap B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)),$$

ou de forma mais concisa,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; f(A \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Observação 2.3.11 *Provém das propriedades de limite os seguintes fatos:*

- *Se $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, então f é função contínua em x_0 se, e somente se, $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 ;*
- *Se $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em x_0 e $\lambda \in \mathbb{R}$, então as funções $f + g, fg$ e λf são contínuas em x_0 . Além disso, se $g(x) \neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ é contínua em x_0 .*

Teorema 2.3.12 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ tais que $f(A) \subset B$. Se $x_0 \in A', y_0 \in B \cap B'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ e g é contínua em y_0 , então*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0).$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como g é contínua em y_0 , existe $\mu > 0$ tal que $y \in B \cap B_\mu(y_0) \Rightarrow g(y) \in B_\varepsilon(g(y_0))$. Como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\mu(y_0)$. Portanto,

$$x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow y = f(x) \in B_\mu(y_0),$$

e conseqüentemente

$$g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(y_0)).$$

□

Definição 2.3.13 Quando uma função f é contínua em todos os pontos de seu domínio, então dizemos que f é uma função contínua.

Teorema 2.3.14 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então as afirmações abaixo são equivalentes:

1. f é função contínua;
2. se A é aberto em $\mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(A)$ é aberto em \mathbb{R}^n ;
3. se F é fechado em $\mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(F)$ é fechado em \mathbb{R}^n .

Demonstração: Primeiramente provaremos que 1 implica em 2, e que 2 implica em 1:

Seja $x_0 \in f^{-1}(A)$. Então, $y_0 = f(x_0) \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y_0) \subset A$. Como f é contínua em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0) \subset A$. Logo $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$. Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$ seja $A = B_\varepsilon(y_0)$ com $y_0 = f(x_0)$. Como A é aberto, temos por hipótese $f^{-1}(A)$ é aberto. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$. Portanto, $f(B_\delta(x_0)) \subset f(f^{-1}(A)) \subset A$. Agora mostraremos que 2 implica em 3, e que 3 implica em 2:

Se F é fechado, então $A = F^c$ é aberto. Por 2, $f^{-1}(A) = [f^{-1}(F)]^c$ é aberto. Logo $f^{-1}(F)$ é fechado. Reciprocamente, se A é aberto, então $F = A^c$ é fechado. Por 3, $f^{-1}(F) = [f^{-1}(A)]^c$ é fechado. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto. □

2.3.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS E COMPACTOS

Teorema 2.3.15 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Então, $f(K)$ é conjunto compacto de \mathbb{R}^m*

Demonstração: Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura qualquer de $f(K)$. Queremos verificar se ela admite uma subcobertura finita. Como $f(K) \subset \bigcup_{\lambda} A_\lambda$, temos

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(A_\lambda).$$

Como f é contínua, segue que $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ é cobertura aberta de K . Como K é compacto, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{\lambda_k})$. Portanto,

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^k f^{-1}(A_{\lambda_i})\right) = \bigcup_{i=1}^k (f^{-1}(A_{\lambda_i})) \subset \bigcup_{i=1}^k A_{\lambda_i}.$$

□

Corolário 2.3.16 *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então existe $\underline{x}, \bar{x} \in K$ tais que*

$$f(\underline{x}) = \min\{f(x); x \in K\} \text{ e } f(\bar{x}) = \max\{f(x); x \in K\}.$$

Demonstração: Pelo teorema anterior, $f(K)$ é compacto de \mathbb{R} . Logo é fechado e limitado. Sendo limitado temos $\bar{s} = \sup f(K) < +\infty$ e $\underline{s} = \inf f(K) > -\infty$. Sendo fechado temos $\bar{s} \in f(K)$ e $\underline{s} \in f(K)$. Portanto, existem $\underline{x}, \bar{x} \in K$ tais que $\underline{s} = f(\underline{x})$ e $\bar{s} = f(\bar{x})$. □

Teorema 2.3.17 *Todas as normas em \mathbb{R}^n são equivalentes.*

Demonstração: Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|_1$ a norma definida por $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$, onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq M \|x\|_1,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n e $M = \max\{\|e_i\|; i = 1, \dots, n\}$. Sejam $K = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_1 = 1\}$ e $f(x) = \|x\|$. Então $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é função contínua (relativamente à norma $\|\cdot\|_1$ de \mathbb{R}^n). Como K é fechado e limitado, e portanto compacto, segue do corolário anterior que existe $\underline{x} \in K; m := f(\underline{x}) = \min f(K)$. Assim temos que $m > 0$, já que se $0 = m = \|\underline{x}\| \Rightarrow \underline{x} = 0$. Seja x um ponto qualquer de \mathbb{R}^n . Então, $y = x/\|x\|_1 \in K$ e

$$m \leq f(y) = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \Rightarrow m\|x\|_1 \leq \|x\|.$$

□

Observação 2.3.18 *Se uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em relação a determinada norma de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , então será contínua em relação a quaisquer outras normas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m .*

2.3.3 FUNÇÕES CONTÍNUAS E CONJUNTOS CONEXOS

Definição 2.3.19 Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo se para todos A_1 e A_2 abertos tais que $B \subset A_1 \cup A_2$ e $B \cap A_i \neq \emptyset, i = 1, 2$, tem-se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Teorema 2.3.20 Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua e $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo, então $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ é conjunto conexo.

