

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DAELT  
ENGENHARIA INDUSTRIAL ELÉTRICA – ÊNFASE EM AUTOMAÇÃO**

**MARIO FREITAS JUNIOR**

**IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMOS DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGEM PARA  
TOMOGRAFIA OPTICA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**CURITIBA**

**2017**

**MARIO FREITAS JUNIOR**

**IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMOS DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGEM PARA  
TOMOGRAFIA OPTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Industrial Elétrica com Ênfase em Automação do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marco José da Silva

**CURITIBA**

**2017**

MARIO FREITAS JUNIOR

## IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMOS DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGEM PARA TOMOGRAFIA OPTICA

Este Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação foi julgado e aprovado como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro Eletricista, do curso de Engenharia Industrial Elétrica ênfase Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Curitiba, 16 de fevereiro de 2017.

---

Prof. Paulo Sérgio Walenia, Dr.  
Coordenador de Curso  
Engenharia Industrial Elétrica ênfase Automação

---

Profa. Annemarle G. Castagna, Dra.  
Responsável pelos Trabalhos de Conclusão de Curso  
de Engenharia Industrial Elétrica ênfase Automação do DAELT

### ORIENTAÇÃO

---

Marco Jose da Silva, Dr.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Orientador

### BANCA EXAMINADORA

---

Marco Jose da Silva, Dr.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Daniel Rodrigues Pipa, Dr.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Tiago Piovesan Vendruscolo, Dr.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

*Nenhum sucesso na vida compensa o  
fracasso no lar*

(MCKAY, David O.)

## RESUMO

FREITAS JUNIOR, Mario. Implementação de algoritmos de reconstrução de imagem para tomografia óptica. 2017. Trabalho de conclusão de curso (Engenharia Industrial Elétrica ênfase Automação) – Departamento de Eletrotécnica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

Esta pesquisa apresenta uma abordagem de diversas técnicas de reconstrução de imagens utilizadas na tomografia. Também procura aperfeiçoar a Matriz de Pesos – elemento essencial utilizado em técnicas algébricas de reconstrução de imagens – e que depende das características do tomógrafo. O tomógrafo utilizado como base foi o de Vendruscolo (2015) que consiste de um tomógrafo cilíndrico com 16 emissores e 16 receptores.

**Palavras-chave:** Tomografia Óptica. Reconstrução de Imagens. Matriz de pesos.

## **ABSTRACT**

FREITAS JUNIOR, Mario. Implementation of image reconstruction methods for optical tomography. Final course project (Industrial Electrical Engineering emphasis in Automation) – Electrotechnical department, Technological Federal University of Paraná. Curitiba, 2017.

This research shows an abridgement of several image reconstruction techniques used in tomography. It also seeks to perfect the Matrix of Weights – essential element utilised in image reconstruction algebraic techniques – which depends on the characteristics of the tomograph utilised. This tomograph is the one which Vendruscolo made (2015), which consists of a cylindrical tomograph with 16 receptors and 16 emitters.

**Key-words:** Optical Tomography. Image Reconstruction. Matrix of weights.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Diagrama simplificado do sistema tomográfico. Fonte: Vendruscolo et al., 2014.....	10
Figura 2 - Funcionamento de um tomógrafo. Fonte Vendruscolo et al., 2015. .....	15
Figura 3 - Raios paralelos. Fonte: Buzug, 2008. ....	17
Figura 4 - relação entre $f(x,y)$ e $p \xi$ . Fonte: Buzug, 2008. ....	18
Figura 5 - Exemplo de sinograma gerado por Matlab com 90 ângulos.....	19
Figura 6 - Aplicação do teorema da faixa central de Fourier. Fonte: Buzug, 2008. ....	20
Figura 7 - aplicação da inversa de Radon em Matlab.....	20
Figura 8 - Filtros para Backprojection .....	22
Figura 9 - Matriz A no algoritmo de Backprojection. Fonte Vendruscolo et al., 2014. ....	24
Figura 10 - Características de refração de um Tomógrafo Óptico.....	27
Figura 11 – Triângulos para determinação de $\xi+2\rho$ .....	28
Figura 12 – Triângulo para determinação de $\xi$ .....	29
Figura 13 – Triângulo para determinação de $\rho$ .....	30
<i>Figura 14 - Reconstruções considerando matriz de pesos com refração.....</i>	<i>35</i>
Figura 15 - Reconstruções considerando matriz de pesos sem refração .....	36
Figura 16 - Reconstruções considerando matriz de pesos sem refração para apenas um lápis .....	37

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>7</b>
1.1	OBJETIVOS.....	8
1.1.1	Objetivo Geral.....	8
1.1.2	Objetivos Específicos .....	8
1.2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	9
<b>2</b>	<b>INTRODUÇÃO À TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA.....</b>	<b>12</b>
2.1	HISTÓRIA DA TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA .....	12
2.2	TOMOGRAFIA NA INDÚSTRIA .....	13
<b>3</b>	<b>MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS .....</b>	<b>14</b>
3.1	TRANSFORMADA DE RADON.....	15
3.2	TRANSFORMADA DE RADON INVERSA .....	19
3.3	BACKPROJECTION.....	20
3.4	MÉTODOS ALGÉBRICOS .....	22
3.4.1	Backprojection .....	23
3.4.2	Tikhonov .....	24
3.4.3	Total Variation.....	25
<b>4</b>	<b>RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE ESCOAMENTO</b>	
	<b>MULTIFÁSICO COM TOMÓGRAFO ÓPTICO .....</b>	<b>26</b>
4.1	MATRIZ DE PESOS .....	26
4.2	RESULTADOS .....	34
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>41</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGO PARA FUNÇÃO GENÉRICA DA MATRIZ DE</b>	
	<b>PESOS.....</b>	<b>44</b>
	<b>APÊNDICE B – CÓDIGO PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGEM EM</b>	
	<b>MATLAB DE 2 CORPOS SÓLIDOS.....</b>	<b>46</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O cenário mundial vem mostrando através das últimas décadas que o petróleo tem um papel primordial como fonte de energia à humanidade. Mesmo com o advento de outras fontes de energia – tais como a eólica e a solar –, a produção de petróleo, bem como o seu consumo, continua a crescer. A produção de petróleo em 2014 aumentou para mais de 2 milhões de barris por dia, número que representa mais que o dobro da média dos últimos 10 anos (DALE, 2015). Isso nos mostra a importância do petróleo como combustível.

Devido a relevância dessa fonte de energia, pesquisas relacionadas a essa área vêm sendo feitas para todas as etapas do processo – desde a extração, produção até a comercialização de derivados.

Na maioria das vezes em que a extração de petróleo é feita, ela acontece por meio de dutos em que ocorre o transporte da mistura contendo petróleo. Essa mistura contém, além de petróleo cru, água e materiais em diferentes estados físicos (como o gasoso), e é conhecida como uma mistura multifásica (FALCONE *et al.*, 2009). Há, portanto, um escoamento multifásico nos dutos de extração de petróleo. Esse fluxo multifásico, na realidade, trata-se normalmente de um escoamento bifásico, em que há uma fase gasosa e a outra líquida (VILLELA, 2004).

O tipo de escoamento, em geral, ajuda a determinar a segurança e eficiência dos processos envolvidos com petróleo, além de ser essencial para que se possa dimensionar adequadamente os dutos da planta de extração de petróleo.

Dentre as técnicas utilizadas para análise do escoamento, pode-se citar a tomografia óptica.

A obra de Vendruscolo (2015) vem tratando da criação de um tomógrafo de 16 emissores e 16 receptores para investigação do escoamento bifásico em oleodutos. Este trabalho de conclusão de curso visa a complementação do trabalho

de Vendruscolo, através da reconstrução dos dados gerados por Vendruscolo, transformando-os em imagens.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Com base no uso de tomografia óptica para identificação dos componentes de escoamentos bifásicos em oleodutos, há a necessidade de reconstrução das imagens geradas de forma eficaz. Será explorado o uso da tomografia no ambiente petrolífero em geral, bem como os benefícios e problemas do uso do tomógrafo óptico.

O foco, será, entretanto, analisar diversos métodos avançados de reconstrução de imagem, a fim de se identificar quais melhores se aplicam para o tomógrafo óptico 16x16 (16 emissores e 16 receptores) criado por Vendruscolo (2015) em projeto de doutorado.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Pode-se resumir o que este trabalho se propõe através dos seguintes tópicos:

- Estudo de técnicas tomográficas em geral
- Estudo do hardware e software do tomógrafo óptico para investigação de escoamento bifásicos 16x16 criado por Vendruscolo.
- Estudo e implementação de técnicas avançadas de reconstrução de imagens para o referido tomógrafo.
- Realização de experimentos de validação de técnicas escolhidas
- Identificação da técnica mais indicada para ser utilizada pelo referido tomógrafo, levando em conta o desempenho do sistema.

## 1.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A seguir, serão percorridos os capítulos que contêm as etapas que contribuirão para desenvolvimento do projeto proposto, a fim de que os objetivos possam ser levados a efeito. Essas etapas são organizadas de forma lógica, com uma continuidade de conhecimento, para que cada etapa contribua de forma significativa à etapa seguinte. O trabalho como um todo é dividido em 5 capítulos, sendo os 4 capítulos seguintes.

### a. Revisão Bibliográfica

Neste tópico será feito o embasamento teórico do projeto, e irá conter dois capítulos: introdução à tomografia computadorizada e métodos de reconstrução de imagens. Considerando que há muita pesquisa na área de escoamento multifásico, bem como muita pesquisa na área de tomografia óptica, planeja-se cruzar as informações dessas duas áreas a fim de se formar o ambiente necessário para execução do projeto proposto.

### b. Análise - Tomógrafo Óptico

Nesta etapa, haverá um estudo específico do tomógrafo óptico a ser utilizado nos experimentos. Suas especificações serão analisadas e testes serão feitos para se verificar sua precisão, alcance, espectro, bem como outras peculiaridades.

O tomógrafo óptico em questão foi desenvolvido por Vendruscolo *et al.* (2014) e conta com 16 LED's transmissores e 16 fotodiodos receptores.

Os testes a serem realizados são especificamente para o tomógrafo em questão, podendo envolver ou não, em um primeiro momento, escoamentos multifásicos. Esse tomógrafo trabalha com feixes de luz em 950 nm de comprimento de onda, isso permite testar escoamentos bifásicos em ar e água. Na figura 2 pode-se notar o referido tomógrafo.

