

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CURITIBA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

DANILO YUDI MORIMOTO
LUCAS BATISTA AMARAL
NAUÊ RAYNAN DE OLIVEIRA MAGALHÃES

**RASTREAMENTO DE ATLETAS EM PARTIDAS DE FUTEBOL
UTILIZANDO FILTRAGEM ESTOCÁSTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2018

DANILO YUDI MORIMOTO
LUCAS BATISTA AMARAL
NAUÊ RAYNAN DE OLIVEIRA MAGALHÃES

**RASTREAMENTO DE ATLETAS EM PARTIDAS DE FUTEBOL
UTILIZANDO FILTRAGEM ESTOCÁSTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia de Controle e Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) como requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Victor Baptista Frencl

CURITIBA
2018

Danilo Yudi Morimoto
Lucas Batista Amaral
Nauê Raynan de Oliveira Magalhães

Rastreamento de atletas em partidas de futebol utilizando filtragem estocástica

Este Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação foi julgado e aprovado como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro de Controle e Automação, do curso de Engenharia de Controle e Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Curitiba, 23 de novembro de 2018.

Prof. Paulo Sérgio Walenia, Eng.
Coordenador de Curso
Engenharia de Controle e Automação

Prof. Marcelo de Oliveira Rosa, Dr.
Responsável pelos Trabalhos de Conclusão de Curso
de Engenharia de Controle e Automação do DAELT

ORIENTAÇÃO

Victor Baptista Frencl, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

BANCA EXAMINADORA

Victor Baptista Frencl, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Elder Oroski, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Luiz Ledo Mota Melo Junior, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

A folha de aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso de Engenharia de Controle e Automação

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao nosso orientador, Professor Victor Baptista Frencl, por seus ensinamentos, disposição e motivação, que foram de essencial importância no desenvolvimento deste trabalho.

Gostaríamos de agradecer às nossas famílias, amigos, namoradas e a todos que nos acompanharam nessa difícil jornada.

Agradecemos também ao café, que foi essencial para o término desse trabalho. Obrigado por existir e nos amparar ao longo das noites frias de Curitiba, nos estimulando a persistir arduamente nessa caminhada.

RESUMO

MORIMOTO, Danilo Yudi. AMARAL, Lucas Batista. MAGALHÃES, Nauê Raynan de Oliveira. Rastreamento de atletas em partidas de futebol utilizando filtragem estocástica. 105 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

O Brasil é considerado por muitos como o país do futebol, devido a paixão dos brasileiros pelo esporte e pela produção de jogadores reconhecidos mundialmente. O esporte, entretanto, está em constante evolução, e, com isso, o uso da tecnologia torna-se cada vez mais comum. Dois fatores podem estar relacionados a essa implementação da tecnologia: erros humanos durante as partidas de futebol, e a necessidade de evolução tática dos clubes. Pensando nisso, o interesse em unir o esporte e a tecnologia aumentou gradativamente no âmbito esportivo. Este trabalho tem o intuito de promover a integração da engenharia, principalmente a parte de controle, com o esporte. Utilizando o *software* MATLAB, uma das propostas foi implementar um gerador de trajetórias de jogadores em partidas de futebol. O programa simula possíveis casos de jogo, em que o atleta percorre um certo caminho, desviando de adversários em diferentes formações. A partir disso, existe a possibilidade de definir treinamentos táticos, demonstrando para os atletas possíveis jogadas que podem ocorrer durante a partida, e, possibilitando verificar o gasto energético de cada atleta, o quanto este percorre durante o jogo e sua velocidade média. Outra proposta foi gerar medidas ruidosas para serem utilizadas em filtros estocásticos. Tais filtros têm a função de reduzir ou eliminar ruídos aleatórios e outras incerteza de medições de grandezas realizadas ao longo do tempo. Com o simulador de trajetórias e os filtros implementados computacionalmente, foram feitos testes de desempenho em relação às estimativas obtidas pelos filtros.

Palavras-chave: Futebol. Simulador. Filtro Estocástico. Trajetória.

ABSTRACT

MORIMOTO, Danilo Yudi. AMARAL, Lucas Batista. MAGALHÃES, Nauê Raynan de Oliveira. Athletes tracking applied to soccer matches using stochastic filtering. 105 f. – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Brazil is considered by many the country of football, due to the passion of the Brazilians for the sport and the production of players recognized worldwide. Sport, however, is constantly evolving, and thereat, the use of technology becomes much more common. Two factors may be related to this implementation of the technology: human errors during soccer matches, and the need for tactical evolution of the clubs. Thinking about this, the interest in joining sport and technology has gradually increased in the sports field. This work aims to promote the integration of engineering, mainly the control theory, with sport. Using MATLAB *tsoftware*, one of the proposals was to implement a player trajectory generator applied to soccer matches. The program simulates possible cases of play, which the athlete goes through a certain path, diverting from opponents in different formations. Therefore, it is possible to define tactical trainings, demonstrating to the athletes possible plays that can occur during the match, and, allowing to verify the energetic expenditure of each athlete, how much it goes during the game and its average speed. Another proposal was to generate noisy measures to be used in stochastic filters. Such filters have the function of reducing or eliminating random noise and other uncertainty of measurements of magnitudes carried out over time. With the simulator of trajectories and the filters implemented computationally, performance tests were made in relation to the estimates obtained by the filters.

Keywords: Soccer. Simulator. Stochastic Filter. Trajectory.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Sinal com diferentes níveis de ruído.	12
FIGURA 2	– Estimação pelo método dos mínimos quadrados recursivos.	15
FIGURA 3	– Gaussianas com diferentes parâmetros.	25
FIGURA 4	– Gaussianas com diferentes variâncias.	25
FIGURA 5	– Processo Estocástico.	28
FIGURA 6	– Estimação de Estados.	31
FIGURA 7	– Sequência de operações do Filtro de Kalman.	34
FIGURA 8	– Sistema dinâmico não linear.	39
FIGURA 9	– Fluxograma do EKF para um ciclo	42
FIGURA 10	– Transformada <i>unscented</i> para propagação de média e covariância	46
FIGURA 11	– Estrutura em blocos do algoritmo IMM para N filtros.	49
FIGURA 12	– Sistema de Rastreamento de Objeto.	55
FIGURA 13	– Direção do vetor velocidade do jogador localizado no plano cartesiano xy	56
FIGURA 14	– Símbolos de partida, chegada e ponto intermediário.	58
FIGURA 15	– Dimensões oficiais do campo de futebol.	59
FIGURA 16	– Histograma – Função densidade de probabilidade.	60
FIGURA 17	– Exemplo de trajetória linear.	61
FIGURA 18	– Trajetória linear sem ruído.	61
FIGURA 19	– Trajetória linear com ruído.	61
FIGURA 20	– Trajetória com variação angular em relação ao eixo x	62
FIGURA 21	– Destino do indivíduo localizado no quarto quadrante (entre 270° e 360°).	63
FIGURA 22	– Trajetória com variação angular sem ruído.	63
FIGURA 23	– Trajetória com variação angular com ruído.	63
FIGURA 24	– Desvio de obstáculo durante a trajetória retilínea.	64
FIGURA 25	– Desvio de obstáculo durante trajetória com variação angular.	65
FIGURA 26	– Desvio de obstáculo durante trajetória linear.	65
FIGURA 27	– Desvio de obstáculo durante trajetória com variação angular.	66
FIGURA 28	– Infiltração realizada a partir do meio de campo.	67
FIGURA 29	– Trajetória realizada com uma formação defensiva do tipo “3-4-3”.	68
FIGURA 30	– Trajetória multi-caminho realizada pelo campo inteiro.	69
FIGURA 31	– Trajetória 1.	70
FIGURA 32	– Trajetória 2.	71
FIGURA 33	– Trajetória 3.	71
FIGURA 34	– KF – Trajetória 1.	75
FIGURA 35	– Erro RMS para o KF – Trajetória 1.	76
FIGURA 36	– KF – Trajetória 2.	77
FIGURA 37	– Erro RMS para o KF – Trajetória 2.	78
FIGURA 38	– KF – Trajetória 3.	79
FIGURA 39	– Erro RMS para o KF – Trajetória 3.	80
FIGURA 40	– EKF – Trajetória 1.	83
FIGURA 41	– Erro RMS para o EKF – Trajetória 1.	84

FIGURA 42	– EKF – Trajetória 2.	85
FIGURA 43	– Erro RMS para o EKF – Trajetória 2.	86
FIGURA 44	– EKF – Trajetória 3.	87
FIGURA 45	– Erro RMS para o EKF – Trajetória 3.	87
FIGURA 46	– UKF – Trajetória 1.	89
FIGURA 47	– Erro RMS para o UKF Trajetória 1.	90
FIGURA 48	– IMM – Primeira combinação.	93
FIGURA 49	– Probabilidade dos modelos para primeira combinação do filtro IMM.	93
FIGURA 50	– Erro RMS – IMM – Primeira combinação	94
FIGURA 51	– IMM – Segunda combinação.	95
FIGURA 52	– Probabilidade dos modelos para a segunda combinação do filtro IMM.	96
FIGURA 53	– Erro RMS – IMM – Segunda combinação	97
FIGURA 54	– IMM – Terceira combinação	98
FIGURA 55	– Erro RMS – IMM – Terceira combinação	99
FIGURA 56	– Probabilidade dos modelos para a terceira combinação do filtro IMM	100

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Exemplos de Sistemas Dinâmicos e seus Sensores.	33
TABELA 2	– Relação de Símbolos.	35
TABELA 3	– Equações de Previsão do Filtro de Kalman Discreto.	37
TABELA 4	– Equações de Atualização do Filtro de Kalman Discreto	38
TABELA 5	– Equações do filtro IMM	52
TABELA 6	– MSE referente à aplicação do KF na Trajetória 1.	76
TABELA 7	– MSE referente à aplicação do KF na Trajetória 2.	78
TABELA 8	– MSE referente à aplicação do KF na Trajetória 3.	80
TABELA 9	– MSE referente à aplicação do EKF na Trajetória 1.	84
TABELA 10	– MSE referente à aplicação do EKF na Trajetória 2.	86
TABELA 11	– MSE referente à aplicação do EKF na Trajetória 3.	88
TABELA 12	– MSE referente à aplicação do UKF na Trajetória 1.	90
TABELA 13	– MSE referente à primeira combinação do IMM.	94
TABELA 14	– MSE referente à segunda combinação do IMM.	97
TABELA 15	– MSE referente à terceira combinação do IMM.	100
TABELA 16	– Comparação dos valores de MSE para todos os filtros.	100

LISTA DE SIGLAS

KF	<i>Kalman Filter</i>
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
NASCAR	<i>National Association for Stock Car Auto Racing</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>
EQM	Erro Quadrático Médio
FDA	Função de Distribuição Acumulada
FDP	Função de Densidade de Probabilidade
UT	<i>Unscented Transform</i>
IMM	<i>Interacting Multiple Models</i>
CV	<i>Constant Velocity</i>
CT	<i>Constant Turn</i>
CBF	Confederação Brasileira de Futebol
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

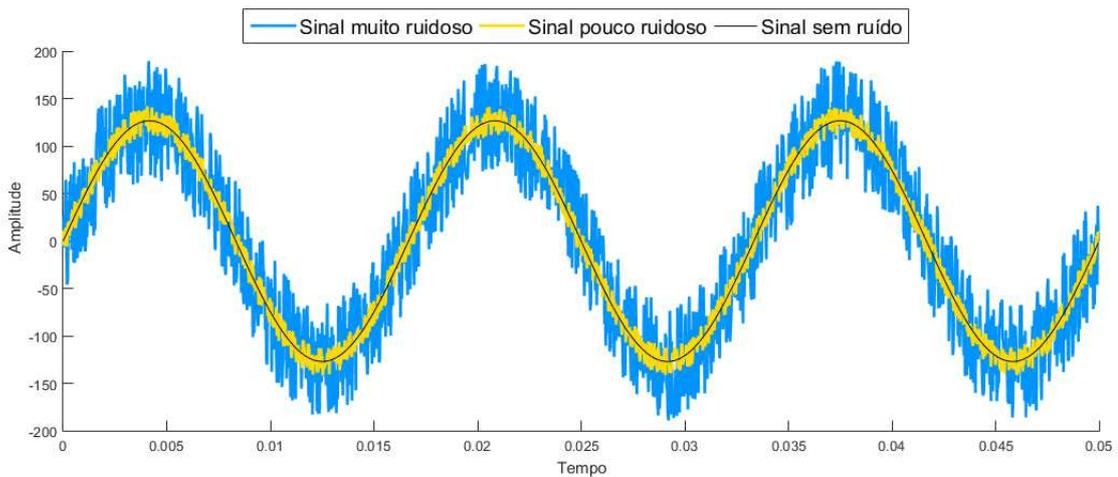
1 INTRODUÇÃO	12
1.1 TEMA	16
1.1.1 Delimitação do Tema	16
1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS	17
1.3 OBJETIVOS	18
1.3.1 Objetivo Geral	18
1.3.2 Objetivos Específicos	18
1.4 JUSTIFICATIVA	19
1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	19
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	20
2 FUNDAMENTOS DE FILTRAGEM ESTOCÁSTICA	21
2.1 FUNDAMENTOS DE PROBABILIDADE	21
2.1.1 Variável Aleatória	21
2.1.2 Valor Esperado, Variância e Covariância	22
2.1.3 Variável Aleatória Gaussiana	24
2.2 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	27
2.2.1 Processo de Markov	28
2.3 INTRODUÇÃO À FILTRAGEM ESTOCÁSTICA	29
3 FILTROS ESTOCÁSTICOS	30
3.1 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS DE UM SISTEMA DINÂMICO LINEAR	30
3.2 FILTRO DE KALMAN	32
3.2.1 Introdução	32
3.2.2 Estrutura do Filtro de Kalman	33
3.3 FILTRAGEM DE SISTEMAS NÃO LINEARES	38
3.3.1 Filtro de Kalman Estendido	39
3.3.2 Filtro de Kalman <i>unscented</i>	43
3.3.2.1 Introdução	43
3.3.2.2 Transformada <i>unscented</i>	44
3.3.2.3 Pontos Sigma	45
3.3.2.4 Recursão do UKF	46
3.4 FILTRO IMM	48
3.4.1 Introdução	48
3.4.2 Estrutura do Filtro IMM	50
4 SIMULADOR DE TRAJETÓRIAS	53
4.1 RASTREAMENTO	54
4.2 MODELOS MATEMÁTICOS	55
4.2.1 Modelo Dinâmico baseado na Movimentação de Pessoas	56
4.2.2 Modelo Estocástico baseado na Movimentação de Pessoas	57
4.3 SIMULADOR DE TRAJETÓRIAS DE JOGADORES	58
4.3.1 Pontos de Referência	58
4.3.2 Dimensões do Campo de Futebol	58

4.3.3	Distúrbios nas Medidas das Trajetórias	59
4.3.4	Trajetória Retilínea	60
4.3.5	Trajetória com Variação Angular	62
4.3.6	Desvio de Obstáculos	64
4.3.7	Resultados de Simulação	66
5	SIMULAÇÕES E ANÁLISE DE RESULTADOS	73
5.1	FILTRO DE KALMAN LINEAR	73
5.1.1	Trajetória 1	75
5.1.2	Trajetória 2 – Ponto Intermediário	77
5.1.3	Trajetória 3	79
5.2	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO	81
5.2.1	Trajetória 1	83
5.2.2	Trajetória 2 – Ponto Intermediário.	85
5.2.3	Trajetória 3	87
5.3	FILTRO DE KALMAN <i>UNSCENTED</i>	88
5.4	FILTRO IMM	91
5.4.1	Filtro de Kalman CV – Filtro de Kalman estendido CT	91
5.4.2	Filtro de Kalman CV – Filtro de Kalman <i>unscented</i> CT	95
5.4.3	Filtro de Kalman estendido CT – Filtro de Kalman <i>unscented</i> CT	98
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
	REFERÊNCIAS	103

1 INTRODUÇÃO

Em diversas áreas de conhecimento como economia, medicina e engenharia, encontram-se problemas em que existe a necessidade de se realizar estimativas de parâmetros com base em medições ruidosas. Ao medir-se uma grandeza física para posteriormente realizar estimativas de dinâmicas que dependem destes parâmetros, ruídos de diversas naturezas podem ser encontrados, tanto nos sensores, quanto na transmissão de um sinal. A Figura 1 apresenta a simulação de um sinal de uma tensão elétrica com diferentes intensidades de ruído.

Figura 1: Sinal com diferentes níveis de ruído.



Fonte: Desenvolvido pelos autores em MATLAB.

Define-se ruído como uma variação indesejada vinculada ao sinal original (ETTEN, 2005). Para realizar a análise dos dados obtidos imersos em ruído, esse ruído deve ser removido ou, ao menos, reduzido, dependendo do problema, a um nível aceitável para se processar o sinal. No contexto de processamento de sinais, a diminuição de ruído para análise de dados é chamada filtragem. A realização da estimativa de parâmetros, com base em uma dinâmica que descreve a evolução destes parâmetros e que cujas medidas encontram-se imersas em ruídos de natureza aleatória, é denominado filtragem estocástica.

O ruído branco é um sinal que apresenta suas amostras como uma sequência de

variáveis aleatórias, não autocorrelacionadas, com média zero e variância finita (MAYBECK, 1979). Em particular, se cada amostra apresenta uma distribuição normal com média zero, o sinal pode ser classificado como ruído branco gaussiano (ANDERSEN *et al.*, 2007). Os ruídos em questão são modelados de forma estocástica e seguem a distribuição normal de sua função de densidade de probabilidade, ou seja, são classificados como ruídos brancos gaussianos.

Em 1960, Rudolf E. Kalman desenvolveu um método que foi uma das maiores descobertas na história da estimação estatística, que foi o filtro de Kalman (KF, *Kalman Filter*) (KALMAN *et al.*, 1960). O filtro de Kalman permitiu que a humanidade alcançasse melhorias em sistemas complexos e tornou-se importante na fabricação de diversos sistemas, como os sistemas eletrônicos. Suas maiores aplicações são em controle de sistemas dinâmicos de grande complexidade, como processos contínuos de produção (ZHANG; LIU, 2009), aviação (KOBAYASHI; SIMON, 2003), navegação naval (FOSSEN; PEREZ, 2009) e veículos espaciais (LEFFERTS *et al.*, 1982). Basicamente, o método elaborado por Kalman é efetivo quando há necessidade de se analisar um sistema físico com medições ruidosas em função do tempo.

O filtro de Kalman estima as grandezas físicas de uma certa dinâmica previamente definida utilizando um formato de estimador recursivo, ou seja, o filtro primeiro realiza a previsão no passo k e, no passo $k + 1$, quando a medida é capturada/realizada, a previsão é corrigida com esta medida, obtendo, assim, a estimação. O filtro de Kalman é estruturado em dois conjuntos de equações: as equações de previsão, (1) e (2), utilizado como o estado inicial para estimar as covariâncias de erro–relação da variação do erro entre as variáveis– para melhorias na etapa seguinte e as equações de atualização (3)–(5) nas quais a variável estimada é aprimorada com base na medição (BISHOP; WELCH, 2001, p.4).

