UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

DÉBORA CARLA BLANCO MARIANO

INTRODUÇÃO À TEORIA DE HOMOTOPIA: O GRUPO FUNDAMENTAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

DÉBORA CARLA BLANCO MARIANO

INTRODUÇÃO À TEORIA DE HOMOTOPIA: O GRUPO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Licenciatura em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos
Orientador

Profa. Dra. Débora Aparecida Francisco Albanez

Prof. Me. Tiago Henrique dos Reis

CORNÉLIO PROCÓPIO
2016

Dedico este trabalho a minha mãe *Rosieli Blanco Cardoso* e minha irmã *Caroline Blanco Mariano*.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família, em especial minha mãe, Rosieli Blanco Cardoso, minha irmã, Caroline Blanco Mariano, e aos meus avós maternos, Vicente Blanco Cardoso e Iracema Gonçalves Cardoso, pelo carinho e apoio.

Agradeço aos meus colegas de classe e com certeza futuros excelentes profissionais, que fizeram parte dessa trajetória, dividindo conhecimentos e experiências.

Agradeço também aos professores do Departamento Acadêmico de Matemática e ao coordenador do curso de Licenciatura em Matemática, que me auxiliaram no decorrer do curso e de certa forma contribuíram para minha formação.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Anderson Paião do Santos, pelo incentivo, paciência, compreensão e orientação no desenvolvimento deste trabalho e também aos professores que fizeram parte da banca examinadora, pelas contribuições.

E, finalmente, as amizades que fiz durante a faculdade e a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a construção deste trabalho de conclusão de curso.

RESUMO

Mariano, Débora. INTRODUÇÃO À TEORIA DE HOMOTOPIA: O GRUPO FUNDAMENTAL. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

A Topologia Algébrica é um ramo da matemática que tem como principal objetivo resolver problemas de natureza geométrica/topológica, com o auxílio da Álgebra. A teoria de homotopia é um dos tópicos mais importantes da Topologia Algébrica, donde destacamos a noção de grupo fundamental de um espaço topológico, que consiste em obter informações a respeito de um espaço topológico X através de caminhos fechados (laços) em X. Tal grupo, denotado por $\pi_1(X;x_0)$ ($x_0 \in X$), é um invariante topológico e homotópico, ou seja, se dois espaços topológicos são homeomorfos ou têm o mesmo tipo de homotopia, então seus grupos fundamentais são isomorfos. Este grupo é uma ferramenta muito útil para decidirmos quando dois espaços topológicos não são homeomorfos. Neste trabalho, fazemos uma introdução à teoria de homotopia, em especial à homotopia de laços, definimos o grupo fundamental de um espaço topológico, estudamos algumas de suas propriedades e apresentamos exemplos do grupo fundamental de alguns espaços.

Palavras-chave: Espaço topológico, Teoria de homotopia, Homotopia de laços, Grupo Fundamental

ABSTRACT

Mariano, Débora. INTRODUCTION TO HOMOTOPY THEORY: THE FUNDAMENTAL GROUP. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

The algebraic topology is a branch of mathematics which the main goal is to solve problems of geometric/topological nature with the aid of Algebra. The homotopy theory is one of the most important topics of the algebraic topology, where we highlight the notion of fundamental group of a topological space X, which consists of extract information about a topological space X through closed paths (loops) in X. Such group, called for $\Pi_1(X,x_0)$ $(x_0 \in X)$, is a topological invariant and homotopic, that is, if two topological spaces are homeomorphic or have the same homotopy type, then their fundamental groups are isomorphic. This group is a very useful tool for deciding when two topological spaces are not homeomorphic. In this paper, we make an introduction to homotopy theory of loops, defining the fundamental group of a topological space, we study some of its properties and present examples of the fundamental group of some spaces.

Keywords: Topologic space, Homotopy theory, Loop homotopy, Fundamental group

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **8**
2 PRELIMINARES **11**
2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS 11
2.1.1 Bolas e Esferas 12
2.2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS 13
2.2.1 Topologia 13
2.2.2 Continuidade e Homeomorfismo 17
2.3 GRUPOS 19
3 TEORIA DE HOMOTOPIA **21**
3.1 APLICAÇÕES HOMOTÓPICAS 21
3.2 EQUIVALÊNCIA DE HOMOTOPIA 23
3.3 CAMINHOS E HOMOTOPIA DE CAMINHOS 26
4 GRUPO FUNDAMENTAL **30**
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **45**
REFERÊNCIAS **46**

1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas básicos da Topologia é determinar se dois espaços topológicos são homeomorfos ou não. Por um lado, para mostrar que dois espaços topológicos são homeomorfos, é preciso determinar uma aplicação contínua de um espaço no outro que seja bijetora e que sua inversa também seja contínua. Por outro lado, verificar que dois espaços topológicos não são homeomorfos consiste em mostrar que não existe tal aplicação. Em ambos os casos a tarefa não é tão fácil, e em geral, as propriedades topológicas destes espaços não ajudam muito resolver o problema. Por exemplo, como mostrar que o plano $\mathbb{R}^2$ não é homeomorfo ao espaço $\mathbb{R}^3$? Não existem propriedades topológicas, como conexidade e compacidade que distinguem estes dois espaços. Outros exemplos de espaços que não podem ser distinguidos por suas propriedades topológicas são a esfera $\mathbb{S}^2$ (de dimensão 2) e o toro T^2 ("rosquinha").

Neste sentido, a *Topologia Algébrica* busca dar alguma resposta para o problema apontado no parágrafo anterior. Ela é um ramo relativamente novo e bastante interessante da Matemática, e está na intersecção da Geometria/Topologia e da Álgebra, e tem por finalidade resolver problemas geométricos/topológicos com o auxílio da Álgebra.

Nesta área da Matemática, dado um espaço topológico, são construídos grupos a ele relacionados, tais como: grupos de homotopia, homologia e cohomologia, com o objetivo de conhecer de forma mais detalhada tal espaço e tentar distinguí-lo de outros espaços. Das ideias mais importantes da Topologia Algébrica destacamos a noção de *Homotopia*, onde dados dois espaços topológicos X e Y, procura-se saber quando X pode ser "deformado" em Y. Caso esta deformação ocorra, dizemos que *X tem o mesmo tipo de homotopia de Y*. O *Grupo Fundamental* de um espaço topológico X é um dos pilares da teoria de homotopia, e consiste em investigar a estrutura do espaço topológico por meio de homotopia de laços no espaço X, ou seja, dado um espaço topológico X e $x_0 \in X$, através de laços em X, associamos a X um grupo, denotado por $\pi_1(X;x_0)$, denominado *o grupo fundamental de X com ponto base x_0*. Historicamente, o grupo fundamental foi definido formalmente no texto *Analysis Situs* (1895), escrito pelo matemático francês Henri Poincaré (1854-1912). No entanto, antes disso, este conceito já havia aparecido informalmente em trabalhos de Bernhard Riemann, Henri Poincaré e Felix Klein.

O grupo fundamental tem uma importante propriedade, ele é um invariante topológico e homotópico, isto é, se X e Y são espaços topológicos homeomorfos ou se eles têm o mesmo tipo de homotopia (um pode ser "deformado" no outro), então seus grupos fundamentais são isomorfos. Assim, o grupo fundamental torna-se uma importante ferramenta para decidirmos quando dois espaços topológicos não são homeomorfos ou não têm o mesmo tipo de homotopia.

Por exemplo, o grupo fundamental da circunferência $\mathbb{S}^1$, ajuda-nos a resolver algumas questões, dentre as quais destacamos:

- $\mathbb{R}^2$ não é homeomorfo com $\mathbb{R}^n$, para todo $n \geq 3$;
- (*Teorema do Ponto Fixo de Brower*) Toda aplicação contínua

  $$f\colon \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2,$$

  onde $\mathbb{D}^2$ denota o disco, admite um ponto fixo, isto é, existe $x \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(x) = x$;
- (*Teorema de Borsuk-Ulam*) Para toda aplicação contínua

  $$f\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

  existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$ (onde x e $-x$ são pontos diametralmente opostos em $\mathbb{S}^2$).
- (*Teorema Fundamental da Álgebra*) Todo polinômio de grau $k > 0$ com coeficientes nos complexo $\mathbb{C}$ tem ao menos uma raiz complexa.

O objetivo deste Trabalho de Conclusão de Curso é fazer um estudo dos conceitos envolvidos em teoria de homotopia, em especial de homotopia de laços, para podermos definir formalmente o grupo fundamental de um espaço topológico. Para isto dividimos este texto em capítulos, os quais descreveremos nos próximos parágrafos.

No Capítulo 2 faremos uma breve introdução a alguns conceitos de espaços métricos e topológicos bem como a definição de grupo, que serão fundamentais para os nossos estudos. As referências utilizadas neste capítulo são as seguintes: [DOMINGUES 1982], [LIMA 2009], [LIMA 2013], [MUNKRES 1975], [NETO 1981], [IEZZI G. 2003]

No Capítulo 3, introduziremos os conceitos de homotopia de aplicações, equivalência de homotopia, homotopia relativa, homotopia de caminhos e homotopia de laços, sendo que este último conceito será essencial para a definição do grupo fundamental. Neste capítulo, por exemplo, verificamos que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ menos a origem $0 = (0,0)$ pode ser "deformado" na circunferência $\mathbb{S}^1$. Para este capítulo, utilizamos as seguintes referências: [CROOM

1978], [HATCHER 2002], [HU 1959], [LIMA 1998], [MASSEY 1967], [MAUNDER 1970] e [MUNKRES 1975].

No capítulo 4, definimos o grupo fundamental de um espaço topológico, estudamos algumas de suas propriedades e apresentamos alguns exemplos de grupo fundamental para alguns espaços. Para este capítulo, utilizamos as seguintes referências: [FANTI E.L.C. 1998] e [LIMA 1998].

Finalizamos o texto definindo os conceitos de grupo fundamental de um espaço topológico, e apresentamos alguns exemplos de grupos fundamentais.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma breve introdução a alguns tópicos das teorias de Espaços Métricos e Topológicos e da Teoria de Grupos que serão importantes para o estudo dos próximos capítulos. Caso o leitor tenha o interesse em aprofundar os estudos de tais tópicos, sugerimos a consulta às seguintes referências: [DOMINGUES 1982], [LIMA 2009], [LIMA 2013], [MUNKRES 1975], [NETO 1981] e [IEZZI G. 2003]. Neste capítulo admitimos que o leitor tenha um conhecimento básico de teria de conjuntos.

