UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

REBECA RÚBIA HONÓRIO PINAFO

TEOREMA DE HAHN-BANACH: FORMAS ANALÍTICAS, GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

REBECA RÚBIA HONÓRIO PINAFO

TEOREMA DE HAHN-BANACH: FORMAS ANALÍTICAS, GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática .

Orientador: Profa. Dra. Débora A. F. Albanez

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARAN

FOLHA DE APROVAÇÃO

Rebeca Rúbia Honório Pinafo

TEOREMA DE HAHN-BANACH: FORMAS ANALÍTICAS, GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES

BANCA EXAMINADORA

Débora Ap F Albanez

Débora Aparecida Francisco Albanez
(orientadora)

Douglas Azevedo Sant'anna

Thiago Pinguello de Andrade

TERMO DE APROVAÇÃO

Rebeca Rúbia Honório Pinafo

TEOREMA DE HAHN-BANACH: FORMAS ANALÍTICAS, GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde e força concedidas durante toda minha formação me ajudando a superar cada obstáculo.

Aos meus pais, pela compreensão, estimulo e apoio em meus planos durante o período da faculdade, e que são para mim as pessoas mais importantes e minha maior inspiração.

A todos os professores por me proporcionarem conhecimento durante a minha vida acadêmica. Aos professores Thiago Pinguello de Andrade e Douglas Azevedo Sant'anna pelas colaborações para este trabalho.

A minha orientadora, professora Débora A. F. Albanez, que se tornou minha maior inspiração como futura matemática e profissional, por todo o empenho dedicado a este trabalho, incentivo e apoio.

Ao meu namorado, Rafael Montenegro Palma, por toda paciência, compreensão, carinho e me ajudar nos momentos difíceis.

Aos meus amigos de faculdade, que torceram por mim e me apoiaram durante todo esse percurso e diversas vezes tornaram o caminho mais harmonioso.

Por fim, agradeço a UTFPR-CP pelo apoio financeiro obtido.

RESUMO

PINAFO, Rebeca Rúbia Honório. TEOREMA DE HAHN-BANACH: FORMAS ANALÍTICAS, GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Este trabalho consiste no estudo de um dos principais teoremas da Análise Funcional: o Teorema de Hahn-Banach, em suas formas analíticas (incluindo os casos real e complexo) e geométricas, bem como o estudo de aplicações deste teorema em teoria de operadores e funcionais lineares definidos em espaços de dimensões finita e infinita.

Palavras-chave: Análise Funcional, Teorema de Hahn-Banach, extensões de funcionais lineares.

ABSTRACT

PINAFO, Rebeca Rúbia Honório. HAHN-BANACH THEOREM: ANALYTIC AND GEOMETRIC FORMS WITH APPLICATIONS. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

This work is intended to study one of the most important theorem of Functional Analysis: Hahn-Banach Theorem, in analytic (including real and complex cases) and geometrical versions, as well as studying some results related to operators and linear functionals defined in finite and infinite dimension spaces.

Keywords: Functional Analysis, Hahn-Banach Theorem, extensions of linear functionals.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Podemos caracterizar a Análise Funcional como uma área da matemática que consiste na fusão de conceitos da análise, topologia e álgebra linear. O principal objeto de estudo da Análise Funcional são os espaços de dimensão infinita, com ênfase nos espaços de funções e suas características. Além de sua importância teórica, a análise funcional possui diversas aplicações relacionadas à área de Teoria de Controle, Otimização, Equações Diferenciais Parciais e à Teoria de Espaços de Banach.

O objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema de Hahn-Banach, um dos principais teoremas da análise funcional. Abordaremos aqui suas formas analíticas e geométricas. Este teorema consiste em estender, sob certas condições, funcionais lineares definidos em um subespaço a todo o espaço vetorial.

O conceito de extensão de funcionais lineares é devido a Eduard Helly, em 1912. Posteriormente, os matemáticos Hans Hahn e Stefan Banach utilizaram as técnicas de Helly, outrora usadas somente para espaços de sequências, e passaram a lidar com o problema de extensão de funcionais em toda a sua generalidade, isto é, em espaços normados abstratos. Neste trabalho, usaremos o Lema de Zorn como ferramenta para obtermos resultados sobre extensões de funcionais.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 são apresentados alguns conceitos preliminares de álgebra linear e análise funcional como: o conceito de funcional linear, resultados sobre norma de um funcional e sobre a continuidade. No capítulo 3, são apresentados conceitos relacionados a conjuntos parcial e totalmente ordenados, com o intuito de enunciarmos o Lema de Zorn e em seguida apresentaremos o Teorema de Hahn-Banach, nas suas versões para espaço vetorial real e complexo; o capítulo 4 tratará das formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach, bem como os conceitos preliminares necessários para a compreensão do mesmo.

2 PRELIMINARES DE ÁLGEBRA LINEAR E ANÁLISE FUNCIONAL

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos de álgebra linear e análise funcional, que podem ser encontrados em (COELHO; LOURENO, 2011),(LIMA, 1983) e (CAVALCANTI et al., 2007).

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 2.1.1. *Um conjunto não vazio E é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as operações:*

(A) A cada par de vetores u,v de E corresponde a um vetor $u+v \in E$, chamado de soma de uev, de modo que:

(A1) $u+v = v+u$, para todo $u,v \in E$ (propriedade comutativa);

(A2) $(u+v)+w = u+(v+w)$, para todo $u,v,w \in E$ (propriedade associativa da soma);

(A3) existe $v \in E$, denominado vetor nulo, denotado por 0, tal que $0+v = v$, para todo $v \in E$;

(A4) para cada vetor $v \in E$, existe um vetor em V, denotado por $-v$, tal que $v+(-v) = 0$.

(M) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in E$, corresponde um vetor $\alpha \cdot v \in E$, denominado produto por escalar de α por v, de modo que:

(M1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$, para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ e para todo $v \in E$ (propriedade associativa da multiplicação);

(M2) $1 \cdot v = v$, para todo $v \in E$ (onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$)

Além disso, vamos impor que as operações dadas em (A) e (M) se distribuam, isto é, que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

(D1) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $u,v \in E$;

(D2) $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v+\beta\cdot v$*, para todo* $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ *e para todo* $v \in E$*.*

Definição 2.1.2. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$*. Um subconjunto W de E é um subespaço vetorial de E se a restrição das operações E a W torna esse conjunto um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial.*

2.2 BASES

Nessa seção iremos introduzir um conceito fundamental à teoria de espaços vetoriais, a Base. Em espaços vetoriais de dimensão finita, tal conjunto pode ser entendido como o "menor"conjunto que gera um espaço vetorial E

Definição 2.2.1. *Seja E um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$

1) *Um vetor* $v \in E$ *é uma combinação linear dos vetores* $v_1, v_2, ..., v_n \in E$ *se existirem escalares* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tais que:*

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;$$

2) *Seja* $\mathscr{B}$ *um subconjunto de E. Dizemos que*$\mathscr{B}$ *é um conjunto gerador de E se todo elemento de E for uma combinação linear de um número finito de elementos de* $\mathscr{B}$*.*

3) *Seja* $M \subset E$*. Definimos o gerador linear de M (notação: span M ou Lin M) o conjunto*

$$span\, M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i; k \in \mathbb{N}, V_i \in M, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Geralmente um espaço vetorial possui muitos conjuntos geradores. O ideal é encontrar um conjunto gerador, em que cada elemento de E se escreva como uma combinação linear única. Para tal, é necessário o conceito de dependência linear, que será definido a seguir:

Definição 2.2.2. *Seja E um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* $\mathscr{B}$ *um subconjunto de E.*

1) *Dizemos que* $\mathscr{B}$ *é linearmente independente (LI) se* $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ *para* $v_i \in \mathscr{B}$ *e* $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, ..., n$*, implicar que* $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$*.*

2) *O conjunto* $\mathscr{B}$ *é chamado de linearmente dependente (LD) se* $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$*, com pelo menos um* $\alpha_i \neq 0$*. Em outras palavras, se* $\mathscr{B}$ *não for linearmente independente.*

A par desses conceitos, podemos introduzir o conceito de base de um espaço vetorial.

Definição 2.2.3. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto $\mathscr{B}$ de E é uma base para E se $\mathscr{B}$ satisfaz as duas condições abaixo:*

1) $\mathscr{B}$ é um conjunto gerador de E; e

2) $\mathbb{B}$ é linearmente independente.

Definição 2.2.4. *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial E. Diremos que a soma $W_1 + W_2$ é direta se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e, neste caso, escrevemos $W_1 \oplus W_2$.*

Definição 2.2.5. *Sejam E e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : E \longrightarrow V$ é uma transformação linear se*

i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todos $u_1, u_2 \in E$,

ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todo $u \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definição 2.2.6. *Se E e V são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, dizemos que $T : E \longrightarrow V$ é um isomorfismo se T é uma transformação linear bijetora.*

Definição 2.2.7. *Sejam E e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : E \longrightarrow V$ uma transformação linear*

i) O conjunto $\{u \in E; T(u) = 0\}$ é chamado de núcleo de T e será denotado por $Nuc\ T$ ou $Ker\ T$.

ii) O conjunto $\{u \in E; \exists u \in E \text{ com } T(u) = v\}$ é chamado de imagem de T e é denotado por $Im\ T$.

Teorema 2.2.8. *Seja $T : E \longrightarrow V$ uma transformação linear. Então,*

i) $Im\ T$ é um subespaço vetorial V;

ii) $Ker\ T$ é um subespaço vetorial de E;

Demonstração. i) É evidente que $Im\ T \neq \emptyset$, pois, $0 = T(0) \in Im\ T$. Considere agora, $u_1, u_2 \in E$ tais que $v_1 = T(u_1)$ e $v_2 = T(v_2)$. Assim, pela linearidade de T,

$$v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in Im\ T,$$

e ainda, dado $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha v_1 = \alpha T(v_1) = T(\alpha u_1) \in Im\,T.$$

o que mostra que $u_1 + u_2 \in E$ e $\alpha u_1 \in E$. Portanto $Im\,T$ é um subespaço de V.

ii) Note que $Ker\,T \neq \emptyset$, pois, $T(0v) = 0$, para todo $v \in E$. Sejam $u_1, u_2 \in Ker\,T$, então $T(u_1) = T(u_2) = 0$. Assim, pela linearidade de T, temos

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0 \in E,$$

e dado $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda u_1) = \lambda T(u_1) = \lambda 0 = 0 \in E.$$

o que mostra que $v_1 + v_2$ e $\lambda v \in Ker\,T$, logo $Ker\,T$ é um subespaço de E e encerramos a prova. $\square$

2.3 ESPAÇO DE FUNÇÕES

Seja X um conjunto qualquer não vazio e $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Defina as seguintes operações em $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$:

- para $f, g \in \mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, defina a função $f + g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ para todo } x \in X.$$

- para cada $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, defina a função $\alpha \cdot f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por:

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Com estas operações, o conjunto $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, onde a função nula é o vetor nulo desse espaço. Tal conjunto é denominado espaço de funções.

2.4 FUNCIONAIS LINEARES

Nesta seção, apresentaremos o conceito de funcional linear.

Definição 2.4.1. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é denominada uma $forma\ linear$ ou $funcional\ linear$ sobre o espaço E se*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \textit{para todo } x, y \in E \tag{1}$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \textit{para todo } x \in E, \lambda \in \mathbb{K} \tag{2}$$

Observe que um funcional linear é uma função cujo contradomínio é $\mathbb{K}$. Logo um funcional linear aplicado em um vetor é sempre um elemento de um corpo.

Vamos ver alguns exemplos de funcional linear.

Exemplo 2.4.2. *Seja $C([a,b],\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas e limitadas em $[a,b]$. Considere,*

$$\begin{aligned} f : C[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto f(x) &= \int_a^b x(t)\,dt \quad . \end{aligned}$$

Vamos verificar que $f(x) = \displaystyle\int_a^b x(t)dt$ é um funcional linear. Sejam $x,y \in C([,b]$. Então,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \int_a^b (x(t)+y(t))\,dt \\ &= \int_a^b x(t)\,dt + \int_a^b y(t)\,dt \\ &= f(x)+f(y). \end{aligned}$$

E além disso, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \int_a^b (\lambda x(t))\,dt \\ &= \int_a^b \lambda x(t)\,dt \\ &= \lambda \int_a^b x(t)\,dt \\ &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $f(x) = \displaystyle\int_a^b x(t)dt$ é um funcional linear.

Exemplo 2.4.3. *Considere agora $\delta_{t_0} : C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por*

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0),$$

onde $t_0 \in [a,b]$ é fixo. Vamos verificar que δ_{t_0} é um funcional linear. De fato, se $x,y \in C(a,b)$, então

$$\delta_{t_0}(x+y) = (x+y)(t_0) = x(t_0)+y(t_0) = \delta_{t_0}(x)+\delta_{t_0}(y).$$

$$\delta_{t_0}(\lambda x) = (\lambda x)(t_0) = \lambda x(t_0) = \lambda \delta_{t_0}.$$

Dessa forma, podemos concluir que δ_{t_0} também é funcional linear.