As equações de previsão são dadas pelas seguintes relações:

Previsão do estado:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = F(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) + G(k)\mathbf{u}(k). \quad (1)$$

Previsão da matriz de covariância do estado:

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F(k)^\top + Q(k), \quad (2)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ é a estimativa *a priori* do estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ no passo $k+1$, a partir de informações do passo k , $F(k)$ é a matriz $n \times m$ que relaciona o estado \mathbf{x} no passo k com o estado \mathbf{x} no passo $k+1$, $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ é a estimativa *a posteriori* do estado no passo k , $G(k)$ é a matriz $n \times l$ que relaciona a entrada do controle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ ao estado \mathbf{x} , $P(k+1|k)$ é a matriz *a priori* de covariância do erro de estimativa no passo $k+1$ e $P(k|k)$ a matriz *a posteriori* de covariância do erro de estimativa

no passo k e $Q(k)$ é a matriz de covariância de ruído do processo no passo k .

As equações de atualização relacionadas ao estado, basicamente utilizam da medida anterior e realizam um novo cálculo, obtendo assim o ganho do filtro $K(k)$, a atualização do estado e a atualização da matriz de covariância do estado.

As equações de atualização são dadas pelas seguintes relações:

Ganho do filtro:

$$K(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)^T S(k+1)^{-1}. \quad (3)$$

Atualização do estado:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K(k+1)\tilde{\mathbf{z}}(k+1). \quad (4)$$

Atualização da matriz de covariância do estado

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - K(k+1)S(k+1)K(k+1)^T, \quad (5)$$

sendo $K(k+1)$ a matriz $n \times m$ de ganho que minimiza a covariância do erro *a posteriori*, $P(k+1|k)$ a matriz *a priori* de covariância do erro no passo k , $H(k+1)$ a matriz $m \times n$ que relaciona o estado \mathbf{x} à medida \mathbf{z} no passo k e $S(k+1)$ a matriz de covariância da inovação $\tilde{\mathbf{z}}(k+1)$, que é o erro da medida prevista com relação à medida real. Esses conceitos serão apresentados com maior profundidade no Capítulo 3.

O método desenvolvido por Kalman baseia-se no conceito de minimizar o erro quadrático de uma grandeza física através de um estimador. A relação dos dados obtidos é realizada a partir de um conjunto de matrizes, sendo cada uma associada a um termo. O procedimento utilizado para descobrir o estimador é demonstrado inicialmente na equação (6), em que Y é o vetor cujo valor será estimado, ϕ representa a matriz das variáveis de regressão e a matriz de coeficientes desconhecidos é denominada por θ .

$$Y = \phi\theta. \quad (6)$$

A determinação dos termos de θ surge a partir da relação a seguir:

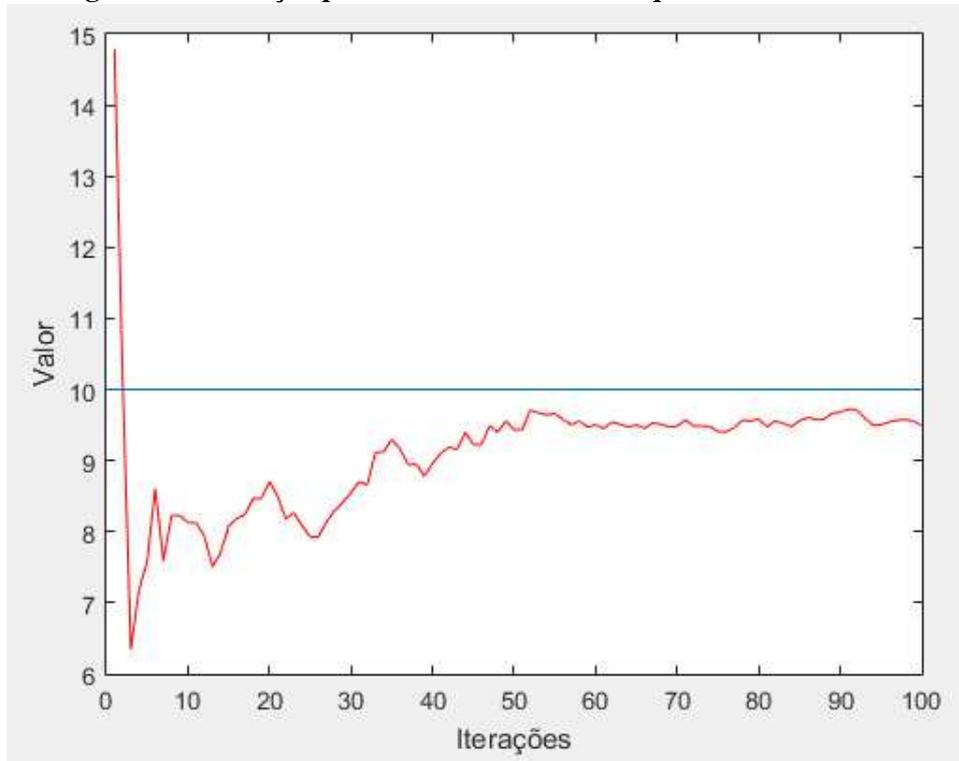
$$\theta = \phi^{-1}Y, \quad (7)$$

em que ϕ é uma matriz não-quadrada, não sendo possível invertê-la. Nesse caso, é possível encontrar a solução via MMQ utilizando o método da pseudo-inversa, da seguinte forma:

$$\theta = (\phi^T\phi)^{-1}\phi^TY. \quad (8)$$

Já o MMQ recursivo, que serve de inspiração ao filtro de Kalman, utiliza-se da estimativa que é atualizada ao longo do tempo, em um processo de ajuste e minimização dos erros. Neste processo, os erros se reduzem à medida que um maior número de dados é incorporado. A Figura 2 ilustra este método ao se fazer a estimação de um escalar real $\alpha = 10$ a partir de medidas com erro, através de um algoritmo implementado no *software* MATLAB. Pode-se observar que ao final do processo, o erro reduz-se significativamente quando comparado com o erro nos tempos iniciais.

Figura 2: Estimação pelo método dos mínimos quadrados recursivos.



Fonte: Desenvolvido pelos autores em MATLAB.

À medida que os processos a serem filtrados ficam mais complexos, é necessário que o filtro seja reformulado de tal forma a se adequar à complexidade do problema. Três principais filtros surgiram como alternativas para sistemas não-lineares:

- Kalman estendido (EKF): representa os estados como variáveis aleatórias gaussianas e utiliza aproximação linear para propagar as matrizes de covariância e os vetores de estado (GOLDENSTEIN, 2004);
- Kalman *unscented* (UKF): possui uma certa semelhança com o EKF, entretanto, não há linearização da função não linear que descreve o sistema. Ao invés disso, utiliza se

os pontos-sigma para propagar as amostras através do sistema não-linear. Os pontos-sigma são escolhidos de forma que possuam média e covariância iguais às da distribuição original. Como resultado, pode se obter informações de alta ordem sobre a distribuição e estas podem ser capturadas com um número fixo e pequeno de pontos, alcançando grande precisão na estimativa de estados de sistemas altamente não lineares a partir de um esforço computacional baixo.

- Partículas: lida com distribuições não-paramétricas e não-lineares, representando-as como distribuições de densidade de partículas. Pode ser utilizado quando as observações são extremamente corrompidas, além de lidar com tipos complexos e indiretos de observações (GOLDENSTEIN, 2004, p.80-82).

1.1 TEMA

Na área esportiva, as aplicações de filtragem estocástica vão desde esportes populares com bola, até NASCAR e bilhar. No tênis, por exemplo há um sistema cujo objetivo é determinar se a bola quicou fora ou dentro da quadra, o chamado “Desafio”. Utilizando várias câmeras de alta definição, atreladas ao processo de filtragem, consegue-se obter resultados precisos de cada jogada. Ao se rastrear a bola, através de filtragem estocástica, é possível determinar mais precisamente, num lance duvidoso, onde a bola toca o chão: dentro ou fora da quadra.

Com o objetivo de diminuir a quantidade erros, percebe-se a importância da aplicação da filtragem estocástica em esportes de alto nível, em que necessita-se de grande precisão em um curto período de tempo. Entretanto, o rastreamento aplicado à uma bola de tênis, por exemplo, é atrelado a um único alvo por vez. O diferencial deste trabalho será implementar o rastreamento de jogadores de futebol utilizando modelagem e simulação da movimentação dos atletas através de filtragem estocástica.

1.1.1 Delimitação do Tema

No futebol, a filtragem de dados é aplicada para rastrear tanto a bola (KIM; KIM, 2009), como os jogadores (XU *et al.*, 2004). Os resultados obtidos são utilizados, em geral, para tirar dúvidas durante a transmissão das partidas. No entanto, uma outra aplicação possível para o rastreamento é na obtenção do posicionamento e velocidade dos jogadores. É possível identificar quanto tempo o jogador passou andando lentamente, arrancando ou correndo. Esses

dados podem ser utilizados para preparar treinamentos melhores e mais individualizados, e também para análise tática, como forma de auxílio para a equipe técnica.

A maneira mais convencional para implementar o rastreamento de jogadores em partidas de futebol é utilizando análise por imagem obtidas através de câmeras de transmissão (BEETZ *et al.*, 2007). Este trabalho pretende analisar o desempenho de diferentes filtros estocásticos aplicados ao rastreamento de trajetórias de jogadores de futebol geradas computacionalmente.

1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS

Em cenários de rastreamento, geralmente os alvos descrevem trajetórias previsíveis e bem definidas, como veículos terrestres (CUI *et al.*, 2005) e aviões (LI; JILKOV, 2003a). Quando o alvo é uma pessoa, a situação é totalmente diferente. A movimentação de indivíduos é muito mais incerta, podendo ocorrer com mais frequência eventos inesperados como mudança de velocidade repentina, paradas abruptas e alterações na trajetória, sem uma razão específica.

No contexto de uma partida de futebol, esse comportamento se verifica mais acentuadamente. Para não haver colisão, por exemplo, o jogador deve desviar sua trajetória, ou fazer paradas abruptas para confundir o marcador adversário. Como o rastreamento de indivíduos lida com um problema de estimação de estados de um sistema dinâmico, os objetivos principais do problema são: (i) fazer a modelagem matemática do problema, ou seja, obter os modelos dinâmico e de medidas adequados à situação e (ii) aplicar as equações de previsão e atualização do filtro estocástico.

O método de rastreamento por imagem apresenta várias complexidades: uma delas é a imagem estar sujeita a alterações de luminosidade decorrente de condições climáticas, de projeção de sombras da estrutura do estádio e de iluminação artificial em jogos noturnos. Outras dificuldades encontradas são: o tamanho dos jogadores na imagem, que varia com o zoom e posição da câmera, mais de um jogador pode estar sobreposto na imagem, desfoque de movimento, alteração de cor no plano de fundo devido ao gramado, entre outros. As dificuldades a serem enfrentadas neste projeto incluem a modelagem de indivíduos que, como já dito anteriormente, não possuem um comportamento previsível, e a implementação dos filtros estocásticos em MATLAB.

1.3 OBJETIVOS

Nas seções a seguir, encontram-se o detalhamento dos objetivos deste projeto, tais como os objetivos gerais e específicos.

1.3.1 Objetivo Geral

Utilizar filtragem estocástica na estimação de estados em um problema de rastreamento aplicado a partidas de futebol, em que os atletas são os alvos a serem rastreados, avaliando o desempenho dos filtros a partir de ferramentas conhecidas na literatura como erro temporal e erro RMS (*root mean square error* - RMSE).

1.3.2 Objetivos Específicos

Com o intuito de atingir o objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Estudar a movimentação dos atletas em campo durante uma partida;
- Modelar matematicamente o deslocamento dos atletas;
 - Definir o modelo dinâmico;
 - Definir o modelo de medidas;
- Estudar a fundamentação teórica de diferentes tipos de filtros estocásticos;
- Simular situações verossímeis em MATLAB
 - Aplicações dos filtros estudados;
 - Estimar posição e velocidade das trajetórias simuladas;
- Comparar desempenhos dos filtros via erro RMS;
- Identificar qual o melhor filtro para o rastreamento dos jogadores.

1.4 JUSTIFICATIVA

A ampla possibilidade de utilizar filtragem estocástica em diferentes campos de atuação, como visto nos exemplos citados anteriormente, mostra a constante evolução dessa área nos últimos anos. O filtro de Kalman e suas variações têm sido importantes ferramentas para estimar grandezas físicas e solucionar problemas na engenharia que envolvam modelagem matemática e observações ruidosas.

No futebol, grandes clubes com alto poder aquisitivo, principalmente na Europa, têm feito investimentos muito altos na área de análise por rastreamento. Entretanto, a viabilização de técnicas de baixo custo ajudaria não só os grandes clubes mas também os que não possuem tamanho investimento. As estatísticas dentro de uma partida têm sido ferramenta de extrema importância para a melhor avaliação de como o atleta se movimenta, qual a distância percorrida durante o jogo, número de desarmes, passes certos, dentre outros. Portanto, a elaboração de um sistema que capta as trajetórias dos jogadores em tempo real, de forma fiel a realidade e com baixo custo, ajudaria os times a estudar melhor as estatísticas e poderem aplicar em seu jogo, aprimorando suas táticas e facilitando o encontro de eventuais erros.

O intuito desse projeto é evitar os problemas mencionados anteriormente, a partir da aplicação de filtros estocásticos de tal forma a realizar a estimativa de posição e velocidade dos jogadores com uma precisão adequada, sem a necessidade de captura e processamento de imagens, barateando o processo.

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A fim de cumprir os objetivos citados anteriormente, o uso de alguns instrumentos de auxílio é de fundamental importância. A elaboração do modelo de sistema utilizado no trabalho necessita de um estudo aprofundado na área de filtragem estocástica. Por isso, a leitura de livros de engenharia na área de controle e filtragem, em especial os filtros estocásticos, serão a base de desenvolvimento do trabalho. Autores de livros conhecidos nessa área como Bar-Shalom *et al.* (2004) e Maybeck (1982) surgem como nomes de força para colaborar no melhor entendimento do assunto.

A partir desta compreensão, a etapa seguinte será a implementação dos filtros. Utilizando o *software* MATLAB, a realização de simulações do sistema modelado com diferentes filtros possibilita uma comparação a fim de se obter o sistema mais otimizado com relação ao critério *Root Mean Square Error* (RMSE).

O RMSE é uma medida da diferença entre os valores estimados por um modelo e os valores reais observados. De maneira geral, é dado por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{obs,i} - X_{est,i})^2}{n}}, \quad (9)$$

em que X_{obs} é o valor observado e X_{est} é o valor estimado.

Um outro modo para fazer a comparação entre os filtros, seria utilizar o *Mean Square Error* (MSE), denominado também como Erro Médio Quadrático (EQM), em que é possível obter um erro absoluto das medidas estimadas. A partir desse cálculo, pode-se realizar comparações em relação ao valor calculado e averiguar qual filtro possui melhor eficiência.

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{obs,i} - X_{est,i})^2}{n}, \quad (10)$$

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

Capítulo 2 – Fundamentos de filtragem estocástica: Apresentação de conceitos de probabilidade, fundamentos de processos estocásticos, filtragem e modelagem estocástica;

Capítulo 3 – Tipos de filtros estocásticos; explicação teórica do funcionamento de diferentes filtros estocásticos voltados ao problema do presente trabalho;

Capítulo 4 – Definição dos modelos dinâmico e de medidas, elaboração do simulador de trajetórias em MATLAB;

Capítulo 5 – Exposição dos resultados, comparação dos filtros.

Capítulo 6 – Considerações finais, sugestão de possíveis melhorias e trabalhos subsequentes.

2 FUNDAMENTOS DE FILTRAGEM ESTOCÁSTICA

Para que seja consolidada uma base para que se desenvolva adequadamente este trabalho, é necessário apresentar alguns conceitos teóricos fundamentais de filtragem estocástica. Diferente de processos determinísticos, em que uma entrada gera a mesma saída, os processos estocásticos possuem um comportamento aleatório intrínseco. A fim de amenizar o efeito de ruídos em sistemas estocásticos, é utilizada a filtragem estocástica. Para se entender e modelar esse comportamento, uma importante ferramenta é a teoria de probabilidade. Alguns conceitos relevantes para filtragem estocástica serão apresentados neste capítulo, como variáveis aleatórias, valor esperado, variância, desvio padrão, covariância e distribuição gaussiana.

2.1 FUNDAMENTOS DE PROBABILIDADE

2.1.1 Variável Aleatória

Uma variável aleatória X é uma função que atribui um número real a cada resultado obtido a partir de um certo espaço amostral de um experimento aleatório (GARCIA, 2008). Tal variável aleatória X pode ser descrita como uma função dada pelo seguinte mapeamento:

$$X : S \rightarrow S_X, \quad (11)$$

em que S é o espaço amostral e S_X é o conjunto de valores assumidos por X .

Partindo deste conceito, pode-se atribuir uma valor x a um conjunto de elementos. Assim, é possível definir um novo conceito; a função de distribuição acumulada.

A função de distribuição acumulada (FDA) de uma variável aleatória X é definida como a probabilidade do evento dada na equação (12).

$$F_X(x) = P(X \leq x), -\infty < x < +\infty, \quad (12)$$

ou seja, é a probabilidade de que a variável aleatória X assuma um valor no intervalo $(-\infty, x]$.

Existem alguns tipos de variáveis aleatórias que podem ser classificadas como discretas e contínuas. Uma variável aleatória discreta X é definida como uma variável aleatória que assume valores de $S_X = x_1, x_2, x_3, \dots$ e pode ser descrito também como um conjunto contável, isto é, finito se o seu alcance for finito, ou seja, $S_X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

$$F_X(x) = \sum_k P_X(x_k) u(x - x_k), \quad (13)$$

em que $u(k)$ é um degrau unitário. Alguns tipos de variáveis aleatórias discretas são: Binomial, Bernoulli, Poisson, entre outros.

Uma variável aleatória contínua é definida como uma variável aleatória cuja FDA é contínua em todos os lugares, e que, além disso, é suficientemente suave que pode ser escrito como uma integral de alguma função não-negativa $f(x)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (14)$$

Alguns tipos de variáveis aleatórias contínuas são Uniforme, Exponencial, Gaussiana, Laplaciana, entre outras que são encontrados na teoria de probabilidade.

A partir da FDA, é possível escrever uma outra função que traz diversas informações probabilísticas sobre uma variável aleatória X . Tal função é denominada função densidade de probabilidade (FDP). Esta função pode ser descrita como a derivada de FDA, ou seja:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x). \quad (15)$$

Esta função é utilizada para especificar melhor as informações contidas na FDA, ou seja, uma probabilidade relativa da variável assumir um valor dado.

2.1.2 Valor Esperado, Variância e Covariância

Os conceitos apresentados a seguir foram baseados em Brown (2012).