Demonstração: Sejam A_1 e A_2 abertos de \mathbb{R}^m tais que $f(B) \subset A_1 \cup A_2$ e $f(B) \cap A_i \neq \emptyset, i = 1, 2$. Então,

$$B \subset f^{-1}(f(B)) \subset f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2).$$

Como f é contínua e A_i é aberto para $i = 1, 2$, segue que $f^{-1}(A_i)$ é aberto. Além disso, se $y \in f(B) \cap A_i$, então existe $x \in B$ tal que $y = f(x)$. Por definição, $x \in f^{-1}(A_i)$ e portanto $B \cap f^{-1}(A_i) \neq \emptyset$. Como B é conexo, $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \neq \emptyset$. Portanto,

$$f^{-1}(A_1 \cap A_2) \neq \emptyset \Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset.$$

Logo $f(B)$ é conexo. □

2.3.4 CONJUNTOS CONVEXOS E FUNÇÕES CONVEXAS

Definição 2.3.21 Um subconjunto A de um espaço vetorial V é dito convexo se, para todo $x, y \in A$ temos

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Definição 2.3.22 Uma função $f : A \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se A é convexo e para todo $x, y \in A$, vale a desigualdade

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Lema 2.3.23 Seja $f : A \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $x_1, x_2, \dots, x_k \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in]0, 1[$ são tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, então

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em (CIPOLATTI,).

Teorema 2.3.24 Toda função convexa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração: Esta demonstração será feita em quatro etapas:

- Suponha $f(0) = 0$. Então, $0 \leq \sup\{f(x); \|x\|_1 \leq 1\} < \infty$. De fato, seja $a = \sup\{f(x); \|x\|_1 \leq 1\}$. Então $a \geq f(0) = 0$. Mostraremos que a é finito. Se $\|x\|_1 < 1$, então $x^* = x/\|x\|_1$ é vetor unitário (relativamente à norma em questão). Como $x = \|x\|_1 x^* + (1 - \|x\|_1)0$, segue da convexidade de f que

$$f(x) \leq \|x\|_1 f(x^*) + (1 - \|x\|_1)f(0) \leq f(x^*).$$

Portanto $a = \sup\{f(x); \|x\|_1 = 1\}$.

Consideremos então $x \in \mathbb{R}^n$ vetor unitário, isto é, $\|x\|_1 = 1$ e definimos, para $i = 1, \dots, n$

$$a_i = \begin{cases} x_i/|x_i|, & \text{se } x_i \neq 0 \\ 1, & \text{se } x_i = 0 \end{cases}.$$

Então os vetores u_i , definidos por $u_i = a_i e_i$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n , são vetores unitários. Como

$$x = \sum_{i=1}^n |x_i| u_i,$$

$$|x_1| + \dots + |x_n| = 1,$$

concluimos do lema anterior, que

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| f(u_i) \leq \max\{f(u_1), \dots, f(u_n)\} < +\infty.$$

- Supondo $f(0) = 0$. Então f é contínua em $x = 0$. De fato, se $f \equiv 0$ na bola unitária $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_1 \leq 1\}$, não há nada a provar. Supondo então $f \neq 0$ na bola unitária. Segue da primeira etapa que $a > 0$. Dado $0 < \varepsilon < a$, seja $\delta < \frac{\varepsilon}{a}$. Se $\|x\|_1 < \delta$, então $\|x/\delta\|_1 < 1$ e segue da primeira etapa que $f(x/\delta) \leq a$. Portanto, como podemos escrever $x = \delta(x/\delta) + (1 - \delta)0$, temos da convexidade

$$f(x) \leq \delta f(x/\delta) + (1 - \delta)f(0) \leq \delta a < \varepsilon. \quad (14)$$

Seja $\lambda = \delta/(1 + \delta)$. Então $0 < \lambda < 1$ e temos a combinação convexa

$$\lambda\left(\frac{-x}{\delta}\right) + (1 - \lambda)x = 0.$$

Pela convexidade,

$$f(0) \leq \lambda f\left(\frac{-x}{\delta}\right) + (1 - \lambda)f(x),$$

e assim concluimos que

$$f(x) \geq -\delta a > -\varepsilon. \quad (15)$$

de 14 e 15 temos

$$|f(x)| < \varepsilon \text{ se } \|x\|_1 < \delta.$$

- Se $f(0) \neq 0$. Então, neste caso, $g(x) = f(x) - f(0)$ é função convexa que se anula em $x = 0$. Pelas etapas anteriores, g é contínua em $x = 0$, o mesmo valendo para f .
- De maneira mais geral, seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Então, $g(x) = f(x + x_0)$ é função convexa. Portanto, pelas etapas anteriores, g é contínua em $x = 0$, e segue que f é contínua em $x = x_0$.