Exemplo 2.4.4. *É possível estabelecer uma bijeção natural entre o conjunto $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ das transformações lineares $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e conjunto das matrizes de $(a_{i,1})$ com n linhas e 1 coluna. A matriz $M_{n\times 1}$ que corresponde a transformação linear A é encontrada considerando a aplicação na base canônica no $\mathbb{R}^n$:*

$$T(e_1) = a_{11}, T(e_2) = a_{12}, ..., T(e_n) = a_{1n}$$

e assim a matriz correspondente a aplicação T é a matriz linha dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

E assim $T(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*, pois devido a linearidade de T:*

$$T(x_1,...,x_n) = T(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1T(e_1) + ... + x_nT(e_n) = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$$

Reciprocamente, dada uma matriz (a_{1n}) com 1 linha e n colunas, as igualdades definem os valores de uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ nos n vetores da base canônica. Isto é suficiente para definir o valor de T em qualquer vetor $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tendo-se $T \cdot x = x_1Ae_1 + ... + x_nAe_n$.

Lema 2.4.5. *Sejam $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo, $x \in E$, tal que $f(x) \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ e λ definido por $\frac{\beta}{f(x)}$. Então,*

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \frac{\beta}{f(x)}\, f(x) = \beta.$$

Dessa forma, todo funcional linear não nulo assume todos os valores reais, ou seja $f(E) = \mathbb{R}$. Assim, todo funcional linear não nulo é sobrejetor. Como consequência desse fato, temos:

1) *se f é um funcional linear sobre E e $f(x) > \alpha$, para todo $x \in E$, então $\alpha < 0$ e $f(x) = 0$, para todo $x \in E$.*

2) *se f é um funcional linear sobre E e $f(x) < \alpha$, para todo $x \in E$, então $\alpha > 0$ e $f(x) = 0$, para todo $x \in E$.*

2.5 NORMA E ESPAÇOS DUAIS: ALGÉBRICO E TOPOLÓGICO

Nesta seção introduziremos o conceito de norma e os espaços duais. Veremos o conceito de norma de um funcional, bem como resultados importantes envolvendo essa norma, além de apresentarmos o dual algébrico, que é o espaço formado pelos funcionais lineares e o espaço dual topológico, onde os funcionais, além se serem lineares são contínuos.

Definição 2.5.1. *Seja E uma espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. O conjunto dos funcionais lineares definidos em E é denominado dual algébrico de E (notação: E^*).*

Facilmente se demonstra que o conjunto E^*, definido acima com as operações abaixo, é um $\mathbb{K}$ - espaço vetorial.

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \text{para todo } x \in E \tag{3}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \text{para todo } x \in E \text{ e } \lambda \in \mathbb{K} \tag{4}$$

Quando $E = \mathbb{R}$, é possível caracterizarmos o espaço dual algébrico E^*. De fato, considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e f_α definido por $f_\alpha(x) = \alpha x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que f_α é um funcional linear, pois:

$$f_\alpha(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha x = f_\alpha(x) + f_\alpha(y)$$

$$f_\alpha)(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda f_\alpha(x).$$

Por outro lado, seja $f \in \mathbb{R}^*$ e denote $f(1) = \alpha$. Note que,

$$f(x) = f(x.1) = x.f(1) = \alpha x = f_\alpha(x), \text{isto é } f = f_\alpha. \tag{5}$$

Logo $f \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow f(x) = \alpha x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Essa caracterização para E^*, quando $E = \mathbb{R}$, também fornece um isomorfismo entre $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{R}$. Para isto, basta definir:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$\alpha \longmapsto \varphi(\alpha) = f_\alpha.$$

Temos que φ é sobrejetora, pois, dado $f \in \mathbb{R}$, denotando $\alpha = f(1)$, temos por (5) que $\varphi(\alpha) = f$. Além disso, se $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, segue que $f_\alpha = f_\beta$ e assim $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ para todo

$x \in \mathbb{R}$. Dessa forma $\alpha x = \beta x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica $\alpha = \beta$ (basta tomar $x = 1$). Assim, φ é injetiva e sendo φ linear, temos que é um isomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^*$.

Vamos agora definir o conceito de norma, o qual nos dá uma noção de distância entre elementos de um espaço vetorial qualquer.

Definição 2.5.2. *Seja E um espaço vetorial. Uma norma em E é uma função real $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, denominado norma de x, de modo que sejam satisfeitas para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ as condições abaixo:*

N1) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$*;*

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 2.5.3. *Um espaço normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma norma em E*

Agora, considere E um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$ e seja $f \in E^*$. Se

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| < +\infty,$$

isto é, se $\sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| \in \mathbb{R}$, então dizemos que f é limitada.

Observação: Sendo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear, podemos desconsiderar o módulo f na expressão acima. De fato, como

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$

pela linearidade de f, temos

$$-f(x) = (-1)f(x) = f((-1)x) = f(-x).$$

Assim,

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \geq 0, \\ f(-x), \text{ se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Considere, $A = \{x \in E; f(x) \geq 0\}$ e $B = \{x \in E; f(x) < 0\}$. Temos que $E = A \cup B$. E também,

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| \leq \max\left\{\sup_{\substack{x\in A\\ \|x\|\leq 1}}|f(x)|; \sup_{\substack{x\in B\\ \|x\|\leq 1}}|f(x)|\right\} = \max\left\{\sup_{\substack{x\in A\\ \|x\|\leq 1}} f(x); \sup_{\substack{x\in B\\ \|x\|\leq 1}} -f(x)\right\}\\
&= \max\left\{\sup_{\substack{x\in A\\ \|x\|\leq 1}} f(x); \sup_{\substack{x\in B\\ \|x\|\leq 1}} f(-x)\right\} = \max\left\{\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} f(x); \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} f(-x)\right\}\\
&= \max\left\{\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} f(x); \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} f(x)\right\} = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in E}} f(x). \qquad (6)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como é sempre válida a desigualdade $f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in E$, então tomando o sup de ambos os lados temos que

$$\|f\| = \sup_{x\in E; \|x\|\leq 1} f(x).$$

Definição 2.5.4. *O conjunto das formas lineares e limitadas sobre E é dito dual topológico (notação: E' ou $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$).*

Demonstra-se facilmente que o conjunto definido acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, munido com as operações (3) e (4), uma vez que a soma de duas funções limitadas é uma função limitada e o produto de um escalar por uma função limitada é uma função limitada.

Definamos agora sobre E' a norma:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} |f(x)|.$$

A expressão acima de fato, define uma norma sobre E'. Verificaremos que as propriedades $N1)$ a $N3)$ são satisfeitas:

N1) $\|f\|_{E'} = 0 \Leftrightarrow f = 0$. De fato,

Se $f = 0$, é evidente que $\|f\|_{E'} = 0$.

Se $\sup\limits_{\|x\|_E\leq 1} |f(x)| = 0$, temos que $f = 0$, para todo $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$, pois o valor absoluto é sempre não-negativo. Agora, se $y \in E$ é tal que $y \neq 0$ e $\|y\| > 1$, então

$$f(y) = \|y\|_E \frac{f(y)}{\|y\|_E} = \|y\|_E f\left(\frac{y}{\|y\|_E}\right) = 0,$$

portanto, $f(y) = 0$, para todo $y \in E$.

N2) $\|\lambda f\|_{E'} = |\lambda| \|f\|_{E'}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. De fato, se $\lambda = 0$, então,

$$\|\lambda f\|_{E'} = \|0\| = 0 = 0 \cdot \|f\|_{E'} = |\lambda| \cdot \|f\|_{E'}$$

Se $\lambda \neq 0$, então, para todo x tal que $\|x\|_E \leq 1$, temos

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_{E'}$$

e portanto,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda f(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|f\|_{E'} = |\lambda| \|f\|_{E'}.$$

Concluímos assim que,

$$\|\lambda f\|_{E'} \leq |\lambda| \|f\|_{E'}. \tag{7}$$

Por outro lado, para todo $x \in E$ tal que $\|x\|_E \leq 1$, também temos,

$$|\lambda||f(x)| = |\lambda f(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda f(x)| = \|\lambda f\|_{E'}.$$

Dividindo por $|\lambda|$, vemos que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_{E'},$$

e tomando sup de ambos os lados, temos

$$|\lambda| \|f\|_E \leq \|\lambda f\|_{E'}. \tag{8}$$

De (7) e (8), concluímos que

$$\|\lambda f\|_{E'} = |\lambda| \|f\|_{E'}$$

N3) $\|f+g\|_{E'} \leq \|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}$. De fato, note que para todo $x \in E$, tal que $\|x\| \leq 1$, temos que

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| + \sup_{\|x\|_E \leq 1} |g(x)| = \|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}.$$

A expressão acima nos garante que $\|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}$ é uma cota superior para o conjunto $\{|f(x)+g(x)|;\, x \in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1\}$. Dessa forma,

$$\|f+g\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |(f+g)(x)| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)+g(x)| \leq \|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}.$$

Provamos assim que $\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|$ é uma norma sobre E'.

Lema 2.5.5. *Para $f \in E'$ temos as seguintes igualdades:*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E; \|x\|_E = 1} |f(x)| = \sup_{x \in E; x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}$$

Demonstração. Primeiro, demonstraremos que $\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E; \|x\|=1} |f(x)|$. Claramente temos que

$$\{x \in E; \|x\|_E = 1\} \subset \{x \in E; \|x\|_E \leq 1\},$$

o que implica

$$\sup_{x \in E: \|x\|_E = 1} |f(x)| \leq \sup_{x \in E: \|x\|_E \leq 1} |f(x)|,$$

ou seja,

$$\sup_{x \in E: \|x\|_E = 1} |f(x)| \leq \|f\|_{E'}. \tag{9}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in E$ tal que $\|y\|_E \leq 1$, $y \neq 0$ e $|f(y)| > \|f\|_{E'} - \varepsilon$. Considerando, $x = \frac{y}{\|y\|_E}$, temos que $\|x\|_E = 1$ e além disso,

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{y}{\|y\|_E}\right) \right| = \frac{1}{\|y\|_E} |f(y)| \geq |f(y)|,$$

uma vez que $\|y\|_E \leq 1$ e consequentemente $\frac{1}{\|y\|_E} \geq 1$. Dessa forma,

$$|f(x)| \geq |f(y)| > \|f\|_{E'} - \varepsilon$$

ou seja, se $x \in E$ é tal que $\|x\| = 1$ segue que

$$\|f\|_{E'} - \varepsilon < \sup_{x \in E: \|x\|_E = 1} |f(x)|.$$

Da arbitrariedade de ε, temos

$$\|f\|_{E'} \leq \sup_{x \in E: \|x\|_E = 1} |f(x)|. \tag{10}$$

De (25) e (26) concluímos que,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E: \|x\|_E = 1} |f(x)|,$$

Agora, mostraremos que $\sup\limits_{x\in E;\|x\|=1}|f(x)| = \sup\limits_{x\in E;\|x\|\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_E}$. De fato, se $x\neq 0$, então $\left\|\frac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = 1$. Assim,

$$\frac{1}{\|x\|_E}|f(x)| = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right| \leq \sup_{x\in E:\|x\|_E=1}|f(x)|$$

Tomando o sup de ambos os lados da igualdade acima, quando $x\neq 0$, segue que

$$\sup_{x\in E:x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\in E:\|x\|_E=1}|f(x)|. \tag{11}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $y\in E$ tal que $\|y\|_E = 1$ e $|f(y)| > \sup\limits_{x\in E;\|x\|_E=1}|f(x)| - \varepsilon$. Considerando, $x = \lambda y$, com $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos que,

$$\|x\|_E = |\lambda|\|y\|_E = |\lambda|,$$

pois $\|y\|_E = 1$. Logo,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \frac{|\lambda||f(y)|}{|\lambda|} = |f(y)| > \sup_{x\in E;\|x\|=1}\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} - \varepsilon.$$

Consequentemente, se $x\in E$ é tal que $x\neq 0$, então

$$\sup_{x\in E;\|x\|_E\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in E;\|x\|_E=1}|f(x)| - \varepsilon. \tag{12}$$

Da arbitrariedade de ε, vem que

$$\sup_{x\in E;\|x\|=1}|f(x)| - \varepsilon \leq \sup_{x\in E:\|x\|_E\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_E}, \tag{13}$$

E portanto (12), (13) e da primeira igualdade concluímos que

$$\sup_{x\in E:\|x\|_E=1}|f(x)| = \sup_{x\in E:x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_E}.$$

Assim fica provado o lema. $\square$

Como consequência do lema anterior, temos que se $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma funcional linear, então para todo $x\in E$, tal que $\|x\|\neq 0$, temos

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} \leq \|f\|_{E'},$$

assim,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \cdot \|x\|,$$

para todo $x \in E$ tal que $\|x\| \neq 0$. Para $x = 0$ a desigualdade acima é trivialmente válida.

A seguir, relembramos a definição de continuidade para um funcional $f \in E^*$, em relação à topologia da norma.