O valor esperado de uma variável aleatória intuitivamente aparenta ser a média dos valores do evento em questão. No estudo de probabilidade, o valor esperado de uma variável aleatória não é simplesmente a soma dos valores das realizações de certo evento dividida pelo número de realizações. No entanto, o valor da média amostral de uma variável aleatória converge para o valor esperado conforme o número de amostras tende ao infinito. Dessa

forma, define-se valor esperado como a soma dos valores possíveis de tal evento, ponderado pela probabilidade da ocorrência de cada um deles. Formalizando este conceito, para uma variável aleatória contínua X que possui função de densidade $f_X(x)$, seu *valor esperado*, também chamado de *esperança matemática* é definido por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (16)$$

Para o caso discreto, tem-se:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i), \quad (17)$$

em que n é o número de valores possíveis de X . O valor esperado de X é uma média ponderada dos valores possíveis que X pode assumir, em que cada peso é a probabilidade de que X assumira aquele valor.

Ao se tratar de uma função de variável aleatória $g(X)$, seu valor esperado é dado por:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \quad (18)$$

e seu equivalente discreto:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) f_X(x_i). \quad (19)$$

Outra medida relevante no estudo de processos estocásticos é a *variância*, que para uma variável aleatória X , é simbolizada por $Var(X)$ ou σ_X^2 . Brown (2012) define a variância de X como a medida da dispersão de X sobre sua média. Sua definição matemática é dada por:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]. \quad (20)$$

Em outras palavras, a variância de uma variável aleatória X indica a dispersão estatística dos possíveis valores de X com relação ao esperado.

A raiz quadrada da variância, chamado de desvio padrão, é simbolizado por σ_X . O desvio padrão é utilizado como medida de incerteza, representando os ruídos que afetam os sistemas a serem filtrados.

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}. \quad (21)$$

Um conceito similar ao de variância é o de covariância, que indica o quanto duas variáveis aleatórias estão relacionadas entre si de maneira probabilística. A magnitude da

covariância pode ser interpretada como a medida do quanto a aleatoriedade de uma variável interage com outra variável aleatória. Para duas variáveis aleatórias X e Y , a covariância entre elas é simbolizada por $Cov(X,Y)$ ou $\sigma_X\sigma_Y$, e sua equação é dada por:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]. \quad (22)$$

A covariância indica a tendência na relação linear entre as variáveis. Portanto, ela pode variar de $-\infty$ a $+\infty$. Utiliza-se a covariância para compreender a direção na relação entre variáveis. Se valores de duas variáveis aleatórias são diretamente proporcionais, essas variáveis têm covariância positiva. Caso valores de duas variáveis aleatórias são inversamente proporcionais, essas variáveis tem covariância negativa. Por fim, caso os valores de duas variáveis aleatórias não tenham relação um com o outro, ou seja, as variáveis aleatórias são independentes, a covariância é nula.

2.1.3 Variável Aleatória Gaussiana

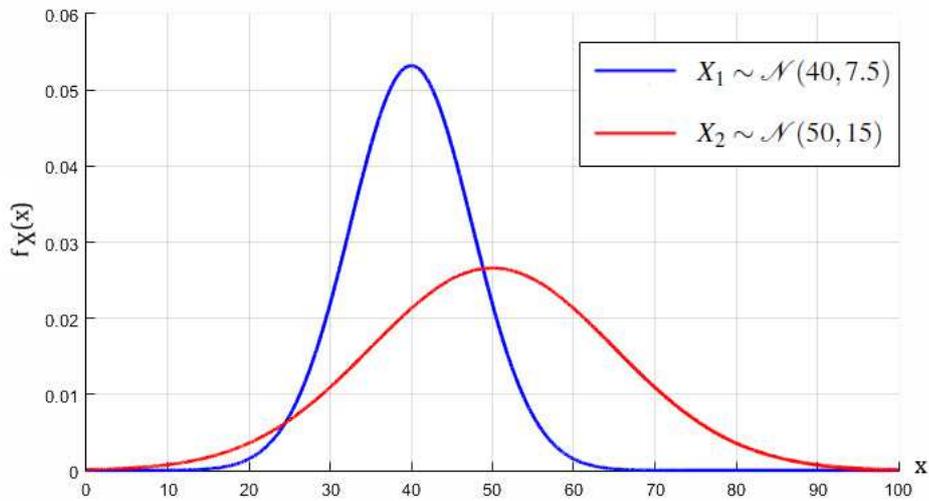
A partir do conhecimento dos conceitos citados nas Seções 2.1.1 e 2.1.2, é possível definir uma variável aleatória com distribuição gaussiana, também chamada de distribuição normal univariada. A distribuição gaussiana é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas na modelagem de sistemas naturais. Também está relacionada a conceitos matemáticos como ruído branco (ANDERSEN *et al.*, 2007) e movimento browniano (KARATZAS; SHREVE, 2012).

Como definido em Brown (2012), uma variável aleatória X é chamada normal ou gaussiana se sua função de densidade de probabilidade é dada pela equação (23):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (23)$$

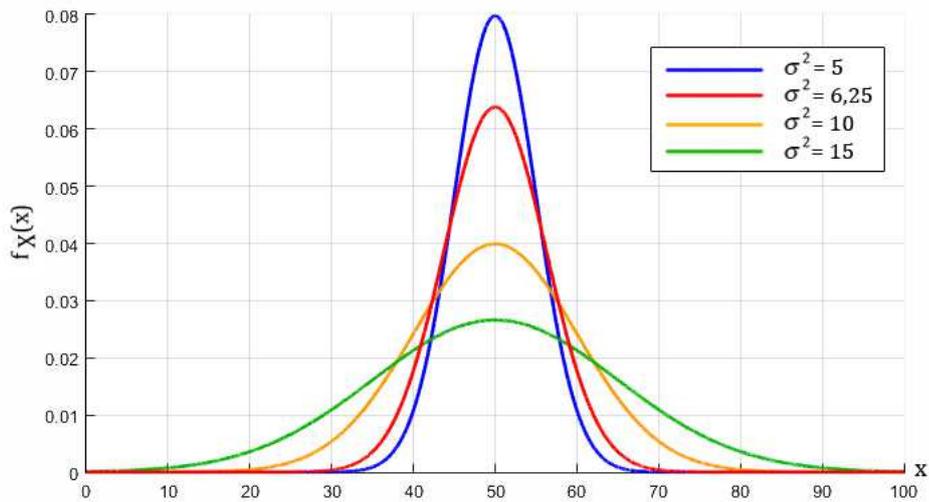
em que μ é a média e σ^2 é a variância da distribuição. Dessa forma, uma variável aleatória gaussiana é comumente simbolizada por $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A Figura 3 mostra duas curvas Gaussianas com diferentes médias e variâncias, enquanto a Figura 4 mostra curvas com mesma média, porém diferentes variâncias.

Figura 3: Gaussianas com diferentes parâmetros.



Fonte: Desenvolvido pelos autores em MATLAB.

Figura 4: Gaussianas com diferentes variâncias.



Fonte: Desenvolvido pelos autores em MATLAB.

Nota-se que a curva Gaussiana típica é simétrica em relação ao seu ponto máximo em $x = \mu$, o que indica que seu valor esperado é o mais frequentemente encontrado, com valores com menor ocorrência à medida que se afastam da média. Além disso, nota-se que quanto maior a variância, os valores se encontram mais dispersos em relação à média.

A densidade normal multivariada é uma generalização para dimensão $p \geq 2$ em relação à densidade normal univariada. Na equação (23), o argumento da exponencial na densidade normal univariada, que é o quadrado da distância do ponto x à média μ , em unidades do desvio padrão σ , pode ser generalizado para um vetor de observações $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ como

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}), \quad (24)$$

que é a distância de Mahalanobis do vetor \mathbf{x} ao vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$, e $\boldsymbol{\Sigma}$ é matriz de covariância do vetor aleatório \mathbf{X} , quando $\boldsymbol{\Sigma}$ admite inversa; caso contrário, a densidade não estará bem definida. O termo que multiplica a exponencial também pode ser generalizado de acordo com a equação (25)

$$(2\pi)^{-\frac{p}{2}} (|\boldsymbol{\Sigma}|)^{-\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

em que $|\boldsymbol{\Sigma}|$ é o determinante da matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$. Assim, para $\boldsymbol{\Sigma}$ positiva definida, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, a função de densidade de probabilidade da distribuição normal multivariada será dada pela equação (26):

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (|\boldsymbol{\Sigma}|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (26)$$

para $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, \dots, p$, em que x_i é o elemento na posição i do vetor \mathbf{X} , sendo usualmente representada como $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Sob certas condições, como variância finita, o teorema central do limite afirma que médias de observações de variáveis aleatórias amostradas de distribuições independentes, convergem para a distribuição normal (BARANY; VU, 2007). O teorema central do limite é enunciado a seguir:

Teorema central do limite – Seja X_n uma sequência de n variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas com $E[X_n] = \mu$ e variância $\sigma^2 > 0$. À medida que n aumenta, a distribuição amostral converge, em distribuição, para a distribuição gaussiana. O teorema central do limite é formalizado na equação (27)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = \Phi(t), \quad (27)$$

em que P é a probabilidade de sucesso do evento em questão e $\Phi(t)$ é a função de distribuição cumulativa da distribuição gaussiana.

Dessa forma, as amostras se tornam normalmente distribuídas quando o número de observações é suficientemente grande. Partindo disso, os filtros estocásticos geralmente

assumem a hipótese de distribuição gaussiana para os ruídos de medição e ruídos do processo (BAR-SHALOM *et al.*, 2004). Por esta razão, esse tipo de distribuição é amplamente utilizada em filtragem estocástica.

Uma vez apresentado os fundamentos de probabilidade, pode-se aprofundar em conceitos de processos estocásticos.

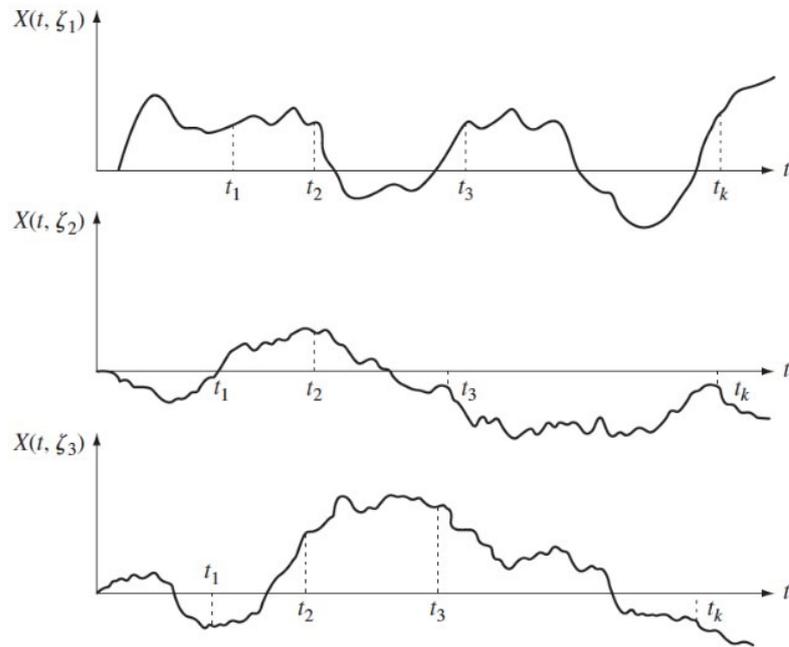
2.2 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Sistemas que mudam de acordo com o tempo estão presentes em toda parte no nosso dia a dia. Seja na cotação de uma determinada ação na bolsa de valores (BATES, 1996), no número de peças fabricadas por uma máquina em um certo dia (YIN *et al.*, 2014), na variação de temperatura de uma certa molécula (BERENDSEN *et al.*, 1984) ou na movimentação de uma pessoa (SIDENBLADH *et al.*, 2000) há um processo que varia de acordo com o tempo, ou seja um processo dinâmico.

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que dependem do tempo t e da ocorrência de um resultado ζ do espaço amostral Ω , em que, para cada valor de t , tem-se uma variável aleatória $X(t)$. O conjunto dessas variáveis aleatórias formam o processo estocástico (GARCIA, 2008).

Considere o processo estocástico $X = \{X(t, \zeta) : t \in I, \zeta \in \Omega\}$, em que I pode ser definido como o espaço de parâmetros, sendo que $I = [0, \infty)$ contém parâmetros a tempo contínuo e $I = 0, 1, 2, \dots$ contém parâmetros a tempo discreto. Pode-se também classificar um processo em relação ao estado E . Um estado discreto $X(t)$ é chamado de cadeia, ao passo que um estado contínuo é denominado sequência.

Para um ζ fixo, chamamos $X(t)$ de uma realização. A Figura 5 apresenta três realizações de um processo estocástico.

Figura 5: Processo Estocástico.

Fonte: Garcia (2008).

2.2.1 Processo de Markov

A partir do conceito de processo estocástico, pode-se definir processo de Markov (ou processo markoviano). O processo markoviano leva seu nome em homenagem ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov e é definido quando a probabilidade de um evento futuro, conhecidos os eventos passados e presente, é independente dos eventos passados, dependendo somente do estado presente.

Sendo assim, um processo estocástico é considerado markoviano quando o futuro do processo depende exclusivamente do presente. Por esse motivo, um processo markoviano também pode ser chamado de processo sem memória, uma vez que o passado é “esquecido”.

Um processo markoviano discreto pode ser chamado de cadeia de Markov, sendo representado por $X = \{X_n : n = 0, 1, \dots\}$, se para todo n ,

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (28)$$

Nota-se que o estado futuro X_{n+1} depende apenas do estado presente $X_n = i$ do processo. Pode-se definir a probabilidade de transição do estado i para o estado j no instante de tempo n como sendo $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Percebe-se que tal probabilidade depende somente

de i , j e n , não tendo relação alguma com o passado, ou seja, uma cadeia de Markov.

Os modelos matemáticos utilizados no gerador de trajetórias e no filtro IMM (*Interacting Multiple Models*), a serem apresentados posteriormente, utilizam processos markovianos na formação das equações de filtragem.

A partir dos conceitos de probabilidade e de processos estocásticos apresentados, pode-se conceituar a filtragem estocástica, e, posteriormente, introduzir os filtros estocásticos propriamente.

2.3 INTRODUÇÃO À FILTRAGEM ESTOCÁSTICA

A filtragem estocástica é uma ferramenta utilizada para atenuar ruídos em processos estocásticos. Para tal, busca estimar o estado de um certo sistema dinâmico suavizando ou eliminando o efeito de ruídos aleatórios, de modo a se aproximar do comportamento esperado do dito sistema. Em outras palavras, com uma abordagem estatística, encontra-se a estimativa dos estados de um sistema a partir de medições ruidosas e dinâmicas incertas do sistema. No âmbito do rastreamento de objetos, o estado pode conter informações cinemáticas destes objetos, como posição e velocidade do alvo. Dessa forma, a filtragem estocástica pode estimar o comportamento do movimento realizado pelo alvo de forma mais acurada que as medidas, utilizando os conceitos apresentados anteriormente para modelar o sistema.

No próximo capítulo, serão apresentados os fundamentos teóricos e conceitos de filtragem estocástica que servem de base para a implementação do filtro de Kalman, assim como suas equações características. O filtro de Kalman será o primeiro abordado por ser frequentemente utilizado na literatura e de simples implementação. Alguns conceitos foram apresentados de forma breve no Capítulo 1 e serão aprofundados no Capítulo 3 para trazer melhor entendimento sobre o funcionamento do filtro.

3 FILTROS ESTOCÁSTICOS

A partir dos conceitos de probabilidade e processos estocásticos apresentados no Capítulo 2, é possível realizar o aprofundamento sobre o funcionamento dos filtros estocásticos. Esses conceitos fornecem informações aos filtros sobre o comportamento dos ruídos de medição e de modelagem do sistema. No entanto, antes de abordar os filtros especificamente, é necessário apresentar alguns conceitos de estimativa de estados.

3.1 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS DE UM SISTEMA DINÂMICO LINEAR

Os conceitos de teoria de estimação apresentados nessa seção são baseados em Bar-Shalom *et al.* (2004).

Pode-se definir estimação como o processo de inferência do valor de um parâmetro, para o qual não se conhece o valor absoluto, a partir de observações indiretas e incertas. No contexto de filtragem de sinais, a estimação a ser feita é do estado de um sistema dinâmico, ao se obter a estimativa a partir de dados ruidosos, filtrando o ruído.

A teoria de estimação pode ser encontrada no cerne de diversos sistemas de processamento de sinais, como:

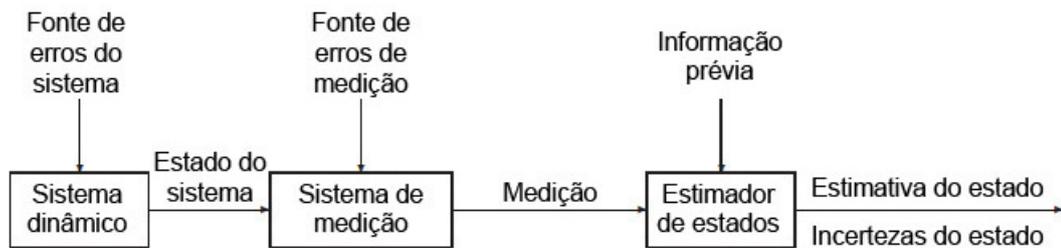
- Radar: atraso do pulso recebido deve ser estimado na presença de ruído (LI; STOICA, 2008);
- Reconhecimento de fala: os parâmetros do modelo de fala devem ser estimados na presença de variações no orador e na fala e de ruído do ambiente (EPHRAIM; MALAH, 1984);
- Imagem: características como posição e orientação de um objeto em uma filmagem devem ser estimados na presença de alterações de luminosidade, ruídos de fundo e oclusões (BEETZ *et al.*, 2007);

- Biomedicina: a taxa de batimento cardíaco de um feto deve ser estimada na presença de ruído de sensores e de ambiente (AKSELROD *et al.*, 1981);
- Controle: a posição e direção de navios devem ser estimadas na presença de ruídos de ambiente e de sensores para navegação corretiva (FOSSEN; PEREZ, 2009).

De maneira geral, estimações são feitas a partir de observações ruidosas devido a imprecisões nos sensores, ruídos aditivos, distorção do sinal, interferência de sinais-modelados como ruído de medição. Além disso, o modelo para o estado de um sistema linear possui uma estimativa inicial e uma evolução previsível imperfeitas, com sua dinâmica afetada por um ruído estocástico, o ruído do processo.

O processo de estimação de estados é ilustrado de maneira simplificada na Figura 6.

Figura 6: Estimação de Estados.



Fonte: Adaptado de (BAR-SHALOM *et al.*, 2004).

A evolução do modelo pode ser descrita pela seguinte pseudo-equação:

$$(\text{Estado})_{k+1} = (\text{Função Linear do Estado})_k + (\text{Ruído do Processo})_k, \quad (29)$$

em que k é o índice temporal e $(\cdot)_k$ indica o valor no tempo k . Já a equação de medidas pode ser descrita por (30):

$$(\text{Medida})_k = (\text{Função Linear da Medida})_k + (\text{Ruído de Medição})_k. \quad (30)$$

Os dois ruídos possuem média e variâncias (covariâncias para o caso multidimensional) conhecidas e, por hipótese, são descorrelacionadas.

3.2 FILTRO DE KALMAN

3.2.1 Introdução

Desde 1960, quando Rudolf E. Kalman publicou seu artigo descrevendo uma solução recursiva para o problema de filtragem de dados lineares discretos, o filtro de Kalman (KALMAN *et al.*, 1960), foi um grande foco de pesquisa e aplicação, principalmente na área de navegação autônoma ou assistida.