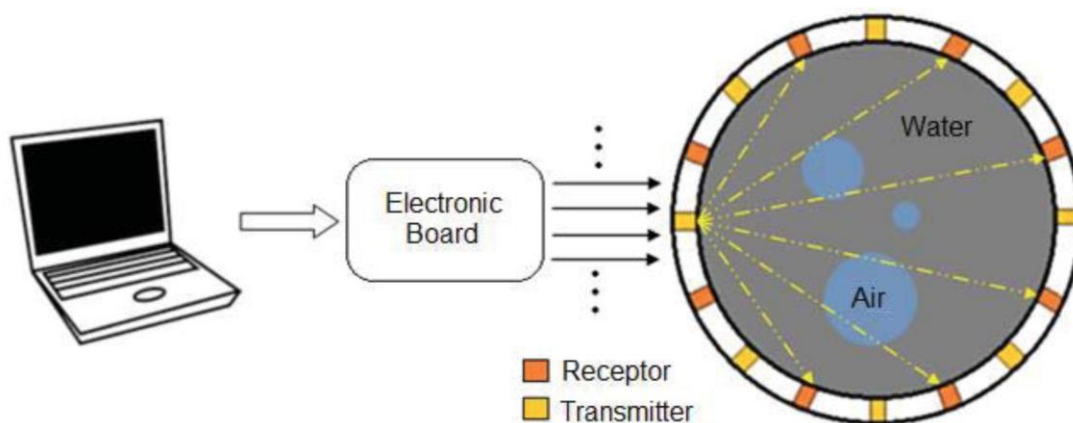


Figura 1 - Diagrama simplificado do sistema tomográfico. Fonte: Vendruscolo et al., 2014

### c. Métodos para reconstrução de imagens

Após a análise do tomógrafo, serão verificadas as várias técnicas para reconstrução de imagem. Essas técnicas têm suas vantagens e desvantagens, as quais são abordadas nesta etapa.

Essas diversas técnicas de reconstrução de imagem, tais como Reconstrução via Tikhonov e Iterações Landweber, exigem, em geral, desenvolvimento em software. O software escolhido para ser utilizado é Matlab. Esse software vem sendo usado amplamente para projetos voltados à área de tomografia, incluindo na reconstrução de imagens provenientes de tomógrafos ópticos. Wood (2013) realizou um estudo da temperatura de combustão via técnicas ópticas, reconstruindo as imagens via Matlab. Pode-se concluir, assim, que Matlab é um software que certamente servirá para a proposta apresentada e para a reconstrução de imagens provenientes de um tomógrafo óptico.

Experimentos serão realizados para testar as diversas técnicas disponíveis. Com isso, algumas dessas técnicas serão selecionadas para serem utilizadas na

reconstrução de imagem provenientes de escoamento multifásico a ser realizado em planta-piloto.

d. Reconstrução de imagens de dados com tomógrafo óptico.

Nessa parte do projeto, buscar-se-á melhorar a matriz de pesos. O aperfeiçoamento desta matriz de acordo com as características do tomógrafo é um dos pontos principais desta obra. A refração causada pelas paredes do tubo utilizado no tomógrafo pode afetar a qualidade das reconstruções de imagens, visando mitigar esta condição, a refração deve ser levada em consideração para a criação de uma matriz de pesos eficiente. Com base nas imagens geradas pela nova matriz de pesos, critérios para avaliação de qualidade (como clareza e contraste) serão levados em consideração para que se possa concluir o se a método mais eficiente e eficaz para reconstrução de imagens do problema apresentado.

Após isso, considerações finais serão tidas e a conclusão do projeto será apresentada.

## 2 INTRODUÇÃO À TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

Este capítulo tratará da história da tomografia, que dá base de sustentação para a utilização da tomografia óptica hoje. Também mostra a solidez e a ampla variedade dos ramos contidos dentro da tomografia. O embasamento matemático para todas as práticas que envolvem a reconstrução de imagens provenientes de tomógrafos ópticos também será demonstrada de forma sucinta.

### 2.1 HISTÓRIA DA TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

A tomografia vem se mostrando importante em diversas áreas, desde a medicina até a aplicações industriais. Foi o primeiro método não invasivo de aquisição de imagens do corpo humano e se consolidou como ferramenta fundamental para análises médicas não invasivas.

Sua história remonta ao final do século XIX e se confunde com a história do raio X. Este foi descoberto no dia 8 de novembro de 1895, por um cientista alemão chamado Wilhelm Conrad Röntgen (1845–1923), descrito em seu ensaio *Über eine neue Art von Strahlen* (1895). A partir deste dia, outros testes foram realizados para se investigar os raios X pelo próprio Röntgen.

Paralelo a isso, em 1917 o cientista austríaco chamado Johann Radon publicou seu famoso papel sobre a solução para o problema inverso da reconstrução de imagem. No entanto, seus estudos foram voltados ao campo matemático e teórico.

Muito foi desenvolvido ao longo da primeira metade do século XX para o desenvolvimento da tomografia de forma geral. O físico Allan Cormack começou suas pesquisas com reconstrução de imagens de raios-X em 1956, tendo criado um aparato de tomografia em 1963. No entanto, as pesquisas do engenheiro inglês Godfrey Hounsfield também proporcionaram a criação de um tomógrafo patenteado em 1968. Por isso, o surgimento do tomógrafo computadorizado é geralmente

atribuído a Comark e Hounsfield, sendo os dois reconhecidos por este feito em 1979, tendo ganhado juntos o Prêmio Nobel em Medicina.

## 2.2 TOMOGRAFIA NA INDÚSTRIA

Apesar da tomografia computadorizada ter seu maior sucesso aplicado à área médica, ela vem sendo usada em diversas áreas da indústria, com uma aplicabilidade das mais variadas (ELLINGE *et al.*, 1991). Setores da indústria – como o automotivo – vêm demonstrando crescente interesse com essa tecnologia tanto utilizada na área médica e sua aplicação no reconhecimento de falhas e análise de peças.

O setor de Engenharia Reversa, que lida com a formação de peças de acordo com um modelo físico existente (conceito que pode ser descrito como o oposto da utilização de construção via plataformas CAD), tem visto na tomografia computadorizada um grande aliado (FLISCH *et al.*, 1999). Com os dados gerados através da tomografia computadorizada pode-se ser gerado um modelo CAD, que poderá ser replicado. A tomografia permite que o objeto em questão possa ser inspecionado sem a necessidade de testes destrutivos para uma análise do interior.

Outra aplicação da tomografia em ambiente industrial pode ser vista também na análise de eficiência de motores de combustão interna, como proposto por Wright *et al.* (2010). Neste artigo a eficiência da queima de combustíveis dentro de um motor de automóvel é analisada por meio de um tomógrafo composto por fibras ópticas intrusivas nos cilindros do referido motor. Também projetos para se investigar as diferentes temperaturas tidas durante a combustão foram analisadas por Wood (2013).

A aplicação industrial que mais agrega a este trabalho é, entretanto, na indústria de petróleo. A tomografia computadorizada pode ser utilizada em várias etapas do processo de extração e processamento do petróleo. Pesquisas voltadas à utilização de tomógrafos de raio-X para a identificação interna de rochas de forma não destrutiva, para mapeamento de reservatórios de petróleo (CAMPOS & LOPES,

2002). Há também certa dificuldade em se identificar gases em tubulações de petróleo de forma não intrusiva, sobre o qual Vendruscolo *et al.* (2014) baseia sua pesquisa. Vendruscolo utiliza-se, como já citado, de uma luz na faixa do infravermelho médio a respeito da qual o petróleo possui certa transparência.

Com vasta aplicação no universo industrial – e em especial no da indústria petroleira –, a tomografia computadorizada mostra-se um campo de estudo e trabalho promissor tanto para o mercado atual quanto para o mercado futuro.

### **3 MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS**

Neste capítulo serão abordadas as diferentes técnicas utilizadas para reconstrução de imagem de tomógrafos ópticos, começando desde a base teórica necessária para reconstruções, como o são as transformadas de Radon, indo até métodos de reconstrução de emissores em leque (tecnologia usada a partir de tomógrafos da 2ª geração) e técnicas avançadas de reconstrução de imagem.

Todas as técnicas abordadas partem do princípio de funcionamento do tomógrafo. O tomógrafo pode ser resumido em um emissor, detector ou receptor e um corpo sobre o qual o tomógrafo atua. O emissor emite um sinal, que atravessa o corpo, sendo captado pelos detectores. O conjunto então rotaciona ao redor do corpo (podendo também ser o corpo que rotaciona em meio ao conjunto) e novos sinais são emitidos. A variação dos sinais emitidos é calculada de acordo com a diferença do sinal original para o sinal captado para cada ângulo utilizado. Com isso um gráfico é gerado, chamado sinograma, que mostra a relação dos sinais detectados com os ângulos em que as medições foram feitas. Com o sinograma, então, é possível reconstruir a imagem. A figura 3 aborda o processo de funcionamento de um tomógrafo.



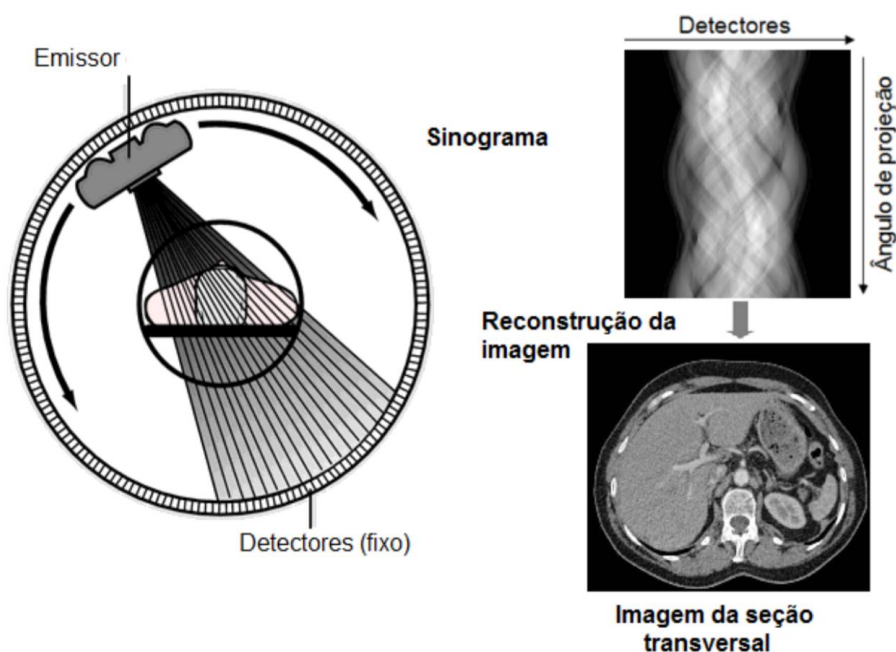


Figura 2 - Funcionamento de um tomógrafo. Fonte Vendruscolo et al., 2015.