Definição 2.5.6. *Dizemos que $f \in E'$ é contínua em $x_0 \in E$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,*

$$\|x - x_0\|_E < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

Agora, exibiremos um resultado sobre a equivalência entre continuidade e limitação para funcionais em E^*, que pode ser encontrado em (CAVALCANTI et al., 2007).

Proposição 2.5.7. *Seja $f \in E^*$. As expressões a seguir são equivalentes:*

(1) f é limitada;

(2) f é contínua no ponto $x = 0$;

(3) f é contínua em E.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Por hipótese, f é limitada. Como consequência do Lema 2.5.5, temos que $|f(x)| \leq \|f\|_{E'}\|x\|_E$ pra todo $x \in E$. Como $f(0) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|_{E'}}$. Assim, se $\|x\|_E < \delta$, então $|f(x)| < \varepsilon$, pois

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq \|f\|_E' \|x\|_E < \|f\|_E' \frac{\varepsilon}{\|f\|_E'} = \varepsilon.$$

Logo f é contínua em 0.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se $x \in E$ é tal que $\|x - x_0\| < \delta$, com $x_0 \in E$, então $\bar{x} = x - x_0$ satisfaz $\|\bar{x}\| < \delta$, ou seja, $\|\bar{x} - 0\| < \delta$. Como f é contínua em 0 e $f(0) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que se $\|\bar{x}\| < \delta$, então $\|f(\bar{x})\| < \varepsilon$. Logo, se $\|x - x_0\| < \delta$, então $\|\bar{x}\| < \delta$. Assim, de f segue que,

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x - x_0)\| = \|f(\bar{x})\| < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em todo E.

$(3) \Rightarrow (1)$ Assumamos que f é contínua em todo E. Em particular, f é contínua em $x = 0$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_E < \delta$ então $|f(x)| \leq \varepsilon$. Considere $0 < \mu < \delta$ e $x \in E$, tal que $\|x\|_E = 1$. Logo $\|\mu x\| = \mu < \delta$ o que implica $|f(\mu x)| < \varepsilon$. Assim,

$$\sup_{x \in E : \|x\|_E = 1} |f(\mu x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in E : \|x\|_E = 1} \mu |f(x)| \leq \varepsilon.$$

Em outras palavras, temos que,

$$\sup_{x \in E : \|x\|_E = 1} |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

Concluímos então que f é limitada, como queríamos demonstrar. $\square$

Por simplicidade, denotaremos $\|f\|_{E'}$ apenas por $\|f\|$ e $\|x\|_E$ apenas por $\|x\|$, a menos que haja ambiguidade ou se faça necessário.

Em relação aos espaços E' e E^*, temos sempre que $E' \subset E^*$, mas nem sempre $E^* \subset E'$, pois existem formas lineares que não são contínuas. A seguir, daremos um exemplo de um funcional linear não contínuo, isto é, está em E^*, porém não está em E'.

Considere o espaço das funções das funções reais e contínuas no intervalo $[0,1]$, denotado por $C([0,1],\mathbb{R})$ munido da norma $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$ e considere a aplicação $\delta_0 : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta_0(f) = f(0)$ (note que esta aplicação é um caso particular da função já apresentada no exemplo (2.4.3), com $a = 0, b = 1$ e $t_0 = 0$). Mostraremos que $\delta_0 \notin (C(0,1))'$. Com efeito, seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas dada por:

$$f_n(t) = \begin{cases} -2n^2 t + 2n, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq t \leq 1, (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \int_0^1 |f_n(t)|dt \\
&= \int_0^{1/n} |-2n^2t+2n|dt \\
&= \int_0^{1/n} (-2n^2t+2n)dt \\
&= \int_0^{1/n} -2n^2dt + \int_0^{1/n} 2ndt \\
&= -2n^2\int_0^{1/n} tdt + 2n\int_0^{1/n} dt \\
&= -n^2t^2\Big|_0^{1/n} + 2nt\Big|_0^{1/n} = 1,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|\delta_0\|_{(C(0,1))} = \sup_{f\in(C([0,1],\mathbb{R}))';\|f\|_{C([0,1],\mathbb{R})}=1} |\delta_0(f)| \geq \sup_n |\delta_0(f_n)| = \sup_n 2n = +\infty,$$

o que mostra que δ_0 não é limitada, logo $\delta_0 \notin (C(0,1))'$.

Agora provaremos que se E tem dimensão finita, então $E^* = E'$. De fato, seja E uma espaço vetorial de dimensão finita e $\{e_1,...,e_n\}$ uma base para E. Se $x \in E$, então $x = x_1e_1+...+x_ne_n$. Considere $\|\cdot\|$ uma norma em E e

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,...,|x_n|\}$$

Temos que $\|x\|_\infty$ também constitui uma norma sobre E. Como E tem dimensão finita essas normas são equivalentes, isto é,

$$C_1\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C_2\|x\|_\infty,$$

para todo $x \in E$, sendo C_1 e C_2 são constantes positivas. Agora, se $g \in E^*$, temos que

$$g(x) = g(x_1e_1+...+x_ne_n) = x_1g(e_1)+...+x_ng(e_n).$$

Logo

$$|g(x)| \leq |x_1||g(e_1)|+...+|x_n||g(e_n)| \leq |x|_\infty(|g(e_1)|+...+|g(e_n)|) \leq \frac{M}{C_1}\|x\|,$$

onde $M = |g(e_1)| + ... + |g(e_n)|$. Dessa maneira,

$$\sup_{x\in E;\|x\|\neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \frac{M}{C_1} < \infty,$$

e portanto, $g \in E$.

2.6 TOPOLOGIA EM ESPAÇOS NORMADOS

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados a cerca da topologia de espaços topológicos normados.

Definição 2.6.1. *Seja E um espaço vetorial normado, $r > 0$ e $a \in E$. Definimos os seguintes conjuntos de E*

$$\begin{aligned} B(a;r) &= \{x \in E; \|x-a\| < r\} \\ B[a;r] &= \{x \in E; \|x-a\| \leq r\} \\ S(a;r) &= \{x \in E; \|x-a\| = r\}, \end{aligned}$$

os quais são chamados respectivamente de bola aberta, bola fechada e esfera de centro a e raio r. Se $V \subset E$ é um subespaço de E, então denotaremos

$$\begin{aligned} B_V(a,r) &= B(a,r) \cap V; \\ B_V[a,r] &= B[a,r] \cap V; \\ S_V(a,r) &= B(a,r) \cap V. \end{aligned}$$

Definição 2.6.2 (Conjunto aberto)**.** *Um conjunto $U \subset E$ é dito aberto em $(E, \|\cdot\|)$ se para cada $x \in U$ existe $r = r_x > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$.*

Lema 2.6.3. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $x_0 \in E$. Então para qualquer $r > 0$, a bola aberta $B(x_0, r)$ de raio r e centro x_0 é um conjunto aberto em E.*

Demonstração. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset B(x_0,r)$. Como $\|x - x_0\| < r$, escolhendo $\delta = r - \|x - x_0\| > 0$, obtemos que se $x' \in B(x,\delta)$, então,

$$\|x' - x_0\| \leq \|x' - x\| + \|x - x_0\| < \delta + \|x - x_0\| = r.$$

Dessa forma, $x' \in B(x_0,r)$, o que mostra $B(x,\delta) \subset B(x_0,r)$, ou seja, $B(x_0,r)$ é um conjunto aberto em E. $\square$

Lema 2.6.4. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado em $x_0 \in E$. Então, para qualquer $r \geq 0$, o conjunto $\{x \in E; \|x - x_0\| > r\}$ é um conjunto aberto em E.*

Demonstração. Seja $x \in E$, satisfazendo $\|x - x_0\| > 0$ e seja $x' \in E$ um ponto qualquer satisfazendo $\|x' - x\| < \delta$, onde $\delta = \|x - x_0\| - r$. Pela desigualdade triangular temos,

$$\|x - x_0\| \leq \|x - x'\| + \|x' - x_0\|.$$

Portanto

$$\|x' - x_0\| \geq \|x - x_0\| - \|x - x'\| > \|x - x_0\| - \delta = r$$

Assim, $B(x, \delta) \subset \{x \in E; \|x - x_0\| > r\}$. o que prova o lema. □

Proposição 2.6.5. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A coleção de conjuntos abertos de E tem as seguintes propriedades:*

i) $\emptyset, E$ são conjuntos abertos;

ii) a união arbitrária de qualquer coleção de conjuntos abertos em E é um conjunto aberto;

iii) a intersecção de qualquer coleção finita de conjuntos abertos em E é um conjunto aberto.

Demonstração. i) O conjunto $\emptyset$ é aberto por convenção. Segue diretamente da definição de conjunto aberto, que para todo $x \in E$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset E$.

ii) Seja $A = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma coleção qualquer de conjuntos abertos em E, onde L é um conjunto de índices e seja $U = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Considere $x \in U$, então $x \in A_\lambda$, para algum λ. Dessa forma, existe $\delta > 0$, tal que $B(x, \delta) \subset A_\lambda$, mas $A_\lambda \subset U$. Assim, $B(x, \delta) \subset U$.

Portanto, U é aberto.

iii) Seja $A = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ uma coleção finita de conjuntos abertos em E e seja $V = \bigcap_{j=1,...,k} A_j$. Considere $x \in V$, dessa forma, $x \in A_i$, para todo i, e assim existem $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k > 0$ tais que $B(x, \delta_i) \subset A_i$.

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$. Assim, $B(x, \delta) \subset B(x, \delta_i) \subset A_i$, ou seja, $B(x, \delta) \subset V$. Portanto V é aberto. □

Exemplo 2.6.6. *Para cada número natural n, considere V_n o conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ dado por $V_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < \frac{1}{n}\}$. A interseção $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{0\}$ é a origem, o qual não é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Isso mostra que a intersecção infinita de conjuntos abertos não é necessariamente um conjunto aberto.*

Definição 2.6.7. *O interior $\mathring{A}$ de um conjunto $A \subset E$ é a união de todos os conjuntos abertos de $(E, \|\cdot\|)$ contidos em A, isto é,*

$$\mathring{A} = \bigcup \{V_i; V_i \text{ é aberto e } A_i \subset A\}$$

Definição 2.6.8 (Conjunto Fechado)**.** *Um conjunto $F \subset E$ é dito fechado em $(E, \|\cdot\|)$ se $F^c = E \backslash F$ é aberto em $(E, \|\cdot\|)$.*

Lema 2.6.9. *Sejam E um espaço normado e $x_0 \in E$. Para qualquer $r \neq 0$, os conjuntos*

$$\{x \in E; \|x - x_0\| \leq r\} \text{ e } \{x \in E; \|x - x_0\| \neq 0\},$$

são fechados em E. Em particular, o conjunto $\{x_0\}$ consistindo de um único ponto é um conjunto fechado

Proposição 2.6.10. *Seja E um espaço vetorial normado. A coleção dos subconjuntos fechados em E tem as seguintes propriedades:*

i) $\emptyset, E$ são conjuntos fechados;

ii) a intersecção de qualquer coleção de conjuntos fechados em E é um conjunto fechado;

iii) a união de qualquer coleção finita de conjuntos fechados em E é um conjunto fechado.

Demonstração. i) Note que $E^c = \emptyset$. Da proposição anterior E é aberto, logo $\emptyset$ é fechado.

Também temos que, $\emptyset^c = E$. Segue novamente da proposição anterior que E é fechado.

ii) Seja $(F_\lambda)_\lambda \in L$ uma coleção qualquer de conjuntos fechados em E, onde L é um conjunto de índices. Como F_λ é fechado, temos que $F_\lambda^c = A_\lambda$, onde, A_λ é um conjunto aberto. Pela lei de Morgan,

$$\left(\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda^c = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$$

Da Proposição 2.6.5, temos que a união qualquer de aberto é aberta, o que implica $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda$ é fechado.

iii)Seja $\{F_i\}$, $i = 1,2,...,k$ uma coleção finita de conjuntos fechados em E. Como F_i é fechado, temos que $F_i^c = A_i$ onde, A_i, $i = 1,2,...,k$ é um conjunto aberto.Novamente pela Lei de Morgan.

$$\left(\bigcup_{1=1,...,k} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1,...,k} (F_i^c) = \bigcap_{i=1,...,k} A_i.$$

Da proposição 2.6.5 temos que intersecção de uma coleção finita de conjuntos abertos é aberta, logo $\bigcup(F_i)$ é fechado. $\square$

Definição 2.6.11. *O fecho $\overline{A}$ de um conjunto $A \subset E$ é a intersecção de todos os fechados de E contendo A, isto é,*

$$\overline{A} = \bigcap\{F_i; F_i \textit{ é fechado e } A \subset F_i\}.$$

Proposição 2.6.12. *A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$.*

Demonstração. Como $\overline{A} = \bigcap F_i$, com F_i fechado em E e $A \subset F_i$, para todo i, então,

$$A \subset \bigcap_{\substack{F_i \subset E \\ A \subset F_i}} F_i = \overline{A}$$

Logo, $A \subset \overline{A}$. Também temos que $A \subset A$ e $A \subset F_{i_0}$, para algum i_0 onde, $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F_i \subset E \\ A \subset F_i}} F_i$, ou seja, $\overline{A} \subset A$, portanto $\overline{A} = A$

Reciprocamente, por hipótese $A = \overline{A}$. Então, segue que

$$A = \overline{A} = \bigcap_{\substack{F_i \subset E \\ A \subset F_i}} F_i.$$

isto é, A é intersecão de conjuntos fechados, logo A é fechado. $\square$

Definição 2.6.13. *Seja E um espaço vetorial normado e seja $x \in E$. Um subconjunto $V \subset E$ é uma vizinhança de x (em E) se, e somente se, existe algum $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset V$.*

Como consequência direta da definição, um subconjunto V de um espaço normado E é um conjunto aberto se, e somente se, V for uma vizinhança de v para todo $v \in V$.