Quando o sistema é linear e variáveis aleatórias gaussianas são uma representação apropriada do ruído aditivo do sistema, o filtro de Kalman é a escolha ótima para estimativa de estados. Um outro aspecto disso é que o filtro incorpora toda informação que possa ser fornecida a ele. Ele processa todas as medidas disponíveis, independentemente de sua precisão, para estimar o valor atual da variável de interesse. Isso é feito baseando-se no conhecimento prévio da dinâmica do sistema e do método de medição, na descrição estatística dos ruídos do sistema, assim como dos erros de medição e incerteza na dinâmica dos modelos e em qualquer informação disponível a respeito das condições iniciais.

As aplicações do filtro de Kalman abrangem diversas áreas, mas seu uso como ferramenta é basicamente exclusivo a dois propósitos: estimação do estado de sistemas dinâmicos e análise de desempenho de estimadores. No contexto da análise de desempenho, o filtro utiliza uma descrição completa da distribuição de probabilidade de seus erros de estimativa para determinar os ganhos ótimos e isso pode ser utilizado para avaliar seu desempenho. Dessa forma, alguns elementos do sistema, como instrumentos de medição e sensores, podem ser escolhidos de forma a melhorar tal desempenho. A Tabela 1 lista alguns tipos sensores que podem ser aplicados na estimativa de estados do sistema dinâmico correspondente.

Tabela 1: Exemplos de Sistemas Dinâmicos e seus Sensores.

Aplicação	Sistema Dinâmico	Tipo de Sensor
Controle de Processos	Indústria	Pressão
		Temperatura
		Vazão
Previsão de Enchente	Sistema Fluvial	Nível da Água
		Pluviômetro
		Radar Meteorológico
Rastreamento	Veículo	Radar
		Análise de Vídeo
Navegação	Navio	Sextante
		Giroscópio
		Acelerômetro
		Transmissor GPS

Fonte: Adaptado de Grewal e Andrews (2001).

Na estimação de sistemas dinâmicos, as aplicações são ilimitadas, pois grande parte dos sistemas existentes na natureza podem ser definidos como sistemas dinâmicos. Excetuando algumas constantes físicas fundamentais, como a constante de Planck h e a constante gravitacional universal G , não existe basicamente nada que seja verdadeiramente constante em relação ao tempo. Pode-se afirmar que praticamente todos os sistemas físicos são dinâmicos até certo ponto. O problema é que nem sempre se conhece com exatidão as dinâmicas do sistema em questão. O melhor a se fazer é modelá-la da melhor maneira possível e atribuir as incertezas do modelo ao ruído aditivo do processo. O filtro de Kalman nos permite estimar o estado de sistemas dinâmicos com certos comportamentos aleatórios utilizando essa informação estatística.

3.2.2 Estrutura do Filtro de Kalman

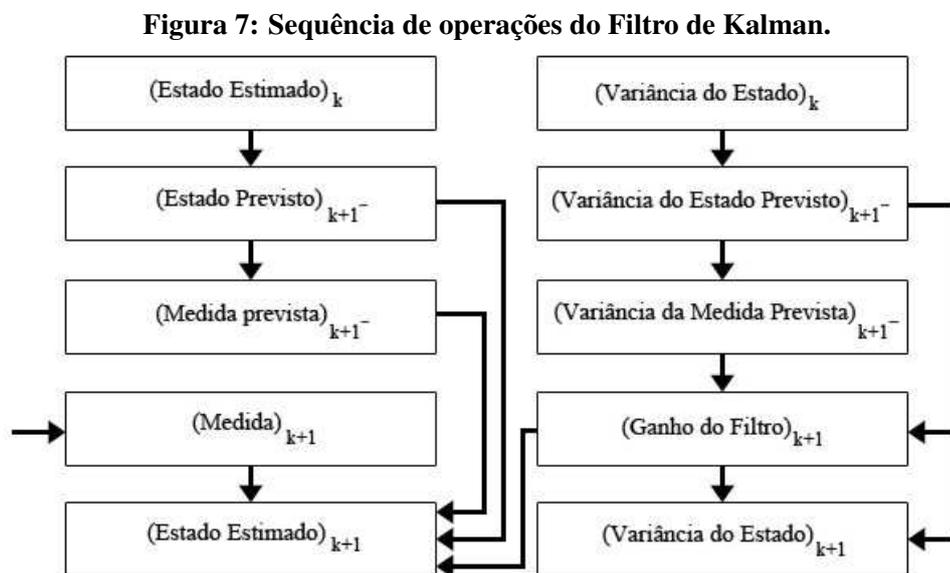
O filtro de Kalman estima o estado atual do sistema baseado nas medições feitas até o tempo atual. A recursão principal do filtro de Kalman discreto, segundo Bar-Shalom *et al.* (2004) pode ser descrita por (31):

$$(\text{Estado Estimado})_{k+1} = (\text{Estado Previsto})_{k+1} + (\text{Ganho do Filtro})_{k+1} \times (\text{Inovação})_{k+1}, \quad (31)$$

em que $k+1^-$ denota “pouco antes do tempo $k+1$ ” e $(\text{Inovação})_{k+1}$ é a diferença entre a medida real com a medida prevista utilizando dados do passo anterior, dado por:

$$(\text{Inovação})_{k+1} = (\text{Medida})_{k+1} - (\text{Medida Prevista})_{k+1^-}. \quad (32)$$

O ganho do filtro em (31) retrata a precisão do estado previsto relativo à nova observação. Assim, a nova estimativa de estado é uma combinação de todos os dados anteriores e a última medida. A sequência de operações do filtro de Kalman é ilustrado no diagrama de blocos da Figura 7.



Fonte: Adaptado de (BAR-SHALOM *et al.*, 2004).

Neste trabalho, será abordado o caso de tempo real, em que os cálculos envolvendo estimativa de estado utilizando medidas devem ser feitos a cada iteração do filtro.

Os símbolos utilizados neste trabalho para denotar esses conceitos são conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Relação de Símbolos.

(Estado) $_k$	$\mathbf{x}(k)$
(Estado Estimado) $_k$	$\hat{\mathbf{x}}(k k)$
(Estado Estimado) $_{k+1}$	$\hat{\mathbf{x}}(k+1 k+1)$
(Estado Previsto) $_{k+1^-}$	$\hat{\mathbf{x}}(k+1 k)$
(Medida) $_{k+1}$	$\mathbf{z}(k+1)$
(Medida Prevista) $_{k+1^-}$	$\hat{\mathbf{z}}(k+1 k)$
(Covariância do Estado) $_k$	$P(k k)$
(Covariância do Estado Previsto) $_{k+1^-}$	$P(k+1 k)$
(Covariância do Estado Previsto) $_{k+1}$	$P(k+1 k+1)$
(Covariância da Inovação) $_{k+1^-}$	$S(k+1)$
(Covariância do Ruído do Processo)	$Q(k)$
(Covariância do Ruído de Medição)	$R(k)$
(Ganho do Filtro) $_{k+1}$	$K(k+1)$
(Ruído do Processo) $_k$	$\mathbf{w}(k)$
(Ruído de Medição) $_k$	$\mathbf{v}(k)$

Fonte: Os autores.

A descrição do funcionamento do filtro de Kalman abaixo foi baseada em Goldenstein (2004) e Bishop e Welch (2001).

O filtro realiza a estimativa do estado $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ do processo estocástico discreto descrito pela equação (29) com as medições conforme equação (30). Reescrevendo as equações seguindo a simbologia apresentada acima, temos a equação que descreve o sistema dinâmico dada por:

$$\mathbf{x}(k+1) = F(k)\mathbf{x}(k) + G(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (33)$$

em que $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(0, Q(k))$, e a equação de medidas é dada por:

$$\mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (34)$$

em que $\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(0, R(k))$.

As matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são conhecidas e podem variar no tempo. Os ruídos $\mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{v}(k)$ possuem suas amostras não correlacionadas, o que indica que suas matrizes de covariância, $Q(k)$ e $R(k)$, apresentem apenas elementos na diagonal contendo suas variâncias.

Simplificadamente, o filtro de Kalman possui duas etapas principais em cada iteração: previsão e atualização. Para inicializar o filtro, é necessário informar as condições iniciais, que são estado inicial, $\hat{\mathbf{x}}(0|0) \in \mathbb{R}^n$ e covariância inicial, $P(0|0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Previsão: O filtro utiliza a dinâmica do sistema, para calcular a configuração do estado. O valor esperado do erro da estimativa do estado é representado pela matriz de covariância P , produzida pela combinação da variância do erro das estimativas. A forma da matriz P pode variar com a dimensão do vetor de estados $\mathbf{x}(k)$. A seguir, encontram-se alguns exemplos para diferentes dimensões de P :

$$\begin{aligned} 1 \text{ dimensão} &: \left[\sigma_x^2 \right], \\ 2 \text{ dimensões} &: \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_y \sigma_x & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \\ 3 \text{ dimensões} &: \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y & \sigma_x \sigma_z \\ \sigma_y \sigma_x & \sigma_y^2 & \sigma_y \sigma_z \\ \sigma_z \sigma_x & \sigma_z \sigma_y & \sigma_z^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que σ_x^2 é a variância de uma variável x e $\sigma_x \sigma_y$ é a covariância entre duas variáveis x e y .

Dessa forma, as equações de previsão do estado e da matriz de covariância são dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = F(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) + G(k)\mathbf{u}(k), \quad (35)$$

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F(k)^\top + Q(k). \quad (36)$$

Atualização: O filtro recebe o vetor de medidas $\mathbf{z}(k+1)$. Esse vetor é uma medição indireta do estado desconhecido do sistema. A observação possui uma incerteza representada pelo ruído $\mathbf{v}(k)$, originado de distúrbios inerentes aos equipamentos de medição, podendo ser ruídos eletrônicos, mecânicos, entre outros, e externos, como calor e umidade. É feita uma previsão da medida, baseada no estado estimado na etapa anterior, dada por:

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1|k) = H(k)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k). \quad (37)$$

Então, calcula-se o erro da medida estimada com relação à medida real. Esse erro é chamado de inovação, dado por:

$$\tilde{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1|k). \quad (38)$$

Posteriormente, é calculada a covariância da inovação, simbolizada por S , que considera a covariância das medições R e a covariância das estimativas P e é dada por:

$$S(k+1) = R(k+1) + H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)^\top. \quad (39)$$

A covariância da inovação é utilizada para calcular o ganho do filtro, $K(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

$$K(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)^\top S(k+1)^{-1}. \quad (40)$$

Dessa forma, o ganho de Kalman pondera o que está mais preciso, se as estimativas ou as medições. Devido ao ganho do filtro ser proporcional à covariância do erro de estimativa P e inversamente proporcional à covariância da inovação S , o ganho pondera o quanto da nova medida é adicionada à nova estimativa. De modo que, se K for muito pequeno, a estimativa passada terá maior influência no valor estimado, e quanto maior for K , mais peso terá a nova medida. Além disso, a matriz K projeta os valores de m dimensões do espaço observacional de volta para o espaço de n dimensões do vetor de estados. Isso é feito em (41):

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K(k+1)\tilde{\mathbf{z}}(k+1). \quad (41)$$

Assim, a estimativa final $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1)$ de cada iteração é uma combinação linear da estimativa $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ com a diferença entre a medida real $\mathbf{z}(k+1)$ e a medida prevista $\hat{\mathbf{z}}(k+1|k)$, representada por $\tilde{\mathbf{z}}(k+1)$, ponderada pela matriz K .

Para a próxima iteração, é necessário atualizar a matriz de covariância da estimativa, dada em (42):

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - K(k+1)S(k+1)K(k+1)^\top. \quad (42)$$

As Tabelas 3 e 4 apresentam as equações do filtro de Kalman discreto:

Tabela 3: Equações de Previsão do Filtro de Kalman Discreto.

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = F(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) + G(k)\mathbf{u}(k) \quad (35)$$

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F(k)^\top + Q(k) \quad (36)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1|k) = H(k)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \quad (37)$$

Fonte: Os autores.

Tabela 4: Equações de Atualização do Filtro de Kalman Discreto

$$\tilde{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1|k) \quad (38)$$

$$S(k+1) = R(k+1) + H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)^\top \quad (39)$$

$$K(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)^\top S(k+1)^{-1} \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K(k+1)\tilde{\mathbf{z}}(k+1) \quad (41)$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - K(k+1)S(k+1)K(k+1)^\top \quad (42)$$

Fonte: Os autores.

Vale ressaltar que o filtro de Kalman é um estimador ótimo apenas para o caso de sistemas lineares e com ruído gaussiano branco. A seção a seguir discute algumas abordagens possíveis para os casos em que o sistema não segue uma dinâmica linear.

3.3 FILTRAGEM DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Como apresentado na Seção 3.2, o filtro de Kalman é um estimador ótimo para sistemas dinâmicos lineares afetados por perturbações com distribuições gaussianas. Contudo, quando uma distribuição gaussiana passa por uma transformação não linear, o resultado deixa de ter uma distribuição gaussiana. Até certo ponto, todos os sistemas dinâmicos apresentam alguma não linearidade. Muitos sistemas são tão próximos de serem lineares que métodos lineares de estimação geram resultados satisfatórios. Entretanto, para sistemas cuja não linearidade seja mais acentuada, abordagens lineares não representam aproximações precisas. Para estes casos, o uso de estimadores não lineares se faz necessário.

O modelo geral para sistemas estocásticos em tempo discreto é dado pelas expressões em (43) e (44):

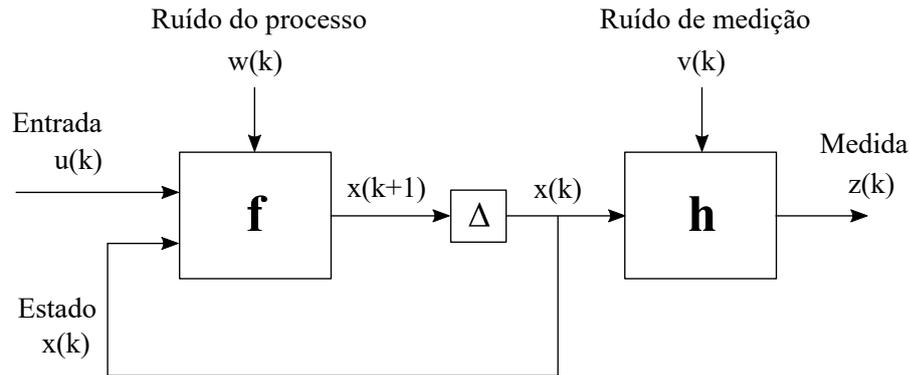
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[k, \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k)], \quad (43)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)]. \quad (44)$$

em que $\mathbf{x}(k+1)$ é o vetor de estados do sistema, $\mathbf{u}(k)$ é uma entrada externa conhecida, $\mathbf{w}(k)$ é o ruído do processo, $\mathbf{z}(k)$ é o vetor de medidas, $\mathbf{v}(k)$ é o ruído de medição.

Para que o sistema seja considerado não linear, ao menos uma das funções \mathbf{f} e \mathbf{h} deve ser não linear. As funções \mathbf{f} e \mathbf{h} são assumidas conhecidas, de maneira geral, variantes no tempo e permitem que os ruídos sejam não lineares. Um diagrama de blocos deste tipo de sistema é mostrado na Figura 8.

Figura 8: Sistema dinâmico não linear.



Fonte: Adaptado de Wan e Merwe (2001).

Para os fins deste trabalho, os métodos de filtragem de sistemas não lineares abordados são o filtro de Kalman estendido, EKF, em que se lineariza os sistemas não lineares em torno da estimativa atual da média e variância (BAR-SHALOM *et al.*, 2004); e o filtro de Kalman *unscented*, UKF, que se baseia na propagação de uma aproximação da gaussiana assumida pelo modelo diretamente na função não linear (JULIER; UHLMANN, 1997).

3.3.1 Filtro de Kalman Estendido

Apesar de sua relativa simplicidade de implementação e boa performance quando se trata de rastreamento e estimação de dados, a aplicação do KF não é indicada para sistemas não lineares, pois ele é formulado sob hipóteses de linearidade dos modelos e distribuição gaussiana sobre os ruídos. De acordo com Sorenson (1985), as aplicações mais comuns de filtragem linear são sobre sistemas não lineares.

Uma das formas de contornar este problema é utilizando o filtro de Kalman estendido, ou *Extended Kalman Filter* (EKF). O princípio de funcionamento do EKF é a linearização dos modelos não lineares do sistema e das equações de medição (BAR-SHALOM *et al.*, 2004). Para modelar tais não linearidades, o EKF utiliza-se de expansão em série de Taylor, a fim de linearizar localmente o sistema,

Considerando o seguinte modelo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[k, \mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k), \quad (45)$$

sendo a medida dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k). \quad (46)$$

Para simplificação, assume-se que não há controle sobre o sistema. Além disso, os ruídos, tanto do sistema quanto das medidas, são considerados gaussianos brancos e aditivos, ou seja:

$$\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(0, Q(k)),$$

$$\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(0, R(k)).$$

Para se obter o estado previsto $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$, a função não linear (45) é expandida via série de Taylor, cujo ponto de linearização é o último estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$.

Utilizando uma expansão em série de Taylor, tem-se:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(k, \hat{\mathbf{x}}(k|k)) + \mathcal{F}_{\mathbf{x}}(k) [(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k))] + \text{TOE} + \mathbf{w}(k), \quad (47)$$

em que TOE é a abreviação para os Termos de Ordem Elevada e $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(k)$ é a Jacobiana da função f avaliada no último estado estimado:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(k) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k)}. \quad (48)$$

O estado previsto em $k+1$ é obtido pela a equação (47) ignorando-se os TOE.:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}[k, \hat{\mathbf{x}}(k|k)]. \quad (49)$$

Então, tem-se o erro de previsão do estado:

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{w}(k). \quad (50)$$

A matriz de covariância do erro do estado é dada por:

$$P(k+1|k) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}(k)P(k|k)\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(k)^T + Q(k), \quad (51)$$

sendo a medida prevista:

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1|k) = \mathbf{h}(k+1; \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)). \quad (52)$$

Então, tem-se a matriz de covariância da inovação:

$$S(k+1) = \mathcal{H}_{\mathbf{x}}(k+1)P(k+1|k)\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(k+1)^T + R(k+1), \quad (53)$$

em que $\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(k+1)$ é a matriz Jacobiana da função \mathbf{h} , na equação (54).

$$\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(k+1) = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)}. \quad (54)$$

A matriz Jacobiana é formada por derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial e é calculada ponto a ponto, a cada estado do filtro. Isso faz com que, pontualmente, ocorra uma linearização das funções, mantendo-se uma distribuição gaussiana.