2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 2.1.1. Uma **métrica** em um conjunto $M \neq \emptyset$ é uma aplicação $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $(x,y) \in M \times M$ um número real $d(x,y)$, denominado a **distância** de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

d1) $d(x,x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$;

d3) $d(x,y) = d(y,x)$;

d4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Desigualdade triangular),

para quaisquer $x,y,z \in M$.

Um **espaço métrico** é um par (M,d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

A seguir apresentamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.1.2. (Métrica "zero-um"). Qualquer conjunto $M \neq \emptyset$ pode tornar-se um espaço métrico. Basta definirmos $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Verifica-se facilmente que d satifaz as condições d1) à d4), ou seja, d é uma métrica sobre M, e é denominada **métrica "zero-um"**.

Exemplo 2.1.3. (Métrica induzida). Seja (M,d) um espaço métrico. Todo subconjunto não vazio $S \subset M$ pode ser visto como um espaço métrico. Para tanto, basta considerarmos a métrica sobre S dada pela aplicação restrição de d a $S \times S$, isto é,

$$\begin{array}{rccl} d_{|S\times S}: & S\times S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d_{|S\times S}(x,y) = d(x,y) \end{array}.$$

Assim, $\left(S, d_{|S\times S}\right)$ é um espaço métrico denominado **subespaço métrico** de M e a métrica de S é denominada **métrica induzida** de M. Esta ideia nos permite ter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.

Exemplo 2.1.4. A reta real $\mathbb{R}$ é um dos exemplos mais importantes de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x,y \in \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \mid x-y \mid$, é uma métrica sobre $\mathbb{R}$, denominada **métrica usual** da reta.

Exemplo 2.1.5. Sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ i=1,\ldots,n\}$, descrevemos as seguintes três métricas

$$\begin{array}{rcccc} d(x,y) & = & \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} & = & \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\ d'(x,y) & = & \mid x_1-y_1\mid + \mid x_2-y_2 \mid + \ldots + \mid x_n-y_n \mid & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mid x_i-y_i \mid, \\ d''(x,y) & = & \max\{\mid x_1-y_1\mid, \mid x_2-y_2\mid, \ldots, \mid x_n-y_n\mid\} & = & \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} \mid x_i-y_i \mid, \end{array}$$

onde $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.

2.1.1 BOLAS E ESFERAS

Definição 2.1.6. Sejam (M,d) um espaço métrico e $a \in M$. Dado um número real $r > 0$, definimos:

a) A **bola aberta** de centro a e raio r, denotada por $B(a;r)$, é o conjunto

$$B(a;r) = \{x \in M \mid d(x,a) < r\}.$$

b) A **bola fechada** de centro a e raio r, denotada por $B[a;r]$, é o conjunto

$$B[a;r] = \{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}.$$

c) A **esfera** de centro a e raio r, denotada por $S(a;r)$, é o conjunto

$$S(a;r) = \{x \in M \mid d(x,a) = r\}.$$

Observe que, $B[a;r] = B(a;r) \bigcup S(a;r)$.

Exemplo 2.1.7. Se M está munido da métrica zero-um, então para todo $a \in M$, tem-se

$$\begin{gathered} B(a;r) = B[a;r] = M, \text{ se } r > 1 \text{ e} \\ B(a;r) = B[a;r] = \{a\}, \text{ se } r < 1. \end{gathered}$$

Por outro lado,

$$\begin{gathered} B(a;1) = \{a\} \text{ e} \\ B[a;1] = M. \end{gathered}$$

Consequentemente, $S(a;r) = \emptyset$, se $r \neq 1$, enquanto $S(a;1) = M - \{a\}$.

Exemplo 2.1.8. Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, temos

$$\begin{aligned} B(a;r) &= (a-r, a+r), \\ B[a;r] &= [a-r, a+r] \text{ e} \\ S(a;r) &= \{a-r, a+r\}. \end{aligned}$$

2.2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

2.2.1 TOPOLOGIA

Dado um conjunto $E \neq \emptyset$, denotaremos por $\mathscr{P}(E)$ o conjunto das partes de E, isto é, $\mathscr{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$.

Definição 2.2.1. Seja E um conjunto não vazio. Uma coleção τ de subconjuntos de E, $\tau \subset \mathscr{P}(E)$, é chamada **topologia** sobre E se:

i) $\emptyset, E \in \tau$;

ii) Se $G_1, \ldots, G_n \in \tau$, então $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \tau$;

iii) Se $(G_i)_{i \in J}$ é uma família qualquer de elementos de τ, então $\bigcup_{i \in J} G_i \in \tau$.

Os elementos de τ são chamados de **abertos**.

Exemplo 2.2.2. Para todo $E \neq \emptyset$, a coleção $\tau = \{\emptyset, E\}$ é uma topologia sobre E a qual chamaremos **topologia caótica** e a denotaremos por $\tau_{caótica}$. De fato,

i) $\emptyset, E \in \tau$.

ii) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \cap E = \emptyset \in \tau$ e $E \cap E = E \in \tau$.

iii) $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \tau$ e $\emptyset \cup E = E \cup E = E \in \tau$.

Logo, $\tau = \{\emptyset, E\}$ é uma topologia sobre E.

Exemplo 2.2.3. Dado $E \neq \emptyset$, a coleção $\tau = \mathscr{P}(E)$ é uma topologia sobre E. Essa topologia é chamada **topologia discreta** sobre E, que denotaremos por $\tau_{discreta}$. De fato,

i) $\emptyset, E \in \tau$, pois $\emptyset, E \subset E$.

ii) Se $G_1, G_2 \in \tau$, então $G_1 \cap G_2 \in \tau$, pois intersecção de subconjuntos de E é um subconjunto de E.

iii) Se $(G_i)_{i \in J}$ é uma coleção de subconjuntos de E, então claramente $\bigcup\limits_{i \in J} G_i \in \tau$.

Exemplo 2.2.4. Seja E um conjunto infinito. A coleção $\tau = \{\emptyset\} \cup \{G \subset E \mid E - G \text{ é finito}\}$, é uma topologia sobre E. Ela é chamada **topologia cofinita** . De fato,

i) $\emptyset \in \tau$, e note que $E - E = \emptyset$, que é finito, logo $E \in \tau$.

ii) Tome $G_1, G_2 \in \tau$. Assim, $(G_1 \cap G_2)^c = (G_1)^c \cup (G_2)^c$. Como G_1^c e G_2^c são finitos e a união de conjuntos finitos é finita, temos que $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

iii) Seja $(G_i)_{i \in J}$ uma família de elementos de τ. Então, para todo $i \in J$, temos que $E - G_i$ é finito. Assim, $\left(\bigcup\limits_{i \in J} G_i\right)^c = \bigcap\limits_{i \in J} G_i^c$, e como a intersecção de conjuntos finitos é também finita, temos que $\bigcup\limits_{i \in J} G_i \in \tau$.

Exemplo 2.2.5. (Topologia induzida por uma métrica). Seja (M, d) um espaço métrico. Um conjunto $G \subset M$ é dito **aberto** se para todo $p \in G$, existe $r > 0$ de modo que $B(p; r) \subset G$. Assim, consideremos

$$\tau_d = \{G \subset M \mid G \text{ é aberto}\}.$$

Temos que τ_d é uma topologia sobre M. De fato,

i) $\emptyset \in \tau_d$, pois $\emptyset$ não possui elementos de forma que possamos garantir que as bolas abertas de quaisquer raios não estejam contidas em $\emptyset$ e $M \in \tau_d$, pois por definição de bola aberta, temos $B(p;r) \subset M$, para todo $p \in M$ e para todo $r > 0$.

ii) Sejam $G_1, G_2 \in \tau_d$ e $p \in G_1 \cap G_2$. Como G_1 e G_2 são abertos, exitem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $B(p;r_1) \subset G_1$ e $B(p;r_2) \subset G_2$. Tome $r = \min\{r_1, r_2\}$. Então, $B(p;r) \subset G_1$ e $B(p;r) \subset G_2$. Logo, $B(p;r) \subset G_1 \cap G_2$. Portanto, $G_1 \cap G_2 \in \tau_d$.

iii) Seja $(G_i)_{i \in J}$ uma família de elementos de τ_d. Se $p \in \bigcup_{i \in J} G_i$, então $p \in G_{i_0}$ para algum $i_0 \in J$. Como $G_{i_0} \in \tau_d$, existe $r > 0$ tal que $B(p;r) \subset G_{i_0} \subset \bigcup_{i \in J} G_i$. Portanto, $\bigcup_{i \in J} G_i \in \tau_d$.

A topologia τ_d sobre M é denominada **topologia induzida pela métrica d.**

A topologia da reta real $\mathbb{R}$ induzida pela métrica usual $d(x,y) = |x - y|$ é denominada **topologia usual** e a denotamos por $\tau_{_{usual}}$.

Na sequência apresentamos mais alguns exemplos de espaços topológicos, no entanto não faremos as verificações.

Exemplo 2.2.6. A coleção $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$ é uma topologia sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.7. Dados $E \neq \emptyset$ e $p \in E$ (fixo), a coleção $\tau = \{E\} \cup \{G \subset E \,|\, p \notin G\}$ é uma topologia sobre E.

Exemplo 2.2.8. Dados $E \neq \emptyset$ e $p \in E$ (fixo), a coleção $\tau = \{\emptyset\} \cup \{G \subset E \,|\, p \in G\}$ é uma topologia sobre E.

Exemplo 2.2.9. Sejam (E, τ) um espaço topológico e $T \subset E$. A coleção $\tau_{_T} = \{G \cap T \mid G \in \tau\}$ é uma topologia sobre T.

No que segue entenderemos espaço como sendo um espaço topológico.

Definição 2.2.10. Sejam (E, τ) um espaço e $T \subset E$. A topologia $\tau_{_T}$ definida no exemplo (2.2.9) é dita **induzida de** τ e $(T, \tau_{_T})$ é denominado **subespaço topológico** de (E, τ).

Observação 2.2.11. Se T é subespaço de E e A é aberto em T, então existe G aberto de E tal que $A = G \cap T$.

Definição 2.2.12. Sejam (E, τ) um espaço e $F \subset E$. Dizemos que F é **fechado** em E se $F^c = E - F \in \tau$, ou seja, F^c é aberto.

Teorema 2.2.13. Seja T um subespaço de E. Se F é fechado em T e T é fechado em E, então F é fechado em E.