3 TEOREMA DE HAHN-BANACH

O Teorema de Hahn-Banach é um resultado sobre extensões de funcionais lineares definidos em subespaços, a todo espaço vetorial. Esse teorema é útil para responder questões do tipo: em qualquer espaço normado existem funcionais lineares contínuos não-nulos? Existem em número suficiente para distinguir os pontos desse espaço? Existe um funcional contínuo (não-nulo) que se anula num subespaço fechado (próprio) dado? Para estudarmos o teorema de Hahn-Banach, precisamos do Lema de Zorn, que pode ser encontrado em (OLIVEIRA, 2001).

3.1 LEMA DE ZORN

O Lema de Zorn consiste em um principio de maximalidade em conjuntos parcialmente ordenados, o qual é equivalente ao Axioma da Escolha, que para muitos é intuitivamente aceitável. Antes de enunciarmos o Lema de Zorn é necessário as algumas definições:

Definição 3.1.1. *Seja E um espaço vetorial, G um subespaço de E e g um funcional linear de G^*. Dizemos que $h \in E^*$ é uma extensão de g se $h(x) = g(x)$, para todo $x \in G$ e escrevemos $g \leq h$.*

Definição 3.1.2. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que X é parcialmente ordenado se existir uma relação R definida entre alguns elementos desse conjunto tal que, sejam satisfeitas entre os elementos de X as seguintes condições:*

(1) Reflexibilidade: Se $a \in X$, então aRa (lê-se a está relacionado com a);

(2) Transitividade: Se $a, b, c \in X$ são tais que aRb e bRc então aRc;

(3) Anti-simetria: Se $a, b \in X$ são tais que aRb e bRa, então $a = b$.

Definição 3.1.3. *Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado tal que quaisquer dois elementos são comparáveis de acordo com a relação parcial dada na Definição* 3.1.2.

A seguir apresentamos dois exemplos dessas relações de ordem.

Exemplo 3.1.4. *Seja X o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e seja R a relação dada pela relação menor ou igual "$\leq$". Quaisquer $a,b,c \in \mathbb{R}$ satisfazem:*

(1) $a \leq a$;

(2) $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

(3) $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$.

E ainda, dados quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$, uma das duas relações ocorre: $a \leq b$ ou $b \leq a$, o que significa que o conjunto dos números reais é totalmente ordenado.

Exemplo 3.1.5. *Seja X um conjunto arbitrário, S uma coleção qualquer de subconjuntos de X e R a relação dada pela inclusão de conjuntos. Quaisquer $A,B,C \in S$ satisfazem:*

(1) $A \subset A$;

(2) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$;

(3) $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$.

Observe que a relação de inclusão de conjuntos constitui uma ordem parcial e não total sobre S; por exemplo, caso dois conjuntos $A,B \subset S$ satisfaçam $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$, então eles não são comparáveis de acordo com R.

Se considerarmos um conjunto X parcialmente ordenado, faz todo o sentido tratarmos sob quais condições X possui um elemento "máximo". Assim, introduziremos as seguintes definições:

Definição 3.1.6. *Seja X um conjunto parcialmente ordenado sob a relação R e considere A um subconjunto de X. O elemento $a \in X$ (não necessariamente $a \in A$) é denominado limitação superior (ou limite superior) de A se para todo $y \in A$, tivermos yRa.*

Observe que uma limitação superior é necessária para um elemento ser comparável a todo membro de um conjunto.

Definição 3.1.7. *Seja X um conjunto parcialmente ordenado sob a relação R. O elemento $a \in X$ é dito ser um elemento maximal de X se aRy implicar que a deve ser igual a y. Em outras palavras, o elemento maximal é uma limitação que nenhuma outra supera.*

Exemplo 3.1.8. *Seja $P(X)$ o conjunto das partes de X, isto é, a coleção de todos os conjuntos de X. No exemplo 3.1.5, estendendo a relação ordem parcial à $P(X)$, temos que $P(X)$ e qualquer outro subconjunto de $P(X)$ que contenha S é uma limitação superior para S. No entanto, a união de subconjuntos de $P(X)$ tais que contenham S pode não ser um elemento maximal de S uma vez que pode não ser um membro de S.*

A par dessas definições, estamos aptos a enunciar o Lema de Zorn.

Lema 3.1.9 (Lema de Zorn)**.** *Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

A seguir enunciaremos um resultado que utiliza o do Lema de Zorn em sua demonstração. Mas antes, vamos definir o conceito de “base de Hamel”.

Um subconjunto $B \subset X$ é dito ser uma base de Hamel para o espaço vetorial X quando B for um conjunto linearmente independente maximal, ou seja, se u é um vetor em X tal que $B \cup \{u\}$ é um conjunto linearmente independente, então $u \in B$. Em outras palavras, B é uma base de Hamel quando não for um subconjunto próprio de nenhum outro conjunto linearmente independente em X.

Proposição 3.1.10. *Todo espaço vetorial não-trivial (ou seja, que contém um elemento não-nulo) possui uma base de Hamel.*

Demonstração. Sejam $E \neq \{0\}$ um espaço vetorial e V a coleção de todos os subconjuntos linearmente independentes de E, isto é,

$$V = \{A_\lambda; A_\lambda \subset E \text{ é subconjunto L.I, } \lambda \in L\}$$

onde L é um conjunto de índices. Note que $V \neq 0$, pois $E \neq 0$ e assim o conjunto $A_\lambda = \{v\}$, com $0 \neq v \in E$ é um subconjunto L.I de E; além disso, a relação R dada pela inclusão de conjuntos define uma ordem parcial em V. Para utilizarmos o Lema de Zorn, tomemos um subconjunto de V totalmente ordenado e mostremos que tal subconjunto possui um limite superior. Seja $\overline{V} \subset V$ um subconjunto totalmente ordenado, digamos

$$\overline{V} = \{A_\lambda; \lambda \in \overline{L}\},$$

onde $\overline{L} \subset L$. Então o conjunto $\bigcup_{\lambda \in \overline{L}} A_\lambda$ dos elementos de $\overline{V}$ é um limite superior para $\overline{V}$, pois $A_{\overline{\lambda}} \subset \bigcup_{\lambda \in \overline{L}} A_\lambda$ para todo $\overline{\lambda} \in \overline{L}$. Portanto, pelo Lema de Zorn, V possui um elemento maximal M.

Agora, verifiquemos que M é uma base de Hamel. É claro que M é L.I, uma vez que elemento maximal de um conjunto sempre pertence a esse conjunto. Seja $W = \text{ span } M$. Devemos mostrar que $W = E$. De fato, é óbvio que $W \subset E$. Suponha por absurdo que $E \nsubseteq W$, isto é, que existe $\xi \in E$ mas $\xi \notin W$.

Afirmação: $M \cup \{\xi\}$ é L.I. De fato, suponha que $M \cup \{\xi\}$ é L.D. Então existem $n \in \mathbb{N}, x_i \in M, 0 \neq \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ e $\beta \neq 0$ tais que

$$\alpha_i x_i + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n + \beta\xi = 0$$

o que implica

$$\xi = -\frac{\alpha_1}{\beta}x_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}x_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta}x_n,$$

isto é, ξ é combinação linear finita de elementos de M, portanto $\xi \in \text{ span } (M) = W$, o que é um absurdo. Logo, $M \cup \{\xi\}$ é L.I. Assim, $M \subsetneq M \cup \{\xi\}$ e $M \cup \{\xi\}$ é L.I. Isso contradiz o fato de M ser elemento maximal de V. Portanto $E \in W$ e assim $E = W = \text{ span } M$ e concluímos que E possui uma base de Hamel. □

3.2 TEOREMA DE HAHN-BANACH

Apresentaremos agora dois dos principais resultados deste trabalho, que são as duas versões do teorema de Hahn-Banach na forma analítica, uma para espaços vetoriais reais e outra para espaços vetoriais complexos (ver (OLIVEIRA, 2001)). Para isso, precisamos do conceito de funcional sublinear (ver (BOTELHO et al., 2012)).

Definição 3.2.1. *Um funcional sublinear em um espaço vetorial E é uma aplicação $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz para todos $x, y \in E$,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \textit{ (subaditividade)},$$

$$p(\alpha x) = \alpha p(x),\ \alpha \geq 0 \textit{ (homogenidade positiva)}.$$

Note que todo funcional linear $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional sublinear.

Teorema 3.2.2 (Hahn-Banach, caso real)**.** *Seja E um espaço vetorial real, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear onde $Z \subset E$ é um subespaço vetorial de E. Suponha que f é dominado por p, ou seja,*

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in Z.$$

Então f possui uma extensão linear $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que também é dominada por p, isto é,

$$F(x) = f(x),\ \forall x \in Z$$

, com

$$F(x) \leq p(x),\ \forall x \in E.$$

Tal extensão é denominada extensão de Hahn-Banach de f.

Demonstração. Para garantir a existência de uma extensão linear F, utilizamos o Lema de Zorn. Sejam J com conjunto de índices, $\Lambda = \{Z_t\}_{t\in J}$ uma coleção de subespaços vetoriais de E que satisfazem $Z \subset Z_t \subset E$, para todo $t \in J$. Considere

$$\begin{aligned} G &= \bigcup_{t\in J}\{g_t : Z_t \longrightarrow \mathbb{R}; g_t \text{ é extensão linear de } f \text{ ao subespaço } Z_t, \\ &\quad \text{com } Z \subset Z_t \subset E,\ \text{satisfazendo } g_t(x) \leq p(x), \forall x \in Z_t\}. \end{aligned}$$

Note que $G \neq \emptyset$, pois $f \in G$ por hipótese. Defina agora, a seguinte relação de ordem $\prec$ em G:

$$g_t \prec g_s \text{ se, e somente se, } Z_t \subset Z_s \text{ e } g_t(x) = g_s(x), \forall x \in Z_t.$$

Verifiquemos agora que a relação de ordem acima constitui uma relação de ordem parcial:

(1) Reflexiva:
Claramente $Z_t \subseteq Z_t$ e $g_t(x) = g_t(x)$, para todo $x \in Z_t$;

(2) Transitiva:
De fato, se $Z_t \subset Z_u$ e $Z_u \subset Z_s$ então claramente, $Z_t \subset Z_s$;
Além disso, $g_t(x) = g_s(x), \forall x \in Z_t$, pois, $g_u(x) = g_s(x) = g_u(x), \forall x \in Z_t$.

(3) Antissimétrica:
De fato, se $g_t \prec g_s$ e $g_s \prec g_t$ então, $Z_t = Z_s$, pois por hipótese $Z_t \subset Z_s$ e $Z_s \subset Z_t$, o que implica $Z_t = Z_s$ e como temos $g_t(x) = g_z(x)$, para todo $x \in Z_t$ por hipótese, segue que $g_t = g_s$.

Portanto G é um conjunto parcialmente ordenado.

Agora considere $\{g_t\}_{t\in J}$ um subconjunto totalmente ordenado de G (o qual denotaremos o conjunto de índices também por J, sem risco de confusão) e $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{t\in J} Z_t$. Temos que $\tilde{\Lambda}$ é um subespaço vetorial pois é união de uma família crescente de subespaços vetoriais. Defina agora $g : \tilde{\Lambda} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = g_t(x) \text{ se } x \in Z_t. \tag{14}$$

Note que g está bem-definida, pois se $x \in Z_t \cap Z_s$ com $t \neq s$, usamos o fato de que o conjunto $\{g_t\}_{t\in J}$ é totalmente ordenado, e assim é válido que $g_t \prec g_s$ ou $g_s \prec g_t$, e em ambos os casos teremos $g_t(x) = g_s(x)$. Além disso, $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \tilde{\Lambda}$.

Ademais, se $g_{\bar{t}} \in \{g_t\}_{t\in J}$ então $g_{\bar{t}} \prec g$. De fato, $Z_{\bar{t}} \subset \bigcup_{t\in J} Z_t = \tilde{\Lambda}$, e $g_{\bar{t}}(x) = g(x)$ para todo $x \in Z_{\bar{t}}$, pela definição da função g em (14). Desta maneira, concluímos que toda família totalmente ordenada em G possui um limite superior. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal $F : Z_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, do conjunto G, isto é, existe F extensão de f em Z_{t_0}, com $Z \subset Z_{t_0} \subset E$, e ainda $F(x) \leq p(x), \forall x \in Z_{t_0}$, tal que se $h \in G$ é tal que $F \prec h$, então $F = h$

Agora, mostraremos que $Z_{t_0} = E$, e assim teremos a tese do teorema concluída. A demonstração será por absurdo, mostrando que se supusermos $Z_{t_0} \neq E$, teremos uma contradição com a maximalidade de F.