□

2.3.5 CONTINUIDADE UNIFORME

Definição 2.3.25 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua em A se $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in A$ e $\|x - y\| < \delta$, então $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.*

Observação 2.3.26 *Toda função uniformemente contínua é contínua em seu domínio, mas a recíproca não é verdadeira. De fato, a função $f(x) = x^2$ é contínua em seu domínio, mas não é uniformemente contínua.*

Definição 2.3.27 *Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita Lipschitz-contínua em A se existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \forall x, y \in A.$$

Observação 2.3.28 *Toda função Lipschitz-contínua é uniformemente contínua, além disso, pelo Teorema do Valor Médio, toda função derivável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja derivada é limitada em \mathbb{R} é Lipschitz-contínua.*

Proposição 2.3.29 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função linear. Então, f é Lipschitz-contínua.*

Demonstração: *Seja $M = \max\{\|f(e_1)\|, \dots, \|f(e_n)\|\}$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n . Então, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, temos*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|f(e_i)\| \leq M\|x - y\|_1.$$

e a conclusão segue da equivalência das normas em \mathbb{R}^n . □

Definição 2.3.30 *Seja $0 < \alpha < 1$. Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita Hölder-contínua de ordem α em A se existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^\alpha, \forall x, y \in A.$$

Observação 2.3.31 *Toda função Hölder-contínua é uniformemente contínua.*

Observação 2.3.32 *Os conceitos de continuidade uniforme, Lipschitz-contínua e Hölder-contínua não dependem das normas fixadas em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m .*

Teorema 2.3.33 *Toda função contínua definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Sejam $x \in K$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, existe $\delta_x > 0$ tal que se $y \in B_{\delta_x}(x)$ então $\|f(y) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$, segue da compacidade que existem x_1, x_2, \dots, x_k em K tais que

$$K \subset \bigcup B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i) \quad (16)$$

Seja $\delta = \min\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \frac{\delta_{x_2}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_k}}{2}\}$. Então, se $x, y \in K$ são tais que $\|x - y\| < \delta$, segue de 16 que $x \in B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i)$, para algum i . Portanto,

$$\|y - x_i\| \leq \|y - x\| + \|x - x_i\| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i} \Rightarrow y \in B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Logo, $\|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ e temos o resultado. \square

3 TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH

3.1 TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH

Definição 3.1.1 *Uma sequência (x_k) de V é dita sequência de Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } k, l \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - x_l\|_V < \varepsilon.$$

Definição 3.1.2 *Dizemos que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Definição 3.1.3 *Dizemos que o espaço métrico M é de Banach quando é completo e normado, ou seja, existe uma norma $\| \cdot \|$ em M .*

Exemplo 3.1.4 *Um exemplo de espaço de Banach é \mathbb{R} .*

Definição 3.1.5 *Sejam V um espaço vetorial normado, $A \subset V$ e $f : A \rightarrow V$ uma função. Dizemos que f é uma contração em A se existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_V \leq \alpha \|x - y\|_V, \forall x, y \in A.$$

Exemplo 3.1.6 *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{x}{2}$ é um exemplo de contração.*

Definição 3.1.7 *Dizemos que $x \in V$ é um ponto fixo para uma função $f : V \rightarrow V$ se $f(x) = x$.*

Exemplo 3.1.8 *A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ é um exemplo de função que contém ponto fixo, que por sua vez é dado por $x = 2$.*

Teorema 3.1.9 (Teorema de Ponto Fixo de Banach) *Seja V um espaço de Banach relativamente à norma $\| \cdot \|_V$. Se $F : V \rightarrow V$ é uma contração em V , então F possui um único ponto fixo.*

Demonstração: Seja $x_0 \in V$ e considere a sequência definida implicitamente por $x_{k+1} = F(x_k), \forall k \geq 0$. Então,

$$\|x_{k+1} - x_k\|_V = \|F(x_k) - F(x_{k-1})\|_V \leq \alpha \|x_k - x_{k-1}\|_V \leq \alpha^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_V \leq \dots \leq \alpha^k \|x_1 - x_0\|_V.$$

Portanto, se $k, l \in \mathbb{N}$, temos (supondo, sem perda de generalidade, $k \geq l$)

$$\|x_k - x_l\|_V \leq \|x_k - x_{k-1}\|_V + \dots + \|x_{l+1} - x_l\|_V \leq (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \dots + \alpha^l) \|x_1 - x_0\|_V \leq \frac{\alpha^l}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\|_V.$$

Como $\alpha < 1$, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^{l_0}}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\|_V < \varepsilon,$$

de modo que se $k, l \geq l_0$ então $\|x_k - x_l\|_V < \varepsilon$. Logo (x_k) é sequência de Cauchy em V e portanto, converge para algum $x \in V$. Para concluir que \bar{x} é o ponto fixo de f , basta observar que sendo F contínua, segue do teorema 2.3.4 que