### 3.1 TRANSFORMADA DE RADON

A transformada de Radon trabalha com o problema de reconstrução de imagens a partir de dados adquiridos através de medidas de emissores e sensores alinhados paralelamente. Esse cenário específico corresponde à geometria mais simples tratada neste trabalho. É importante notar que esse tipo de geometria não é muito prático, e foi apenas implementada em tomógrafos computadorizados da primeira geração (KALENDER, 2005).

Considerando um conjunto de linhas paralelas arbitrárias no plano das imagens, pode-se definir uma função  $f(x, y)$  como portando todos os pontos  $r = [x, y]$  que podem satisfazer as condições de continuidade da função  $f(x, y)$ . Em outras palavras,  $f(x, y)$  descreve o objeto, que se encontra limitado dentro do espaço do tomógrafo.

Com essas condições, Radon desenvolveu três teoremas, como apontado por Buzug (2008) enquanto citava Radon (1986) (tradução própria):

Teorema 1: A integral de  $f$  ao longo da linha  $L$  com a equação  $x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) = \xi$ , dada por

$$\begin{aligned} p(\xi, \gamma) &= p(-\xi, \gamma + \pi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi \cos(\gamma) - \eta \sin(\gamma), \xi \sin(\gamma) - \eta \cos(\gamma)) d\eta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Que é, em geral, bem definida. Isso significa que em qualquer círculo esses pontos que tem linhas tangentes para o qual  $p$  não existe formam um conjunto de medidas lineares *zero*.

Teorema 2: Se o valor esperado de  $p(\xi, \gamma)$  é formado por linhas tangentes do círculo de centro  $r = [x, y]$  e raio  $R$ :

$$\bar{p}_r(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) + R, \gamma) d\gamma, \quad (3.2)$$

Então essa integral é absolutamente convergente para todo  $r = [x, y]$  e raio  $R$ .

Teorema 3: O valor de  $f(x, y)$  é completamente determinado por  $p$  e pode ser computado da seguinte maneira:

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\bar{p}_r(R)}{R} \quad (3.3)$$

Com esses 3 teoremas temos a condição de analisar a reconstrução de imagens em sistemas com raios paralelos, conforme figura 4.

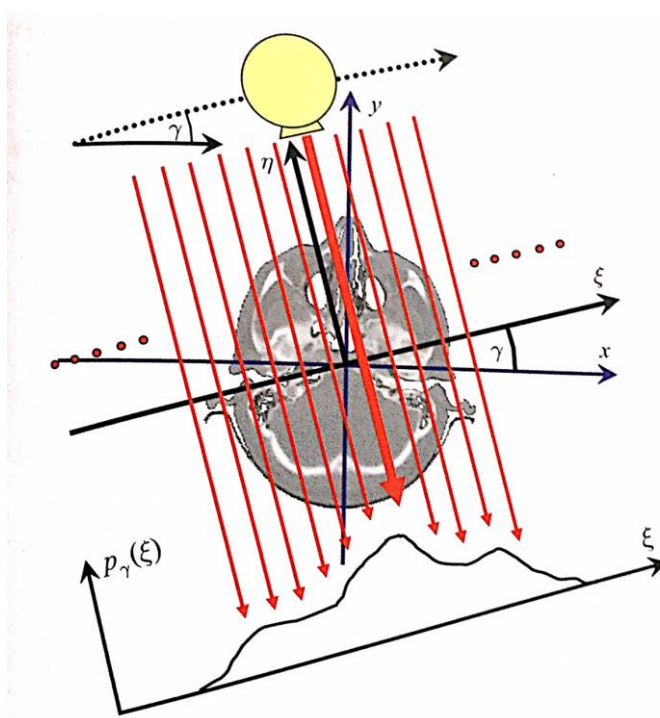


Figura 3 - Raios paralelos. Fonte: Buzug, 2008.

Na figura 3 podemos observar a projeção  $p(\xi, \gamma)$  conforme descrito pela equação 3.1 do teorema 1, a qual relaciona todas as posições  $\eta$  de determinado corpo por onde o raio atravessa, com o ângulo  $\gamma$  que mostra o posicionamento do emissor em referência ao corpo e a posição  $\xi$  em que o emissor se encontra. Cada valor  $p(\xi)$  depende da somatória de todos os coeficientes  $\mu$ , referentes ao coeficiente de atenuação do meio, sendo esta uma variável que depende da já referida posição  $\eta$ .

É importante salientar que, apesar de se estar mostrando todo o processo das transformadas de Radon de forma contínua, na prática este processo é feito de forma discreta. Então se faz necessário substituir as integrais utilizadas por somatórios, havendo, assim, uma discretização das variáveis utilizadas.

Para se ilustrar a relação entre  $p(\xi)$  e  $\mu$  (ambos relacionados à posição  $\eta$ ), conforme anteriormente descrito, pode-se mostrar a figura 5, a qual identifica o pixel

em questão, através da função  $f$  ou da função  $\mu$  (ambas relacionadas entre si através da equação  $x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) = \xi$ ).

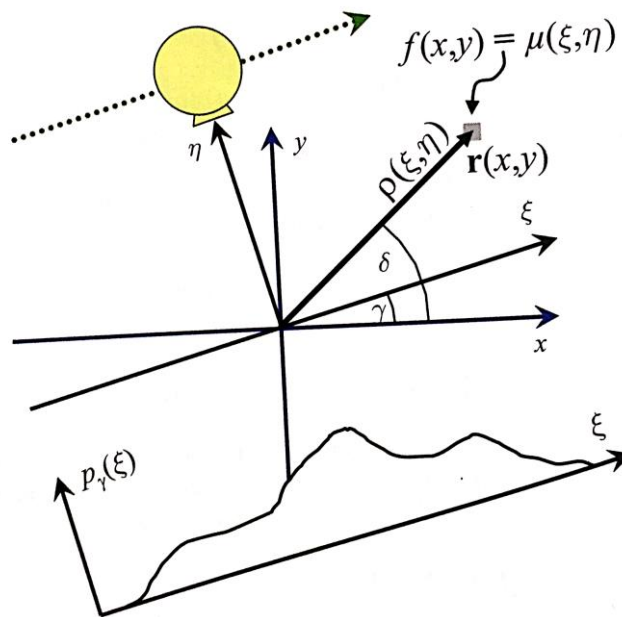


Figura 4 - relação entre  $f(x,y)$  e  $p(\xi)$ . Fonte: Buzug, 2008.

A relação entre a função  $f$  e a função  $p$ , conforme explicada anteriormente, é a conhecida transformada de Radon, que pode ser descrita da seguinte maneira:

$$p(\xi, \gamma) = \mathfrak{R} \{f(x, y)\} \quad (3.4)$$

Uma forma comum de se representar graficamente o resultado obtido através da transformada de Radon é o sinograma. Um exemplo de sinograma pode-se ser observado na figura 5.

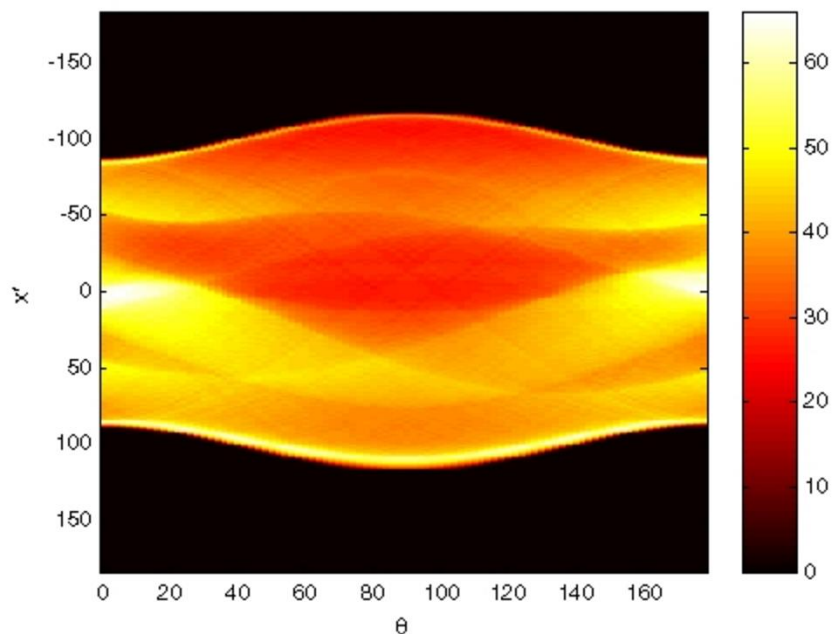


Figura 5 - Exemplo de sinograma gerado por Matlab com 90 ângulos

### 3.2 TRANSFORMADA DE RADON INVERSA

A aplicação da transformada inversa de Radon está relacionada com os teoremas 2 e 3 propostos no início deste capítulo. Para sua aplicação, é utilizado o teorema da faixa central de Fourier, que nada mais é que a relação entre o sistema de coordenadas polar e cartesiana, que facilitam o emprego da transformada inversa.

Em suma, pode-se dizer que, a partir dos dados obtidos (os quais geram o sinograma), é-se aplicado a transformada de Fourier no espaço de Radon. Com isso, é feito uma regressão para o espaço com coordenadas polares, também chamado de espaço de Fourier. Após essa etapa, a regressão para o espaço cartesiano é realizada e a imagem do objeto reconstruída. Esse processo pode ser acompanhado na figura 6.