Suponha que exista $z \neq 0 \in E \backslash Z_{t_0}$. Mostraremos que existe uma extensão linear $\tilde{F}$ de F ao espaço vetorial $Y = \mathrm{span}(Z_{t_0} \cup \{z\})$ com $\tilde{F} \leq p$. Note que sempre existe uma extensão linear de F a Y, pois cada $y \in Y$ pode ser escrito da forma $y = x + \alpha z$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in Z_{t_0}$, e assim podemos definir para cada elemento $y \in Y$,

$$\tilde{F}(y) = \tilde{F}(x + \alpha z) = F(x) + \alpha \tilde{F}(z)$$

Como para cada y existe um único α tal que $y = x + \alpha z$, temos que, escolhendo um valor para $\tilde{F}(z)$, a função $\tilde{F}(y)$ fica bem definida. Agora, devemos mostrar que pode-se escolher $\tilde{F}(z)$ de forma adequada, ou seja, que satisfaça $\tilde{F}(y) \leq p(y)$ para todo $y \in Y$. Para quaisquer $y_1, y_2 \in Z_{t_0}$ tem-se:

$$F(y_1) + F(y_2) = F(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - z + z + y_2) \leq p(y_1 - z) + p(y_2 + z),$$

uma vez que p é funcional sublinear. Ou ainda,

$$F(y_1) - p(y_1 - z) \leq p(y_2 + z) - F(y_2).$$

Agora, observe que

$$\sup_{y_1 \in Z_{t_0}} \{F(y_1) - p(y_1 - z)\} \leq \sup_{y_1 \in Z_{t_0}} \{p(y_2 + z) - F(y_2)\} = p(y_2 + z) - F(y_2) \tag{15}$$

e tomando o ínfimo de ambos os lados da desigualdade acima, segue que

$$\inf_{y_2 \in Z_{t_0}} \{ \sup_{y_1 \in Z_{t_0}} \{F(y_1) - p(y_1 - z)\}\} \leq \inf_{y_2 \in Z_{t_0}} \{p(y_2 + z) - F(y_2)\}.$$

Portando, existe λ tal que,

$$\sup_{y_1 \in Z_{t_0}} \{F(y_1) - p(y_1 - z)\} \leq \lambda \leq \inf_{y_2 \in Z_{t_0}} \{p(y_2 + z) - F(y_2)\}.$$

Usando a construção acima, defina $\tilde{F} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, extensão linear de F com $\tilde{F}(z) = \lambda$. Como usaremos novamente a representação $y = x + \alpha z$, teremos dois casos para analisar:

(I) Se $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(y) &= \tilde{F}(x + \alpha z) \\
&= \tilde{F}(x) + \alpha \tilde{F}(z) \\
&= F(x) + \alpha \lambda \\
&\leq F(x) + \alpha \left[p\left(\frac{x}{\alpha} + z\right) - F\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right] \\
&= F(x) + \alpha p\left(\frac{x}{\alpha} + z\right) - \alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\
&= F(x) + p\left(\alpha \frac{x}{\alpha} + \alpha z\right) - \frac{\alpha}{\alpha} F(x) \\
&= p(x + \alpha z) = p(y)
\end{aligned}$$

(II) Se $\alpha < 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(y) &= \tilde{F}(x + \alpha z) \\
&= \tilde{F}(x - |\alpha| z) \\
&= \tilde{F}(x) - \tilde{F}(|\alpha| z) \\
&= \tilde{F}(x) - |\alpha| \tilde{F}(z) \\
&= \tilde{F}(x) - |\alpha| \lambda \\
&\leq \tilde{F}(x) - |\alpha| \left[F\left(\frac{x}{|\alpha|}\right) - p\left(\frac{x}{|\alpha|} - z\right) \right] \\
&= \tilde{F}(x) - \frac{|\alpha|}{|\alpha|} F(x) + |\alpha| p\left(\frac{x}{|\alpha|} - z\right) \\
&= |\alpha| p\left(\frac{x}{|\alpha|} - z\right) \\
&= p(x - |\alpha| z) = p(x + \alpha z) = p(y),
\end{aligned}$$

e portanto $\tilde{F}(y) \leq p(y)$ para todo $y \in Y$. Assim, temos que $\tilde{F}$ é extensão de F e $\tilde{F} \leq p$, o que contraria a maximalidade de F.

$\square$

A seguir, enunciaremos um lema que nos auxiliará na demonstração do caso complexo do Teorema de Hahn-Banach.

Lema 3.2.3. *Seja E um espaço vetorial complexo.*

(I) Se $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear real, então $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, definido por

$$f(x) = h(x) - ih(ix),\ x \in E,$$

é um funcional linear complexo.

(II) Se $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo, então existe um funcional linear real $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x) = h(x) - ih(ix),\ x \in E.$$

Em ambos os casos, tem-se $h = Re\ f$.

A motivação da demonstração do lema acima vem de observar que se $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo, então vale a relação $\mathrm{Im}g(x) = -\mathrm{Re}g(ix)$. De fato, como $g(ix) = ig(x) = i(\mathrm{Re}(g) + i\mathrm{Im}(g)) = i$Re(g) - Img(x), temos

$$-\mathrm{Re}(g(ix)) = -(-\mathrm{Im}(g(x))) = \mathrm{Im}(g).$$

Agora, vamos a demonstração do Lema 3.2.3:

Demonstração. (I) Sejam $x, y \in E$. Então,

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= h(x+y) - ih(i(x+y)) \\
&= [h(x)+h(y)] - i[h(ix)+h(iy)] \\
&= h(x)+h(y) - ih(ix) - ih(iy) \\
&= h(x)+ih(ix)+h(y)-ih(iy) \\
&= f(x)+f(y).
\end{aligned}$$

Além disso, se $\alpha \in \mathbb{C}$, escrevendo $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, onde α_r e α_i são as partes real e imaginária, temos que

$$\begin{aligned}
f(\alpha x) &= h(\alpha x) - ih(\alpha ix) \\
&= h(\alpha_r x + i\alpha_i x) - ih(\alpha_r ix + i^2\alpha_i x) \\
&= h(\alpha_r x) + h(i\alpha_i x) - ih(\alpha_r ix) - ih(-\alpha_i x) \\
&= \alpha_r h(x) + \alpha_i h(ix) - i\alpha_r h(ix) + i\alpha_i h(x) \\
&= \alpha_r (h(x) - ih(ix)) + i\alpha_i (h(x) - ih(ix)) \\
&= \alpha_r f(x) + i\alpha_i f(x) \\
&= (\alpha_r + i\alpha_i) f(x) \\
&= \alpha f(x)
\end{aligned}$$

mostrando que f é um funcional linear complexo.

(II) Dado um funcional linear complexo f, seja $h(x) = \text{Re}\, f(x)$ (o qual é linear - tal fato é demonstrado no próximo teorema). Assim, utilizando os resultados da demonstração anterior, temos

$$\text{Im}\, f(x) = -\text{Re}\, f(ix) = -h(ix),$$

Portanto

$$f(x) = h(x) - ih(ix),$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 3.2.4 (Hahn-Banach, caso complexo)**.** *Sejam E um espaço vetorial (real ou complexo) e $p : E \longrightarrow [0,\infty)$ um funcional sublinear, isto é, que satisfaça*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ \forall\, x, y \in E$$
$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x),\ \forall\, x \in E \text{ e } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Se $f : Z \longrightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear definido no subespaço $Z \subset E$ com

$$|f(x)| \leq p(x),\ \forall x \in Z,$$

então f possui uma extensão linear $F : E \longrightarrow \mathbb{C}$ dominada por p, ou seja,

$$|F(x)| \leq p(x),\ \forall\, x \in E$$

F é chamado de extensão de Hahn-Banach de f.

Demonstração. Seja, $h = \text{Re}f$, o qual é um funcional linear real em Z. De fato, considere $x = a_1 + ib_1$ e $y = a_2 + ib_2$. Então

$$h(x+y) \quad = \quad \text{Re}\ [f(x+y)] = \text{Re}\ [f(x)+f(y)] = \text{Re}\ f(x) + \text{Re}\ f(y) = h(x)+h(y)$$

e também

$$h(\alpha x) = \text{Re}\ [f(\alpha x)] = \text{Re}\ [\alpha f(x)] = \alpha \text{Re}\ [f(x)] = \alpha h(x).$$

mostrando que h é um funcional linear. Além disso, como

$$|f(x)| = \sqrt{(h(x))^2 + (\text{Im}f(x))^2}$$

e

$$h(x) \leq |h(x)| = \sqrt{(h(x))^2},$$

temos que

$$h(x) \leq |f(x)| \leq p(x), \forall x \in Z.$$

Do caso real do teorema de Hahn-Banach, temos que existe uma extensão linear real $H : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de h com $H(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Temos então dois casos para analisar:

(I) Se f for real, o teorema já está demonstrado.

(II) Se f é complexo, do Lema 3.2.3 temos que $f(x) = h(x) - ih(ix)$. Defina então $F : E \longrightarrow \mathbb{C}$, por

$$F(x) = H(x) - iH(ix)$$

Note que F definida dessa maneira estende f. De fato,

$$F(x) = H(x) - iH(ix) = h(x) - ih(ix) = f(x),$$

para todo $x \in Z$. Pelo Lema 3.2.3, $F(x)$ é um funcional linear complexo.

Para completar a demonstração, mostraremos a limitação $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in E$.

(i) Se $|F(x)| = 0$ não há o que demonstrar, pois por hipótese $p(x) \geq 0$.

(ii) Suponha $|F(x)| \neq 0$. Primeiramente observe que, denotando $\theta = \arg F(x)$ temos pela representação de um número complexo em coordenadas polares que

$$|F(x)|e^{i\theta} = F(x) \Longleftrightarrow |F(x)|e^{i\theta}e^{-i\theta} = F(x)e^{-i\theta} \Longleftrightarrow |F(x)| = F(x)e^{-i\theta}.$$

Portanto pelo item 3 da Definição 2.2.1 e sabendo que $|e^{-i\theta}| = 1$,

$$|F(x)| = F(e^{-i\theta}x) = \mathrm{Re}(F(e^{-i\theta}x)) = H(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x),$$

Pela arbitrariedade de x concluímos o desejado. $\square$

4 FORMAS GEOMÉTRICAS DO TEOREMA DE HAHN-BANACH

Neste capítulo abordaremos a interpretação geométrica do Teorema de Hahn-Banach (ver (BRÉZIS, 1984)), que consiste em encontrar condições suficientes para "separar" dois subconjuntos de um espaço vetorial, deixando claro em que consiste essa separação e quais resultados podemos esperar. Enunciamos algumas definições e resultados que nos serão úteis nas demonstrações.

A partir de agora, E denotará um espaço vetorial real normado.

Definição 4.0.1. *Dizemos que um subconjunto $C \subset E$ é convexo se: todo segmento de reta ligando quaisquer dois pontos de C está contido em C, isto é,*

$$[tx + (1-t)y] \in C, \text{ para todo } x, y \in C \text{ e para todo } t \in [0,1].$$

Definição 4.0.2. *Seja $C \subset E$ um conjunto aberto e convexo tal que $0 \in C$. Definimos, para todo $x \in E$, a seguinte função:*

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in C\right\}.$$

O funcional $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido acima é denominado **funcional de Minkowski** *para o convexo C.*

Observe que o funcional está bem definido. De fato, seja $x \in E$. Se $x = 0$, por hipótese $0 \in C$ e o conjunto $\{\alpha > 0; \frac{0}{\alpha} \in C\} = \mathbb{R}_+$. Logo $p(0) = \inf \mathbb{R}_+ = 0$. Agora, se $x \neq 0$, então pela definição de norma em (2.5.2), temos que $||x|| \neq 0$. Por outro lado, como $0 \in C$ e C é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset C$. Assim, podemos considerar $\mu > 0$ tal que $\mu < r$ e $y = \frac{\mu x}{||x||}$. Neste caso,

$$||y|| = \left|\left|\frac{\mu x}{||x||}\right|\right| = \left|\left|\mu \frac{x}{||x||}\right|\right| = \frac{\mu}{||x||}||x|| = \mu < r,$$

o que implica que $y \in B_r(0) \subset C$. Além disso, considerando $\alpha = \dfrac{||x||}{\mu}$ temos que $\alpha \in \{\alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C\}$, pois

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{x}{\frac{\|x\|}{\mu}} = \mu\frac{x}{\|x\|} = y \in C.$$

Desta maneira, mostraremos que para $x \neq 0$, o conjunto $\{\alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C\} \neq \emptyset$. Logo faz sentido tomarmos o ínfimo desse conjunto e o funcional de Minkowski está bem definido.