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = F(x).$$

Por fim, temos que a unicidade de Ponto Fixo, segue da unicidade do limite. \square

O Teorema 3.1.9 continua válido se V for apenas um espaço métrico completo, este resultado é apresentado a seguir:

Teorema 3.1.10 *Sejam (V, d) um espaço métrico completo e $F : V \rightarrow V$ uma contração com constante Lipschitziana L . Então, F tem um único ponto fixo $u \in V$. Além disso para todo $u_0 \in V$ temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(u_0) = u$$

com

$$d(F^n(u_0), u) \leq \frac{L^n}{1-L} d(u_0, F(u_0)).$$

Demonstração: Para provar a existência de ponto fixo, selecionemos $u_0 \in V$. Assim mostraremos que $\{F^n(u_0)\}$ é uma sequência de Cauchy. Observemos que para $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$d(F^n(u_0), F^{n+1}(u_0)) \leq L d(F^{n-1}(u_0), F^n(u_0)) \leq \dots \leq L^n d(u_0, F(u_0)).$$

Deste modo para $m > n$, onde $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned}
 d(F^n(u_0), F^m(u_0)) &\leq d(F^n(u_0), F^{n+1}(u_0)) + d(F^{n+1}(u_0), F^{n+2}(u_0)) \\
 &\quad + \dots + d(F^{m-1}(u_0), F^m(u_0)) \\
 &\leq L^n d(u_0, F(u_0)) + \dots + L^{m-1} d(u_0, F(u_0)) \\
 &\leq L^n d(u_0, F(u_0)) [1 + L + L^2 + \dots] \\
 &= \frac{L^n}{1-L} d(u_0, F(u_0)),
 \end{aligned}$$

ou seja, para $m > n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$d(F^n(u_0), F^m(u_0)) \leq \frac{L^n}{1-L} d(u_0, F(u_0)). \quad (18)$$

Assim mostramos que $\{F^n(u_0)\}$ é uma sequência de Cauchy e sendo V completo, existe $u \in V$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(u_0) = u$. Além disso, a continuidade de F implica que

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(u_0)) = F(u).$$

Portanto u é um ponto fixo de F . Finalmente fazendo $m \rightarrow \infty$ em (18) obtemos

$$d(F^n(u_0), u) \leq \frac{L^n}{1-L} d(u_0, F(u_0)).$$

Agora mostraremos a unicidade do ponto fixo. Para isso iremos supor que existam $u, v \in X$ tais que $u = F(u)$ e $v = F(v)$. Então,

$$d(u, v) = d(F(u), F(v)) \leq Ld(u, v),$$

portanto $d(u, v) = 0$. Pela propriedade (2), da Definição 2.1.1 de Métricas, temos que $u = v$, e portanto o ponto fixo é único.

□

3.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Repetimos os passos do artigo (MARTINEZ et al., 2013), deste modo, nos dedicaremos a determinar hipóteses sobre as funções componentes do problema (1) que foi definido como sendo

$$\begin{cases} u'' + f(t, u, u') = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = g(u(\eta_1), u(\eta_2), \dots, u(\eta_{m-2})) \end{cases}.$$

Para demonstrar a existência e unicidade de solução utilizaremos como auxílio o Teorema 3.1.10. Além disso, implementaremos o algoritmo baseado na tese do Teorema 3.1.10 para o problema (1) e apresentaremos exemplos inéditos.

Consideremos $E = C^1[0, 1]$ o espaço de Banach das funções continuamente diferenciáveis em $[0, 1]$, com a norma

$$\|u\|_E = \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}.$$

Com o auxílio da função de Green $G(x, t) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$G(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}. \quad (19)$$

Uma solução de (1) satisfaz a igualdade

$$u(x) = \int_0^1 G(x, t) f(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x. \quad (20)$$

Para verificar que a função u dada em 20 é solução do problema (1), vamos conferir que ela cumpre as restrições e a equação do problema (1).

De fato $u(0) = 0$, uma vez que,

$$u(0) = \int_0^1 0 \cdot f(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \cdot 0 = 0.$$

Por outro lado $u(1) = g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))$, com efeito,

$$\begin{aligned} u(1) &= \int_0^1 G(1, t) f(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))1 \\ &= \int_0^1 0 \cdot f(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \cdot 1 \\ &= g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})). \end{aligned}$$

Por fim, basta mostrarmos que u definida em 20 satisfaz a equação diferencial. Dividi-

remos a integral em dois intervalos, conforme a $G(x, t)$ está definida. Assim:

$$u(x) = \int_0^x t(1-x)f(t, u(t), u'(t))dt + \int_x^1 x(1-t)f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x.$$

Agora, calculando a derivada de u ,

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\int_0^1 G(x, t)f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \right]$$

Derivando a equação acima utilizando derivada sob sinal de integral, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}u(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x t(1-x)f(t, u(t), u'(t))dt + \frac{d}{dx} \int_x^1 x(1-t)f(t, u(t), u'(t))dt + \\ &+ g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \\ &= \int_0^x \frac{d}{dx}t(1-x)f(t, u(t), u'(t))dt + \int_x^1 \frac{d}{dx}x(1-t)f(t, u(t), u'(t))dt \\ &+ g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \\ &= \int_0^x (-t)f(t, u(t), u'(t))dt + \int_x^1 (1-t)f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})). \end{aligned}$$