Demonstração. Basta verificarmos que se F é fechado em T, então $F = F' \cap T$, onde F' é um conjunto fechado em E. Como F é fechado em T, então $F^c = T - F$ é aberto em T. Daí, $T - F = U \cap T$ com $U \in \tau$. Agora, $E - U$ é fechado em E e $F = T \cap (E - U)$, donde segue o resultado.

□

Proposição 2.2.14. Seja (E, τ) um espaço topológico. Então,

i) $\emptyset$ e E são conjuntos fechados;

ii) Se $F_\lambda \subset E$ é fechado, $\lambda \in L$, então $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado;

iii) Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são fechados, então $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado, donde segue o resultado

Demonstração.

i) Como $E = \emptyset^c$ e $\emptyset = E^c$ são complementares de abertos, então $\emptyset$ e E são fechados.

ii) Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma coleção de fechados. Das leis de De Morgan, temos que $\left(\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda\right)^c = \bigcup\limits_{\lambda \in L} F_\lambda^c$. Como $F_\lambda^c \in \tau$, para todo $\lambda \in L$, segue que $\bigcup\limits_{\lambda \in L} F_\lambda^c$ é aberto, ou seja, $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado.

iii) Sejam $F_1, \ldots, F_n$ fechados. Temos que $E - (F_1 \cup \ldots \cup F_n) = (E - F_1) \cap \ldots \cap (E - F_n)$, e como $F_1^c, \ldots, F_n^c$ são abertos, então $F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c$ é aberto e consequentemente $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado.

□

Definição 2.2.15. Sejam (E, τ) um espaço e $\mathscr{B} \subset \tau$. Dizemos que $\mathscr{B}$ é uma **base** para τ se para todo $G \in \tau$, existe $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ tal que $G = \bigcup\limits_{\mathscr{B}_\lambda \in \mathscr{B}'} B_\lambda$.

Exemplo 2.2.16. Seja (E, τ) um espaço topológico com $\tau = \mathscr{P}(E)$. Então,

$$\mathscr{B} = \{\{a\} \mid a \in E\}$$

é uma base para τ, pois para todo $A \in \tau$, $A = \bigcup\limits_{a \in A} \{a\}$.

Pergunta: dado $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(E)$, existe uma topologia τ para E que tem $\mathscr{B}$ como base? Normalmente a pergunta para essa resposta é não, pois, por exemplo se $E = \{a,b,c,d\}$ e $\mathscr{B} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{d\}\}$, temos que $\mathscr{B}$ não é uma base para nenhuma toplogia sobre E. De fato,

$$\begin{aligned} B \subset \tau &\Rightarrow \{a,b\} \in \tau \\ &\Rightarrow \{b\} = \{a,b\} \cap \{a,b\} \in \tau \\ &\Rightarrow \{b\} = \bigcup_{B_\lambda \in B'} B_\lambda,\ B' \subset \mathscr{B} \end{aligned}$$

o que é impossível.

Proposição 2.2.17. Seja $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(E)$, $E \neq \emptyset$. Então, $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia em E se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

(i) $E = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$;

(ii) Para todo $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, $B_1 \cap B_2$, é união de elementos de $\mathscr{B}$, ou seja, se $p \in B_1 \cap B_2$, então existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Exemplo 2.2.18. Sejam (E_1, τ_1) e (E_2, τ_2) espaços. Considere $\mathscr{B} = \{G_1 \times G_2 \mid G_1 \in \tau_1 \text{ e } G_2 \in \tau_2\}$. Temos que $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia de $E_1 \times E_2$.

Definição 2.2.19. A topologia obtida a partir de $\mathscr{B}$, dada no exemplo anterior, será denominada **topologia produto**.
Notação: $\tau_1 \times \tau_2$.

2.2.2 CONTINUIDADE E HOMEOMORFISMO

Definição 2.2.20. Sejam (E,τ) e (S,σ) espaços topológicos. Uma aplicação $f : (E,\tau) \longrightarrow (S,\sigma)$ é **contínua** no ponto $p \in E$ se, dado $U \in \sigma$ com $f(p) \in U$, existe $G \in \tau$, com $p \in G$, tal que $f(G) \subset U$. Dizemos que f é **contínua** em E se f é contínua em todos os pontos de E.

A definição anterior é uma generalização da continuidade de funções reais.

Exemplo 2.2.21. (Inclusão) Sejam (E,τ) um espaço topológico, $T \subset E$ e τ_T a topologia induzida sobre T. A aplicação $i : (T,\tau_T) \hookrightarrow (E,\tau)$ dada por $i(x) = x$, denominada **aplicação inclusão**, é contínua. De fato, seja $x \in T$ e seja $U \in \tau$ tal que $i(x) = x \in U$. Então, $U \cap T \in \tau_T$ é tal que $x \in U \cap T$ e $i(U \cap T) = U \cap T \subset U$.

Exemplo 2.2.22. (Identidade) Seja (E,τ) um espaço topológico. A aplicação $id_E : (E,\tau) \longrightarrow (E,\tau)$ dada por $id_E(x) = x$, para todo $x \in E$, é contínua e é denominada **aplicação identidade**.

Na sequência apresentamos algumas equivalências que auxiliam muito para verificar se uma aplicação é contínua.

Proposição 2.2.23. Seja $f : (E, \tau) \longrightarrow (S, \sigma)$ uma aplicação. São equivalentes:

(a) f é contínua;

(b) $f^{-1}(U) \in \tau$, para todo $U \in \sigma$ (ou seja, imagem inversa de aberto é aberto);

(c) $f^{-1}(F)$ é fechado em E, para todo F fechado em S (ou seja, imagem inversa de fechado é fechado).

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b)

Seja $U \in \sigma$. Se $f^{-1}(U) = \emptyset$, então $f^{-1}(U) \in \tau$, de modo que podemos supor que $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Logo, tome $x \in f^{-1}(U)$ e $y = f(x) \in U$. Como f é contínua em x, dado $U \in \sigma$ com $f(x) \in U$, existe $G \in \tau$ tal que $x \in G$ e $f(G) \subset U$. Assim, $x \in G \subset f^{-1}(U)$, de modo que $f^{-1}(U)$ é aberto.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Se F é fechado de S, então F^c é aberto e pela condição (b), $f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c$ é aberto. Portanto, $f^{-1}(F)$ é fechado.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Dados $x \in E$ e $U \in \sigma$ tal que $f(x) \in U$, temos que $F = U^c$ é fechado em S e $f(x) \notin F$. Pela condição (c), $f^{-1}(F)$ é fechado em E e $x \notin f^{-1}(F)$, donde $x \in [f^{-1}(F)]^c$. Se $G = [f^{-1}(F)]^c$, então $G \in \tau$, $x \in G$ e $f(G) \subset U$, ou seja, f é contínua.

$\square$

Exemplo 2.2.24.

(a) $f : (E, \tau_{discreta}) \longrightarrow (S, \sigma)$ é contínua quaisquer que sejam E, S, f e σ.

(b) $f : (E, \tau) \longrightarrow (S, \tau_{caótica})$ é sempre contínua, qualquer que seja τ.

A seguir verificaremos que composta de aplicações contínuas é contínua.

Proposição 2.2.25. Se $f : (E, \tau) \longrightarrow (T, \sigma)$ e $g : (T, \sigma) \longrightarrow (S, \eta)$ são aplicações contínuas, então $g \circ f : (E, \tau) \longrightarrow (S, \eta)$ é contínua.

Demonstração. Se V é aberto em S, como g é contínua, pela Proposição 2.2.23, temos que $g^{-1}(V)$ é aberto em T, e como f também é contínua, $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ é aberto em E, o que implica que $g \circ f$ é contínua.

□

Lema 2.2.26. (**Lema da Continuidade**). Sejam X e Y espaços topológicos, A e B subconjuntos fechados de X tais que $A \cup B = X$. Sejam $f : A \longrightarrow Y$ e $g : B \longrightarrow Y$ aplicações contínuas satisfazendo a condição: $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Então, a aplicação $h : X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Seja F um subconjunto fechado de Y. Como f e g são contínuas, então $f^{-1}(F)$ é um fechado de A e $g^{-1}(F)$ é um fechado de B. Por hipótese A e B são fechados de X, e assim $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ são fechados de X. Logo, $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$, e portanto $h^{-1}(F)$ é fechado em X. □

O lema anterior também é conhecido como **Lema da Colagem**. Na parte de Teoria de Homotopia usaremos tal lema em algumas aplicações.

Definição 2.2.27. Uma aplicação $f : (E, \tau) \longrightarrow (S, \sigma)$ é um **homeomorfismo** se f é bijetora e tanto f quanto f^{-1} são contínuas.

Exemplo 2.2.28.

(a) Sejam $E = S = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \mathbb{R}\}$ e $\sigma = \{\emptyset, \{b\}, \mathbb{R}\}$. A aplicação $f : (E, \tau) \longrightarrow (S, \sigma)$ dada por $f(a) = b$, $f(b) = a$ e $f(x) = x$, para todo $x \notin \{a, b\}$, é um homeomorfismo.

(b) Dado um espaço topológico (E, τ) a aplicação id_E, definida no Exemplo 2.2.22, é um homeomorfismo.

2.3 GRUPOS

Definição 2.3.1. Uma estrutura matemática constituída de um conjunto não vazio G e uma operação fechada $(x, y) \mapsto x * y$ sobre G, é chamado **grupo** se essa operação satisfaz os seguintes axiomas:

- *Associatividade:*
  $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;

- *Existência do elemento neutro:*
  Existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, qualquer que seja $a \in G$;

- *Existência do elemento simétrico:*
  para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.

Denotaremos um grupo por $(G, *)$, onde o símbolo $*$ indica a operação sobre G.

Exemplo 2.3.2.

(1) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros com a adição usual $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano.

(2) $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$, também são exemplos de grupos com a operação de adição usual.

(3) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ e $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ são exemplos de grupo com a operação de multiplicação usual.

Definição 2.3.3. Um **homomorfismo** de um grupo $(G, *)$ num grupo $(H, \cdot)$ é uma aplicação $f : G \to H$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in G$:

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y).$$

Se um homomorfismo é uma aplicação injetora, então ele é chamado de **homomorfismo injetor**. E se for uma aplicação sobrejetora, **homomorfismo sobrejetor**. O caso em que f é bijetora dizemos que f é um **isomorfismo** de G em H, e que os grupos G e H são isomorfos.
Notação: $G \cong H$

3 TEORIA DE HOMOTOPIA

Neste capítulo, introduzimos o conceito de homotopia entre aplicações que será fundamental para a construção do grupo fundamental de um espaço topológico. Dentre as referências utilizadas destacamos as seguintes: [CROOM 1978], [HATCHER 2002], [HU 1959], [LIMA 1998], [MASSEY 1967], [MAUNDER 1970] e [MUNKRES 1975].