A seguir, analisamos algumas propriedades do funcional p:

Lema 4.0.3. *O funcional de Minkowski satisfaz:*

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, *para todo* $\lambda \geq 0$ *e para todo* $x \in E$.

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, *para todo* $x, y \in E$.

3) Existe $M > 0$ *tal que* $p(x) \leq M\|x\|$, *para todo* $x \in E$.

4) $C = \{x \in E; p(x) < 1\}$, *onde* C *é o conjunto referido na Definição 4.0.2.*

Demonstração. 1) Temos pela definição de p que $p(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0; \dfrac{\lambda x}{\alpha} \in C\}$.

- Se $\lambda = 0$, a identidade segue trivialmente, pois $p(0) = 0$;
- Se $\lambda > 0$, tome $\beta = \dfrac{\alpha}{\lambda}$. Assim, $\alpha = \lambda\beta$ e como $\lambda > 0$, temos por propriedade de ínfimo que

$$p(\lambda x) = \inf\{\lambda\beta > 0; \frac{x}{\beta} \in C\} = \lambda \inf\{\beta > 0; \frac{x}{\beta} \in C\} = \lambda p(x).$$

2) Sejam $\varepsilon > 0$ e $x, y \in E$. Pela definição do funcional de Minkowski, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\dfrac{x}{\alpha}, \dfrac{y}{\beta} \in C$, $\alpha \leq p(x) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $\beta < p(y) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Como $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in (0,1)$, temos da convexidade de C, que

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{y}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{y}{\beta} \in C. \quad (16)$$

Assim, pela definição do funcional de Minkowski e (16), obtemos,

$$p(x+y) \leq \alpha + \beta < p(x) + \frac{\varepsilon}{2} + p(y) + \frac{\varepsilon}{2} = p(x) + p(y) + \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue o desejado.

3) Sendo C aberto e $0 \in C$, existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset C$. Considere ρ tal que $0 < \rho < r$. Temos que $\dfrac{\rho x}{\|x\|} \in B(0,r)$ para todo $0 \neq x \in E$ pois

$$\left\|\frac{\rho x}{\|x\|}-0\right\| = \left\|\frac{\rho x}{\|x\|}\right\| = \rho\frac{\|x\|}{\|x\|} = \rho < r.$$

Dessa maneira, $\frac{\rho x}{\|x\|} \in C$, isto é, $\frac{x}{\frac{\|x\|}{\rho}} \in C$. Assim $p(x) \leq \frac{\|x\|}{\rho}$. Portanto, considerando $M = \frac{1}{\rho}$, temos

$$p(x) \leq M\|x\|.$$

4) Seja $x \in C$. Se $x = 0$, temos que $p(0) = 0 < 1$. Agora, suponha $x \neq 0$ e tome $r > 0$ de modo que $B(x,r) \subset C$ (existe tal r pelo fato de C ser aberto). Considerando $0 < \varepsilon < \frac{r}{\|x\|}$, temos $\|x+\varepsilon x - x\| = \varepsilon\|x\| < r$. Dessa forma, $x+\varepsilon x \in B(x,r) \subset C$, isto é, $(1+\varepsilon)x \in C$, ou ainda, $\frac{x}{\frac{1}{1+\varepsilon}} \in C$. Assim, $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Sendo $x \in C$ arbitrário, segue que

$$C \subset \{x \in E; p(x) < 1\}. \tag{17}$$

Reciprocamente, seja $x \in E$ tal que $p(x) < 1$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ tal que $\frac{x}{\alpha} \in C$ e $p(x) \leq \alpha < p(x) + \varepsilon < 1$. Logo,

$$x = \alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0 \in C,$$

uma vez que $\frac{x}{\alpha}, 0 \in C$ e C é convexo. Dessa maneira,

$$\{x \in E; p(x) < 1\} \subset C. \tag{18}$$

Portanto de (17) e (18) segue o resultado. □

Para tornar concreta a intuição de "separação" de subconjuntos de espaços vetoriais, precisamos do conceito de **hiperplano**. De uma certa forma, podemos pensar em hiperplano como uma generalização do plano em diferentes espaços vetoriais e diferentes dimensões.

Definição 4.0.4. *Um hiperplano afim de E é o conjunto definido por*

$$H = \{x \in E; f(x) = \alpha\},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in E^*$ é tal que $f \neq 0$. Dizemos que H é um hiperplano de equação $[f = \alpha]$.

Exemplo 4.0.5. *Seja $E = \mathbb{R}$. Se $f \neq 0$ e $f \in \mathbb{R}^*$, então $f(x) = bx$ com $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Temos que o hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ é da forma*

$$H = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = \alpha\} = \left\{\frac{\alpha}{b}\right\}$$

Geometricamente, um hiperplano em $E = \mathbb{R}$ é um ponto.

Exemplo 4.0.6. *Seja $E = \mathbb{R}^2$. Se $f \neq 0$ é tal que $f \in (\mathbb{R}^2)^*$. Pelo exemplo 2.4.4, podemos escrever f como $f(x,y) = ax + by$, onde a ou $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Assim, temos*

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; ax + by = \alpha\}.$$

Geometricamente, se $b \neq 0$ um hiperplano em $\mathbb{R}^2$ de equação $[f = \alpha]$ representa a reta de coeficiente angular m, onde $m = -\dfrac{a}{b}$, passando pelo ponto $\left(0, \dfrac{\alpha}{b}\right)$. Se $b = 0$ temos $a \neq 0$ e a reta $x = \dfrac{\alpha}{a}$. Para um caso particular, considere $f(x,y) = 2x + y$ e $\alpha = 8$, logo o hiperplano H é da forma,

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 8\}.$$

Geometricamente, o hiperplano H de equação $[f = 8]$ é representado pela reta:

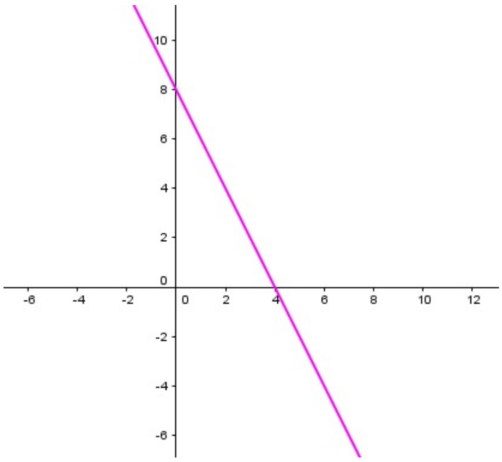

Figura 1: Hiperplano $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 8\}$

Exemplo 4.0.7. *Se $E = \mathbb{R}^3$ e $f \neq 0$ é tal que $f \in (\mathbb{R}^3)^*$, pelo exemplo 2.4.4 podemos escrever f como $f(x,y,z) = ax + by + cz$, onde a, b ou $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Logo,*

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = \alpha\}.$$

Por exemplo, considere a função $f(x,y,z) = 9x + 3y + z$ e $\alpha = 27$. Neste caso, o hiperplano H é da forma:

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 9x + 3y + z = 27\}.$$

Geometricamente, o hiperplano H acima de equação $[f = 27]$ é representado pelo plano P, da figura abaixo:

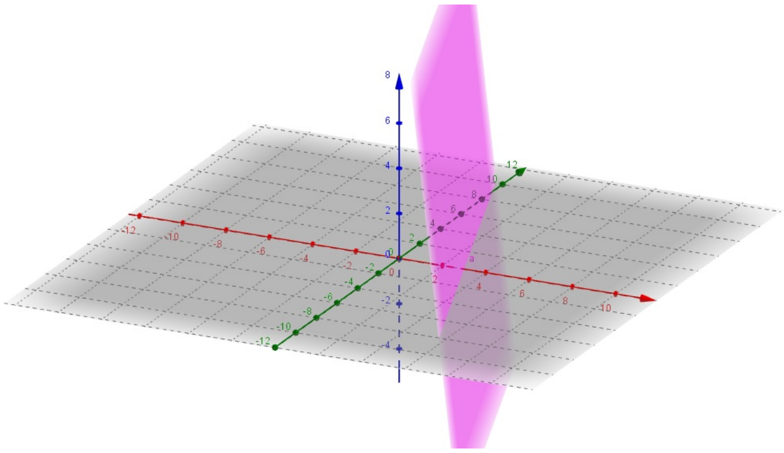

Figura 2: Hiperplano $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 9x+3y+z = 27\}$**.**

Vejamos a seguir alguns resultados importantes sobre hiperplano:

Proposição 4.0.8. *Seja H um hiperplano $[f = \alpha]$ de E e $a \in H$. Então $H - a = \{x - a; x \in H\}$ é um subespaço de E.*

Demonstração. Com efeito, vamos mostrar que $H - a$ é igual ao $\text{Nuc}(f)$. Seja $x \in H - a$, então $x = y - a$, com $y \in H$. Note que,

$$f(x) = f(y) - f(a) = \alpha - \alpha = 0.$$

Agora, seja $x \in E$ tal que $f(x) = 0$. Então

$$f(x+a) = f(x) + f(a) = 0 + \alpha = \alpha,$$

ou seja, $x + a \in H$. Logo, $x = (x+a) - a$, com $(x+a) \in H$, ou seja, $x \in H - a$. Dessa maneira,

$$H - a = \{x \in E; f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) = \text{Nuc}(f).$$

Como o núcleo de um funcional linear é subespaço vetorial, provamos o desejado. $\square$

Proposição 4.0.9. *Sejam H um hiperplano $[f = \alpha]$, $a \in H$, $H - a$ o subespaço de E definido na Proposição 4.0.8 e $\mathbb{R}x_0 = \{tx_0; t \in \mathbb{R}\}$. Então,*

$$E = (H - a) \bigoplus \mathbb{R}x_0$$

Demonstração. De fato, note que $H - a \neq E$, uma vez que $f \neq 0$ e pela demonstração anterior, $H - a = Nuc(f)$. Seja $x_0 \in E \backslash (H - a)$ tal que $f(x_0) = 1$ (a escolha de tal x_0 é possível, basta considerarmos $x_1 \in E$ tal que $f(x_1) = \beta \neq 0$, e construímos x_0 como $x_0 = \frac{x_1}{\beta}$). Temos que, $H - a$

e $\mathbb{R}x_0$ são subespaços de E com $(H-a)\cap\mathbb{R}x_0 = \{0\}$. Assim, fica claro que $(H-a)\bigoplus\mathbb{R}x_0 \subset E$. Agora, nos resta mostrar que $E \subset (H-a)\bigoplus\mathbb{R}x_0$. Com efeito, dado $x \in E$ podemos definir $y = x - f(x)x_0$. Temos que,

$$f(y) = f(x) - f(x)\underbrace{f(x_0)}_{=1} = 0,$$

ou seja, $y \in H - a$. Logo $x = y + f(x)x_0 \in (H-a)\bigoplus\mathbb{R}x_0$, o que encerra a prova. □

Proposição 4.0.10. *O hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ é um conjunto fechado, se e somente se, f é contínua.*

Demonstração. Como $[f = \alpha] = f^{-1}(\{\alpha\})$, se supormos que f é contínua segue diretamente que o hiperplano é fechado, pois imagem inversa de conjunto fechado por uma função contínua é um conjunto fechado.

Reciprocamente, seja H fechado. Temos que $E\backslash H \neq \emptyset$, pois, $f(E) = \mathbb{R}$ e $f(H) = \{\alpha\}$, o que mostra que existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin H$.

Como $E\backslash H$ é aberto, uma vez que H é fechado e $E\backslash H = H^c$, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset E\backslash H$. Como $x_0 \in E\backslash H$ temos que $f(x_0) \neq \alpha$ e assim podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(x_0) < \alpha$. Mostraremos agora, que para todo $x \in B(x_0, r)$ temos $f(x) < \alpha$.

De fato, supondo o contrário, isto é, que existe $x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $f(x_1) \geq \alpha$ e usando o fato da $B(x_0, r)$ ser um conjunto convexo, temos

$$tx_1 + (1-t)x_0 \in B(x_0, r), \text{ para todo } t \in [0,1],$$

Além disso, o fato de $B(x_0, r) \subset E\backslash H$ implica que

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \neq \alpha, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Por outro lado, como $f(x_1) \geq \alpha$ vemos que

$$f(x_1) - f(x_0) \geq \alpha - f(x_0).$$

Assim, o fato de $f(x_0) < \alpha$ e $f(x_1) \geq \alpha$ nos mostra que

$$0 < \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \leq 1.$$

Considerando o caso particular em que $t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$, encontramos

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_0) &= f(tx_1 + x_0 - tx_0) \\ &= f(t(x_1 - x_0) + x_0) \\ &= f(t(x_1 - x_0)) + f(x_0) \\ &= t[f(x_1) - f(x_0)] + f(x_0) \\ &= \alpha - f(x_0) + f(x_0) = \alpha \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois, $f(tx_1 + (1-t)x_0) \neq \alpha$. Logo, para todo $x \in B(x_0, r)$ temos que $f(x) < \alpha$. Considere $r_1 > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r_1)} \subset B(x_0, r)$. Note que se $x \in \overline{B(x_0, r_1)}$ temos que $x = x_0 + r_1 z$, onde $z \in \overline{B(0,1)}$. Assim,

$$f(x) = f(x_0 + r_1 z) < \alpha \Rightarrow f(x_0) + r_1 f(z) < \alpha,$$

ou ainda,

$$f(z) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r_1} < +\infty \text{ para todo } z \in \overline{B(0,1)}.$$

Logo, $\sup\limits_{z \in E; \|z\| \leq 1} |f(z)| < \infty$, o que prova que f é limitada e portanto, contínua. □

Apresentaremos agora a definição formal de "separação" de dois conjuntos.