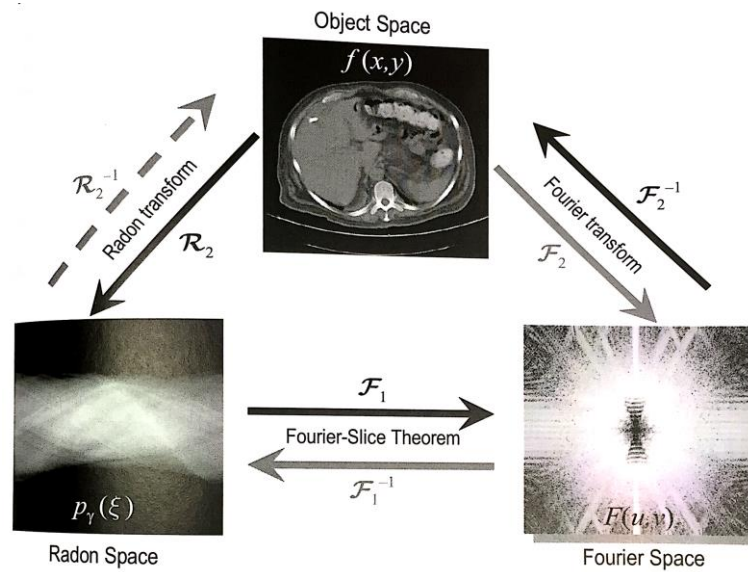


Figura 6 - Aplicação do teorema da faixa central de Fourier. Fonte: Buzug, 2008.

Considerando o sinograma da figura 5, podemos gerar em Matlab a reconstrução de imagem dada pela figura 7.



Figura 7 - aplicação da transformada inversa de Radon em Matlab

### 3.3 BACKPROJECTION

A reconstrução descrita no ponto 3.2 é feita de forma direta. Sendo assim ela é suscetível a erros resultantes do próprio teorema de Fourier e outras

limitações. Com isso, outras estratégias de reconstrução foram desenvolvidas, como é o caso da backprojection.

A backprojection é passível à aplicação de filtros, sendo uma técnica que ainda hoje é largamente utilizada. Ela pode ser expressa de forma simplificada da seguinte maneira:

$$g(x, y) = \int_0^\pi p_\gamma(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma)) d\gamma \quad (3.5)$$

Nota-se, no entanto, que esse tipo de reconstrução não se chega ao resultado desejado. A função  $g$  acaba levando em consideração os pontos em que não há objeto, ou, em outras palavras, que  $f(x, y)$  é igual a 0. Para isso normalmente aplica-se convolução com a função inversa do módulo de  $(x, y)$ , fazendo com que os efeitos de  $f(x, y) = 0$  sejam minimizados.

Os resultados da backprojection, no entanto, geram imagens embaçadas. Essa característica, porém, é corrigida ou atenuada pelo uso de filtros. Esses filtros são aplicados em ordem a eliminar ou atenuar os efeitos indesejados ocorridos na backprojection normal. A figura 8 mostra os principais filtros utilizados, todos eles disponíveis em Matlab.

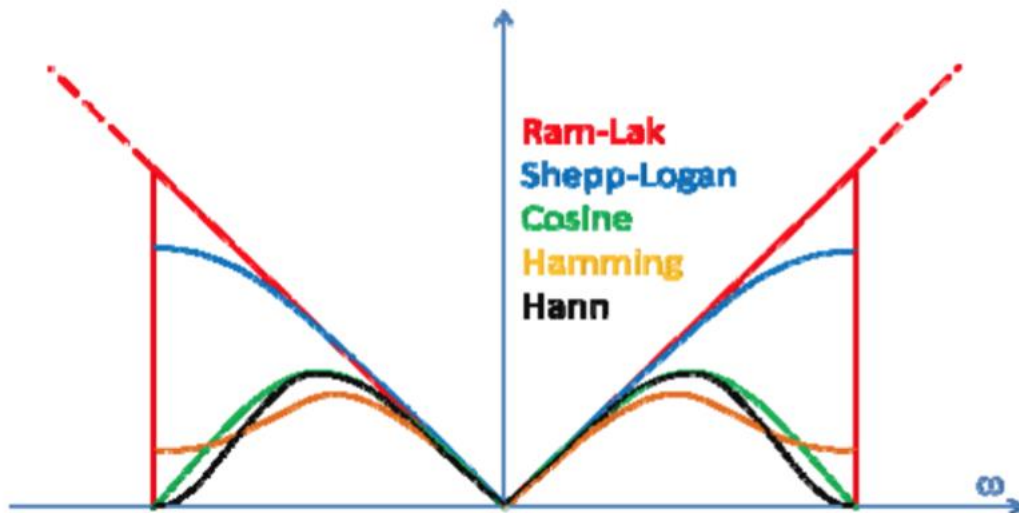


Figura 8 - Filtros para Backprojection

### 3.4 MÉTODOS ALGÉBRICOS

Os métodos algébricos são métodos que utilizam uma abordagem diferente para reconstrução de imagens.

Como o próprio nome sugere, esses métodos utilizam ferramentas que lidam de forma numérica com o problema da reconstrução de imagem, muitas vezes valendo de técnicas iterativas para tal.

A maioria dos métodos algébricos parte do que é chamado problema direto, mostrado pela fórmula 3.6.

$$\bar{b} = \bar{A} \bar{x} \quad (3.6)$$

Sendo  $\bar{b}$  os dados adquiridos através dos sensores do tomógrafo, ou, em outras palavras, o sinograma;  $\bar{A}$  a matriz de pesos, que varia de acordo com as características do tomógrafo (sendo assim, os métodos não são exclusivos de reconstruções de raios paralelos, podendo ser aplicadas a qualquer configuração de



tomógrafo, desde que a matriz  $\bar{A}$  esteja configurada corretamente); e  $\bar{x}$  o objeto em questão. Porém, para que possa haver a reconstrução da imagem, é considerado o problema inverso:

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} \bar{b} \quad (3.7)$$

Há, no entanto, um problema ao se referir à matriz inversa  $\bar{A}^{-1}$  da matriz de pesos. A matriz  $\bar{A}$  só é inversível se for quadrada, ou seja, possuir um número similar de linhas e colunas. Como a matriz de pesos muitas vezes não é uma matriz quadrada, é necessário utilizar artifícios matemáticos que substituem a matriz inversa  $\bar{A}^{-1}$  (BYRNE, 2006).

#### 3.4.1 Backprojection

O *backprojection* pode ser aplicado também de forma numérica. Ele aproxima a matriz inversa  $\bar{A}^{-1}$  à matriz transposta  $\bar{A}^T$ , podendo descrever, assim, o problema inverso da seguinte forma:

$$\bar{x} = \bar{A}^T \bar{b} \quad (3.8)$$

Isso permite com que a equação  $\bar{x} = \bar{A}^T \bar{b}$  seja possível, e  $\bar{x}$  seja encontrado. A figura 9 mostra, de forma didática, o que até então foi explicado a respeito de *backprojection*.

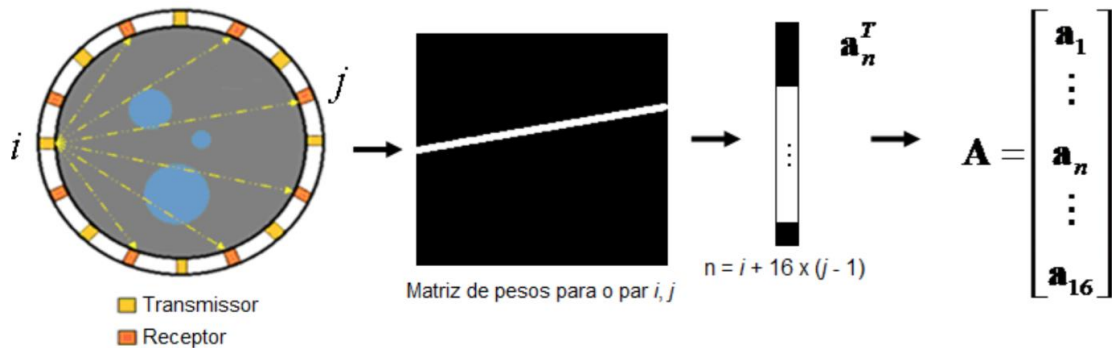


Figura 9 - Matriz  $\mathbf{A}$  no algoritmo de Backprojection. Fonte Vendruscolo et al., 2014.

### 3.4.2 Tikhonov

O método Tikhonov foi desenvolvido especialmente para problemas em que há mais de uma solução. Esses problemas são chamados de mal-postos. Eles são provenientes de problemas subdeterminados, que possuem número de medidas menos do que o número necessário de pixels. Com isso, muitos pixels ficam sem informação necessária para sua reconstrução. A regularização por Tikhonov fornece informação a pixels em que não houve coleta de dados suficientes para suas reconstruções. Essa informação é baseada nos pixels em que se existe dados suficientes para reconstrução e que se encontram adjacentes aos pixels sem dados. Um fator de suavização  $\lambda$  é também aplicado.

Se considerarmos o problema inverso descrito na equação 3.7, o método Tikhonov substitui a matriz inversa  $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$  pela seguinte matriz:

$$\bar{\mathbf{A}}^\# = (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}} + \lambda \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}})^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \quad (3.9)$$

Sendo  $\lambda$  chamado de fator de suavização e  $\bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}}$  é a matriz de Tikhonov. Essa matriz é responsável por criar pixels adjacentes ao pixel principal na hora da reconstrução, sendo que o valor desses novos pixels pode variar de acordo com o fator  $\lambda$ .  $\bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}}$  é muitas vezes a matriz identidade, ou uma variante dela.

Com isso, a equação final de Tikhonov fica:

$$\bar{x} = \bar{A}^\# \bar{b} \quad (3.10)$$

### 3.4.3 Total Variation

Regularização por *Total Variation* tem por princípio a redução de ruído. Segue a lógica de que sinais com muitos detalhes (podendo ser alguns até falsos) têm grande variação total. Isso significa que a integral do gradiente absoluto deste sinal é alta. Então esta técnica visa diminuir este valor de gradiente para que fique próximo ao da imagem ou sinal original, removendo detalhes desnecessários (RUDIN *et al.* 1992).

## 4 RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO COM TOMÓGRAFO ÓPTICO

Na primeira parte deste capítulo abordaremos os aspectos que nos levam a reconstrução da imagem, tais como o tomógrafo utilizado por Vendruscolo e como as características deste afetam a reconstrução.

Após isso será analisado as imagens que puderam ser reconstruídas, assim como os cálculos necessários para se chegar nos resultados obtidos.