Assim, tem-se o ganho do filtro:

$$K(k+1) = P(k+1|k)\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(k+1)^T S(k+1)^{-1}, \quad (55)$$

sendo a atualização do estado:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K(k+1)[z(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1|k)]. \quad (56)$$

A matriz de covariância atualizada do erro do estado é dada por:

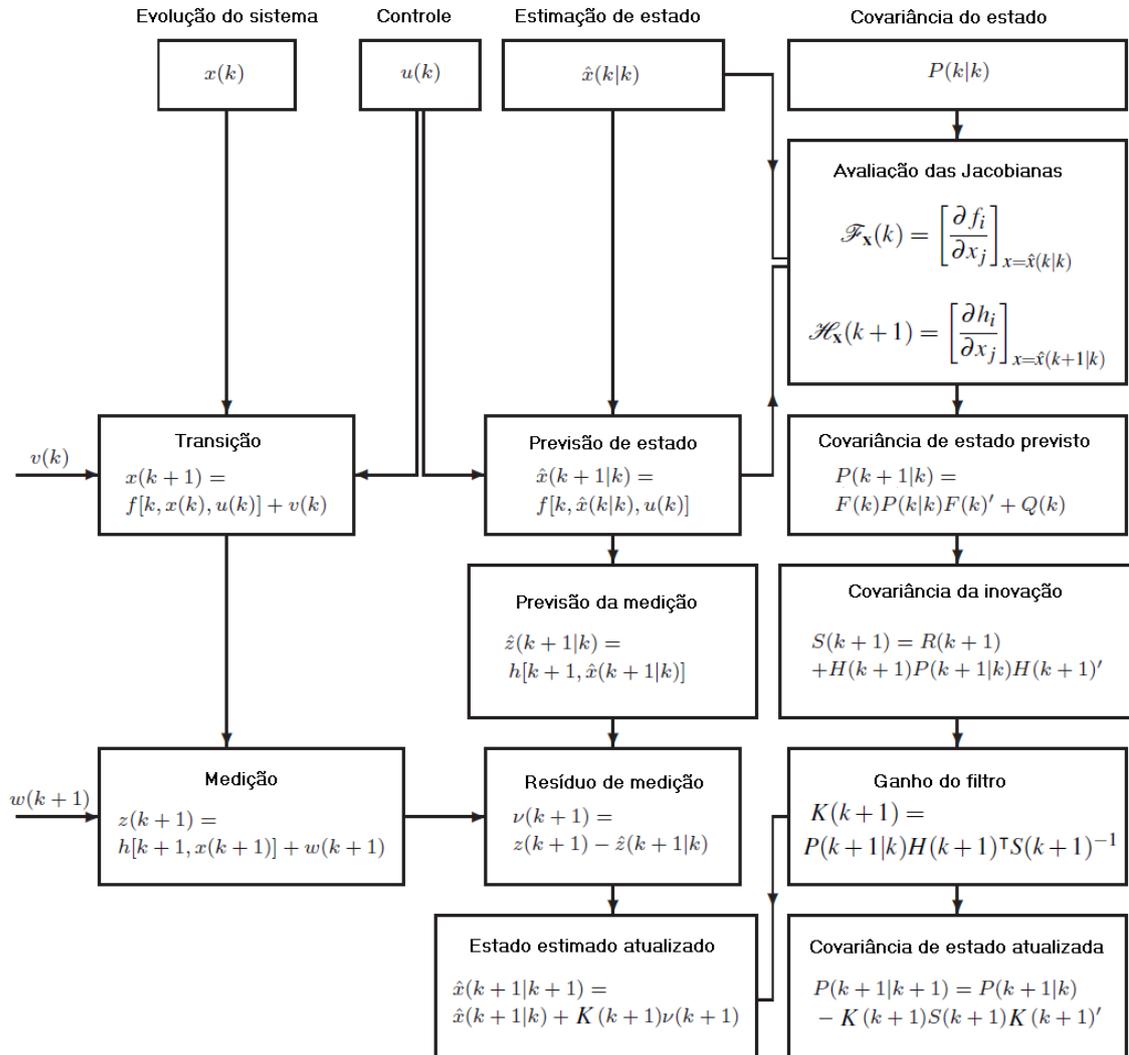
$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(k+1)]P(k+1|k), \quad (57)$$

em que I é a matriz identidade de mesma ordem do vetor de estados.

Vale salientar que uso de expansão em série de Taylor na previsão de estado e das medidas implica em introduzir erros não modelados no filtro. Além disso, o cálculo da covariância baseado na expansão em série não é sempre preciso. Também não há garantias de que até mesmo termos de segunda ordem possam compensar tais erros. O fato dessas expansões serem baseadas em Jacobianas (que são avaliadas no estado estimado, pois o estado real não está disponível) também podem causar erros.

A Figura 9 apresenta um fluxograma do funcionamento do EKF.

Figura 9: Fluxograma do EKF para um ciclo



Fonte: Adaptado de (BAR-SHALOM *et al.*, 2004).

3.3.2 Filtro de Kalman *unscented*

3.3.2.1 Introdução

O filtro de Kalman *unscented*, proposto por Julier e Uhlmann (1997), surgiu como uma alternativa ao filtro de Kalman estendido enquanto método de estimativa de parâmetros para sistemas não lineares. A diferença entre o EKF e o UKF decorre do modo como as distribuições dos vetores de estado são propagadas através das dinâmicas do sistema.

Similarmente à estrutura do EKF, apresentada na Subseção 3.3.1, a estrutura básica do UKF envolve a estimação do estado de um sistema dinâmico não linear em tempo discreto representado pelas equações (45) e (46)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[k, \mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k), \quad (45)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k). \quad (46)$$

No EKF, a distribuição dos estados é propagada analiticamente através da linearização de primeira ordem por séries de Taylor, o que pode introduzir erros à média e covariância das variáveis gaussianas após a linearização. O UKF trata esse problema utilizando uma abordagem via amostragem determinística, selecionando um conjunto de pontos ao redor da média da distribuição, obtendo seus valores de média e covariância. Estes pontos, quando propagados através do próprio sistema não linear, reproduzem esses valores com precisão de até terceira ordem da expansão em série de Taylor para qualquer não linearidade (BAR-SHALOM *et al.*, 2004).

O UKF parte do pressuposto de que é mais simples aproximar uma distribuição de probabilidade a partir de um conjunto de pontos do que aproximar uma função não linear arbitrária, via linearização sobre previsões e estimativas, como o EKF propõe. Dessa forma, um conjunto de pontos ao redor da média da distribuição, chamado de pontos sigma, é determinado e a função não linear é aplicada a cada ponto resultando em um conjunto de pontos transformados. A média e a covariância do conjunto transformado podem ser calculadas como a estimativa da transformação não linear da distribuição original. Transformada *unscented* (UT, *Unscented Transform*) é o nome dado à aplicação de uma transformação não linear à uma distribuição discreta de pontos, calculada para capturar um conjunto de parâmetros, como média e covariância, de uma distribuição desconhecida

A principal vantagem dessa abordagem para filtragem estocástica de sistemas não lineares é que a função não linear é totalmente utilizada, diferentemente do EKF que a substitui

por uma aproximação linear. Além disso, o UKF pode ser aplicado a qualquer função, enquanto abordagens baseadas em linearização somente são possíveis para funções diferenciáveis.

Os princípios de funcionamento do UKF são expostos nas próximas seções. Os conceitos foram fundamentados em Julier e Uhlmann (2004), Wan e Merwe (2001) e as equações baseadas em Simon (2006).

3.3.2.2 Transformada *unscented*

A transformada *unscented* foi desenvolvida para evitar os problemas de linearização de funções não lineares. Este problema é abordado pela UT através de um processo de transformação dos valores de média e covariância para uma dada distribuição de probabilidade. A transformada *unscented* é um método para o cálculo de propriedades de uma variável aleatória que passa por uma transformação não linear.

Como apresentado na Seção 3.3, ao passar uma distribuição gaussiana por uma transformação não linear, a distribuição deixa de ter características de uma distribuição gaussiana. Isso faz com que seja difícil determinar a média e covariância de uma transformação não linear. Devido a essa indeterminação, os parâmetros não podem ser precisamente calculados, somente aproximados.

No EKF, a aproximação é feita através de expansões em série de Taylor de primeira ordem, apresentada na Subseção 3.3.1 e expressa na equação (47):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(k, \hat{\mathbf{x}}(k|k)) + \mathcal{F}_{\mathbf{x}}(k) [(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k))] + \text{TOE} + \mathbf{w}(k). \quad (47)$$

Entretanto, quando o sistema dinâmico é fortemente não linear, esse tipo de aproximação não é suficientemente precisa. A transformada *unscented* aborda este problema da seguinte maneira: os valores de média e covariância da distribuição em questão podem ser associados a um determinado conjunto de pontos, chamados de pontos sigma, que, quando tratados como elementos de uma distribuição de probabilidade discreta, têm média e covariância iguais às da distribuição original. A distribuição é precisamente propagada ao aplicar-se diretamente a função não linear da dinâmica do sistema a cada ponto. Assim, o conjunto de pontos transformados representa uma aproximação da distribuição transformada. Dessa forma, os resultados obtidos são mais precisos do que os métodos de linearização, pois, ao invés de criar uma aproximação linear para uma função não linear, a transformada *unscented* resulta em um conjunto de pontos no qual a média e a covariância do conjunto representam a previsão do estado estimado.

3.3.2.3 Pontos Sigma

Considerando um vetor \mathbf{x} de dimensão n , média $\bar{\mathbf{x}}$ e covariância P_x que seja propagada através da função não linear $f(\cdot)$. Os pontos sigma consistem em um conjunto de vetores determinísticos escolhidos ao redor da média da distribuição, de maneira que a média e covariância do conjunto sejam $\bar{\mathbf{x}}$ e P_x , respectivamente. Para calcular os parâmetros de y , é feita a escolha de $2n$ pontos sigma $x^{(i)}$, de acordo com o conjunto de equações em (58).

$$x^{(i)} = \bar{x} + \tilde{x}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (58a)$$

$$\tilde{x}^{(i)} = (\sqrt{nP_x})_i^\top, \quad i = 1, \dots, n, \quad (58b)$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = -(\sqrt{nP_x})_i^\top, \quad i = 1, \dots, n. \quad (58c)$$

em que $\sqrt{nP_x}$ é a raiz quadrada matricial de nP_x tal que $(\sqrt{nP_x})^T \sqrt{nP_x} = nP_x$, e $(\sqrt{nP_x})_i$ é a i -ésima linha de $\sqrt{nP_x}$.

Cada ponto sigma é, então, propagado através da função não linear do sistema

$$y = \mathbf{f}(x^{(i)}). \quad (59)$$

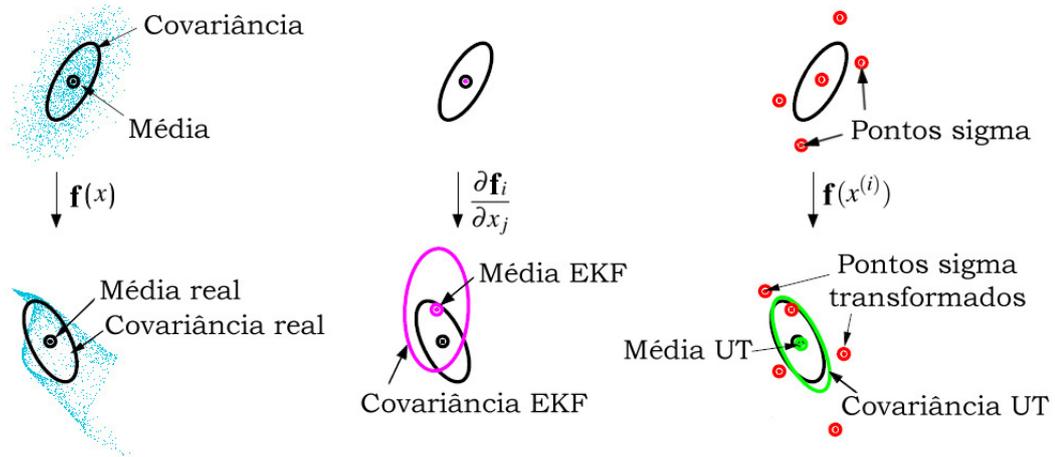
Os pontos transformados são utilizados para computar a média e a covariância do valor previsto de y , ponderadas por $2n$, levando em conta a covariância do ruído do modelo $Q(k)$, conforme equações (60)–(61)

$$\bar{y} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} y^{(i)}, \quad (60)$$

$$P_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} (y^{(i)} - \bar{y})(y^{(i)} - \bar{y})^T. \quad (61)$$

A Figura 10 ilustra esse processo. Os pontos sigma são determinados ao redor da média da distribuição original, passam pela função não linear que rege o sistema dinâmico e, posteriormente, ao calcular a média e covariância dos pontos sigma transformados, tem-se um resultado suficientemente próximo da média e covariância reais, considerando o gasto computacional.

Figura 10: Transformada *unscented* para propagação de média e covariância
Real (amostragem) Linearização (EKF) Transformada *unscented*



Fonte: adaptado de Wan e Merwe (2001).

3.3.2.4 Recursão do UKF

Para a recursão do UKF, considera-se um sistema não linear em tempo discreto k com n variáveis de estado representado pelas equações (45) e (46), em que $\mathbf{w}(k) \sim (0, Q(k))$ e $\mathbf{v}(k) \sim (0, R(k))$.

Inicialização: Na etapa de inicialização, a estimativa de estado e a covariância do erro da estimativa iniciais, são determinadas dadas por:

$$\hat{x}(0|0) = E[x(0) | z(0)], \quad (62)$$

$$P(0|0) = E\{[x(0) - \hat{x}(0|0)][x(0) - \hat{x}(0|0)]^T | z(0)\}. \quad (63)$$

Previsão: As equações (64)–(67) são utilizadas para propagar a estimativa de estado e covariância para o instante de tempo k a partir das atualizações obtidas no instante de tempo $k - 1$. Primeiramente, calculando os pontos sigma:

$$\hat{x}(k-1)^{(i)} = \hat{x}(k-1|k-1) + \tilde{x}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (64a)$$

$$\tilde{x}^{(i)} = \left(\sqrt{nP_x(k-1|k-1)} \right)_i^\top, \quad i = 1, \dots, n, \quad (64b)$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = - \left(\sqrt{nP_x(k-1|k-1)} \right)_i^\top, \quad i = 1, \dots, n. \quad (64c)$$

A função não linear do sistema $\mathbf{f}(\cdot)$ é utilizada para transformar os pontos sigma em vetores $\hat{x}(k)^{(i)}$ que são combinados para obter o vetor de estados previsto $\hat{x}(k|k-1)$

$$\hat{x}(k)^{(i)} = \mathbf{f} \left[\hat{x}(k-1)^{(i)} \right], \quad (65)$$

$$\hat{x}(k|k-1) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{x}(k)^{(i)}. \quad (66)$$

A covariância do erro de estimativa é dada pela equação (67)

$$P_x(k|k-1) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left[\hat{x}(k)^{(i)} - \hat{x}(k|k-1) \right] \left[\hat{x}(k)^{(i)} - \hat{x}(k|k-1) \right]^\top + Q(k-1) \quad (67)$$

como mostrado na equação (61), mas com a adição do termo $Q(k-1)$ para levar em conta o ruído do processo.

Atualização: Terminada a etapa de previsão, os pontos sigma podem ser calculados novamente pois agora os melhores palpites para média e covariância são $\hat{x}(k|k-1)$ e $P_x(k|k-1)$:

$$\hat{x}(k)^{(i)} = \hat{x}(k|k-1) + \tilde{x}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (68a)$$

$$\tilde{x}^{(i)} = \left(\sqrt{nP_x(k|k-1)} \right)_i^\top, \quad i = 1, \dots, n, \quad (68b)$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = - \left(\sqrt{nP_x(k|k-1)} \right)_i^\top, \quad i = 1, \dots, n. \quad (68c)$$

São calculados os vetores de previsão das medidas $\hat{z}(k)^{(i)}$, a partir da função $\mathbf{h}(\cdot)$, que são combinados para obter a medida prevista $\hat{z}(k)$

$$\hat{z}(k)^{(i)} = \mathbf{h} \left[\hat{x}(k)^{(i)} \right], \quad (69)$$

$$\hat{z}(k) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{z}(k)^{(i)}. \quad (70)$$

A covariância do erro de previsão é dada pela equação (71)

$$P_z = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left[\hat{z}(k)^{(i)} - \hat{z}(k) \right] \left[\hat{z}(k)^{(i)} - \hat{z}(k) \right]^T + R(k), \quad (71)$$

como mostrado na equação (61), mas com a adição do termo $R(k)$ para levar em conta o ruído de medição.

É calculada a covariância cruzada entre $\hat{x}(k|k-1)$ e $\hat{z}(k)$

$$P_{xz} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left[\hat{x}(k)^{(i)} - \hat{x}(k|k-1) \right] \left[\hat{z}(k)^{(i)} - \hat{z}(k) \right]^T. \quad (72)$$

O ganho de Kalman $K(k)$ é calculado e, então, atualiza-se a estimativa de estado e a covariância do erro de estimativa

$$K(k) = P_{xz} P_z^{-1}, \quad (73)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k) [z(k) - \hat{z}(k)], \quad (74)$$

$$P_x(k|k) = P_x(k|k-1) - K(k) P_z K(k)^T. \quad (75)$$

3.4 FILTRO IMM

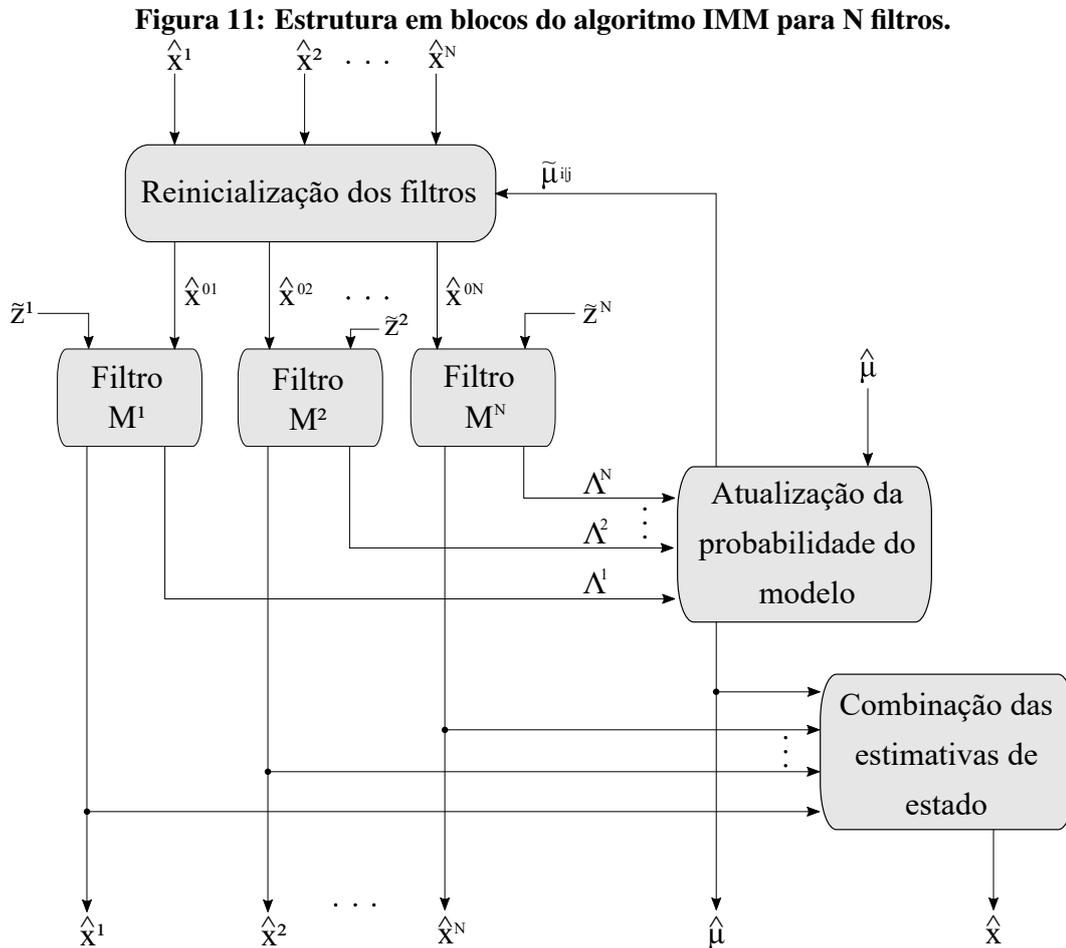
3.4.1 Introdução

A estimação de estados de alvos manobrantemente geralmente requer o uso de múltiplos modelos dinâmicos que descrevem o comportamento variante do alvo. Para limitar o custo computacional do algoritmo e ao mesmo tempo conseguir o desempenho desejado, o gerenciamento eficiente dos modelos dinâmicos é de grande importância. Tal necessidade pode ser alcançada com o uso de um filtro IMM.