Por todo este capítulo, bem como nos capítulos seguintes, I denotará o intervalo fechado $[0,1]$.

3.1 APLICAÇÕES HOMOTÓPICAS

Definição 3.1.1. Sejam X e Y espaços, e sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é **homotópica** a g se existir uma aplicação contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$, tem-se $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$. A aplicação H é chamada de **homotopia** entre f e g.
Notações: $f \sim g$ ou $f \overset{H}{\sim} g$.

Uma homotopia entre duas aplicações pode ser pensada como sendo uma forma de "deformar" uma aplicação na outra. Representamos esta noção de deformação na figura abaixo.

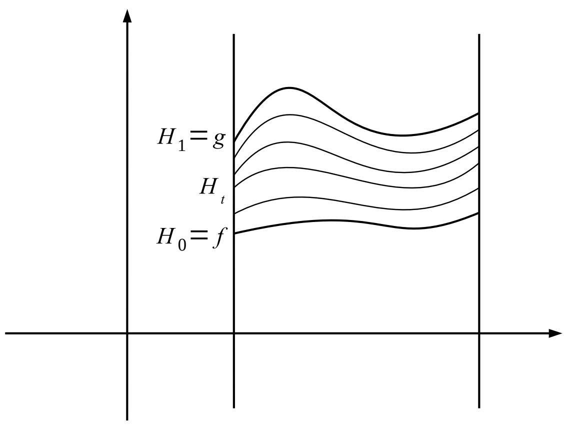


Figura 1: Homotopia entre as aplicações f e g.

Observação 3.1.2.

(1) Para cada $t \in I$ fixo, temos uma aplicação contínua $H_t : X \longrightarrow Y$ dada por $H_t(x) = H(x,t)$. A coleção $(H_t)_{t\in I}$ é uma família de funções contínuas.

(2) A relação $\sim$ é chamada **relação de homotopia** e é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas de X em Y. De fato, sejam $f, g, h : X \longrightarrow Y$ aplicações contínuas.

(i) $f \sim f$
Defina $H : X \times I \longrightarrow Y$ por $H(x,t) = f(x)$, para todo $x \in X$ e para todo $t \in I$. Note que

- H é contínua, e
- $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Portanto, $f \overset{H}{\sim} f$.

(ii) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$
Por hipótese, existe $H : X \times I \longrightarrow Y$ aplicação contínua tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Sendo assim, defina

$$\begin{array}{rccl} K : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t) & \longmapsto & K(x,t) = H(x,1-t) \end{array}.$$

Temos que

- K é contínua e
- $K(x,0) = H(x,1) = g(x)$ e $K(x,1) = H(x,0) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Portanto, $g \sim f$.

(iii) $f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$
Por hipótese, existem aplicações contínuas $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ e $K : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $K(x,0) = g(x)$ e $K(x,1) = h(x)$.
Definindo $H' : X \times I \longrightarrow Y$ por

$$H'(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ K(x,2t-1), & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Temos que

- Pelo Lema Da Continuidade H' é contínua, e

- $H'(x,0) = H(x, 2 \cdot 0) = H(x,0) = f(x)$ e $H'(x,1) = K(x, 2 \cdot 1 - 1) = K(x,1) = h(x)$, para todo $x \in X$.

Portanto, $f \sim h$.

Exemplo 3.1.3. Seja $Y \subset E$, onde E é um espaço vetorial normado. Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Suponhamos que para todo $x \in X$ o segmento de reta $[f(x), g(x)] \subset Y$. Definindo

$$\begin{array}{rcl} H : X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x), \end{array}$$

temos que H é uma homotopia entre f e g e é chamada **homotopia linear**.

Exemplo 3.1.4. Nas condições do exemplo anterior, se $Y = E$, quaisquer duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow E$ são homotópicas. Daí, se $g = 0 : X \longrightarrow E$ é a aplicação nula, então $f \sim 0$, para toda $f : X \longrightarrow E$ contínua.

Proposição 3.1.5. Sejam $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ e $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ aplicações contínuas. Se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$, então $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$.

Demonstração. Por hipótese, existem homotopias $H_1 : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H_1(x,0) = f_1(x)$ e $H_1(x,1) = f_2(x)$, para todo $x \in X$, e $H_2 : Y \times I \longrightarrow Z$ tal que $H_2(y,0) = g_1(x)$ e $H_2(y,1) = g_2(x)$, para todo $y \in Y$. Definindo

$$\begin{array}{rcl} K : X \times I & \longrightarrow & Z \\ (x,t) & \longmapsto & K(x,t) = H_2(H_1(x,t),t), \end{array}$$

temos que K é contínua, $K(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$ e $K(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(f_2(x),1) = g_2(f_2(x)) = (g_2 \circ f_2)(x)$, para todo $x \in X$. Portanto, $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$.

□

3.2 EQUIVALÊNCIA DE HOMOTOPIA

Definição 3.2.1. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma **equivalência de homotopia**, se existir $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$. A aplicação g é chamada **inversa homotópica** de f. Se existir uma equivalência entre X e Y dizemos que X e Y **têm o mesmo tipo de homotopia**, ou são **homotopicamente equivalentes**.
Notação: $X \equiv Y$.

Geometricamente, a existência de uma equivalência de homotopia entre X e Y significa que X pode ser "deformado" continuamente a Y e vice-versa. Verifica-se facilmente que a relação $\equiv$ é uma relação de equivalência no conjunto de todos os espaços.

Exemplo 3.2.2. Se X e Y são dois espaços homeomorfos, então X e Y têm o mesmo tipo de homotopia. De fato, se X é homeomorfo a Y, então existe $f : X \longrightarrow Y$ aplicação contínua e bijetora, com $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$ sua inversa que também é contínua. Logo, $f \circ g = id_Y \sim id_Y$ e $g \circ f = id_X \sim id_X$.

O exemplo anterior nos ajuda a decidirmos se dois espaços não são homeomorfos, para isto basta sabermos se eles não têm o mesmo tipo de homotopia.

Exemplo 3.2.3. A circunferência $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, onde 0 denota a origem $(0,0)$. De fato, considerando a aplicação inclusão $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, isto é, $i(u) = u$, para todo $u \in \mathbb{S}^1$, temos que i é uma equivalência de homotopia, sendo que sua inversa homotópica é definida por

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & u & \longmapsto & g(u) = \dfrac{u}{\| u \|} \end{array}.$$

Com efeito,

- se $u \in \mathbb{S}^1$, $(g \circ i)(u) = g(i(u)) = g(u) = \dfrac{u}{\| u \|} \overset{\|u\|=1}{=} u$, isto é,

$$g \circ i = id_{\mathbb{S}^1} \sim id_{\mathbb{S}^1}.$$

- se $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, temos que

$$(i \circ g)(u) = i(g(u)) = i\left(\frac{u}{\| u \|}\right) = \frac{u}{\| u \|}.$$

  Como $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial normado, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\left[u, \frac{u}{\| u \|}\right] \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \left(\text{pois } \frac{u}{\| u \|} \neq 0\right),$$

  para todo $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pelo Exemplo 3.1.3, temos que

$$i \circ g \sim id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}.$$

Portanto, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{S}^1$.

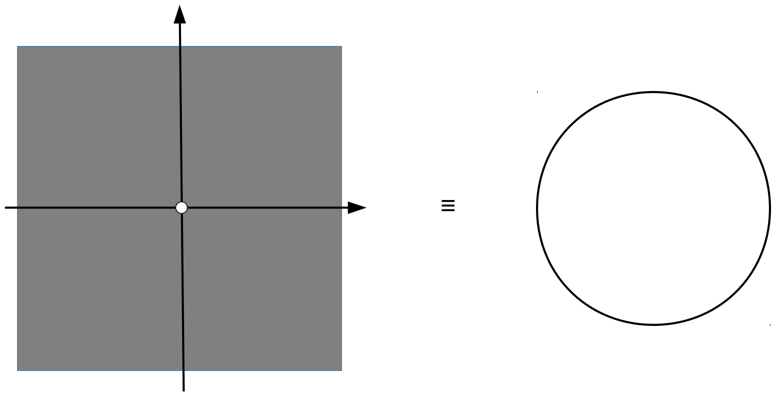


Figura 2: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ **e a circunferência.**

Na sequência veremos outro exemplo de espaços com o mesmo tipo de homotopia, o qual será ilustrado apenas geometricamente.

Exemplo 3.2.4. A coroa circular e a circunferência $\mathbb{S}^1$ têm o mesmo tipo de homotopia.

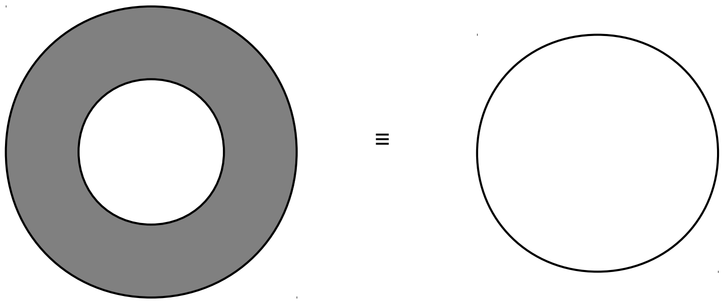


Figura 3: Coroa circular e a circunferência.

Definição 3.2.5. Um espaço X é chamado **contrátil**, se X tem o mesmo tipo de homotopia do espaço formado por um único ponto $x_0 \in X$, isto é, $X \equiv \{x_0\}$.

Exemplo 3.2.6. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}\}$, $n \geq 1$, é contrátil. Com efeito, denotando $0 := (0,\ldots,0)$ e considerando as aplicações $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0\}$ definida por $f(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ e $g : \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $g(0) = 0$, temos que $(f \circ g)(0) = f(0) = 0 = id_{\{0\}}(0)$ e $(g \circ f)(u) = g(0) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $g \circ f$ é a aplicação nula, e portanto pelo Exemplo 3.1.4, segue que $g \circ f \sim id_{\mathbb{R}^n}$.