### 4.1 MATRIZ DE PESOS

O primeiro de todos os passos é definir a já citada matriz de pesos  $\bar{A}$ , que depende das características inerentes do tomógrafo. Como este trabalho trata-se de se fazer o modelamento matemático da matriz de pesos com base no tomógrafo de Vendruscolo, buscou-se um estudo algébrico o mais genérico possível do tipo de tomógrafo utilizado. Isso torna esse modelamento matemático passível de ser utilizado por tomógrafos com características similares aos de Vendruscolo.

Na figura 10 pode-se notar as características de refração de um raio de luz emitido por um emissor, bem como as variáveis que influenciam o referido modelamento matemático. Para uma abordagem inicial, considerar-se-á o raio emitido como uma reta, porém o emissor utilizado por Vendruscolo emite luz em forma de leque, o que será considerado posteriormente.

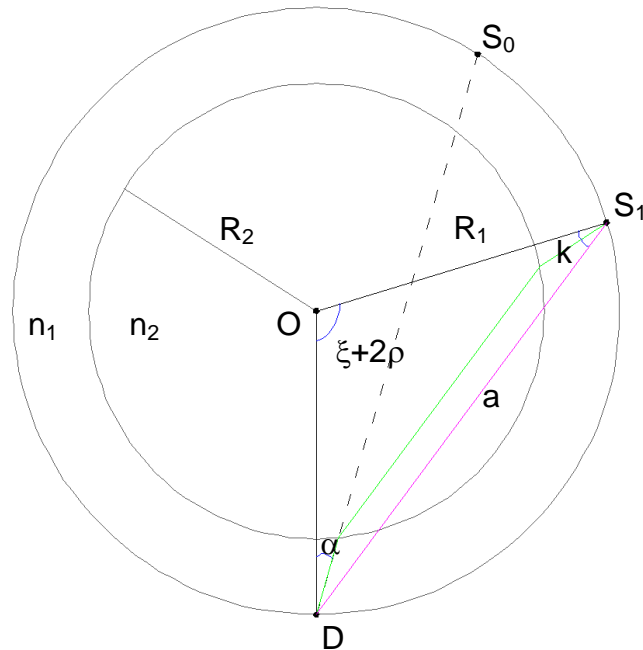


Figura 10 - Características de refração de um Tomógrafo Óptico

As variáveis da figura 10 podem ser definidas como:

- $R_1$  – Raio externo do tubo;
- $R_2$  – Raio interno do tubo;
- $a$  – distância entre  $D$  e  $S_1$ ;
- $n_1$  – Índice de refração do material do tubo;
- $n_2$  – Índice de refração do material contido no tubo;
- $D$  – Detector de luz;
- $S_1$  – Posição real do detector;
- $S_0$  – Projeção do detector caso não houvesse refração do detector;
- $\alpha$  – Ângulo entre a reta  $DO$  e  $DS_0$ ;
- $\xi+2\rho$  – Ângulo entre a reta  $DO$  e  $OS_1$ ;
- $k$  – Ângulo entre a reta  $OS_1$  e  $DS_1$ .

Para que se tenha uma matriz de pesos adequada, é necessário que haja um fator de correção para a posição retratada como  $S_0$  para que se encontre  $S_1$ . Para que isso ocorra, é essencial encontrarmos  $k$  e  $a$  em função das variáveis

conhecidas devido as características físicas do tomógrafo, as quais são:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $\alpha$ . O primeiro valor com o qual se trabalhará é  $\xi+2\rho$ . Este ângulo pode ser visualizado novamente na figura 11. Nessa figura também pode-se observar os 3 triângulos:  $ODP_1$ ,  $OS_1P_2$  e  $OP_1P_2$ . Esses triângulos serão utilizados para se determinar  $\xi$  e  $\rho$ , e conseqüentemente  $\xi+2\rho$ .

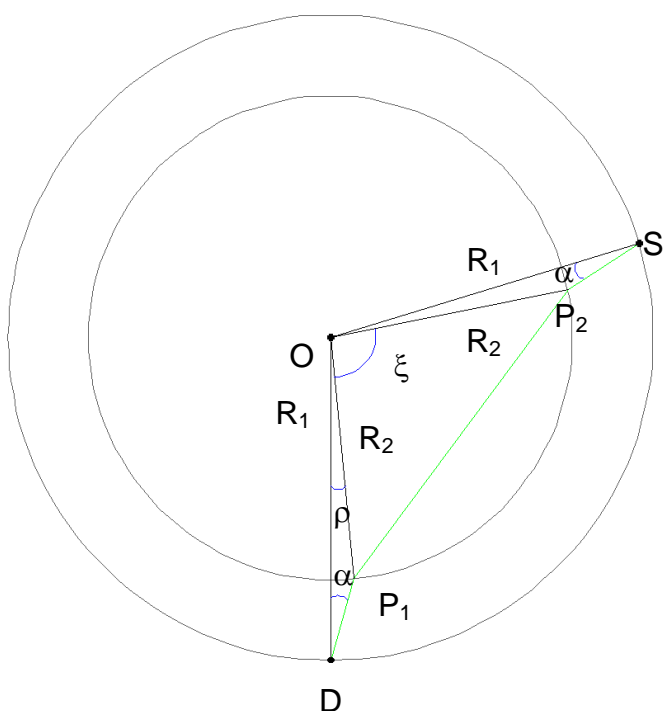


Figura 11 – Triângulos para determinação de  $\xi+2\rho$

Focando no triângulo  $OP_1P_2$ , tem-se a figura 12:

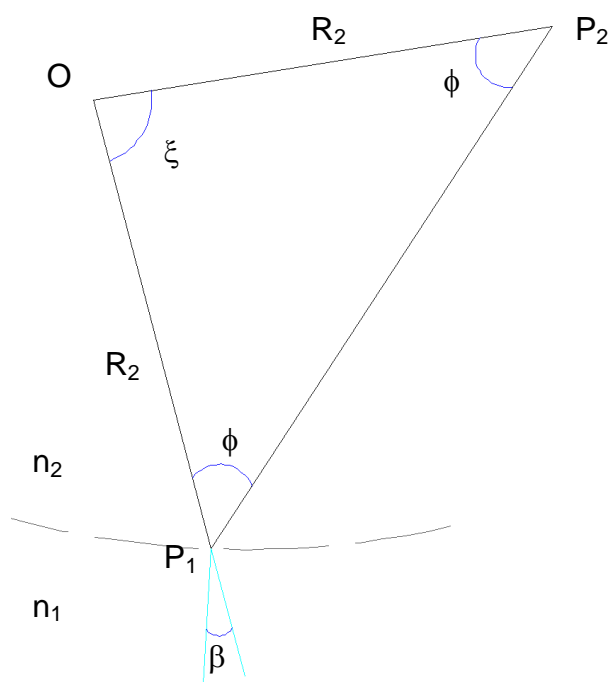


Figura 12 – Triângulo para determinação de  $\xi$

Para se definir o ângulo  $\xi$ , deve-se primeiro definir o ângulo  $\phi$ . Este, por sua vez, é extraído de  $\beta$  através da lei de Snell. A lei de Snell relaciona o ângulo  $\phi$  de um raio refratado à uma reta normal à superfície (neste caso a reta sendo o raio do círculo e a superfície sendo a própria circunferência), sendo que este raio atingiu a superfície com um ângulo  $\beta$ . Estes ângulos se distinguem porque o índice de refração dos materiais dentro e fora da circunferência  $n_1$  e  $n_2$  não são os mesmos. Sua relação é demonstrada pela fórmula clássica da Lei de Snell, expressa em 4.1.

$$n_1 \sin \beta = n_2 \sin \phi \quad (4.1)$$

O valor do ângulo  $\beta$ , contudo, ainda não é conhecido. Para tal se faz necessário explorar o triângulo  $ODP_1$  ou o  $OS_1P_2$ , ambos contendo as mesmas características, devido a relação da lei de Snell em ambos os lados. O triângulo  $ODP_1$  pode ser visualizado na figura 13.

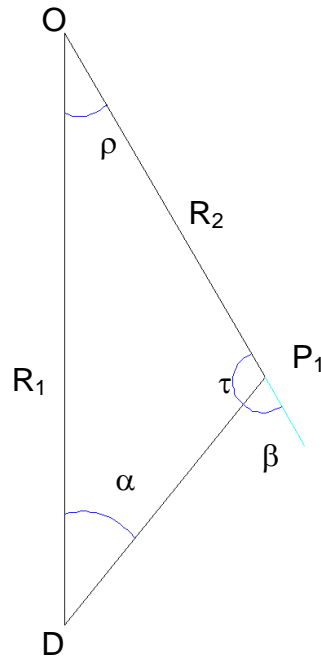


Figura 13 – Triângulo para determinação de  $\rho$

Através desse triângulo pode-se definir tanto  $\rho$  quanto  $\beta$  por meio de  $\alpha$ ,  $R_1$  e  $R_2$ . O ângulo  $\beta$  é encontrado como complemento de  $\tau$ . Por meio da lei dos senos, pode-se afirmar que:

$$\frac{\sin \alpha}{R_2} = \frac{\sin \tau}{R_1} \quad (4.2)$$

Com isso, temos que  $\tau$  é igual a:

$$\tau = \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2} \sin \alpha\right) \quad (4.3)$$

Portanto  $\beta$  pode ser definido como:

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2} \sin \alpha\right) \quad (4.4)$$



Com  $\alpha$  – que é um dado de entrada que depende do detector utilizado – e  $\tau$ ,  $\rho$  pode ser descoberto através da somatória dos ângulos de um triângulo, conforme equação 4.5.

$$\rho = \pi - \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2} \sin \alpha\right) - \alpha \quad (4.5)$$

Com  $\beta$  definido na equação 4.4, pode-se retornar à equação 4.1 e se descobrir  $\phi$ , de acordo com 4.6.

$$\phi = \arcsin\left(\frac{n_1 R_1}{n_2 R_2} \sin \alpha\right) \quad (4.6)$$

Sabendo do valor de  $\phi$ ,  $\zeta$  pode ser definido através da somatória dos ângulos de um triângulo como:

$$\zeta = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{n_1 R_1}{n_2 R_2} \sin \alpha\right) \quad (4.7)$$

Juntando-se as equações 4.5 e 4.7, tem-se as duas primeiras variáveis da figura 10 definidas, as quais são  $\xi+2\rho$  e  $k$ . Sendo  $2k$  somado  $\xi+2\rho$   $180^\circ$ . Esses ângulos podem ser definidos por:

$$\zeta + 2\rho = 3\pi - 2\left(\arcsin\left(\frac{n_1 R_1}{n_2 R_2} \sin \alpha\right) + \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2} \sin \alpha\right) + \alpha\right) \quad (4.8)$$

$$k = \arcsin\left(\frac{n_1 R_1}{n_2 R_2} \sin \alpha\right) + \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2} \sin \alpha\right) + \alpha - \pi \quad (4.9)$$

A partir da definição de  $\xi+2\rho$  podemos ver na figura 10 a relação entre as coordenadas do detector D e o Emissor  $S_1$ . Trigonometricamente sabe-se que tendo-se dois pontos e um ângulo de um triângulo, pode-se encontrar o terceiro ponto da seguinte forma:

$$e = \frac{(\pi - \zeta + 2\rho)}{2} \quad (4.10)$$

$$i = \frac{(R_1 \sin(\zeta + 2\rho))}{\sin e} \quad (4.11)$$

$$x_{S_1} = \frac{i^2}{2R_1} \quad (4.12)$$

$$y_{S_1} = \sqrt{R_1^2 - x_{S_1}^2} \quad (4.13)$$

É importante salientar que o módulo das coordenadas de  $S_1$  é determinado através do módulo dos sinais de  $S_0$ .