Para calcular u'' utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_0^1 G(x, t)f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \right] \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x (-t)f(t, u(t), u'(t))dt + \frac{d}{dx} \int_x^1 (1-t)f(t, u(t), u'(t))dt + 0 \\ &= -xf(x, u(x), u'(x)) - (1-x)f(x, u(x), u'(x)) \\ &= -f(x, u(x), u'(x)). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $u'' = -f(t, u, u')$. Portanto, a função é solução para o problema (1).

Deste modo u é uma solução do problema (1) se, e somente se, u é um ponto fixo do operador $T : E \rightarrow E$ definido por:

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x. \quad (24)$$

Apresentamos a seguir algumas propriedades da função de Green G definida em 19 que serão úteis na demonstração da existência e unicidade de solução:

Proposição 3.2.1 *Para a função G definida em 19 as seguintes propriedades se verificam.*

1. $G(x,t) = |G(x,t)|$
2. $G(x,t) \leq |\partial_x G(x,t)|$.

Demonstração: 1. De fato, já que por definição, a função $G(x,t)$ é um produto de números não negativos, pois $t(1-x) \geq 0$ e $x(1-t) \geq 0$.

2. Com efeito, já que

$$\partial_x G(x,t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ (1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

assim, temos que $|-t| \geq t(1-x)$, se $0 \leq t \leq x \leq 1$, e $|1-t| \geq x(1-t)$, com $0 \leq x \leq t \leq 1$. \square

Com o uso das propriedades apresentadas anteriormente, temos

$$\begin{aligned} |(Tu)'(x)| &= \left| \int_0^1 \partial_x G(x,t) f(t, u(t), u'(t)) + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \right| \\ &\leq \int_0^1 |\partial_x G(x,t)| |f(t, u(t), u'(t))| dt + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))|. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|(Tu)'(x)| \leq \int_0^1 |\partial_x G(x,t)| |f(t, u(t), u'(t))| dt + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))|.$$

Proposição 3.2.2 Se $u \in E$, então Tu satisfaz $(Tu)(0) = 0$ e $\|(Tu)'\|_\infty = \|Tu\|_E$.

Demonstração: Como $\|(Tu)'\|_\infty \leq \|Tu\|_E$ devemos mostrar que

$$\|(Tu)'\|_\infty \geq \|Tu\|_E = \max \{ \|Tu\|_\infty, \|(Tu)'\|_\infty \}.$$

Para isso, seja $v = Tu$, logo $v(0) = 0$ e v contínua. Assim, seja $\xi_1 \in [0, 1]$ tal que $|v(\xi_1)| = \max_{x \in [0,1]} |v(x)| = \|v\|_\infty$. Segue do Teorema do Valor Médio que existe $\xi_2 \in [0, \xi_1]$ tal que

$$\begin{aligned} v'(\xi_2) &= \frac{v(\xi_1) - v(0)}{\xi_1 - 0}, \text{ onde } 0 < \xi_1 < 1 \\ v'(\xi_2) &= \frac{v(\xi_1)}{\xi_1} \Rightarrow |v'(\xi_2)| \geq |v(\xi_1)| = \|v\|_\infty \end{aligned}$$

Portanto, $\|(Tu)'\|_\infty \geq \|Tu\|_E$.

\square

Para demonstrarmos a existência de solução para o Problema, precisaremos de algumas hipóteses, com a primeira apresentada a seguir, mostraremos que T definida em 24 é um operador:

(H1) Existem constantes positivas α, A, B tais que:

- $\max_{(t,u,v) \in [0,1] \times [-\alpha,\alpha] \times [-\alpha,\alpha]} |f(t,u,v)| \leq \frac{\alpha A}{d_1}$, onde $d_1 = \max_{x \in [0,1]} \left\{ \int_0^1 |\partial_x G(x,t)| dt \right\}$;
- $|g(y)| \leq \alpha B, \forall y \in [0, \alpha]^{m-2}$;
- $A + B \leq 1$.

Teorema 3.2.3 *Suponha que (H1) ocorre, então $T : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, onde $\Omega = \{u \in E; \|u\|_E \leq \alpha\}$.*

Demonstração: Dado $u \in \Omega$. Utilizando a Proposição 3.2.2 e (H1) obtemos:

$$\begin{aligned} \|(Tu)(x)\|_E \leq \|(Tu)'\|_\infty &\leq \max_{x \in [0,1]} \left\{ \int_0^1 |\partial_x G(x,t) f(t, u(t), u'(t))| dt + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))| \right\} \\ &\leq \frac{\alpha A}{d_1} \int_0^1 |\partial_x G(x,t)| dt + \alpha B \\ &\leq \alpha A + \alpha B \\ &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Portanto, T aplica $\bar{\Omega}$ em $\bar{\Omega}$. □

Apresentamos a seguir um exemplo do problema (1) no qual as hipóteses apresentadas em (H1) são cumpridas.