Definição 3.2.7. Sejam X e Y espaços e $A \subset X$. Considere $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicações contínuas tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$. Dizemos que f **é homotópica a** g **relativamente a** A se existir $H : X \times I \longrightarrow Y$ aplicação contínua tal que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ e $H(x,t) =$

$f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

Notação: $f \sim g\,(rel\,A)$.

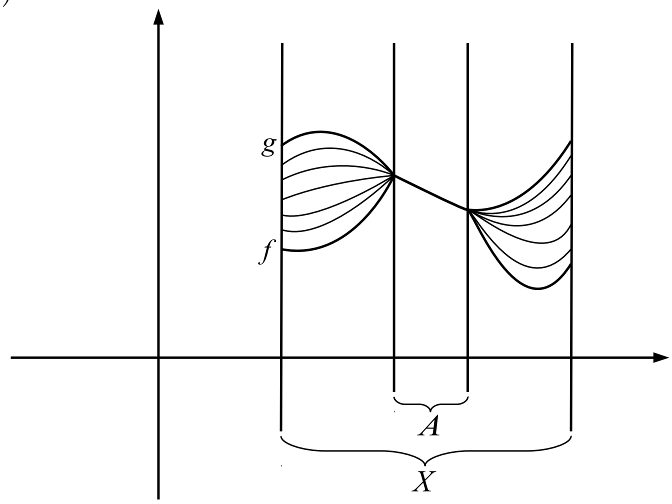


Figura 4: Homotopia relativa entre f e g relativamente ao subconjunto $A \subset X$.

Observação 3.2.8. A relação $\sim\ (rel\,A)$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções do espaço X no espaço Y que coincidem em $A \subset X$.

Exemplo 3.2.9. As aplicações contínuas $id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (aplicação identidade) e $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $r(u) = \dfrac{u}{\| u \|}$, para todo $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, são homotópicas relativamente à circunferência $\mathbb{S}^1$. De fato, se $u \in \mathbb{S}^1$, então $id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(u) = u$ e $r(u) = \dfrac{u}{\| u \|} \overset{\|u\|=1}{=} u$. Agora, definindo

$$\begin{array}{rccl} H : & (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ & (u,t) & \longmapsto & H(u,t) = tu + (1-t)\dfrac{u}{\| u \|} \end{array},$$

temos que

- H é contínua;
- $H(u,0) = r(u)$;
- $H(u,1) = id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(u)$;
- para todo $u \in \mathbb{S}^1$, $H(u,t) \overset{\|u\|=1}{=} tu + (1-t)u = u = id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(u) = r(u)$, para todo $t \in I$.

3.3 CAMINHOS E HOMOTOPIA DE CAMINHOS

Definição 3.3.1. Um **caminho** em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 é uma aplicação contínua $\alpha : I \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Se $x_0 = x_1$, dizemos que α é um **laço baseado em** x_0.

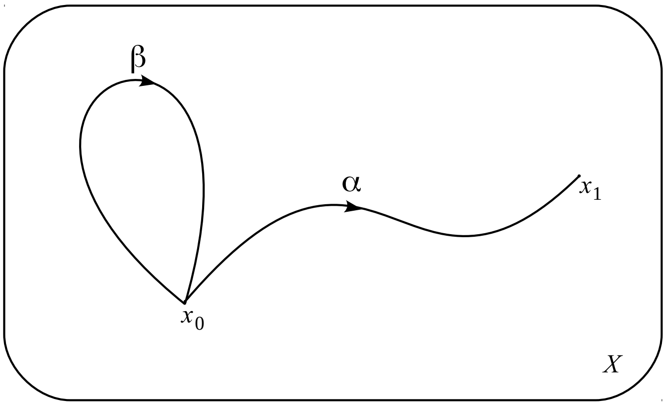


Figura 5: Caminho α com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 e laço β baseado em x_0.

Exemplo 3.3.2. Seja X um espaço vetorial normado (como por exemplo $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$) e $x_0, x_1 \in X$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} \alpha : I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \alpha(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \end{array}.$$

Deste modo temos que α é um caminho ligando x_0 à x_1.

Exemplo 3.3.3. (Caminho constante). Sejam X um espaço e $x_0 \in X$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} e_{x_0} : I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & e_{x_0}(t) = x_0 \end{array},$$

para todo $t \in I$, é um caminho em X, denominado **caminho constante**.

Exemplo 3.3.4. (Caminho inverso). Seja $\alpha : I \longrightarrow X$ um caminho com ponto inicial x_0 e ponto final x_1. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \alpha^{-1} : I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t), \end{array}$$

para todo $t \in I$, é um caminho em X, denominado **caminho inverso** de α. Note que o ponto inicial de α^{-1} é x_1 e o ponto final de α^{-1} é x_0. Caso α seja um laço baseado em x_0, chamaremos α^{-1} de **laço inverso** de α.

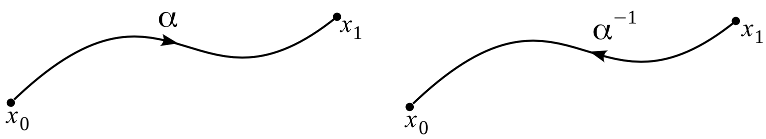


Figura 6: Caminho α com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 e seu caminho inverso α^{-1}.

Os laços constante e inverso, apresentados nos dois exemplos anteriores, serão importantes para a definição do grupo fundamental de um espaço X, uma vez que o caminho constante e_{x_0} dará origem ao elemento neutro e o laço inverso α^{-1} dará origem ao elemento inverso no grupo fundamental.

Definição 3.3.5. Dois caminhos $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ com pontos iniciais x_0 e pontos finais x_1 são **homotópicos relativamente ao subconjunto** $\{x_0, x_1\}$ **de** X se existe uma homotopia entre α e β relativa ao subconjunto $\{x_0, x_1\}$, isto é, se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

- $H(t,0) = \alpha(t)$ e $H(t,1) = \beta(t)$, para todo $t \in I$, e
- $H(0,s) = x_0$ e $H(1,s) = x_1$, para todo $s \in I$.

Notação: $\alpha \sim \beta\, rel\,\{x_0, x_1\}$ ou $\sim\ rel\,\{x_0, x_1\}$. Se $\alpha \sim \beta\, rel\,\{x_0, x_1\}$, com $x_0 = x_1$, denotamos simplesmente por $\alpha \sim_{x_0} \beta$ (note que nesta situação α e β são laços baseados em x_0).

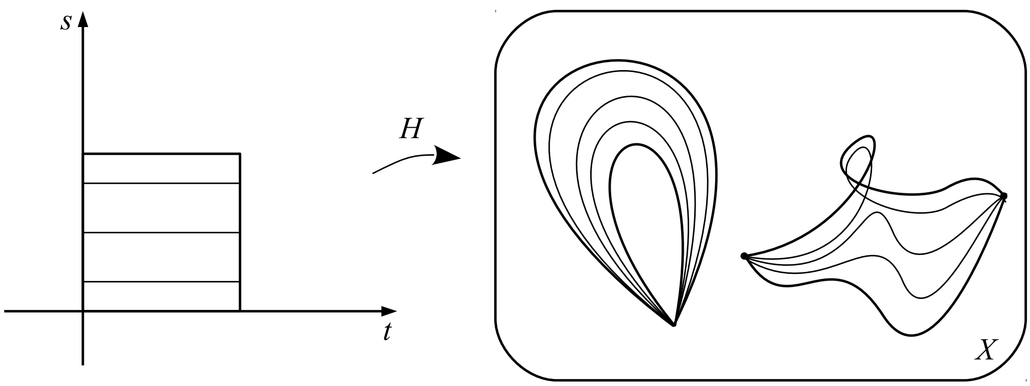


Figura 7: Homotopia de caminhos e laços.

Dados um espaço X e $x_0, x_1 \in X$, denotaremos por $\Omega(X; x_0, x_1)$ o conjunto de todos os caminhos em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1, e por $\Omega(X; x_0)$ o conjunto de todos os laços baseados em x_0.

Verifica-se que a relação $\sim rel\,\{x_0, x_1\}$ (respectivamente, $\sim_{x_0}$) é uma relação de equivalência no conjunto $\Omega(X; x_0, x_1)$ (respectivamente, $\Omega(X; x_0)$).

Definição 3.3.6. (Caminho produto). Sejam α e β caminhos em X tais que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) =$

$\beta(0) = x_1$ e $\beta(1) = x_2$. O **caminho produto** $\alpha * \beta$ é o caminho $\alpha * \beta : I \longrightarrow X$ definido por

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

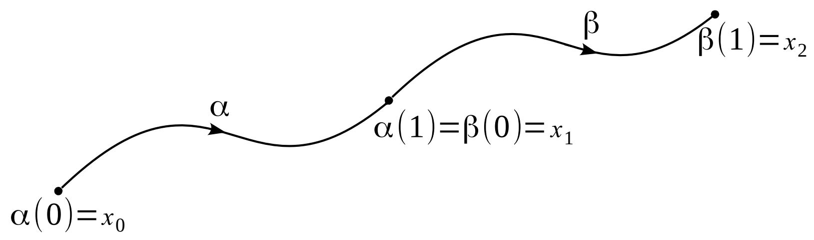


Figura 8: Produto dos caminhos α e β.

4 GRUPO FUNDAMENTAL

De acordo com as notações e definições dos capítulos anteriores, consideremos X um espaço, $x_0 \in X$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X;x_0)$. Podemos nos perguntar: o par $(\Omega(X;x_0), *)$ é um grupo? Note que $(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma)$, ou seja, o produto de laços não é associativo, e consequentemente a operação $*$ não define uma estrutura de grupo em $\Omega(X;x_0)$.

Sendo assim, denotemos por $[\alpha]$ a classe de equivalência do laço α baseado em x_0, dada pela relação $\sim_{x_0}$, isto é,

$$[\alpha] = \{\beta \in \Omega(X;x_0) \mid \alpha \sim_{x_0} \beta\}.$$

Uma vez que $\sim_{x_0}$ é uma relação de equivalência em $\Omega(X;x_0)$, temos que se $\alpha \not\sim_{x_0} \beta$ (α e β não são laços homotópicos), então $[\alpha] \neq [\beta]$.

Agora, consideremos

$$\pi_1(X;x_0) := \frac{\Omega(X;x_0)}{\sim_{x_0}} = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X;x_0)\},$$

o conjunto formado pelas classes de homotopia de laços baseados em x_0. Dados $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X;x_0)$, definimos a seguinte operação em $\pi_1(X;x_0)$:

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta],$$

ou seja, o produto das classes $[\alpha]$ e $[\beta]$ é a classe do caminho produto, $[\alpha * \beta]$.