Definição 4.0.11. *Considere $A, B \subset E$. Dizemos que o hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido lato (generalizado) se*

$$f(x) \leq \alpha, \textit{ para todo } x \in A \textit{ e } f(y) \geq \alpha, \textit{ para todo } y \in B.$$

Dizemos que o hiperplano H separa A e B no sentido estrito se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \textit{ para todo } x \in A \textit{ e } f(y) \geq \alpha + \varepsilon, \textit{ para todo } y \in B.$$

Geometricamente, a separação significa que A e B se situam em lados opostos de H.

Para a demonstração das formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach, faz-se necessário o seguinte lema preliminar:

Lema 4.0.12. *Sejam E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$, $C \subset E$ um conjunto convexo, aberto e não-vazio e $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Então existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano de equação $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ de C no sentido lato.*

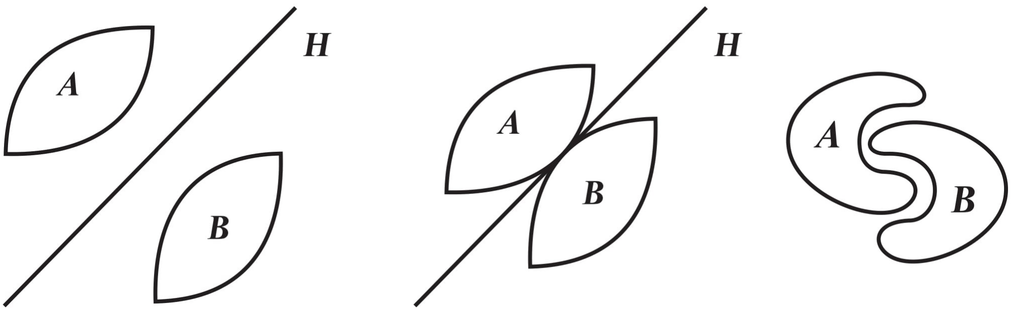

Figura 3: A esquerda, H separa A e B no sentido estrito; ao centro H separa A e B no sentido lato; a direita A e B não são separáveis por um hiperplano.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $0 \in C$. Caso $0 \notin C$, considere o conjunto $C' = C - a$, com $a \in C$. Neste caso, $C' \neq \emptyset$, $0 \in C'$, C' é convexo e aberto, uma vez que C é de tal forma. Assim, se o resultado for válido para C', isto é, se existir $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C'$ com $x_0 \notin C'$, então o resultado se verifica para o conjunto inicial. De fato, seja $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Então, existindo $f \in E'$ tal que $f(x) < f(\underbrace{x_0 - a}_{\notin C'})$, para todo $x \in C'$, teremos que $f(y-a) < f(x_0 - a)$ e assim $f(y) - f(a) < f(x_0) - f(a)$, o que implica que $f(y) < f(x_0)$, para todo $y \in C$. Obteríamos desse modo o resultado desejado para o conjunto C.

Provaremos então o resultado para o caso $0 \in C$. Considere p o funcional de Minkowski definido em C. Tome $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Da propriedade 4) do funcional de Minkowski temos que $C = \{x \in E; p(x) < 1\}$. Logo $p(x_0) \geq 1$. Agora, considere $G := \mathbb{R}x_0 = \{tx_0; t \in \mathbb{R}\}$ e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(tx_0) = t$. Observe que para $\lambda, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
g(\lambda(t_1x_0) + t_2x_0) &= g[(\lambda_1 t_1 + t_2)x_0] \\
&= \lambda_1 t_1 + t_2 \\
&= \lambda_1 g(t_1x_0) + g(t_2x_0).
\end{aligned}
$$

ou seja $g \in G^*$. Temos ainda, que se $t \geq 0$, $g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$, uma vez que $p(x_0) \geq 1$. Se $t < 0$, $g(tx_0) = t < 0 < p(x_0)$. Logo, $g(x) < p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}x_0$. Como o funcional de Minkowski é sublinear, segue do Teorema de Hahn-Banach que existe uma extensão f de g a todo E tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Assim, $f(x) \leq p(x) \leq M\|x\|$, para todo $x \in E$ e portanto, $f \in E'$. Além disso, como $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$, $p(x) < 1$, para todo $x \in C$ e $f(x_0) = g(x_0) = 1$, temos como consequência, que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$, o que encerra a demonstração. □

Agora, vamos as Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 4.0.13 (1ª Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço* *vetorial normado e $A,B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido lato.*

Demonstração. Sejam $a \in A, b \in B$ e $x_0 = b - a$. Definamos $C = A - B + x_0$. Note que C é convexo. De fato, sejam $w = a_1 - b_1 + x_0$ e $v = a_2 - b_2 + x_0$ pontos de C e $t \in [0,1]$ com $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Então,

$$\begin{aligned}
tw + (1-t)v &= t[a_1 - b_1 + x_0] + (1-t)[a_2 - b_2 + x_0] \\
&= t(a_1) - t(b_1) + t(x_0) + a_2 - b_2 + x_0 - t(a_2) + t(b_2) - t(x_0) \\
&= t(a_1) - t(b_1) + a_2 - b_2 - t(a_2) + t(b_2) + x_0 \\
&= \underbrace{[ta_1 + (1-t)a_2]}_{\in A} - \underbrace{[tb_1 + (1-t)b_2]}_{\in B} + x_0 \in A - B + x_0 = C,
\end{aligned}$$

o que mostra que C é convexo.

Mostraremos agora que C é aberto. De fato, podemos escrever $C = \bigcup_{y \in B} \{A - y + x_0\}$ e assim, C é a união de uma família de conjuntos abertos, uma vez que A é aberto e a translação $\{A - y + x_0\}$ de um conjunto aberto é um conjunto aberto. Logo pela Proposição 2.6.5, que diz que a união arbitrária de abertos é aberto, temos que C é aberto.

Além disso, afirmamos que $x_0 \notin C$. Suponha que $x_0 \in C$. Assim, existem $\overline{a} \in A$ e $\overline{b} \in B$ tais que $x_0 = \overline{a} - \overline{b} + x_0$, pois $x \in C$ é escrito de tal forma por construção. Consequentemente $\overline{a} = \overline{b}$, o que implica que $A \cap B \neq \emptyset$, isso é um absurdo, pois contraria a hipótese. Portanto $x_0 \notin C$.

Logo, pelo Lema 4.0.12 existe $f \in E'$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in C$, isto é,

$$f(a - b + x_0) < f(x_0),$$

para todo $a \in A$ e $b \in B$. Da linearidade de f concluímos que $f(a) < f(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Assim,

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Da definição de supremo e ínfimo temos que $f(x) \leq \sup_{z \in A} f(z) \leq \alpha \leq \inf_{z \in B} f(z) \leq f(y)$, para todo $x \in A$ e $y \in B$. Logo $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ para todo $x \in A$ e $y \in B$. Como $f \in E'$ segue da proposição anterior que o hiperplano da equação $[f = \alpha]$ é fechado. Da desigualdade anterior vem que,

$$f(x) \leq \alpha, \text{ para todo } x \in A \text{ e } f(y) \geq \alpha \text{ para todo } y \in B.$$

Daí, concluímos que $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido lato e encerra-se a prova. $\square$

Teorema 4.0.14. *[2^a Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach] Sejam E um espaço vetorial normado, $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A for fechado e B for um compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e considere o conjunto $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$.

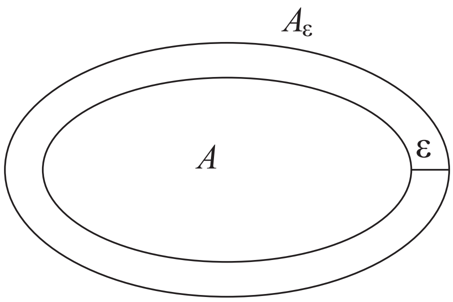

Figura 4: Homotetia do conjunto A**:** $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$**.**

Temos que A_ε é convexo. Com efeito, sejam $w, v \in A_\varepsilon$ e $t \in [0, 1]$. Então, $w = a_1 + \varepsilon z_1$ e $v = a_2 + \varepsilon z_2$, onde $a_1, a_2 \in A$ e $z_1, z_2 \in B(0, 1)$.Assim,

$$\begin{aligned}
tw + (1-t)v &= t[a_1 + \varepsilon z_1] + (1-t)[a_2 + \varepsilon z_2] \\
&= ta_1 + t\varepsilon z_1 + a_2 + \varepsilon z_2 - ta_2 - t\varepsilon z_2 \\
&= \underbrace{[ta_1 + (1-t)a_2]}_{\in A} + \varepsilon \underbrace{[tz_1 + (1-t)z_2]}_{\in B_1(0)} \in A_\varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que A_ε é convexo. De forma análoga mostraremos que $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$ é convexo.

De fato, sejam $w, v \in B_\varepsilon$ e $t \in [0, 1]$. Então $w = b_1 + \varepsilon z_1$ e $v = b_2 + \varepsilon z_2$, com $b_1, b_2 \in B$ e $z_1, z_2 \in B(0, 1)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
tw + (1-t)v &= t[b_1 + \varepsilon z_1] + (1-t)[b_2 + \varepsilon z_2] \\
&= tb_1 + t\varepsilon z_1 + b_2 + \varepsilon z_2 - tb_2 - t\varepsilon z_2 \\
&= \underbrace{[tb_1 + (1-t)b_2]}_{\in B} + \varepsilon \underbrace{[tz_1 + (1-t)z_2]}_{\in B_1(0)} \in B_\varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando assim, que B_ε é convexo.

Note que, A_ε é aberto pois $A_\varepsilon = \bigcup_{x\in A}(x+B(0,\varepsilon))$. Agora vamos mostrar que

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset \text{ para algum } \varepsilon > 0.$$

Suponha o contrário, ou seja, $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Dessa forma, tomando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existem $x_n \in A, y_n \in B$ e $z_{1n}, z_{2n} \in B(0,1)$ tais que

$$x_n + \varepsilon_n z_{1n} = y_n + \varepsilon_n z_{2n}.$$

Portanto,$x_n - y_n = \varepsilon_n(z_{1n} - z_{2n})$ e assim

$$\|x_n - y_n\| = \varepsilon_n\|z_{2n} - z_{1n}\| \leq \frac{1}{n}(\|z_{1n}\| + \|z_{2n}\|) < \frac{1}{n}(1+1) = \frac{2}{n}$$

para todo $n \geq 1$. Como B é compacto, existe $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_{n_k} \longrightarrow y$ em B quando $k \longrightarrow +\infty$.

Dessa forma,

$$\|x_{n_k} - y\| = \|x_{n_k} - y_{n_k} + y_{n_k} - y\| \leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y\| \longrightarrow 0,$$

quando $k \longrightarrow \infty$, o que implica que $x_{n_k} \longrightarrow y$, onde, $y \in B$. Como A é fechado, resulta que $y \in A$ e, desta forma $A \cap B \neq \emptyset$, o que é um absurdo, uma vez que A e B são disjuntos por hipótese. Logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $A_{\varepsilon_0} \cap B_{\varepsilon_0} \neq \emptyset$. Pela Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe um hiperplano fechado de equação $[f = \alpha]$ que separa A_{ε_0} e B_{ε_0} no sentido lato, isto é,

$$f(x+\varepsilon_0 z_1) \leq f(y+\varepsilon_0 z_2), \text{ para todo } x \in A, y \in B \text{ e } z_1, z_2 \in B(0,1).$$

Em particular, se $z_2 = -z_1$, resulta que

$$f(x) + \varepsilon_0 f(z_1) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon_0 f(z_1) \tag{19}$$

para todo $x \in A, y \in B$ e $z_1 \in B(0,1)$. Tomando o supremo em z_1 na 1ª desigualdade de (19), obtemos para todo $x \in A$

$$\sup_{z_1\in B(0,1)} [f(x) + \varepsilon_0 f(z_1)] \leq \alpha \Longrightarrow f(x) + \varepsilon_0\|f\| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \leq \alpha - \varepsilon_0\|f\|,$$

ou seja, $f(x) \leq \alpha - \varepsilon_0\|f\|$ para todo $x \in A$, para todo $x \in A$. Analogamente tomando o supremo em z_1 na 2ª desigualdade de (19), encontramos para todo $y \in B$

$$\alpha \leq \sup_{z_1\in B_1} [f(y) - \varepsilon_0 f(z_1)] \Longrightarrow \alpha \leq f(y) - \varepsilon_0\|f\| \Longrightarrow \alpha + \varepsilon_0\|f\| \leq f(y)$$

ou seja, $\alpha+\varepsilon_0\|f\| \leq f(y)$ para todo $y \in B$. Combinando as duas últimas desigualdades acima, obtemos,

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \text{ e } f(y) \geq \alpha + \varepsilon$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$, onde $\varepsilon = \varepsilon_0\|f\|$. Portanto existe um hiperplano que separa A e B no sentido estrito. $\square$

5 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE HAHN-BANACH

Neste capítulo apresentaremos algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach, tanto das suas formas analíticas quanto geométricas, incluindo um resultado relativo a semi-continuidade inferior com respeito a convergência fraca em espaços normados e outro sobre em quais condições um espaço vetorial é denso, que podem ser encontrados em (CAVALCANTI et al., 2007) e (FOLLAND, 2013).