Baseando-se nas equações 4.12 e 4.13 podemos buscar recriar a matriz de pesos utilizando  $S_1$  ao invés de  $S_0$ . Temos uma condição, contudo, ainda não levada em consideração: o valor do ângulo  $\alpha$  pode ser no máximo  $20^\circ$  (0,349 radianos). Este limite é imposto pelas características intrínsecas do fotodiodo detector utilizado (VISHAY, 2014). Com isso, há também uma limitação para  $k$ , da seguinte maneira:

$$k \leq \arcsin\left(\frac{n_1 R_1}{n_2 R_2} 0,342\right) + \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2} 0,342\right) - 2.792 \quad (4.14)$$

Com tudo isso se acumula as variações criadas pela diferença entre a  $S_1$  e D nos sentidos de  $x$  e  $y$ , gerando a Matriz de Pesos. Para se conseguir é primeiro calculada a matriz M, que é baseada na relação da tangente de  $S_1$  e D:

$$M = \frac{(y_D - y_{S1})}{(x_D - x_{S1})} \quad (4.15)$$

Também é importante calcular-se a matriz tida como T, a qual reflete a multiplicação das coordenadas x do detector pelas y da fonte e vice-versa, a qual pode ser dada também da seguinte forma:

$$T = x_{S1} - \frac{(y_D - y_{S1})}{(x_D - x_{S1})} y_{S1} \quad (4.16)$$

Com isso, é feita a interpolação dos dados com base nas matrizes M e T para x e y. É utilizada a formula base da interpolação do Matlab, a interp1. Com ela, é possível “acumular” os em x e em y, bem como suavizar a curva para um melhor resultado da matriz de pesos. Juntando-se os acumulados em x e em y tem-se a matriz de pesos.

## 4.2 RESULTADOS

Com a matriz de pesos criada, foi possível analisar a reconstrução de alguns dados. Estes dados foram obtidos através do tomógrafo de Vendruscolo.

O tomógrafo de Vendruscolo, como já explanado aqui, é dotado de 16 sensores e 16 detectores, postos em um tubo de acrílico de diâmetro interno de 30 cm e externo de 32. 2 experimentos foram tomados como base para a aquisição dos resultados aqui apresentados, um teste com um lápis, e outro contendo dois lápis, como será melhor explicado afrente. Segue os dados que contém a posição dos sensores e emissores. Considera-se o centro do cilindro como ponto zero, conforme ponto O na figura 10.

$$S = [0 \ 6 \ 11 \ 14 \ 16 \ 14 \ 11 \ 6 \ 0 \ -6 \ -11 \ -14 \ -16 \ -14 \ -11 \ -6, \quad (4.17)$$

$$-16 \ -14 \ -11 \ -6 \ 0 \ 6 \ 11 \ 14 \ 16 \ 14 \ 11 \ 6 \ 0 \ -6 \ -11 \ -14];$$

$$D = [3 \ 8.5 \ 13 \ 15.5 \ 15.5 \ 13 \ 8.5 \ 3 \ -3 \ -8.5 \ -13 \ -15.5 \ -15.5 \ -13 \ -8.5 \ -3, \quad (4.18)$$

$$-15.5 \ -13 \ -8.5 \ -3 \ 3 \ 8.5 \ 13 \ 15.5 \ 15.5 \ 13 \ 8.5 \ 3 \ -3 \ -8.5 \ -13 \ -15.5];$$

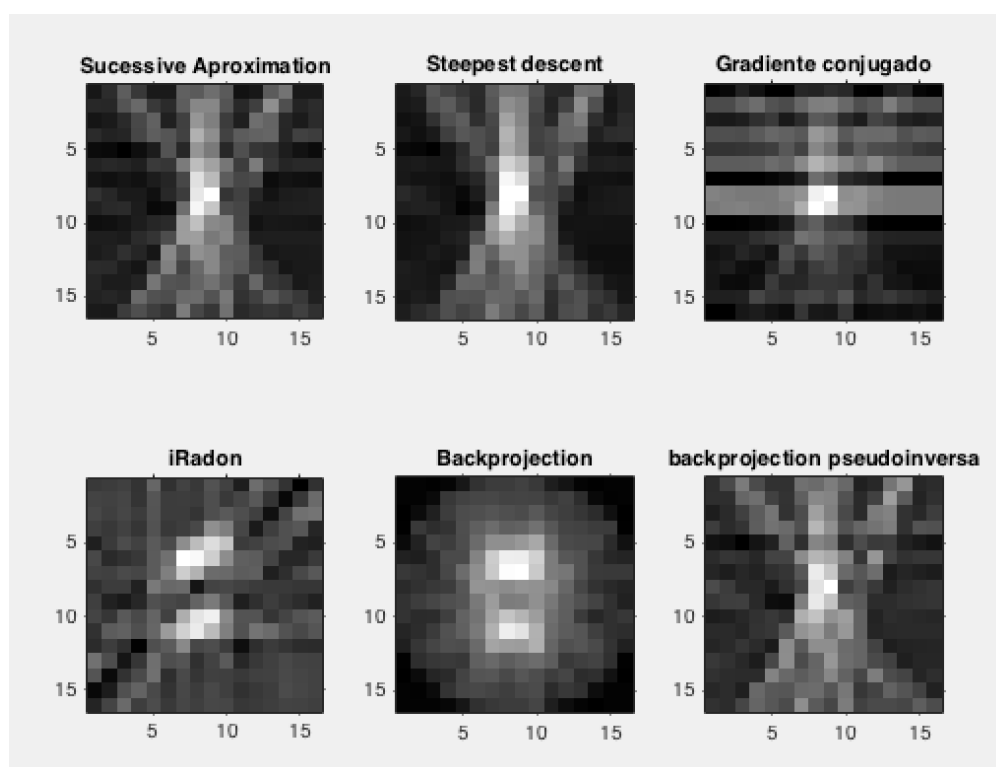
Considera-se a primeira linha de S como as coordenadas x dos foto-diodos emissores de luz, e a segunda linha como as coordenadas y dos mesmos. O mesmo princípio vale para D, que representa as coordenadas do diodo receptor em torno do cilindro de acrílico. Estas coordenadas foram fornecidas por Vendruscolo, considerando-se um cilindro de acrílico de 32 cm de diâmetro.

Foram considerados 2 testes feitos por Vendruscolo. O primeiro deles é utilizando 2 lápis envoltos no ar, o segundo é com apenas 1 lápis. O ar e o acrílico tem como coeficientes de refração 1 e 1,49 respectivamente. Com isso, foi possível gerar a figura 14. Nesta figura pode-se observar diversas técnicas de reconstrução anteriormente mencionadas. A figura 15, por outro lado, utiliza uma matriz de pesos que não leva em consideração a refração no tubo.

Das várias técnicas mostradas tanto na imagem 15 quanto na 16, apenas a iRadon e a Backprojection não dependem da matriz de pesos. Todas as outras 4 técnicas variaram com a aplicação do fator de correção relacionado à refração.

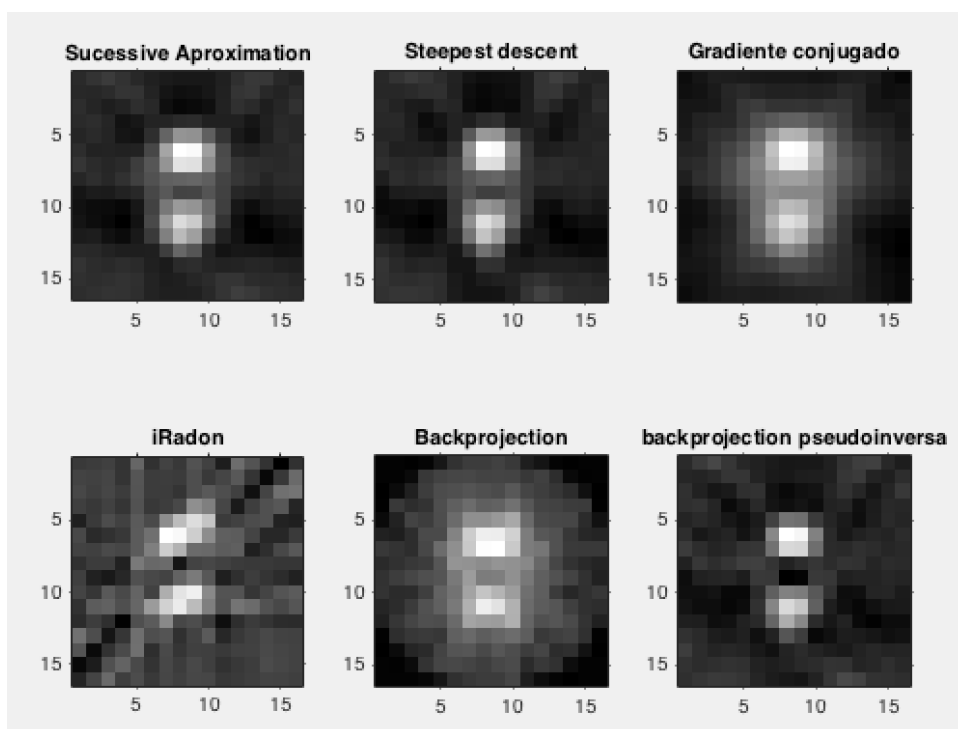
A Sucessive Aproximation, a Steepest Descent e a Backprojection Pseudoinversa na figura 14 apresentaram resultados parecidos. Estas 3 técnicas mostraram um objeto em seu centro, porém não conseguiram distinguir os dois lápis distintos. Elas também apresentaram um erro na imagem em forma de asterisco que representa partes do tubo.