Exemplo 3.2.4 *Neste exemplo, consideraremos os elementos que definem o problema da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} f(t, u, v) &= \frac{t}{3} - \frac{3}{300}u^2 + \frac{1}{60}v^2, \\ g(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{160}(y_1 y_2 + y_3^2). \end{aligned}$$

Para a resolução desse exemplo, tomaremos as seguintes constantes:

$$\alpha = 10, A = \frac{3}{20}, B = \frac{1}{8}, d_1 = \max_{x \in [0,1]} \left\{ \int_0^1 |\partial_x G(x,t)| dt \right\} = 1,$$

Deste modo, podemos verificar que as condições impostas em (H1) são satisfeitas e portanto, existe uma solução $u \in E$ tal que $\|u\|_E \leq \alpha$. De fato,

- $\max_{(t,u,v) \in [0,1] \times [-10,10] \times [-10,10]} \left| \frac{t}{3} - \frac{3}{300}u^2 + \frac{1}{60}v^2 \right| \leq \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 3 = \frac{10 * \frac{3}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha A}{d_1}$
- $\left| \frac{1}{160}(y_1 y_2 + y_3^2) \right| \leq \frac{1}{160}(10 * 10 + 10^2) = \frac{200}{160} = \frac{5}{4} = 10 * \frac{1}{8} = \alpha B$
- $A + B = \frac{3}{20} + \frac{1}{8} = \frac{11}{40} \leq 1.$

3.2.1 SOLUÇÕES ITERATIVAS

Nesta seção apresentamos um resultado que mostra a existência e unicidade de solução para (1) pelo Teorema 3.1.10. Embora clássico, este estudo é muito importante a fim de estabelecer algoritmos para resolver o problema (1). Começamos esta seção, considerando a sequência iterativa:

$$u^{k+1} = T(u^k).$$

$$u^{k+1}(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t, u^k(t), u'^k(t)) dt + g(u^k(\eta_1), \dots, u^k(\eta_{m-2}))(x).$$

Para demonstrar a existência de limite da sequência definida acima, precisamos de duas hipóteses:

(H2) Existem constantes $\lambda_f > 0$ e $\lambda_g > 0$ tais que

$$|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leq \lambda_f \max\{|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2|\},$$

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \lambda_g |y_1 - y_2|,$$

$$\forall t \in [0, 1], u_1, v_1, u_2, v_2 \in [-\alpha, \alpha] \text{ e } y_1, y_2 \in [-\alpha, \alpha].$$

(H3) $d_1 \lambda_f + \lambda_g < 1$.

Teorema 3.2.5 *Suponha que (H1), (H2) e (H3) ocorrem. Então, o problema (1) possui uma única solução u tal que, $\|u\|_E \leq \alpha$. Além disso, esta solução é o limite da sequência iterativa $u^{k+1} = T(u^k)$.*

Demonstração: Mostramos no Teorema 3.2.3 que $T : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, com $\Omega = \{u \in E; \|u\|_E < \alpha\}$. Assim, resta mostrarmos que T é uma contração. Com efeito:

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_E &\leq \|(Tu - Tv)'\|_\infty \\ &= \max_{x \in [0,1]} \left\{ \left| \int_0^1 \partial_x G(x,t) [f(t, u(t), u'(t)) - f(t, v(t), v'(t))] dt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) - g(v(\eta_1), \dots, v(\eta_{m-2}))| \right\}. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos aplicar (H2) e consequentemente obtemos:

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|_E &\leq \max_{t \in [0,1]} d_1 |f(t, u(t), u'(t)) - f(t, v(t), v'(t))| \\
&\quad + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) - g(v(\eta_1), \dots, v(\eta_{m-2}))| \\
&\leq d_1 \lambda_f \max_{t \in [0,1]} \{|u(t) - v(t)|, |u'(t) - v'(t)|\} + \lambda_g \max_{t \in [0,1]} \{|u(t) - v(t)|\} \\
&\leq (d_1 \lambda_f + \lambda_g) \|u - v\|_E.
\end{aligned}$$

Por (H3), temos que T é uma contração, e portanto, pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach, temos o resultado. \square

Esse último teorema nos permite estabelecer as condições para a convergência local de algoritmos que utiliza a sequência iterativa:

$$u^{k+1} = T(u^k).$$

Desse modo, apresentamos a seguir um algoritmo para resolução do problema (1), baseado no algoritmo apresentado em (MARTINEZ et al., 2013):

Algoritmo

1. Defina uma malha uniformemente espaçada $\{x_j\}$ em $[0, 1]$.
2. Escolha uma aproximação inicial $u_j^0 = u^0(x_j)$.
3. Para $k = 1, 2, 3, \dots$
 - Calcule $u^k(\eta_1), u^k(\eta_2), \dots, u^k(\eta_{m-2})$ usando interpolação polinomial.
 - Calcule u_j^k utilizando diferenças finitas (central).
 - Calcule u_j^{k+1} usando

$$u^{k+1} = T(u^k),$$

onde as integrais são calculadas pela regra de trapézios.