Corolário 5.0.1. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, Z um subespaço de E e f um funcional linear tal que $f \in Z'$. Então existe um funcional linear $F \in E'$, F extensão de f o qual preserva norma, isto é, f satisfaz*

$$\|F\|_{E'} = \|f\|_{Z'},$$

onde $\|F\|_{E'} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} |F(x)|$ *e* $\|f\|_{Z'} = \sup\limits_{\substack{x\in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$.

Demonstração. O caso $Z = \{0\}$ é trivial, pois temos $f = 0$ e sua extensão é $F = 0$. Agora, para $Z \neq \{0\}$. considere $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$p(x) = \|f\|_{Z'}\|x\|$$

Note que p é sublinear. De fato,

I) $p(x+y) = \|f\|_{Z'}\|x+y\| \leq \|f\|_{Z'}(\|x\| + \|y\|) = \|f\|_{Z'}\|x\| + \|f\|_{Z'}\|y\| = p(x) + p(y)$

II) Se $\lambda > 0$, então $p(\lambda x) = \|f\|_{Z'}\|\lambda x\| = |\lambda|\|f\|_{Z'}\|x\| = |\lambda|p(x) = \lambda p(x)$.

Além disso, como $f \in Z'$, temos que para todo $x \in Z$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{Z'}\|x\| = p(x),$$

e assim pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear F em E, extensão de f tal que

$$|F(x)| \leq p(x) = \|f\|_{Z'}\|x\|, \tag{20}$$

para todo $x \in E$. Resta-nos mostrar que $\|F\|_{E'} = \|f\|_{E'}$. Tomando o sup em (20), temos

$$\|F\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} |F(x)| \leq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} |p(x)| = \|f\|_{Z'} \underbrace{\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|x\|}_{=1} = \|f\|_{Z'}. \tag{21}$$

Por outro lado, F é extensão de f e por definição de norma

$$\|f\|_{Z'} = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |F(x)| \leq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} |F(x)| = \|F\|_{E'}. \tag{22}$$

Assim, de (21) e (22) concluímos que

$$\|F\|_{E'} = \|f\|_{Z'}.$$

$\square$

Como consequência do teorema acima, para cada $x \in E$ não nulo, o próximo resultado nos garante a existência de um funcional linear de norma unitária e que leva x em sua norma $\|x\|$.

Corolário 5.0.2. *Seja E um espaço vetorial normado e $x_0 \in E\backslash\{0\}$. Então existe um funcional linear $g \in E'$ tal que $g(x_0) = \|x_0\|$ e $\|g\|_{E'} = 1$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in E$ não nulo e considere $Z = \{\alpha x_0; \alpha \in \mathbb{R}\}$ subespaço de E. Definindo $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$ temos que, para todo $x \in Z$,

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $x = \alpha x_0$. Tomando o supremo de ambos os lados da igualdade acima temos que $\|f\|_{Z'} = 1$, isto é, f é limitada. Do Corolário 5.0.1 temos que existe $g \in E'$ tal que g é extensão de f e além disso,$\|g\|_{E'} = \|f\|_{Z'} = 1$. Além disso, da definição de f e por g ser extensão linear de f, seque que

$$g(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|.$$

$\square$

Agora provaremos que para qualquer elemento x_0 de um espaço vetorial, sempre é possível construir um funcional linear limitado de norma $\|x_0\|$.

Corolário 5.0.3. *Seja $x_0 \in E$ um elemento arbitrário. Então existe $f \in E'$ tal que*

$$\|f\|_{E'} = \|x_0\| \text{ e } f(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Demonstração. Se $x_0 = 0$, temos que $f = 0$ satisfaz o desejado. Seja $x_0 \neq 0$ e $G := \mathbb{R}x_0 = \{tx_0; t \in \mathbb{R}\}$. Definindo $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\sup_{\substack{x \in G \\ \|x\|=1}} |g(x)| = \sup_{t=\frac{1}{\|x_0\|}} |t|\|x_0\|^2 = \|x_0\|,$$

pois se $x = tx_0 \in G$ é tal que $\|x\| = 1$ então $t = \frac{1}{\|x_0\|}$. Sendo g linear, resulta que $g \in G'$ e $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$. Pelo Corolário 5.0.1 existe um prolongamento f de g a E tal que $f \in E'$ e $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|$. Além disso, como $x_0 \in G$, temos que $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2$. □

Corolário 5.0.4. *Seja $x \in E$ um elemento arbitrário. Então,*

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_E \leq 1}} f(x).$$

Demonstração. Do Corolário 5.0.3, para um elemento $x \in E$ arbitrário, temos que existe $f_0 \in E'$ tal que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x\|_E \text{ e } f_0(x) = \|x\|^2.$$

Considere o funcional linear definido por $f_1(y) = \frac{f_0(y)}{\|x\|}$ para todo $y \in E$. Em particular, se $y = x$, temos

$$\|x\| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \frac{f_0(x)}{\|x\|} = f_1(x) \leq \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} f(x). \tag{23}$$

pois,

$$\|f_1\| = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|=1}} |f_1(y)| = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|=1}} \frac{|f_0(y)|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|=1}} \frac{\|f_0\|\|y\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|=1}} \frac{\|x\|\|y\|}{\|x\|} = 1$$

Alem disso,

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} f(x) \leq \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} \|f\|_{E'}\|x\| \leq \|x\|. \tag{24}$$

De (23) e (24) concluímos que $\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|\|_E \leq 1}} f(x)$. □

Agora apresentaremos uma aplicação da 2ª Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach 4.0.14.

Corolário 5.0.5. *Seja E um espaço vetorial normado e $F \subset E$ um subespaço vetorial de E tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in E \backslash \overline{F}$ e denote $A = \overline{F}$ e $B = \{x_0\}$. Note que A e B são convexos, disjuntos e não vazios, com A fechado e B compacto. Pela segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe um hiperplano $[f = \alpha]$ que separa $\overline{F}$ e x_0 no sentido estrito, isto é,

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \text{ e } f(x_0) \geq \alpha + \varepsilon,$$

para todo $x \in F$ e algum $\varepsilon > 0$. Em particular,

$$f(x) < \alpha, \text{ para todo } x \in F.$$

Pelo Lema 2.4.5, temos que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$.

□

5.1 CONVERGÊNCIA FRACA

Nesta seção apresentaremos uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach que diz respeito a semicontinuidade inferior em relação a convergência fraca em espaços normados. Para exibí-la, é necessário definir e comentar alguns conceitos preliminares sobre convergência fraca e semicontinuidade inferior.

Definição 5.1.1. *Uma sequência em um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é denominada sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $m, n > n_0$ implica que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.*

Definição 5.1.2. *Um espaço normado E que é também um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma é chamado de espaço de Banach. Equivalentemente, X é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência de Cauchy em E converge e seu limite ainda é um elemento de E.*

Definição 5.1.3. *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de um espaço de Banach E, converge fraco para $x \in E$ se, e somente se,*

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), n \longrightarrow \infty,$$

para todo $f \in E'$. Neste caso denotamos $x_n \rightharpoonup x$.

Segue diretamente das propriedades de continuidade sequencial que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para x, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco. De fato,

$$|f(x_n)-f(x)| = |f(x_n-x)| \leq \|f\|_{E'}\|x_n-x\| \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Em geral, a recíproca não é verdadeira. Mas se E possui dimensão finita, temos o seguinte resultado:

Lema 5.1.4. *Se E é um espaço vetorial com* $\dim E = n < \infty$*, então convergência fraca e forte são equivalentes.*

Demonstração. Sejam $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de E e $B^* = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ a base dual de $E^* = E'$. Se $x_k \rightharpoonup x$ quando $k \to \infty$, então $f(x_k) \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in E'$. Em particular, para todo $i = 1, ..., n$, temos que $f_i(x_k) \longrightarrow f_i(x)$.

Por outro lado, para todo $i = 1, ..., n$, temos que $x_k = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_k)v_i$ e $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)v_i$. Portanto

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_k)v_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x)v_i = x$$

ou seja, x_k converge forte para x. □

Exemplo 5.1.5. *No caso em que $E = \mathbb{R}$, já vimos na seção 2.5 que se $f \in \mathbb{R}'$ então f é da forma $f(x) = \alpha x$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,*

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \Longleftrightarrow \alpha x_n \longrightarrow \alpha x \Longleftrightarrow x_n \longrightarrow x.$$

Definição 5.1.6. *Dizemos que um funcional $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido sobre um espaço vetorial normado E é semicontínuo inferiormente (SCI) se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para x tivermos*

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Note que para funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ toda função contínua em um ponto x será semicontínua inferiormente nesse ponto, pois se $x_n \longrightarrow x$, então $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Para funções f com descontinuidade de primeira espécie, isto é,quando os limites laterais existem, porém são diferentes, a função deve verificar $f(x^-) \leq f(x)$, $f(x^+) \leq f(x)$, onde $f(x^-)$ é limite inferior e $f(x^+)$ é o limite superior de $f(x)$.

Teorema 5.1.7. *Seja E um espaço vetorial normado, e seja x_n uma sequência de elementos em E convergindo fraco para x, então*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|. \tag{25}$$

Demonstração. Note que para $x = 0$, o resultado (25) é óbvio. Seja $x \leq 0$ e $x_n \longrightarrow x$. Como x_n converge fraco, então temos que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \text{ para todo } f \in E'.$$

Por outro lado, para todo $f \in E'$, $f(x_n) \leq \|f\|\|x_n\|$. Tomando o $\liminf\limits_{n\to\infty}$ de ambos os lados, temos

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|, \tag{26}$$

para todo $f \in E'$. Do Corolário 5.0.2, temos que existe $\tilde{f} \in E'$ satisfazendo $\|\tilde{f}\| = 1$ e $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Assim, considerando $\tilde{f}$ em (26), temos

$$\|x\| = \tilde{f}(x) = \liminf_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) \leq \|\tilde{f}\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

o que implica, que

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|.$$

Concluímos assim a demonstração. □

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tão importante quanto o resultado sobre a existência da extensão de funcionais lineares garantidos pelos Teorema de Hahn-Banach em suas formas analíticas é o fato dessa extensão linear ser limitada. Além disso, outro ponto importante do teorema é perceber que em momento algum é feito menção sobre a unicidade da extensão do funcional linear. Dessa forma, pode haver mais de uma extensão do funcional que satisfaça as hipóteses dos teoremas de Hahn-Banach.

Em relação as formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach, em ambas também não é feito menção sobre a unicidade do hiperplano que separa A e B. Na 2ª Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, é imprescindível que B seja compacto, pois caso B seja apenas fechado, seria possível construir um exemplo em que A e B são convexos, não vazios e disjuntos tal que não existe hiperplano H que os separe no sentido lato. Veja figura abaixo.

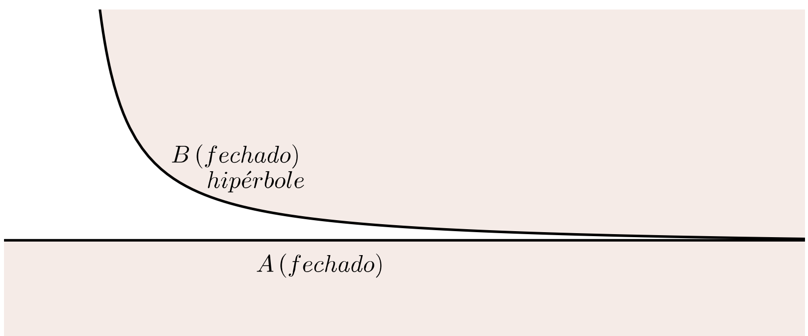

Figura 5: Conjuntos A e B fechados, convexos e disjuntos.

REFERÊNCIAS

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos da Análise Funcional**. Rio de Janeiro: Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

BRÉZIS, H. **Análisis funcional: Teoría y aplicaciones**. España: Alianza Editorial, 1984.

CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. d. N. D.; KOMORNIK, V. **Introdução a Análise Funcional**. Maringá: EDUEM, 2007.

COELHO, F. U.; LOURENO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2011.

FOLLAND, G. B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. Rio de Janeiro: John Wiley & Sons, 2013.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

OLIVEIRA, C. D. **Introdução a Análise Funcional**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.