Temos que a operação "$\cdot$" está bem definida, isto é, se $[\alpha]$, $[\alpha']$, $[\beta]$, $[\beta'] \in \pi_1(X;x_0)$ são tais que $\alpha' \in [\alpha]$ e $\beta' \in [\beta]$, então

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha'] \cdot [\beta'],$$

e este fato é verificado pelo seguinte lema:

Lema 4.0.1. Sejam $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \Omega(X;x_0)$ tais que $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$. Então, $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha' * \beta'$.

Demonstração. Como $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$, existem $F, G : I \times I \to X$ tais que:

$$\begin{cases} F(0,t) = \alpha(t);\ F(t,1) = \alpha'(t), & \forall t \in I \\ F(0,s) = F(1,s) = x_0, & \forall s \in I \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(0,t) = \beta(t);\ G(t,1) = \beta'(t), & \forall t \in I \\ G(0,s) = G(1,s) = x_0, & \forall s \in I \end{cases}$$

Temos que $H : I \times I \to X$ definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ G(2t-1,s), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é uma homotopia entre $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$.

$\square$

Com esta operação " $\cdot$ " definida sobre $\pi_1(X;x_0)$, podemos verificar os seguintes resultados:

Lema 4.0.2. (Associatividade). Sejam $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \pi_1(X;x_0)$. Então, $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$.

Demonstração. Queremos provar que $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$, ou seja,

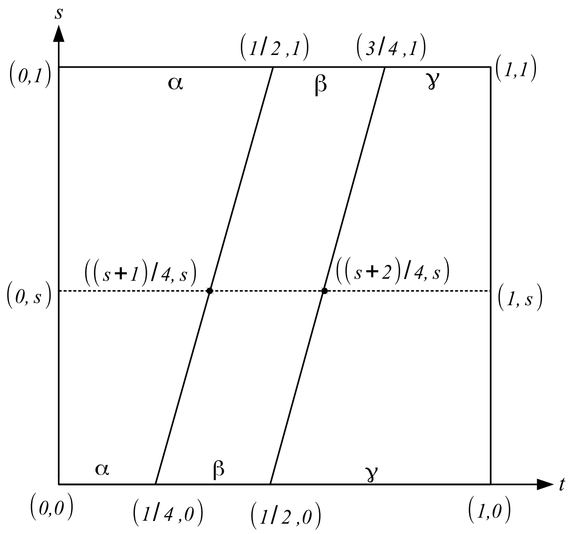
$$[(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)].$$

Para provar que a classe dos laços são iguais é necessário mostrar que existe uma homotopia entre os laços que as representam, isto é, $(\alpha * \beta) * \gamma \sim_{x_0} \alpha * (\beta * \gamma)$. Aplicando a definição de produto de caminhos temos:

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}, \\ \beta(4t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \gamma(2t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$(\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \beta(4t-2), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{3}{4}, \\ \gamma(4t-3), & \text{se} \quad \dfrac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A figura seguinte é a motivação para definirmos a homotopia entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$:



Para exibir a homotopia entre os laços é necessário determinar uma aplicação contínua tal que para cada nível s conforme representado na figura acima, tenhamos uma laço baseado x_0.

As coordenadas dos pontos (t,s) das duas retas diagonais da figura acima são obtidas da seguinte forma:

dados $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $t = sa + b$, $\forall s \in I$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} &= a \cdot 1 + b \\ \dfrac{1}{4} &= a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow t = \frac{s+1}{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} &= a \cdot 0 + b \\ \dfrac{3}{4} &= a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow t = \frac{s+2}{4}$$

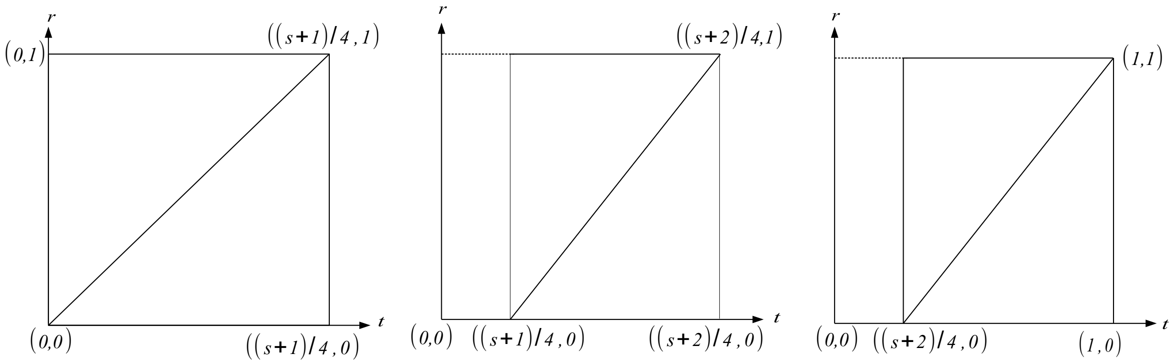
Agora para cada $s \in I$, veremos como percorrer os laços α e β nos " intervalos de tempo" $\left[0, \dfrac{s+1}{4}\right]$, $\left[\dfrac{s+1}{4}, \dfrac{s+2}{4}\right]$ e $\left[\dfrac{s+2}{4}, 1\right]$, respectivamente.

Dados $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $r = at + b$,

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 0 &= a \cdot 0 + b \\ 1 &= a \cdot \dfrac{s+1}{4} + b \end{cases} \Rightarrow r = \frac{4t}{s+1}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} 0 = a \cdot \dfrac{s+1}{4} + b \\[2ex] 1 = a \cdot \dfrac{s+2}{4} + b \end{cases} \Rightarrow r = 4t - (s+1)$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} 0 = a \cdot \dfrac{s+2}{4} + b \\[2ex] 1 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow r = \dfrac{4t - s - 2}{2 - s}$$



(a) (b) (c)

Assim, observando as composições abaixo,

$$\begin{array}{ccccl} \left[0, \dfrac{s+1}{4}\right] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \dfrac{4t}{s+1} & \longmapsto & \alpha\left(\dfrac{4t}{s+1}\right) = \alpha_s(t) \\ \left[\dfrac{s+1}{4}, \dfrac{s+2}{4}\right] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & 4t-(s+1) & \longmapsto & \beta(4t-s-1) = \beta_s(t) \\ \left[\dfrac{s+2}{4}, 1\right] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \dfrac{4t-s-2}{2-s} & \longmapsto & \gamma\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right) = \gamma_s(t) \end{array}$$

definimos H da seguinte maneira:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha_s(t) = \alpha\left(\dfrac{4t}{s+1}\right), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{4} \\[2ex] \beta_s(t) = \beta(4t-s-1), & \text{se} \quad \dfrac{s+1}{4} \leq t \leq \dfrac{s+2}{4} \\[2ex] \gamma_s(t) = \gamma\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right), & \text{se} \quad \dfrac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos que H é homotopia. De fato,

H é contínua, pelo Lema da Continuidade.

$$H(t,0)=\begin{cases}\alpha(4t), & \text{se} \quad 0\leq t\leq \dfrac{1}{4}\\[2mm] \beta(4t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{4}\leq t\leq \dfrac{1}{2}\\[2mm] \gamma(2t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases} = ((\alpha*\beta)*\gamma)(t)$$

$$H(t,1)=\begin{cases}\alpha(2t), & \text{se} \quad 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}\\[2mm] \beta(4t-2), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2}\leq t\leq \dfrac{3}{4}\\[2mm] \gamma(4t-3), & \text{se} \quad \dfrac{3}{4}\leq t\leq 1\end{cases} = (\alpha*(\beta*\gamma))(t)$$

$H(0,s)=\alpha(0)$ e $H(1,s)=\gamma(1)$

Portanto, $(\alpha*\beta)*\gamma\sim_{x_0}\alpha*(\beta*\gamma)$. □

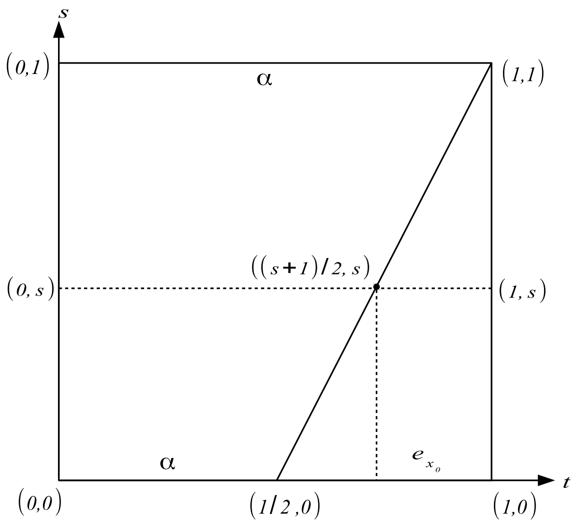
Lema 4.0.3. (Existência do elemento neutro). A classe do laço constante $[e_{x_0}]$ é o elemento neutro para a operação “$\cdot$” em $\pi_1(X;x_0)$.

Demonstração. Para provarmos que $[e_{x_0}]$ é o elemento neutro, temos que provar que $[\alpha]\cdot[e_{x_0}]=[\alpha]=[e_{x_0}]\cdot[\alpha]$, ou seja, exibir uma homotopia tal que $\alpha*e_{x_0}\sim_{x_0}\alpha$ e uma homotopia tal que $e_{x_0}*\alpha\sim_{x_0}\alpha$.

Verificando que $\alpha*e_{x_0}\sim_{x_0}\alpha$. Temos que

$$(\alpha*e_{x_0})(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & se \quad 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}\\[2mm] x_0, & se \quad \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

A figura seguinte é a motivação para definirmos a homotopia entre os laços α e $\alpha*e_{x_0}$.



Para exibir a homotopia entre os laços é necessário determinar uma aplicação contínua tal que para cada nível s conforme representado na figura acima, tenhamos uma laço baseado x_0.