4. Teste a convergência.

Exemplo 3.2.6 Neste exemplo, vamos considerar as funções que compõe o problema (1) da seguinte maneira:

$$f(t, u, v) = \cos(t) + u - v,$$

$$g(a, b) = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2},$$

$$\eta_1 = 0,2; \eta_2 = 0,8.$$

A solução analítica deste exemplo é $u(t) = \text{sen}(t)$.

Os resultados numéricos são apresentados na Tabela a seguir, onde foi considerado

$$\varepsilon_u^k = \|u^k - u\|_\infty, \quad \bar{\varepsilon}^k = \frac{\|u^{k+1} - u^k\|_\infty}{\|u^{k+1}\|_\infty}.$$

Tabela 1: Resultados numéricos do Exemplo 3.2.6

Iteração	Erro Absoluto	Precisão
5	0,280544	0,180556
10	0,0430097	0,0276119
20	0,000316317	0,000369545
30	0,000665296	$4,43721e^{-6}$

Além disso o algoritmo nos fornece uma solução, que no caso, é dada pelos círculos nos gráficos abaixo. Já as curvas em verde são as soluções analíticas dos exemplos.

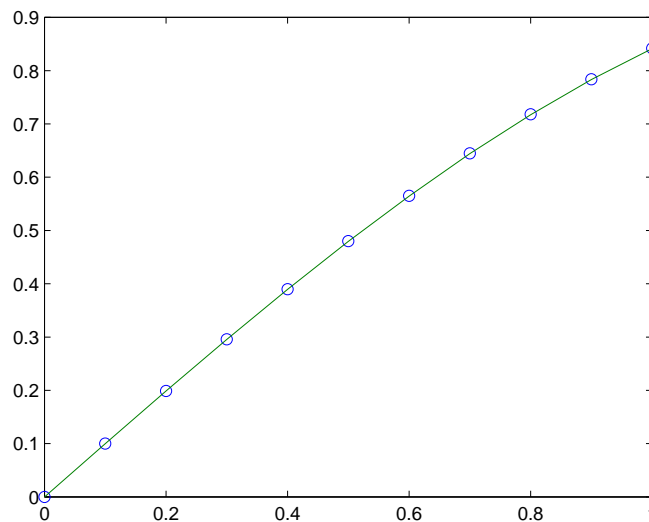


Figura 1: Solução numérica obtida do Exemplo 3.2.6

Exemplo 3.2.7 Neste exemplo, vamos considerar as funções que compõe o problema (1) da seguinte maneira:

$$f(t, u, v) = \frac{u}{15} + \frac{v}{45} - \frac{t^3}{15} - \frac{268t}{45} + 2,$$

$$g(a, b) = a - \frac{27a}{16},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}; \eta_2 = \frac{1}{3}.$$

A solução analítica deste exemplo é $u(t) = t^3 - t^2$

Os resultados numéricos são apresentados nas Tabela a seguir, onde foi considerado

$$\varepsilon_u^k = \|u^k - u\|_\infty, \quad \bar{\varepsilon}^k = \frac{\|u^{k+1} - u^k\|_\infty}{\|u^{k+1}\|_\infty}.$$

Tabela 2: Resultados numéricos do Exemplo 3.2.7

Iteração	Erro Absoluto	Precisão
5	$6,92966e^{-5}$	0,0371645
10	$2,15191e^{-5}$	$1,40715e^{-8}$
20	$2,15191e^{-5}$	0
30	$2,15191e^{-5}$	0

Além disso o algoritmo nos fornece uma solução, que no caso, é dada pelos círculos nos gráficos abaixo. Já as curvas em verde são as soluções analíticas dos exemplos.