A técnica do Gradiente conjugado, além de apresentar os mesmos problemas das outras 3 técnicas, também apresenta ruídos na imagem, mostrando ser, neste experimento, a pior técnica a ser escolhida.



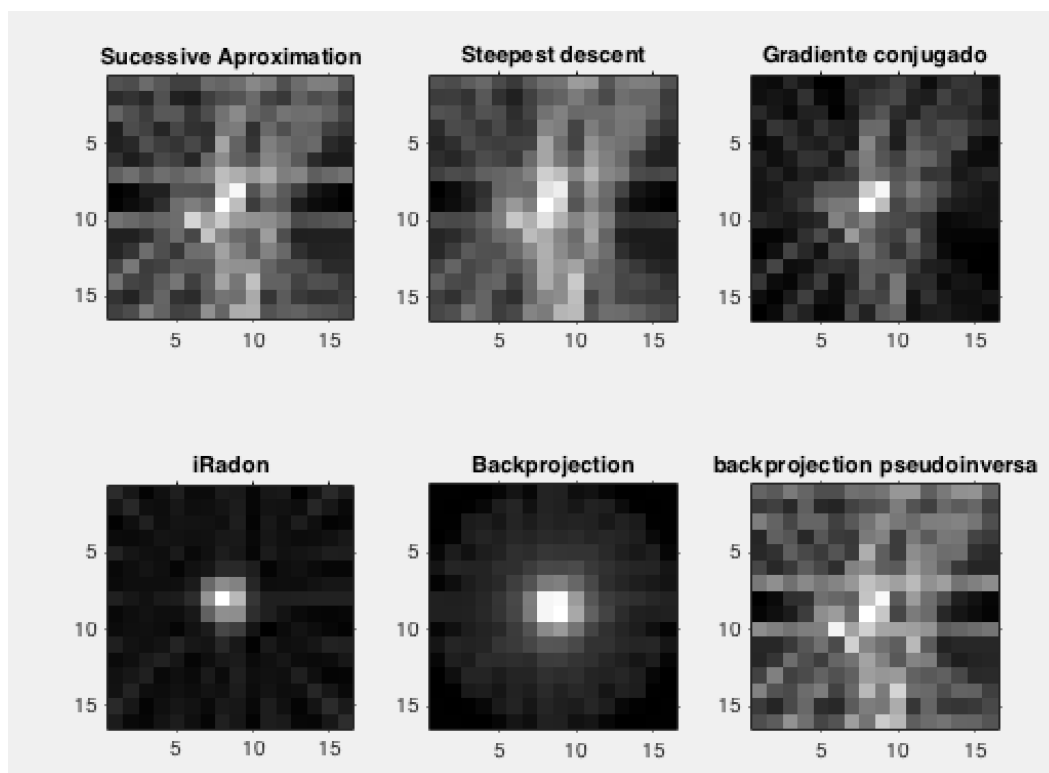
*Figura 14 - Reconstruções considerando matriz de pesos com refração*

A imagem 15 mostra as mesmas técnicas da imagem 14, porém sem a correção de refração de tubos. Pode-se notar a melhor qualidade destas imagens,



*Figura 15 - Reconstruções considerando matriz de pesos sem refração*

Na figura 16 pode-se ver a matriz de pesos que considera refração sendo utilizada para reconstrução de imagens da situação com apenas um lápis. O lápis foi posicionado no centro do tomógrafo. Os sensores e emissores encontram-se na mesma situação do teste à dois lápis.



*Figura 16 - Reconstruções considerando matriz de pesos sem refração para apenas um lápis*

Pode-se ver que nesta situação, o oposto acontece. A técnica “Gradiente Conjugado”, a qual apresentou o pior resultado com dois lápis, desta vez foi a técnica que apresentou a melhor performance das que utilizam matriz de pesos. Mais uma vez as imagens que não utilizam matriz de pesos tiveram melhor resultado.

Nota-se, com isso, que a melhor técnica não dependerá necessariamente das configurações e parâmetros do tomógrafo utilizado, mas principalmente do objeto em questão. Mesmo objetos relativamente similares podem apresentar diferenças significativas na escolha da técnica que melhor atende a situação em questão. Neste caso, a diferença entre um e dois lápis foi o suficiente para que a técnica que apresentasse um melhor resultado não fosse a mesma.





## 5 CONCLUSÕES

A tomografia computadorizada vem se mostrando ao longo do tempo uma técnica cada vez mais útil em diversas áreas do conhecimento. Aprimorá-la é algo que trará benefícios para a sociedade de forma geral.

Ao decorrer desta obra, viu-se várias técnicas utilizadas e desenvolvidas ao longo do tempo para a reconstrução de imagens, com foco nas técnicas que utilizam a matriz de pesos.

A matriz de pesos tem suma importância em diversas técnicas de reconstrução de imagens. Isso mostra que uma matriz de pesos bem adequada a situação e ao tomógrafo de onde ela vem é essencial para uma reconstrução o mais fiel possível do original.

A matriz de pesos reconstruída aqui se mostrou com certa fidelidade ao objeto original, sendo comprovado através da maioria das técnicas utilizadas neste trabalho. Contudo, a medida que a matriz foi sendo refinada para corrigir as imperfeições geradas, não foi conseguido alcançar um resultado melhor do que o original. A matriz apresentou um resultado de pior clareza se comparado com a primeira matriz de pesos utilizada (sem correção de refração).

Isso aponta que a correção da refração para a matriz de pesos, apesar de apresentar resultados que comprovam uma correção de imagens, não necessariamente seria o caminho ideal para o aprimoramento da matriz de pesos para reconstrução de imagens.

Um item que pode ter afetado e causado um resultado negativo foi as posições dadas dos sensores e detectores. Este dado foi apresentado sem a precisão adequada para a correção à matriz de pesos proposta nesta obra. Notou-se que, quando se procurou testar a posição dos sensores, eles assumem posições levemente distintas quando posicionados no dado raio. A exemplo, o primeiro endereço de detector fornecido pela equação 4.18 é:

$$D(3, -15.5) \quad (5.1)$$

Se assumirmos a coordenada  $x$  como correta, teríamos o seguinte valor para o mesmo detector D:

$$D(3, -15.71) \quad (5.2)$$

Estes valores com certo grau de imprecisão parecem não ter afetado a matriz de pesos que não considera a refração do tubo do tomógrafo de forma significativa. Contudo, esta diferença pode ser uma das causas que tenha afetado o mal desempenho das reconstruções que dependeram da matriz de pesos considerando a refração do tubo.

Devido aos resultados obtidos com a matriz de pesos com correção da refração do tubo, optou-se por não utilizar algumas das técnicas que haviam sido explanadas no início, como se havia proposto. Optou-se, portanto, haver um foco maior na matriz de pesos em ordem de se tirar bom proveito desta questão, e dos problemas inerentes a ela, otimizando-se, assim, a gestão de tempo disponível.

Levando a nova gestão de tempo e adequação em consideração, pode-se dizer que este trabalho atingiu o resultado esperado, explorando a refração e seus efeitos no cálculo da matriz de pesos, bem como os problemas inerentes a ela.

## REFERÊNCIAS

BUZUG, THORSTEN M. Computed Tomography. Leipzig, Alemanha: Springer, 2008

BYRNE, C. L. Iterative algorithms in inverse problems. Lowell, EUA. University of Massachusetts Lowell, 2006.

CAMPOS, E. F. & LOPES, R. T. Aplicações da tomografia computadorizada de raios-X na recuperação de petróleo. Rio de Janeiro, Brasil. UFRJ, 2002.

CIERNIAK R. X-Ray Computed Tomography in Biomedical Engineering. Londres, UK: Springer, 2011

DALE, S. Energy in 2014: After a calm comes the storm. London, UK: BP, 2015.

Ellinger, H.; Buchele, S. F.; Ellinger, B. Advanced analysis techniques from industrial computed tomography. Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, Santa Fe, EUA. IEEE: 1991.

FALCONE, G.; HEWITT, G.F.; ALIMONT, C. Multiphase Flow Metering: Principles and Applications. Oxford, UK: Elsevier, 2009.

FLISCH, A., et al. Industrial Computer Tomography in Reverse Engineering Applications. DGZfP-Proceedings BB 67-CD Paper 8, Computerized Tomography for Industrial Applications and Image Processing in Radiology. Berlin, Alemanha: Março de 1999.

KALENDER, W. A. Computed Tomography - Fundamentals, System Technology, Image, Quality, Applications, 2nd edition. Publicis Corporate Publishing. Erlangen, 2005.

KAK, AVINASH C.; SLANEY, MALCOLM. Principles of Computerized Tomographic Imaging. Nova York, EUA: Siam, 2001.

LITTLETON, J.T. Conventional Tomography. ARRS, [1985]. Disponível em: [http://www.arrs.org/publications/HRS/diagnosis/RCl\\_D\\_c15.pdf](http://www.arrs.org/publications/HRS/diagnosis/RCl_D_c15.pdf). Último acesso: 23/11/2015 as 16h00 horas.

RADON, Johann. On the determination of functions from their integral values along certain manifolds. Traduzido para o inglês por Parks, P. C. IEEE transactions on medical imaging, vol. mi-5, número 4, dezembro de 1986

RÖNTGEN, CW. Uber eine neue Art von Strahlen. Vorläufige Mitteilung, 1895.

RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Phisica D, 1992.

SCHLEICHER, E; SILVA, M. J. da; THIELE, S.; LI, A; WOLLRAB, E.; HAMPEL, U. Design of an optical tomograph for the investigation of single- and two-phase pipe flows. Meas. Sci. Technol., vol. 19, no. 9, p. 094006, Sep. 2008.

STEPHEN, W. Total variation regularization for linear ill-posed inverse problems: extentions and aplications. Tampa, EUA: University of Arizona State, 2008.