As coordenadas dos pontos (t,s) da reta diagonal da figura acima é dada por:

dados $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $t = sa+b$, $\forall s \in I$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} &= a \cdot 0 + b \\ 1 &= a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow t = \frac{s+1}{2}$$

Agora para cada $s \in I$, veremos como percorrer os laços α e e_{x_0} no " intervalo de tempo" $\left[0, \frac{s+1}{2}\right]$. Dados $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $r = at+b$,

$$\begin{cases} 0 &= a \cdot 0 + b \\ 1 &= a \cdot \frac{s+1}{2} + b \end{cases} \Rightarrow r = \frac{2t}{s+1}.$$

Assim, observando a composição abaixo,

$$\begin{array}{rcccl} \left[0, \frac{s+1}{2}\right] & \to & [0,1] & \to & X \\ t & \to & \frac{2t}{s+1} & \to & \alpha\left(\frac{2t}{s+1}\right) = \alpha_s(t) \end{array}$$

definimos H da seguinte maneira:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha_s(t), & se \quad 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{2} \\ x_0, & se \quad \dfrac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{2t}{s+1}\right), & se \quad 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{2} \\ x_0, & se \quad \dfrac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é homotopia. De fato,

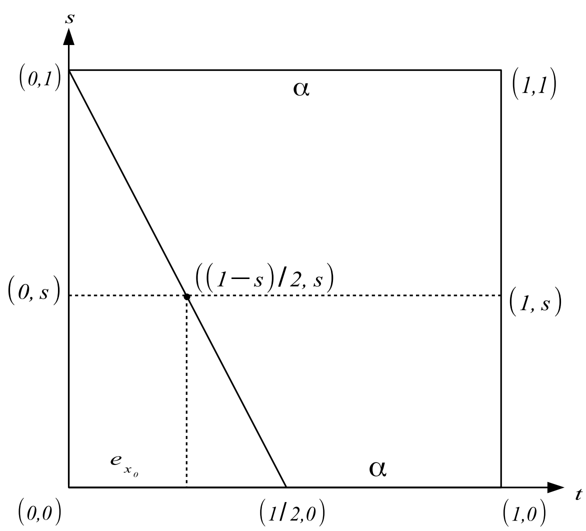
H é contínua;

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t), & se \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ x_0, & se \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & se \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x_0, & se \quad t = 1 = \alpha(t) \end{cases}$$

$H(0,s) = \alpha(0) = x_0$.

Analogamente, verifica-se que $\alpha \sim_{x_0} e_{x_0} * \alpha$ e a homotopia entre $e_{x_0} * \alpha$ e α é motivada pela figura seguinte:



Portanto, $\alpha * e_{x_0} \sim_{x_0} \alpha \sim_{x_0} e_{x_0} * \alpha$.

□

Lema 4.0.4. (Existência do elemento inverso). Seja $[\alpha] \in \pi_1(X;x_0)$. Então, $[\alpha^{-1}]$ é o elemento inverso de $[\alpha]$ em relação à operação "$\cdot$" em $\pi_1(X;x_0)$.

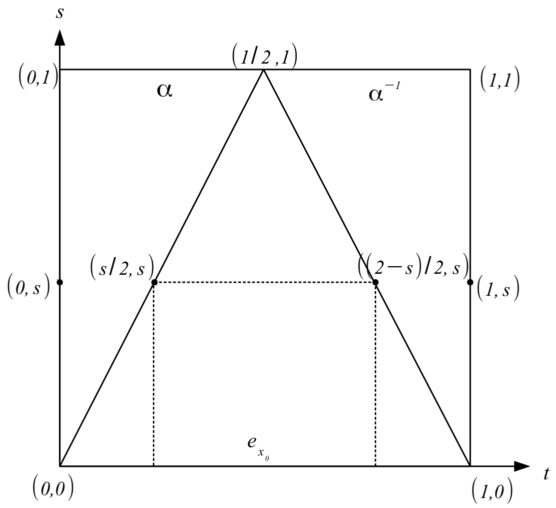
Demonstração. Para provarmos que $[\alpha^{-1}]$ é elemento inverso temos que mostrar que $[\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] = [e_{x_0}] = [\alpha^{-1}] \cdot [\alpha]$, ou seja,

$$\alpha * \alpha^{-1} \sim_{x_0} e_{x_0} \sim_{x_0} \alpha^{-1} * \alpha$$

Temos que

$$(\alpha * \alpha^{-1})(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & se \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ \alpha^{-1}(2t-1), & se \quad \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

A figura seguinte é a motivação para definirmos a homotopia entre α e α^{-1}:



Para exibir a homotopia entre os laços é necessário determinar uma aplicação contínua tal que para cada nível s conforme representado na figura acima, tenhamos uma laço baseado x_0.

As coordenadas dos pontos (t,s) das duas retas diagonais da figura acima são obtidas da seguinte forma:

Dados $a,b \in R$ tais que $t = sa+b$, $\forall s \in I$

$$\begin{cases} 0 = a\cdot 0 + b \\ \dfrac{1}{2} = a\cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow t = \frac{s}{2},$$

$$\begin{cases} 1 = a\cdot 0 + b \\ \dfrac{1}{2} = a\cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2-s}{2}.$$

Agora para cada $s \in I$, veremos como percorrer os laços α e α^{-1} nos “ intervalos de tempo” $[0,s]$, $\left[\dfrac{s}{2}, \dfrac{2-s}{2}\right]$ e $\left[\dfrac{2-s}{2}, 1\right]$, respectivamente.

Dados $a,b \in R$ tais que $r = at+b$,

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 1 = a \cdot \frac{1}{2} + b \end{cases} \Rightarrow r = 2t,$$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot \frac{1}{2} + b \\ 1 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow r = 2t - 1.$$

Assim, observando as composições abaixo,

$$\begin{array}{rcccl} \left[0, \frac{s}{2}\right] & \longrightarrow & [0,s] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & 2t & \longmapsto & \alpha(2t) \\ \left[\frac{s}{2}, \frac{1-s}{2}\right] & \longrightarrow & \{s\} & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & s & \longmapsto & \alpha(s) \\ \left[\frac{2-s}{2}, 1\right] & \longrightarrow & [1-s,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & 2t-1 & \longmapsto & \alpha^{-1}(2t-1) = \alpha(2t-2) \end{array}$$

Portanto, para t no intervalo $\left[0, \frac{s}{2}\right]$, a homotopia sai de $\alpha(0)$ e vai até $\alpha(s)$, para t no intervalo $\left[\frac{s}{2}, \frac{2-s}{2}\right]$ a homotopia permanece apenas em $\alpha(s)$ e para t no intervalo $\left[\frac{2-s}{2}, 1\right]$ a homotopia sai de $\alpha(s)$ e vai até $\alpha(0) = \alpha^{-1}(1)$.

Definimos H da seguinte maneira

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ \alpha(s), & \text{se} \quad \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ \alpha^{-1}(2t-1), & \text{se} \quad \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é homotopia. De fato,

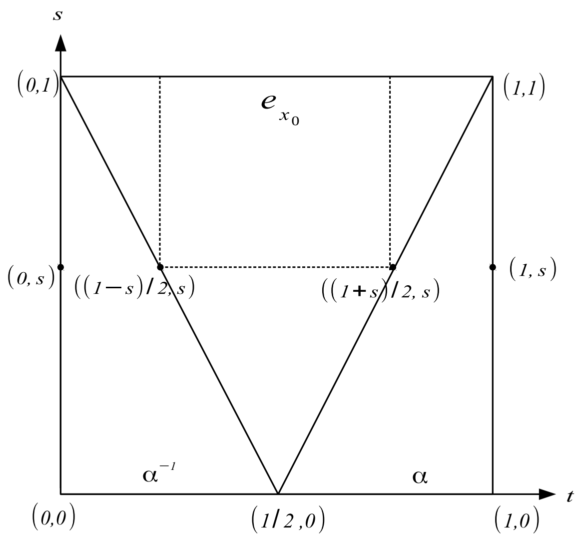
H é contínua

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se} \quad t = 0, \\ \alpha(0), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha^{-1}(2t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \alpha(1), & \text{se} \quad t = \dfrac{1}{2}, \\ \alpha^{-1}(2t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$H(0,s) = \alpha(0)$ e $H(1,s) = \alpha^{-1}(1)$.

Analogamente, verifica-se que $\alpha^{-1} * \alpha \sim_{x_0} e_{x_0}$ e a homotopia entre $\alpha^{-1} * \alpha$ e e_{x_0}é motivada pela figura seguinte:



A homotopia entre $\alpha^{-1} * \alpha$ e e_{x_0} é definida da seguinte forma:

$$H'(t,s) = \begin{cases} \alpha^{-1}(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{s}{2}, \\ \alpha(s), & \text{se} \quad \dfrac{s}{2} \leq t \leq \dfrac{2-s}{2}, \\ \alpha(2t-1), & \text{se} \quad \dfrac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Portanto, $\alpha * \alpha^{-1} \sim_{x_0} e_{x_0} \sim_{x_0} \alpha^{-1} * \alpha$.

□

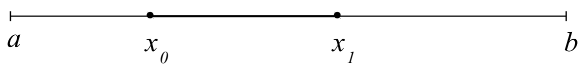
Assim, dos lemas anteriores temos o seguinte teorema:

Teorema 4.0.5. $\pi_1(X;x_0)$ é um grupo com a operação "$\cdot$" definida anteriormente.

Definição 4.0.6. O grupo $\pi_1(X;x_0)$ é denominado o **grupo fundamental** do espaço X relativo ao ponto base x_0.

Definição 4.0.7. Um espaço topológico X é dito ser **conexo por caminhos** se para quaisquer dois pontos x_0, $x_1 \in X$, existe um caminho $\lambda : [0,1] \to X$, ligando x_0 a x_1, isto é, $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda(1) = x_1$.

Exemplo 4.0.8. Qualquer intervalo da reta real é conexo por caminhos

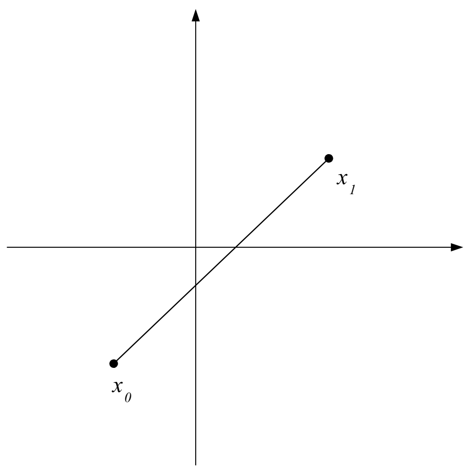


De fato, se $x_0, x_1 \in [a,b]$, tome $\lambda : [0,1] \to X$ dada por $\lambda(t) = (1-t)x_0 + tx_1$.

Exemplo 4.0.9. A reta real $\mathbb{R}$ é conexo por caminhos.