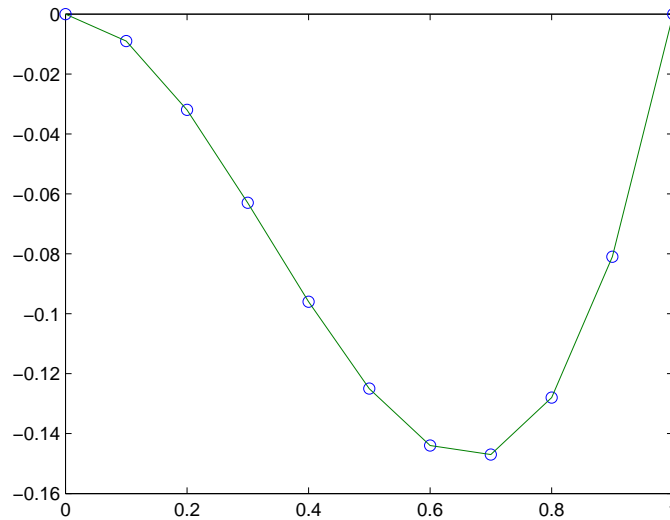


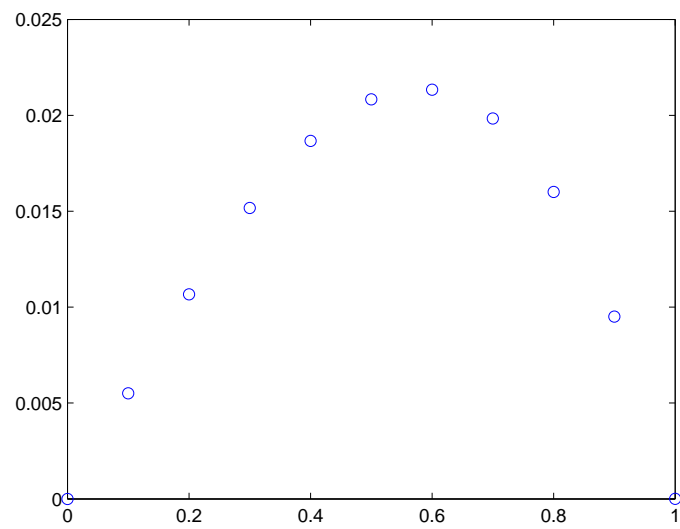
Figura 2: Solução numérica obtida do Exemplo 3.2.7

Podemos verificar que o exemplo 3.2.4 possui solução com $\|u\|_\infty \leq \alpha$ com o uso do Teorema de Ponto Fixo de Shauder que pode ser encontrado em (AGARWAL; O'REGAN,), porém, como não fazemos a utilização deste Teorema, nos dedicaremos a realizar testes com o uso do Algoritmo neste exemplo. Para isto, consideremos $\eta_1 = 0,25$; $\eta_2 = 0,5$ e $\eta_3 = 0,75$. Deste modo, conseguimos a seguinte tabela de erros:

Tabela 3: Resultados numéricos do Exemplo 3.2.4

Iteração	Erro Absoluto
5	$1,52733e^{-5}$
10	0
20	0
30	0

No caso do exemplo 3.2.4, como não temos a solução analítica, o Algoritmo nos fornece apenas a solução dada na figura 3:

**Figura 3: Solução numérica obtida do exemplo 3.2.4**

4 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, realizamos uma revisão bibliográfica de conceitos básicos relacionados ao Teorema de Ponto Fixo de Banach num primeiro momento. No segundo momento realizamos um estudo de existência de solução do problema (1), iniciamos com a representação do problema (1) através de uma equação integral, para isto utilizamos a função de Green. Adaptamos as hipóteses do artigo (MARTINEZ et al., 2013) para o problema abordado e reproduzimos os resultados teóricos do mesmo. Na sequência, implementamos o algoritmo A de (MARTINEZ et al., 2013) com a utilização de interpolação polinomial ao invés de Spline Cúbica. Construimos exemplos inéditos para os quais testamos o nosso algoritmo.

REFERÊNCIAS

- AGARWAL, M. M. R.; O'REGAN, D. **Fixed Point Theory and Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press.
- CASTELANI, E.; MA, T. Numerical solutions for a three-point boundary value problem. **Communications in Applied Analysis**, p. 87–96, 2007.
- CIPOLATTI, R. **Cálculo Avançado I**. [S.l.]: Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.
- GUPTA, C. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 168, p. 540–551, 1992.
- GUPTA, C.; TROFIMCHUK, S. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 205, p. 586–597, 1997.
- IL'IN, V.; MOISEEV, E. Nonlocal boundary-value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator. **Differential Equations**, v. 23, p. 979–987, 1987.
- IL'IN, V.; MOISEEV, E. A nonlocal boundary value problem for the Sturm-Liouville operator in the differential and difference treatments. **Sov. Math. Dokl.**, v. 34, p. 507–511, 1987.
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2013. ISBN 978-85-244-0158-9.
- LIN, Y.; CUI, M. A numerical solution to nonlinear multi-point boundary value problems in the reproducing kernel space. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 34.
- LIN, Y.; CUI, M. A numerical solution to nonlinear multi-point boundary value problems in the reproducing kernel space. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 34.
- MA, R. Existence theorems for a second order m-point boundary value problem. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 211, p. 545–555, 1997.
- MA, R. Existence theorems for a second order three point boundary value problem. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 212, p. 430–442, 1997.
- MARTINEZ, A. et al. Remarks on positive solutions for an m-point boundary value problem. **Int. Journal of Appl. Math.**, p. 281–297, 2012.
- MARTINEZ, A. et al. Um estudo de soluções para um problema de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 14, n. 2, p. 255–263, 2013.
- WONG, P.; AGARWAL, R. Existence and uniqueness of solutions for three-point boundary value problems for second order difference equations. **Proceedings of Dynamic Systems and Applications, Atlanta, United States of America**, p. 553–560, 1995.

ZOU, Y.; HU, Q.; ZHANG, R. On numerical studies of multi-point boundary value problem and its fold bifurcation. **App. Math. and Comp.**, v. 185, p. 527–537, 2007.