O filtro IMM é um método de combinação de hipóteses de estados a partir de múltiplos filtros e modelos dinâmicos para obter uma melhor estimativa de estados de alvos com dinâmica variante no tempo. Os filtros utilizados no IMM para cada hipótese de estado são selecionados de forma a corresponder com o comportamento do sinal naquele instante. A escolha dos filtros dentro do algoritmo IMM é regida por uma cadeia de Markov subjacente que controla a comutação entre os múltiplos modelos.

Alguns sistemas de rastreamento empregam somente um filtro para fazer a estimação da posição do alvo. Esse tipo de sistema apresenta problemas quando a matriz de transição de estados utilizada pelo filtro não segue uma modelagem matemática adequada e precisa. O uso

de múltiplos filtros permite que o sistema de rastreamento se adeque à dinâmica de movimento do alvo. A Figura 11 ilustra o funcionamento do filtro IMM com N modelos.



Fonte: Adaptado de Genovese (2001).

O processo começa com os valores calculados na iteração prévia do filtro. Um processo de inicialização se faz necessário para obter a estimativa de estado, covariância e probabilidade iniciais para cada modelo na primeira execução.

As estimativas de estado para cada modelo, $\hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2, \dots, \hat{\mathbf{x}}^N$, provenientes do ciclo anterior do filtro IMM, são associadas utilizando um conjunto condicional de probabilidades previsto $\tilde{\mu}^{ij}$, que é calculado através das probabilidades dos modelos no ciclo anterior, e a matriz Π , uma matriz quadrada de ordem N que indica a probabilidade de o filtro alternar entre o modelo M^i e o modelo M^j .

A verossimilhança para cada modelo, Λ^i , é calculada durante a atualização de estados a partir da inovação $\tilde{\mathbf{z}}^i$ e da matriz de covariância da inovação. A verossimilhança, a probabilidade prevista do modelo e a matriz de mudança de modelos são utilizadas para

atualizar a probabilidade do modelo. As estimativas provenientes de cada modelo M^i são combinadas como uma soma ponderada pela probabilidade atualizada, $\hat{\mu}$.

As equações que regem o algoritmo IMM são desenvolvidas na próxima seção.

3.4.2 Estrutura do Filtro IMM

As equações que regem o algoritmo IMM, adaptadas para este trabalho, foram baseadas em Bar-Shalom *et al.* (2004) e Genovese (2001). Com o intuito de simplificar a notação, as equações nesta Seção se dão no tempo discreto k ao invés de $k + 1$ como fora tratado até então neste trabalho.

Completada a inicialização de cada um dos modelos e após o primeiro ciclo de filtragem, as estimativas de estado e covariâncias de cada modelo são combinadas utilizando a probabilidade condicional $\tilde{\mu}^{ij}$. A combinação das estimativas de estado e covariância do erro de estimativa para o modelo M^j no passo $k + 1$ são dadas pelas expressões (76)-(77)

$$\hat{\mathbf{x}}^{0j}(k|k) = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) \tilde{\mu}^{ij}(k), \quad (76)$$

$$P^{0j}(k|k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}^{ij}(k) \left\{ P^i(k|k) [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}^{0j}(k|k)] [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}^{0j}(k|k)]^T \right\}, \quad (77)$$

em que

$$\tilde{\mu}^{ij}(k) = \frac{1}{\bar{c}^j} p^{ij} \hat{\mu}^i(k) \quad (78)$$

e

$$\bar{c}^j = \sum_{i=1}^N p^{ij} \mu^i(k), \quad (79)$$

em que p^{ij} é o elemento na linha i e coluna j da matriz de transição Π , que define a probabilidade *a priori* para alternar do modelo M^i para o modelo M^j e \bar{c}^j é um vetor de normalização usado para manter a probabilidade total unitária.

A verossimilhança de cada modelo é calculada por meio da inovação $\tilde{\mathbf{z}}^j(k)$ vinda da atualização de estado e da covariância da inovação S^j . Assumindo distribuições gaussianas, a verossimilhança do modelo M^j é dada pela expressão (80)

$$\Lambda^j(k) = \frac{1}{\sqrt{\det[2\pi S^j(k)]}} e^{\left\{ -0,5 [\tilde{\mathbf{z}}^j(k)^T S^{j-1}(k) \tilde{\mathbf{z}}^j(k)] \right\}} \quad (80)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{z}}^j(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}^j(k|k-1), \quad (81)$$

$$S^j(k) = R(k) + H(k)P^{0j}(k|k-1)H(k)^\top, \quad (82)$$

em que, de maneira similar às equações (38)–(39) que definem inovação e covariância da inovação para o filtro de Kalman convencional, $\mathbf{z}(k)$ representa o vetor de observações no tempo k e $\hat{\mathbf{z}}^j(k|k-1)$ é o estado previsto pelo filtro M^j transformado para a dimensão das observações.

A probabilidade do modelo é a próxima grandeza a ser atualizada e se dá conforme equação (83)

$$\hat{\mu}^j(k) = \frac{1}{c} \Lambda^j \bar{c}^j, \quad (83)$$

com

$$c = \sum_{i=1}^N \Lambda^i \bar{c}^i, \quad (84)$$

em que $\hat{\mu}^j(k)$ é a probabilidade atualizada para o modelo M^j e c é uma constante de normalização.

Por fim, a estimativa global e a covariância do erro da estimativa global são calculadas por meio das estimativas atualizadas de cada modelo ponderadas pelas probabilidades dos modelos atualizadas:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) \hat{\mu}^i(k), \quad (85)$$

$$P(k|k) = \sum_{i=1}^N \hat{\mu}^i(k) \left\{ P^i(k|k) [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)] [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]^\top \right\}. \quad (86)$$

Na tabela 5 constam todas as equações necessárias para o filtro IMM.

Tabela 5: Equações do filtro IMM

$$\hat{\mathbf{x}}^{0j}(k|k) = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) \tilde{\mu}^{ij}(k) \quad (76)$$

$$P^{0j}(k|k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}^{ij}(k) \{P^i(k|k) [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}^{0j}(k|k)] [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}^{0j}(k|k)]^\top\} \quad (77)$$

$$\tilde{\mu}^{ij}(k) = \frac{1}{\bar{c}^j} p^{ij} \hat{\mu}^i(k) \quad (78)$$

$$\bar{c}^j = \sum_{i=1}^N p^{ij} \mu^i(k) \quad (79)$$

$$\Lambda^j(k) = \frac{1}{\sqrt{\det[2\pi S^j(k)]}} e^{\left\{-0,5 [\tilde{\mathbf{z}}^j(k)^\top S^{j-1}(k) \tilde{\mathbf{z}}^j(k)]\right\}} \quad (80)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}^j(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}^j(k|k-1) \quad (81)$$

$$S^j(k) = R(k) + H(k) P^{0j}(k|k-1) H(k)^\top \quad (82)$$

$$\hat{\mu}^j(k) = \frac{1}{c} \Lambda^j \bar{c}^j \quad (83)$$

$$c = \sum_{i=1}^N \Lambda^i \bar{c}^i \quad (84)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) \hat{\mu}^i(k) \quad (85)$$

$$P(k|k) = \sum_{i=1}^N \hat{\mu}^i(k) \{P^i(k|k) [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)] [\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]^\top\} \quad (86)$$

Fonte: Os autores.

Para implementar os filtros estocásticos de modo a estimar os estados de um dado sistema, é necessário algumas informações, como a dinâmica do sistema, a incerteza do modelo, medições do sistema e as incertezas dessas medições. Para tal, foi desenvolvido um simulador computacional de trajetórias baseado na movimentação de atletas. Detalhes do simulador, assim como alguns resultados de simulação e conceitos gerais de rastreamento são apresentados no Capítulo 4.

4 SIMULADOR DE TRAJETÓRIAS

Em diversos problemas de engenharia, ao modelar matematicamente um certo sistema, é bastante comum abordar tais situações com base em dados gerados a partir de *softwares* numéricos. Alguns exemplos podem ser encontrados em Mellit *et al.* (2007) e Onar *et al.* (2008).

Um dos problemas que lidam diretamente com a captura e geração de dados é o de rastreamento de objetos a partir de filtros estocásticos, como o filtro de Kalman, existe a necessidade de possuir dados reais—o qual pode não ter fácil acesso—ou gerar um conjunto de observações ou medidas ruidosas de tal maneira a fazer com que estes dados sirvam como a entrada de um filtro estocástico. Dessa forma, a ideia da construção de um simulador numérico para a geração de medidas ruidosas, com o intuito de testar filtros estocásticos, faz-se mais do que necessária.

Ainda dentro do problema de rastreamento de objetos, podemos definir o objeto como sendo qualquer corpo que possua uma certa dinâmica e, baseado em tal dinâmica, esse objeto cria uma trajetória no plano ou no espaço, dependendo do problema a ser analisado. Este objeto pode ser desde aeronaves (LI; JILKOV, 2003a) e veículos terrestres (CUI *et al.*, 2005), até mesmo pessoas (FRENCL; VAL, 2016). Considerando pessoas como o objeto a ser rastreado, pode-se aplicar tal situação a uma partida de futebol.

Na literatura, é possível encontrar diversas aplicações de rastreamento das trajetórias de atletas de futebol utilizando filtros estocásticos, porém grande parte utiliza a captura de imagens para realizar medidas de posição dos jogadores, como em Xu *et al.* (2004), Beetz *et al.* (2007) e Figueroa *et al.* (2006). No entanto, estes sistemas possuem um custo bastante elevado, pelo fato da necessidade de câmeras de vídeo, além da aplicação de algoritmos de processamento de imagens, cujo foco é diferente do que se propõe este trabalho.

Uma das propostas deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi desenvolver um simulador de trajetórias baseado na movimentação de atletas. Este simulador tem como principal objetivo gerar medidas ruidosas de trajetórias de jogadores e utilizá-las para avaliar

o desempenho dos filtros estocásticos apresentados no Capítulo 3 realizando a estimativa de grandezas como posição e velocidade.

Além de apresentar os detalhes do simulador, alguns resultados mostrando algumas trajetórias simuladas de jogadores, inclusive com o deslocamento de movimentação para evitar jogadores adversários, são apresentados.

4.1 RASTREAMENTO

O objetivo principal do rastreamento de objetos é estimar as trajetórias de estado de um objeto móvel. Embora um objeto quase nunca seja realmente um ponto no espaço e as informações sobre sua orientação sejam valiosas para rastreamento. Em um modelo dinâmico, o movimento do objeto descreve a evolução do estado em relação ao tempo. Eles assumem que o objeto e suas observações podem ser representados por alguns modelos matemáticos conhecidos com precisão suficiente.

Os modelos mais comumente usados são aqueles conhecidos como modelos de espaço de estados, na seguinte forma de ruído aditivo, já apresentados nas equações (33) e (34):

$$\begin{aligned}x(k+1) &= F(k)\mathbf{x}(k) + G(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \\z(k) &= H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k),\end{aligned}$$

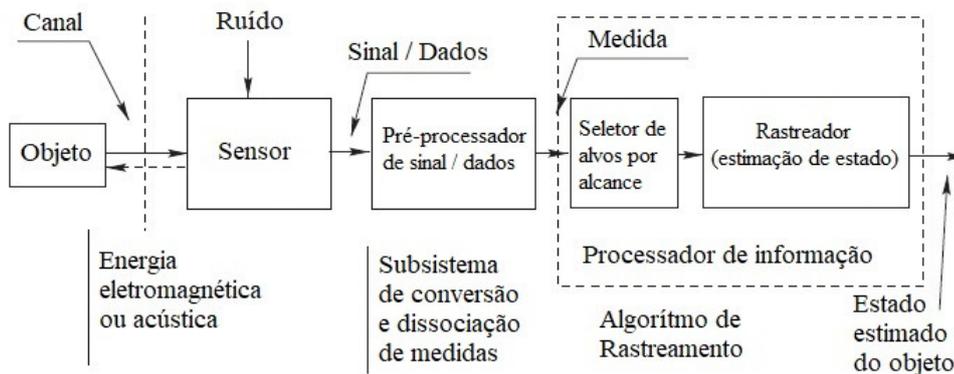
em que $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{z}(k)$ e $\mathbf{u}(k)$ são os vetores de estado, medição e controle, respectivamente, no domínio discreto de tempo; $\mathbf{w}(k)$ é sequência do ruído de processo e $\mathbf{v}(k)$ é sequência do ruído de medição; $F(k)$ e $H(k)$ as matrizes de transição de estado.

A chave para que o rastreamento de um objeto seja bem-sucedido está na extração efetiva de informações úteis sobre o estado deste a partir de observações. Um bom modelo do objeto certamente facilitará essa extração de informações (LI; JILKOV, 2003a). Generalizando, o modelo de movimento de destino é um processo estocástico que descreve, em um sentido probabilístico, como o objeto se em uma região planar ou espacial.

Um dos maiores desafios para o rastreamento de objetos surge da incerteza do movimento do mesmo. Essa incerteza refere-se ao fato de que um modelo dinâmico preciso do objeto que está sendo rastreado não está disponível para o rastreador. Especificamente, um rastreador não tem conhecimento sobre a entrada de controle real $\mathbf{u}(k)$ do objeto e, possivelmente, a forma real f de seus parâmetros ou propriedades estatísticas e do ruído \mathbf{w} . A modelagem de movimento do objeto é, portanto, uma das primeiras tarefas para compreender o rastreamento de alvos (LI; JILKOV, 2003b).

O rastreamento de objetos costuma ser considerado como um problema de estimativa de estado, em que se busca determinar variáveis como posição, velocidade e aceleração a partir de medições ruidosas. No geral, um sistema de rastreamento consiste em um objeto a ser rastreado, um sensor para medir alguma grandeza em relação ao objeto, um sinal pré-processado e um processador de informação (CHALLA *et al.*, 2011). O esquema é representado pela Figura 12.

Figura 12: Sistema de Rastreamento de Objeto.



Fonte: Adaptado de (CHALLA *et al.*, 2011).

Existem dois grandes problemas no rastreamento de objetos: a incerteza da origem de medição e a incerteza do movimento do objeto. A aplicabilidade de um modelo dinâmico para um problema prático dificilmente pode ser avaliada sem se referir aos algoritmos de rastreamento utilizados.

4.2 MODELOS MATEMÁTICOS

Em geral, simuladores de dados baseiam-se em modelos matemáticos, definido previamente, de tal forma a representar o comportamento do sistema modelado da maneira mais verossímil possível.

Quando simulam-se trajetórias de aeronaves ou veículos terrestres, seus modelos são bem definidos (STEVENS *et al.*, 2015), (PUNZO *et al.*, 2011). Nos casos em que as trajetórias estão ligadas à movimentação de pessoas, o modelo dinâmico da pessoa não é bem definido como nos casos citados anteriormente.

Inicialmente, com o intuito de simplificar a movimentação, assumiu-se uma trajetória linear para o indivíduo. Porém, as pessoas não possuem uma trajetória totalmente linear e podem mudar de direção espontaneamente. Por isso, houve a necessidade de criar um

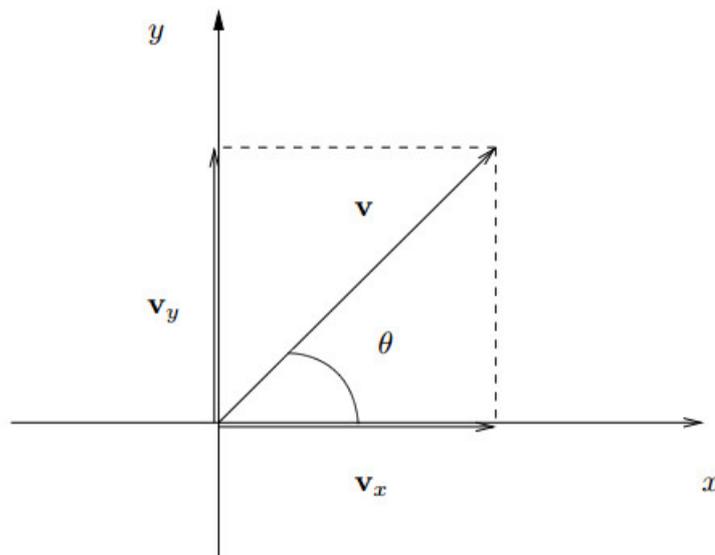
padrão de incerteza na movimentação.

A seguir, serão detalhados os modelos matemáticos incorporados ao simulador proposto, com base em grandezas físicas, como o posicionamento e a velocidade dos jogadores.

4.2.1 Modelo Dinâmico baseado na Movimentação de Pessoas

O comportamento errático das trajetórias de pessoas não costuma ser facilmente modelado. Desta forma, utiliza-se um recurso de tal forma a introduzir uma aleatoriedade da movimentação do indivíduo. Esta aleatoriedade pode ser incluída, por exemplo, no ângulo do vetor velocidade da pessoa em movimento. Para isso, considera-se a composição vetorial ilustrada na Figura 13.

Figura 13: Direção do vetor velocidade do jogador localizado no plano cartesiano xy .



Fonte: Os autores.

Levando em conta tal composição vetorial e uma movimentação em velocidade constante, pode-se modelar matematicamente tal comportamento a partir do seguinte modelo a tempo discreto ($k \in \mathbb{N}$):

$$x(k+1) = x(k) + |v_x(k)|T, \quad (87)$$

$$y(k+1) = y(k) + |v_y(k)|T, \quad (88)$$

$$v(k+1) = v(k), \quad (89)$$

em que $x \in \mathbb{R}$ é a posição da pessoa em relação ao eixo das abcissas, $y \in \mathbb{R}$ é a posição da pessoa em relação ao eixo das ordenadas, $v_x \in \mathbb{R}^2$ é a projeção do vetor velocidade na direção

do eixo x , $\mathbf{v}_y \in \mathbb{R}^2$ é a projeção do vetor velocidade na direção do eixo y , $v(k)$ é o módulo do vetor velocidade \mathbf{v} e $T > 0$ é o período de amostragem.