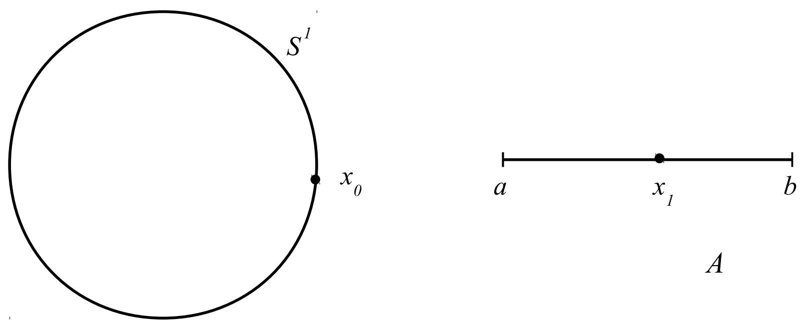
De fato, se $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, tome $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\lambda(t) = (1-t)x_0 + tx_1$.

Exemplo 4.0.10. $\mathbb{R}^2$ é conexo por caminhos.



De fato, se $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, tome λ como nos exemplos anteriores.

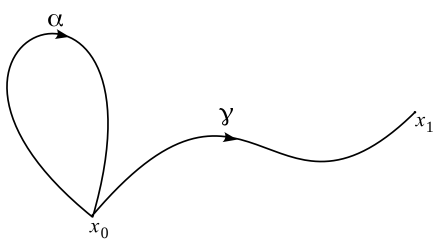
Exemplo 4.0.11. Seja X a união disjunta da circunferência $\mathbb{S}^1$ e o intervalo $A = [a,b]$, conforme figura abaixo. O espaço X não é conexo por caminhos, pois não existe caminho ligando x_0 a x_1.



Note que qualquer união disjunta de conjuntos conexos não é conexo por caminhos.

Proposição 4.0.12. Seja X um espaço topológico conexo por caminhos e sejam x_0, $x_1 \in X$. Então $\pi_1(X,x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$

Demonstração. Como X é conexo por caminhos existe um caminho γ ligando x_0 a x_1



Usando este caminho definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma_\# : & \pi_1(X,x_0) & \to & \pi_1(X,x_1) \\ & [\alpha] & \to & [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \end{array}$$

Temos que:

- $\gamma_\#$ está bem definida, isto é, se $[\alpha],[\alpha'] \in \pi_1(X,x_0)$, tais que $\alpha' \in [\alpha]$, então

  $$\gamma_\#([\alpha]) = \gamma_\#([\alpha'])$$

  De fato, temos que

  $\gamma_\#([\alpha]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$

  $\gamma_\#([\alpha']) = [\gamma^{-1} * \alpha' * \gamma]$

Como $\alpha' \in [\alpha]$, temos que $\alpha' \sim_{x_0} \alpha$. Pelo Lema 4.0.1, temos que $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma \sim_{x_0} \gamma^{-1} * \alpha' * \gamma$. Portanto,

$$[\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha' * \gamma]$$

- $\gamma_\#$ é um homomorfismo de grupo, pois se $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_\#([\alpha] \cdot [\beta]) &= \gamma_\#([\alpha * \beta]) \\
&= [\gamma^{-1} * \alpha * \beta * \gamma] \\
&= [\gamma^{-1} * \alpha * e_{x_0} * \beta * \gamma] \\
&= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma] \\
&= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \cdot [\gamma^{-1} * \beta * \gamma] \\
&= \gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta])
\end{aligned}$$

Temos que $\gamma_\#$ é um isomorfismo, pois

$$\begin{aligned}
{\gamma_\#}^{-1} : \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\
[\alpha] &\rightarrow [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]
\end{aligned}$$

é o homomorfismo inverso de $\gamma_\#$.

$\square$

Observação 4.0.13.

(1) O isomorfismo $\gamma_\#$ não é canônico pois depende da escolha do γ.

(2) Como os grupos fundamentais de um espaço conexo independem do ponto base, pois seus grupos fundamentais são isomorfos (como mostrado na proposição (4.0.12)), a representação de seu ponto base na notação $\pi_1(X, x_0)$ é frequentemente omitida e denotada por $\pi_1(X)$ simplesmente.

Exemplo 4.0.14. $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Definição 4.0.15. Um espaço topológico X é **contrátil** se existe $x_0 \in X$ tal que a aplicação identidade $id_x : X \to X$ é homotópica a aplicação constante $e_{x_0} : X \to X$ dada por $e_{x_0}(x) = x_0$, relativamente a $\{x_0\}$, isto é, se existe uma homotopia $H : X \times I \to X$ tal que

$$\begin{cases} H(x,0) = x, \quad H(x,1) = x_0 \quad \forall x \in X \\ H(x_0, s) = x_0 \quad \forall s \in I \end{cases}$$

A homotopia H é chamada uma **contração** do espaço X para o ponto x_0.

Observação 4.0.16. Geometricamente, X é contrátil se X pode ser deformado continuamente em um ponto de X.

Exemplo 4.0.17.

(1) O disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ é contrátil. De fato, seja $x_0 = (0,0) \in D$. Definimos a homotopia $H : D \times I \to D$ por $H((x,y),t) = ((1-t)x,(1-t)y)$.

(2) Os espaços considerados nos exemplos (4.0.8), (4.0.9), (4.0.10), (**??**), são exemplos de espaços contráteis.

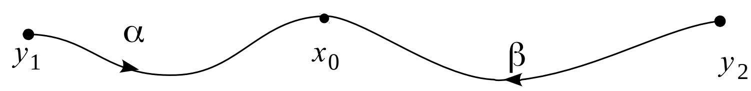
(3) Os espaços considerados nos exemplos (**??**), (**??**), (**??**), (4.0.11), não são espaços contráteis.

Definição 4.0.18. Um espaço topológico X conexo por caminhos é dito ser **simplesmente conexo** se $\pi_1(X)$ é o grupo trivial, isto é, $\pi_1(X) = \{0\}$, onde 0 denota $[e_{x_0}]$.

Teorema 4.0.19. Todo espaço contrátil é simplesmente conexo.

Demonstração. Como X é contrátil existe $x_0 \in X$ e uma homotopia $H : X \times I \to X$ tal que $H(x,0) = x$ e $H(x,1) = x_0$, para todo $x \in X$ e $H(x_0,s) = x_0$, para todo $s \in I$.

(1) X é conexo por caminhos. De fato,



considerando y_1, $y_2 \in X$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \alpha : [0,1] & \to & X \\ t & \mapsto & \alpha(t) = H(y_1,t) \end{array}$$

é um caminho ligando y_1 a x_0 e

$$\begin{array}{rcl} \beta : [0,1] & \to & X \\ t & \to & \beta(t) = H(y_2,t) \end{array}$$

é um caminho ligando y_2 a x_0. Logo, $\alpha * \beta^{-1}$ é um caminho ligando y_1 a y_2.

(2) $\pi_1(X) = 0$.

Seja $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(X)$. Considerando as composições de aplicações

$$\begin{array}{rcl} K' : I \times I & \to & X \times I \\ (t,s) & \to & (\alpha(t),s) \end{array}$$

$$\begin{aligned} K : I \times I &\rightarrow X \\ (t,s) &\rightarrow H(\alpha(t),s) \end{aligned}$$

Temos que $K : I \times I \longrightarrow X$, definida por $K(t,s) = H(\alpha(t),s)$ é uma homotopia entre α e e_{x_0}.

De fato, K é contínua pois é composição de aplicações contínuas e ainda,

$K(t,0) = H(\alpha(t),0) = \alpha(t), \forall t \in I$

$K(t,1) = H(\alpha(t),1) = x_0, \forall t \in I$

$K(0,s) = K(1,s) = x_0, \forall s \in I$

Logo, todo laço em X baseado em x_0 é homotópico ao laço constante e_{x_0}, ou seja,$[\alpha] = [e_{x_0}] =:$ 0. Portanto $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X) = \{0\}$.

□

Exemplo 4.0.20. Os espaços são contráteis, logo seus grupos fundamentais são $\{0\}$.

(1) $X = \{x_0\}$

(2) $X = \mathbb{R}$

(3) $X = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

(4) $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Nem todo espaço simplesmente conexo é contrátil. Isto é, podemos ter espaços X com $\pi_1(X) = \{0\}$ e X não ser contrátil. Por exemplo, a esfera $\mathbb{S}^2$, é simplesmente conexa, mas não é contrátil.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existem vários estudos interessantes a serem destacados à respeito do grupo fundamental, que nos auxilia a resolver problemas com relação à espaços topológicos, como já dissemos um pouco na introdução. Calcular o grupo fundamental é uma ferramenta muito útil para decidir se dois espaços são homeomorfos ou não, um dos conceitos mais estudados e utilizados, já que calcular a aplicação para a prova do mesmo é difícil.

Os conceitos descritos neste trabalho foram estudados com o objetivo de introduzir a noção de homotopia entre aplicações, destacando a homotopia de laços para a definição e verificação do grupo fundamental, ou seja, exibir os elementos que provam os axiomas da definição (2.3.1), verificando assim $\pi_1(X,x_0)$ com a operação "$\cdot$" definida é um grupo e ainda exibir exemplos de grupos fundamentais de alguns espaços topológicos.

Durante a realização desse trabalho foi possível a compreensão de importantes conceitos de espaços topológicos, bem como a estrutura que possuem, estudá-los por meio da homotopia de laços, sendo assim podendo definir os grupos fundamentais dos espaços topológicos, ou seja, relacioná-los com a álgebra e ainda, tendo a possibilidade de estudar conteúdos que não são abordados durante a graduação.

REFERÊNCIAS

CROOM, F. **Basic Concepts of Algebraic Topology**. New York: Springer-Verlag, 1978.

DOMINGUES, H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1982.

FANTI E.L.C., A. M. **Grupo Fundamental - uma Visão Geométrica**. São José do Rio Preto, SP: Notas de Seminários. IBILCE-UNESP, 1998.

HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

HU, S.-T. **Homotopy Theory**. New York: Academic Press, 1959.

IEZZI G., H. H. D. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Editora Atual, 2003.

LIMA, E. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1998.

LIMA, E. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Textos Universitários, SBM, 2009.

LIMA, E. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2013.

MASSEY, W. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York: Springer- Verlag, 1967.

MAUNDER, C. **Algebraic Topology**. London: Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

MUNKRES, J. **Topology: A First Course**. New Jersey: Prentice-Hall, 1975.

NETO, E. **Estruturas Topológicas**. São Paulo: PAED, 1981.