VENDRUSCOLO, T.; PATIK, R.; DUTRA, G.; MARTELLI, C.; MORALES, R.; SILVA, M. Mid-infrared optical tomography for imaging through petroleum: a feasibility study. Curitiba, Brasil: UTFPR, 2015.

VENDRUSCOLO, T.; ZIBETTI, M.; PATIK, R.; DUTRA, G.; MORALES, R.; SILVA, M. Development of NIR optical tomography system for the investigation of two-phase flows: UTFPR, 2014.

VILLELA, M. Análise do Comportamento da Temperatura em Sistemas de Produção de Petróleo: Comparação entre Completação Seca e Molhada. Rio de Janeiro, Brasil: PUC-RIO 2004.

VISHAY SEMICONDUCTORS. TEFD4300F Datasheet. Document number: 83472. Malvern, Estados Unidos: VISHAY, 2014.

WOOD, M. Temperature Mapping in Industrial Combustion Environments. Manchester, Reino Unido: University of Manchester, 2013.

WRIGHT, P.; TERZIJA, N.; DAVIDSON, J.; GARCIA-CASTILLO, S.; GARCIA-STEWART, C.; CROSSLEY, S. D.; LITT, T.; MURRAY, S.; OZANYAN, K. B.; MCCANN, H. High-speed chemical species tomography in a multi-cylinder automotive engine. Manchester, Reino Unido. Chemical Engineering Journal, 2010.

## APÊNDICE A – CÓDIGO PARA FUNÇÃO GENÉRICA DA MATRIZ DE PESOS

```

function [H] = matrixofweights06122016(M,S,D,n1,n2,R1,R2,alpha,beta)
%Creates a matrix of weights to be used in image reconstruction
%It refers specifically to reconstruction inside cylindrical tubes
%utilizing a fan-beam source
%M is the resolution
%S is the source matrix. The 1st column of S contains the coordinates in X,
%and the 2nd contains in Y
%D is the detector matrix. The 1st column of D contains the coordinates in
X,
%and the 2nd contains in Y
% The lines of both D and S should be compatible with the resolution
% desired
%n1 is the refractive index of the tube material
%n2 is the refractive index of the substance inside the tube
%R1 is the outer radius of the tube
%R2 is the inner radius of the tube
%alpha is the angle of the source's fan-beam from the centre of the source
%given in degrees
%beta is the angle of the detectors's fan-beam from the centre of the
%detector, given in degrees

PI = 3.1415;
alphamax = alpha*PI/180; %transforming alpha from degrees to radius

N = M+M;
Xf=linspace(-N,N,M);
Yf=Xf;
dy=2*(2*M/(M-1));
dx=dy;
H=[];

aux1 = size(S);
S1 = zeros(aux1);
m = zeros(aux1(2));
n = zeros(aux1(2));
t = zeros(aux1(2));

for i=1:aux1(2);

    for j=1:aux1(2);
        alpha1 = acos(sqrt((S(1,i)-D(1,j)).^2 + (S(2,i)-
D(2,j)).^2)/(2*R1));
        if (alpha1>alphamax)
            m(i,j) = 0;
            n(i,j) = 0;
        else
            xiplusro = PI - 2*(asin((n1*R1)/(n2*R2)*sin(alpha1)) +
asin(R1/R2*sin(alpha1)) +alpha1);
            if (xiplusro < 0)
                xiplusro = xiplusro +2*PI;
            if (xiplusro < 0)
                xiplusro = xiplusro +2*PI;
        end
    end
end

```

```

                                end
                                end
e = (PI - xiplusro)/2;
a = (R1 * sin(xiplusro))/sin(e);
S1(1,j) = (a.^2)/(2*R1);
if (S(1,j)<0)
    S1(1,j) = -S1(1,j);
end
S1(2,j) = sqrt(R1.^2 - (-S1(1,j)).^2);
if (S(2,j)<0)
    S1(2,j) = -S1(1,j);
end
m(i,j)=(D(1,j)-S1(1,i))/(D(2,j)-S1(2,i));
n(i,j)=(D(2,j)-S1(2,i))/(D(1,j)-S1(1,i));
end

t(i,j)=S1(1,i)-m(i,j)*S1(2,i);
if(abs(m(i,j))<1)
    Yfc=m(i,j)*Xf+t(i,j);
    Yfc = real(Yfc);
    h=zeros(M,M);

    for p=1:M
        if (Yfc(p) == 16)
            Yfc(p) = 15.9999;
        end
        if (Yfc(p) == -16)
            Yfc(p) = -15.9999;
        end
        h(:,p)=interp1([-N-dy Yfc(p)-dy Yfc(p) Yfc(p)+dy N+dy],[0 0 1
0 0],Yf);
    end
else
    Xfc=(Yf-t(i,j))/m(i,j);
    Xfc = real(Xfc);

    h=zeros(M,M);
    for p=1:M
        if (Xfc(p) == 16)
            Xfc(p) = 15.9999;
        end
        if (Xfc(p) == -16)
            Xfc(p) = -15.9999;
        end
        h(p,:)=interp1([-N-dx Xfc(p)-dx Xfc(p) Xfc(p)+dx N+dx],[0 0 1
0 0],Xf);
    end
end
H=[H;h(:)']; %Matriz de Pesos H
end
end

```

## APÊNDICE B – CÓDIGO PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGEM EM MATLAB DE 2 CORPOS SÓLIDOS

```

clear all
close all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% UTILIZA MATRIZ DE PESOS
%%%%%%%%%% RECONSTRUÇÃO LÁPIS COM DIVERSAS TÉCNICAS
%%%%%%%%%% MARIO FREITAS JUNIOR
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
% Calibração baixa
A='desligado.dat';
fp = fopen (A, 'rb', 'l');
[D,c] = fread (fp, [16,inf], 'int16');
c=floor(c/16/16);
D=D(:,1:c*16);
D=reshape(D,16,16,c);
fclose(fp);
L=mean(D(:,:,1:2),3);

% Calibração alta
A='ligado.dat';
fp = fopen (A, 'rb', 'l');
[D,c] = fread (fp, [16,inf], 'int16');
c=floor(c/16/16);
D=D(:,1:c*16);
D=reshape(D,16,16,c);
fclose(fp);
h=mean(D(:,:,1:2),3);

% Arquivo medido
% Lapis_centro = um lapis localizado no centro do tomógrafo
% 2lapis = dois lapis afastados um do outro

% Nessa parte é feita a leitura e organização dos arquivos binários
gravados no LabVIEW
A='lapis_centro.dat';
fp = fopen (A, 'rb', 'l');
[D,c] = fread (fp, [16,inf], 'int16');
fclose(fp);
c=floor(c/16/16);
D=D(:,1:c*16);
D=reshape(D,16,16,c);

% Calibração
M1=mean(D(:,:,1:2),3);
D=-log((M1-L)/(1.001*(h-L)));

% Limiaries da normalização
% Garante que os dados variem entre 0 e 1.
D(D>=1)=1;

```



```

D(D<0)=0;

Ds=D;

G=[];
Ds=circshift(D,[12 3]);

for i=1:16
    Dr(i,:)=circshift(D(i,:),[0 8-i]);
    G=[G;Ds(i,:).'];
end

% Transformada inversa de Radon
im=iradon(Dr',0:360/16:360-360/16,'linear','Shepp-Logan',1,16);

im_r=zeros(16,16);

% Algoritmo de BackProjection
for i=1:16
    im_r=im_r+imrotate(repmat(Dr(i,:),16,1),(i-1)*360/16,'bicubic','crop');
end

% Interpolação
im_r1=interp2(im_r,2);

HH = matrixofweights08022017(M,S,D,1,1.43,16,15,20,20);
%HH = H;
lambda=logspace(-3,1,5);
lambda=30;

%%%%%Filtered backprojection pela pseudoinversa
im_p=zeros(M,M);
im_p(:)=pinv(HH'* HH +lambda*eye(M^2,M^2))*HH'*G;

m=[1 -3];
n=256
L = convmtx(m,n);
L = L(1:n,1:n);
L(n,:) = circshift(L(n-1,:),'1');

lambda = 10;
f1_rls=inv(HH'*HH+lambda*L'*L)*HH'*G;
p=zeros(16,16);
p(:)=f1_rls;
% figure
% imshow(p,[],'InitialMagnification','fit');title('RLQ10')

app = zeros(256,1);
alfa = 1/norm(HH'*HH);

for i=1:10
    app = app + alfa*(HH'*G-HH'*HH*app);
end

```

```

        hold on;

end
im_as= zeros(16,16);
im_as(:)=app;

%%%Algoritmo stepeest descent%%%%%%%%%%%%%%
app2 = zeros(256,1);
dk = HH'*G;
A = HH'*HH;
k = 0;

while(k<=10)
    alfak = (dk'*dk)/(dk'*A*dk);
    c=app2;
    app2 = app2 + alfak*dk;
    dk = dk - alfak*A*dk;
    k = k+1;

end
im_sd=zeros(16,16);
im_sd(:)=app2;

e= im_as-im_sd;

%%%%%%%% GRadiente conjugado linear%%%%%%%%
app3=zeros(256,1);
pk=HH'*G;
dk=pk;
epsilon= norm(pk);
A= HH'*HH;
n=5;
for i=1:n;
    alpha1= epsilon/(dk'*A*dk);
    b=app3;
    app3 = app3 + alpha1*dk;
    pk=pk-alpha1*A*dk;
    a= norm(pk); %%%epsilon+1
    beta=a/epsilon;
    epsilon=a ; %actualiza epsilon+1
    dk=pk+beta*dk;

end
im_gc=zeros(16,16);
im_gc(:)=app3;

figure
subplot(234)
imshow(im, [], 'InitialMagnification','fit');title('iRadon') %NAO tem matriz
inversa
subplot(235)

```

```
imshow(im_r, [], 'InitialMagnification', 'fit');title('Backprojection') %NAO
tem matriz inversa
subplot(236)
imshow(im_p, [], 'InitialMagnification', 'fit');title('backprojection
pseudoinversa') %tem matriz inversa
subplot(231)
imshow(im_as, [], 'InitialMagnification', 'fit');title('Sucessive
Aproximation') %tem matriz inversa
subplot(232)
imshow(p, [], 'InitialMagnification', 'fit');title('Steepest descent') %tem
matriz inversa
subplot(233)
imshow(im_gc, [], 'InitialMagnification', 'fit');title('Gradiente conjugado')
%tem matriz inversa
```