Para apresentar de forma mais clara a inclusão da aleatoriedade proposta do modelo, as equações (87) e (88) podem ser expandidas com base nas projeções do vetor velocidade \mathbf{v} , ou seja:

$$x(k+1) = x(k) + v(k) \cos(\theta)T, \quad (90)$$

$$y(k+1) = y(k) + v(k) \text{sen}(\theta)T, \quad (91)$$

em que θ é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, isto é, $\theta \sim \mathcal{U}(a, b)$, em que a e b dependem do quadrante do destino, com relação ao posicionamento da pessoa. Por exemplo, se o destino estiver abaixo e à direita da pessoa, o intervalo de definição da variável aleatória θ é $[270^\circ, 360^\circ]$.

Note que o modelo agora apresenta uma aleatoriedade na direção que a pessoa toma, com base em sorteios uniformes do ângulo θ .

4.2.2 Modelo Estocástico baseado na Movimentação de Pessoas

Sob o ponto de vista da geração de dados ruidosos, cujo intuito é a sua utilização em filtros estocásticos, é necessário incluir uma nova variável que represente tal distúrbio. Essa variável é o vetor $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^3$, cuja distribuição é gaussiana, com média nula e matriz de covariância constante, isto é, $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$. Sua interferência afeta as três componentes do modelo utilizado: posição $x(k)$, posição $y(k)$ e velocidade $v(k)$.

Dessa forma, o modelo composto pelas equações (89)–(91) passa a ser definido pelo seguinte modelo estocástico:

$$x(k+1) = x(k) + v(k) \cos(\theta)T + w_x(k), \quad (92)$$

$$y(k+1) = y(k) + v(k) \text{sen}(\theta)T + w_y(k), \quad (93)$$

$$v(k+1) = v(k) + w_v(k), \quad (94)$$

em que w_x , w_y e w_v são as componentes do vetor \mathbf{w}_k .

Considerando o modelo estocástico representado pelas equações (92)–(94), o simulador de trajetória de pessoas—mais especificamente de jogadores de futebol—é detalhado a seguir, com a descrição do seu funcionamento e dos parâmetros envolvidos.

4.3 SIMULADOR DE TRAJETÓRIAS DE JOGADORES

O simulador de trajetórias proposto neste trabalho é formado pela ligação entre diversas rotinas, que são: (i) a geração de pontos de partida e de chegada, (ii) a geração dos ruídos que criam os distúrbios nas medidas, (iii) o desenho do campo – já considerando os limites oficiais e (iv) a geração das trajetórias propriamente ditas.

Para a criação das trajetórias, que têm como base o modelo estocástico descrito pelas equações (92)–(94), levam-se em conta a variação angular e os desvios que a trajetória pode fazer, evitando obstáculos no caminho, simulando dribles em jogadores do time adversário. Tais trajetórias tendem a ser fiéis ao movimento de jogadores durante uma partida de futebol. Essas trajetórias são geradas de duas maneiras distintas: de forma linear e com variação angular, baseada na variável aleatória θ .

4.3.1 Pontos de Referência

Para que a trajetória do jogador seja gerada, partindo da sua localização atual até o seu posicionamento final no campo, por exemplo, foram definidos os pontos de partida e os pontos de chegada, denominados pontos de referência. Eles são simbolizados por um “x” na cor vermelha e uma circunferência na cor azul, respectivamente. Quando a trajetória gerada possuir um ponto intermediário, este será simbolizado por um quadrado na cor ciano. A Figura 14 ilustra o formato destes pontos.

Figura 14: Símbolos de partida, chegada e ponto intermediário.



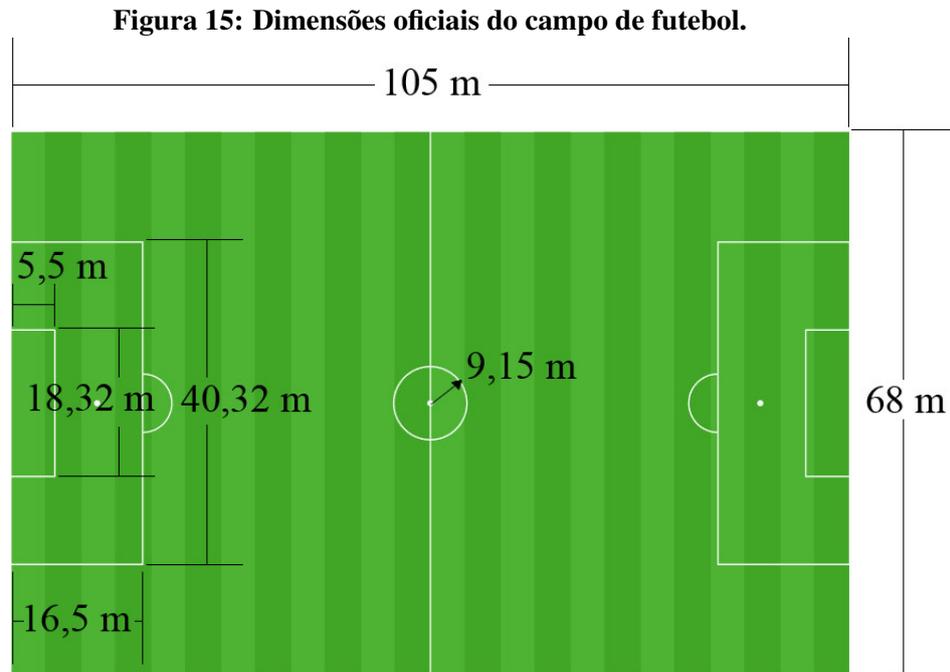
Fonte: Os autores.

Dessa forma, as trajetórias a serem geradas pelo simulador são limitadas por estes símbolos

4.3.2 Dimensões do Campo de Futebol

Como as trajetórias a serem geradas têm como base as movimentações de jogadores de futebol, a ocorrência destas trajetórias devem ser limitadas às dimensões oficiais de um campo onde ocorrem as partidas de futebol.

Dessa maneira, o campo criado para o simulador foi pensado de forma a acompanhar o padrão imposto pela Confederação Brasileira de Futebol (CBF) para os clubes de futebol das séries A e B (Acessoria CBF, 2016). Desta forma, as dimensões do campo seguem as medidas de acordo com a ilustração da Figura 15.



Fonte: Os autores.

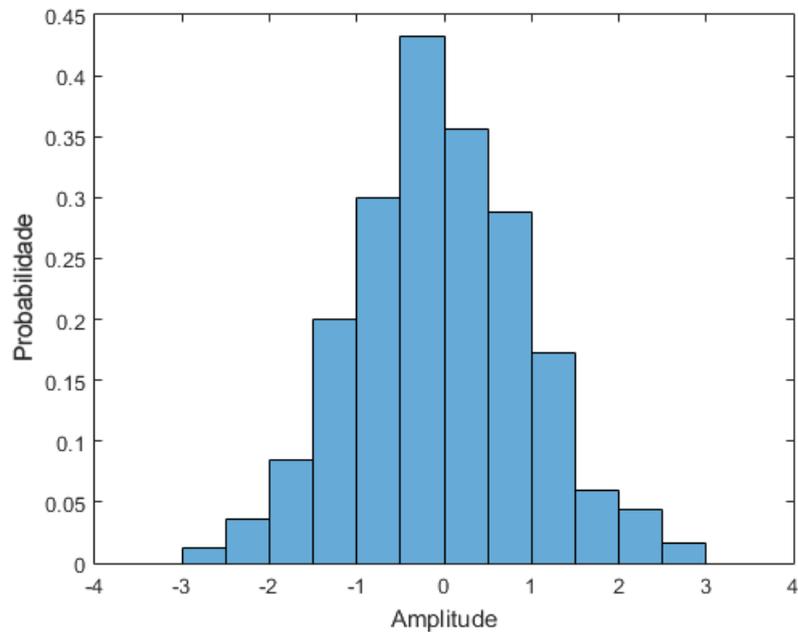
Note que o campo gerado computacionalmente leva em conta não somente os limites laterais, mas também as dimensões de áreas, círculos e semi-círculos no interior do campo.

4.3.3 Distúrbios nas Medidas das Trajetórias

Um dos propósitos do simulador de trajetórias é gerar os dados de posição dos jogadores com ruídos aditivos para representar distúrbios nas medidas de posição dos jogadores. Como descrito na Seção 4.2.2, o ruído introduzido possui uma distribuição gaussiana, com média nula e matriz de covariância constante.

Na Figura 16, ilustra-se a função densidade de probabilidade de uma das componentes do vetor \mathbf{w}_k a partir de um histograma com 500 amostras, com base nas informações de média nula e variância unitária. O formato do histograma de amostras obtido na Figura 16 é aquele esperado para uma variável aleatória com distribuição gaussiana de média nula.

Figura 16: Histograma – Função densidade de probabilidade.



Fonte: Os autores.

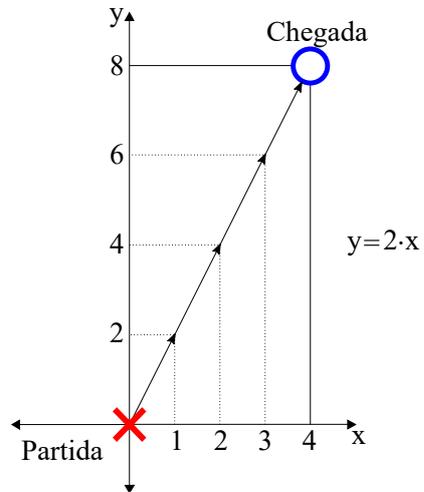
4.3.4 Trajetória Retilínea

As trajetórias dos jogadores podem ser aproximadas por composições de trechos retilíneos. Desta forma, as trajetórias simuladas foram criadas de modo a simplificar a reprodução da movimentação de um atleta em campo.

Sendo assim, o cálculo da trajetória foi feito de forma baseada em uma equação da reta sem coeficiente linear, isto é, $y = f(x) = ax$. Desta forma, a cada passo do cálculo da trajetória, fez-se um incremento unitário na componente vertical, e na componente horizontal, foi feito um incremento relacionado ao valor do coeficiente angular a , ou seja, a razão entre a distância horizontal e a distância vertical.

A Figura 17 ilustra este processo. O ponto de chegada é o par ordenado $(4, 8)$, partindo da origem, $(0, 0)$. Com isso, a cada passo do cálculo de trajetória será adicionado uma unidade em y e em x , será adicionado a razão entre a componente horizontal com a vertical, que vale 0,5. As Figuras 18 e 19 ilustram dois casos de trajetórias retilíneas: uma trajetória linear sem ruído e uma trajetória linear com ruído, respectivamente.

Figura 17: Exemplo de trajetória linear.



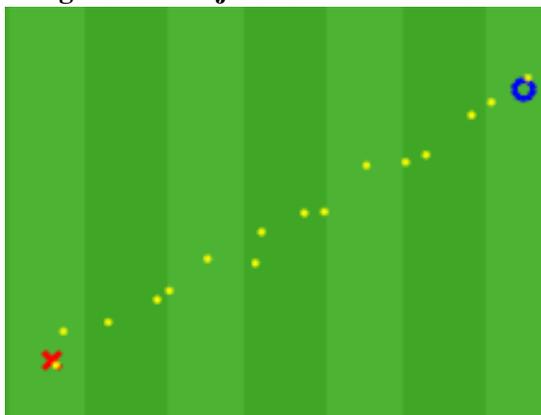
Fonte: Os autores.

Figura 18: Trajetória linear sem ruído.



Fonte: Os autores.

Figura 19: Trajetória linear com ruído.

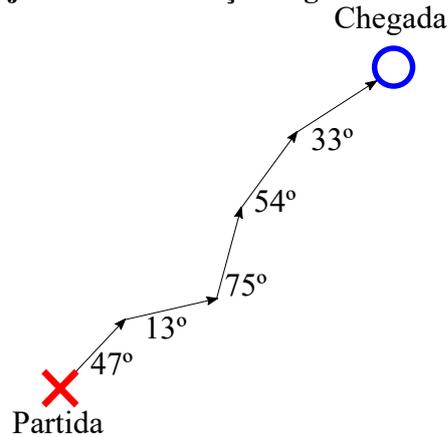


Fonte: Os autores.

4.3.5 Trajetória com Variação Angular

Para fazer com que as trajetórias dos jogadores possuam a aleatoriedade modelada pelas equações (92)–(94), sorteia-se um ângulo considerando uma distribuição uniforme para que a o novo ponto da trajetória seja traçado com esta angulação com relação ao eixo horizontal. A Figura 20 ilustra este processo.

Figura 20: Trajetória com variação angular em relação ao eixo x .

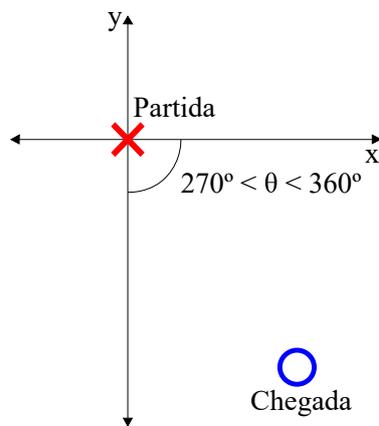


Fonte: Os autores.

A cada etapa do movimento, é verificada a posição do destino final com relação ao ponto atual. Dessa forma, o movimento é traçado nesta direção, sorteando ângulos somente do quadrante em questão.

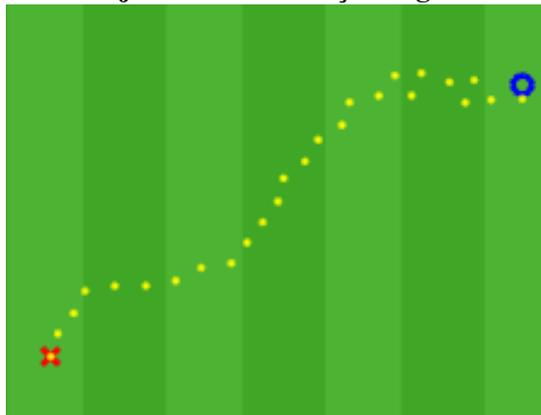
A Figura 21 ilustra uma situação em que o destino está no quarto quadrante com relação ao indivíduo. Assim, o ângulo será sorteado entre 270° e 360° , para que o movimento seja na direção do destino fixado inicialmente. As Figuras 22 e 23 mostram duas trajetórias diferentes geradas no simulador pelo método de variação angular, sem e com ruído de medição, respectivamente.

Figura 21: Destino do indivíduo localizado no quarto quadrante (entre 270° e 360°).



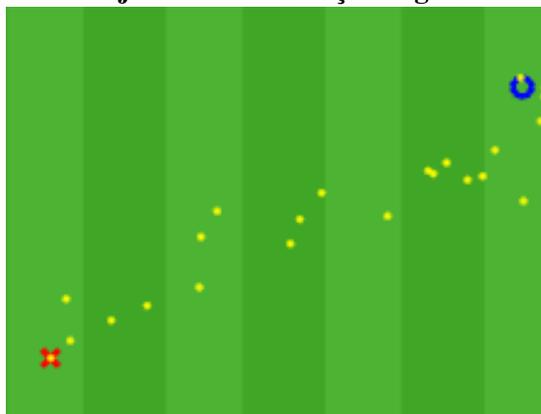
Fonte: Os autores.

Figura 22: Trajetória com variação angular sem ruído.



Fonte: Os autores.

Figura 23: Trajetória com variação angular com ruído.



Fonte: Os autores.

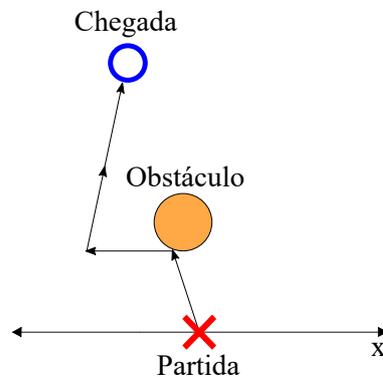
4.3.6 Desvio de Obstáculos

Uma característica do simulador proposto que é diretamente aplicável em situações de partidas de futebol é o desvio das trajetórias com o intuito de evitar obstáculos. Tal situação pode ser interpretada como um drible do jogador, resultando no contorno sobre o jogador adversário.

No trecho linear, ao se encontrar com um obstáculo, a trajetória inicia o processo de desvio em uma direção em que não haja obstáculos. Isso é feito pela escolha de um novo ângulo de direcionamento, de tal maneira que não exista nada a sua frente impedindo que o jogador atinja o próximo ponto da trajetória.

A Figura 24 ilustra essa situação: no trecho com variação angular, ao se deparar com um obstáculo em um certo quadrante, um quadrante adjacente, com um novo intervalo de possíveis ângulos a serem sorteados, é agregado ao quadrante original. Dessa forma, um novo ângulo é sorteado, até que um ângulo seja escolhido de tal maneira a permitir o desvio do adversário.

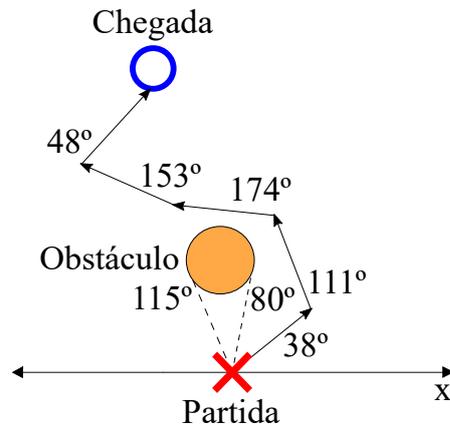
Figura 24: Desvio de obstáculo durante a trajetória retilínea.



Fonte: Os autores.

A Figura 25 exemplifica o cenário que leva em conta a variação angular. Neste caso, como o destino está no segundo quadrante em relação ao indivíduo, o movimento se dá sorteando ângulos no intervalo entre 90° e 180° . No entanto, sua trajetória se encontra bloqueada entre os ângulos de 80° a 115° . Dessa forma, um intervalo de 0° a 90° é incluído aos ângulos possíveis, fazendo com que a trajetória possa ocorrer desde 0° até 180° , de modo que o obstáculo possa ser contornado por qualquer direção dentro desta união de quadrantes. Dessa forma, novos ângulos são sorteados até que um destes ângulos esteja fora da faixa da posição do obstáculo, permitindo o prosseguimento do movimento.

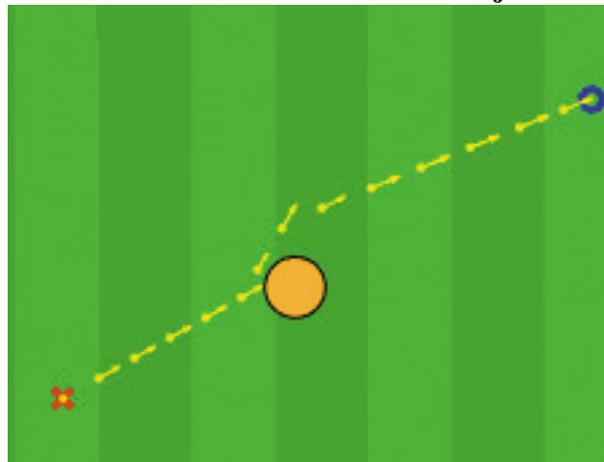
Figura 25: Desvio de obstáculo durante trajetória com variação angular.



Fonte: Os autores.

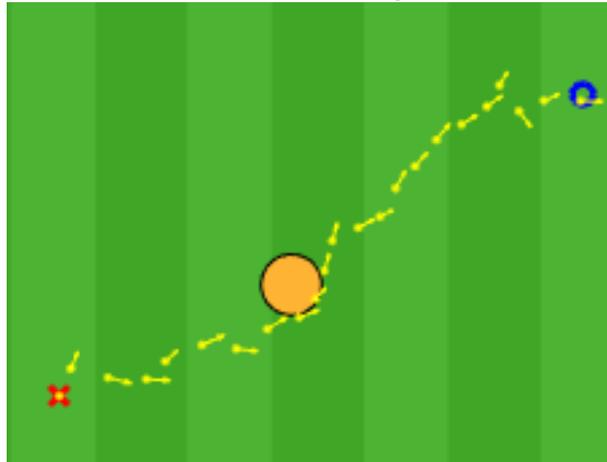
As Figuras 26 e 27 ilustram situações de desvio de obstáculos no simulador, com trajetória retilínea, e por meio de variação angular, respectivamente. As setas em amarelo que estão nos gráficos citados referem-se ao sentido da direção tomada pelo indivíduo, a partir do vetor velocidade, semelhantemente ao ilustrado nas Figuras 24 e 25.

Figura 26: Desvio de obstáculo durante trajetória linear.



Fonte: Os autores.

Figura 27: Desvio de obstáculo durante trajetória com variação angular.



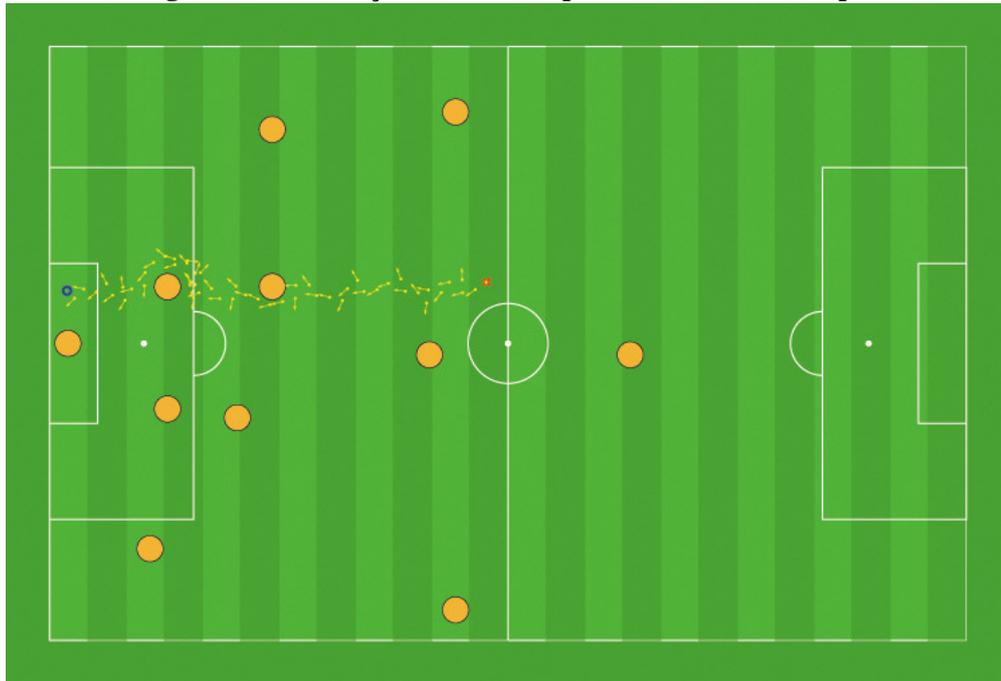
Fonte: Os autores.

4.3.7 Resultados de Simulação

Nesta seção, alguns cenários relacionados a jogadas que ocorrem frequentemente em partidas de futebol foram criados dentro do simulador de trajetórias proposto. Foram criadas três diferentes situações com base na mudança de alguns parâmetros do simulador, como o posicionamento dos pontos de partida e de chegada do jogador, além do posicionamento dos adversários.

Para o primeiro cenário –Figura 28– a situação envolve um jogador que, a partir do meio de campo, tenta uma infiltração entre dois jogadores adversários, posicionados de forma aleatória no campo. É possível notar que a trajetória executa o esperado, isto é, ela executa desvios ao encontrar os jogadores adversários.

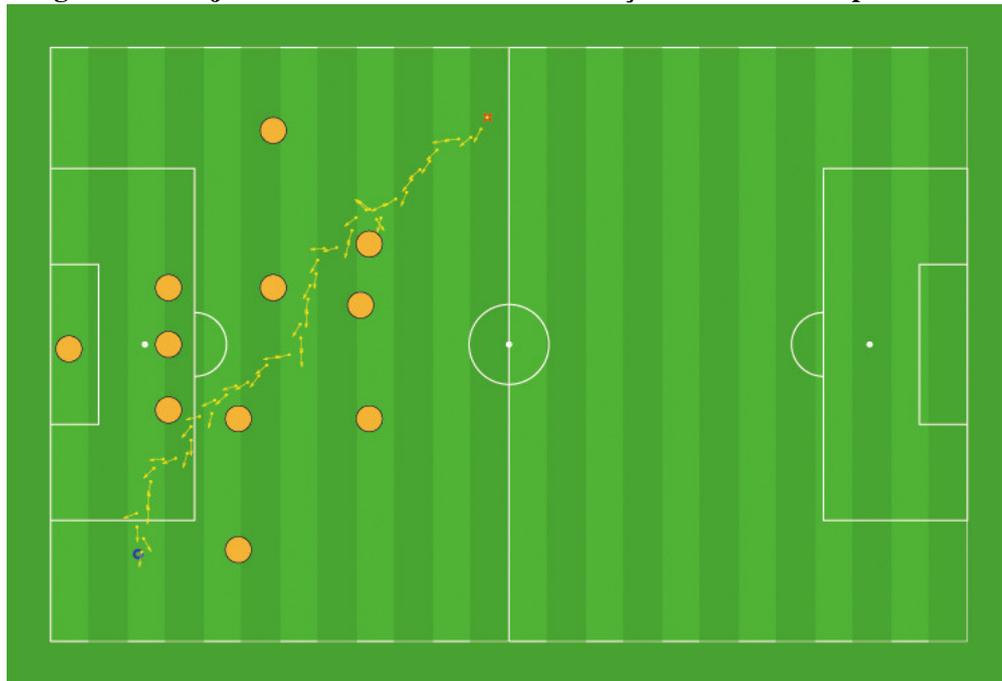
Figura 28: Infiltração realizada a partir do meio de campo.



Fonte: Os autores.

No segundo cenário para testes –Figura 29– houve uma mudança na formação tática defensiva do adversário, ou seja, o posicionamento adversário foi previamente determinado e passou a ser o denominado “3-4-3” (três adversários posicionados na linha de defesa, quatro posicionados na linha intermediária e três posicionados na linha de frente). Neste caso, o indivíduo cruzou o campo de uma lateral a outra, para a tentativa de um cruzamento, por exemplo.

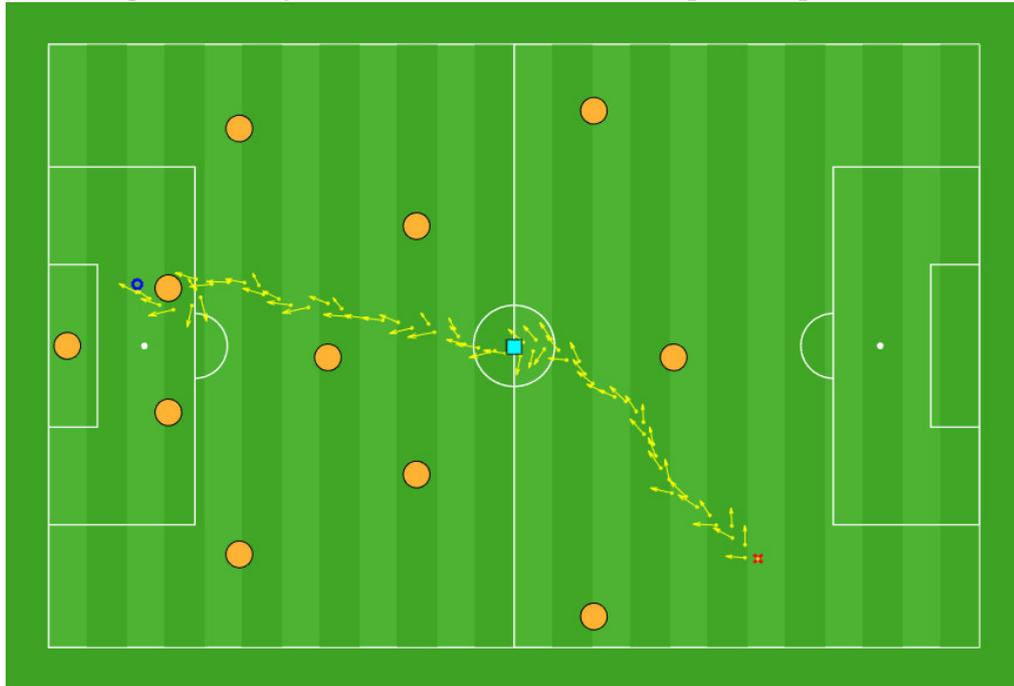
Figura 29: Trajetória realizada com uma formação defensiva do tipo “3-4-3”.



Fonte: Os autores.

O terceiro e último cenário –Figura 30– lida com uma situação diferente, pois a trajetória completa do jogador apresenta dois caminhos diferentes, formando uma trajetória multi-caminho. Para uma formação defensiva do adversário do tipo “4-3-3” (quatro adversários posicionados na linha de defesa, três posicionados na linha intermediária e três posicionados na linha de frente), o jogador, partindo de seu campo de defesa, se lança ao centro de campo e, em seguida, muda de direção, aproximando-se do ponto de chegada.

Figura 30: Trajetória multi-caminho realizada pelo campo inteiro.



Fonte: Os autores.

Algo também implementado foi a simulação de múltiplas trajetórias, mas optou-se por não mostrar tal resultado, pois o cenário apresenta diversas trajetórias simultâneas, poluindo excessivamente a figura.

O simulador é constituído na geração de trajetórias que representam uma movimentação, em velocidade constante, de um jogador de futebol, com uma aleatoriedade sobre o ângulo de direcionamento desta mesma trajetória. O modelo matemático inicial é classificado como determinístico, porém como um dos intuitos do simulador é gerar medidas ruidosas para aplicação futura em filtros estocásticos, complementou-se o modelo com ruídos aditivos com distribuição gaussiana, tornando-o um modelo estocástico. Dessa forma, foi possível gerar trajetórias ruidosas, inclusive com a característica de desvio de obstáculos—no caso, os jogadores adversários—que possam surgir eventualmente no caminho da trajetória.

Com o objetivo de aplicar filtros estocásticos nas trajetórias geradas pelo simulador, três trajetórias foram escolhidas. As trajetórias foram geradas de modo a possuírem características que as tornem objeto de aplicação apropriados, como trajetória longa, desvio de obstáculos, ponto intermediário ou curvas que possuem intensidades distintas. Essas características possibilitam analisar o comportamento dos diferentes filtros estocásticos em diferentes situações na mesma trajetória.

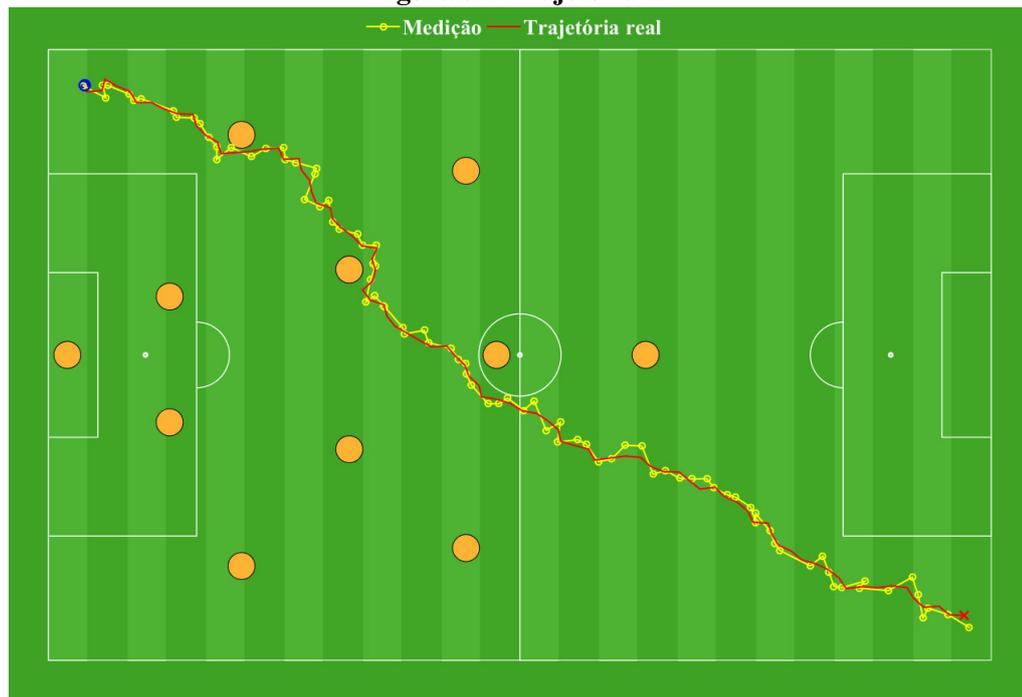
Para a criação das trajetórias, os seguintes parâmetros foram utilizados:

- Trajetória 1, ilustrada na Figura 31:

Ponto de partida: (105, 5);

Ponto de chegada: (4, 64).

Figura 31: Trajetória 1.



Fonte: Os autores.

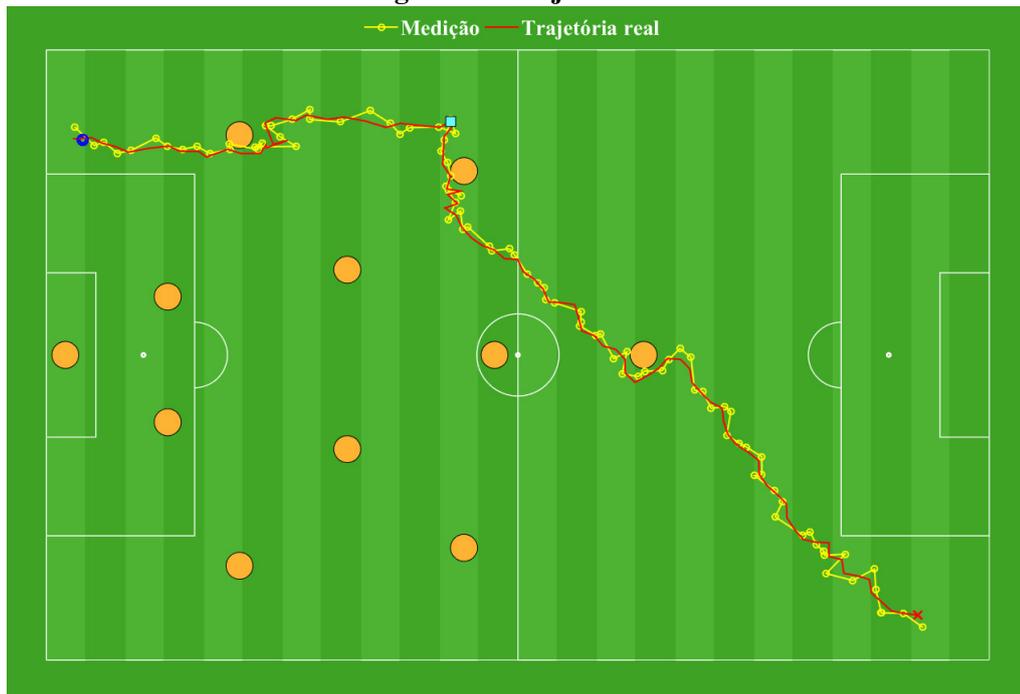
- Trajetória 2, ilustrada na Figura 32:

Ponto de partida: (97, 5);

Ponto intermediário (45, 60);

Ponto de chegada: (4, 58).

Figura 32: Trajetória 2.



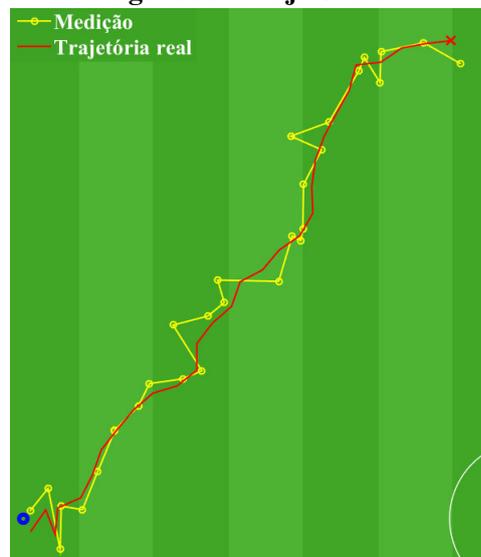
Fonte: Os autores.

- Trajetória 3, ilustrada na Figura 33:

Ponto de partida: (48, 62);

Ponto de chegada: (23, 34).

Figura 33: Trajetória 3.



Fonte: Os autores.

O ruído introduzido às medições possui uma distribuição gaussiana, com média nula e covariância constante $R = 0,6I_2$. Este valor será utilizado para todas as simulações presentes neste trabalho.

No Capítulo 5, os dados gerados são utilizados em filtros estocásticos para realizar o rastreamento do alvo que descreve as trajetórias.

5 SIMULAÇÕES E ANÁLISE DE RESULTADOS

A partir das medidas ruidosas obtidas pelo simulador e a formulação de diferentes filtros –KF, EKF, UKF e IMM– é possível implementá-los e analisar a ação destes filtros estocásticos em meio a ruídos aleatórios existentes no trajeto do jogador. O desempenho de cada filtro será ilustrado pelos resultados, imagens, análise do erro RMS e o valor absoluto do MSE – descrito na equação (10).

Os parâmetros utilizados para a análise dos resultados foram definido no Capítulo 4. O único valor que será modificado será a matriz de covariância de ruído do processo $Q(k)$ de cada filtro.

5.1 FILTRO DE KALMAN LINEAR

O primeiro filtro a ser abordado na seção de resultados será o filtro de Kalman linear, devido sua implementação ser mais simples em relação aos outros. O modelo dinâmico escolhido para este filtro foi o de velocidade constante descrito em Li e Jilkov (2003a), pois descreve uma dinâmica suficientemente próxima à movimentação de um jogador de futebol.

Para o modelo de velocidade constante, foi considerado que o movimento dos jogadores é bidimensional e a sua velocidade de movimentação é constante. Estes dois critérios foram selecionados para construção do modelo matemático dinâmico que descreve o problema.

Identificam-se, então, as seguintes variáveis de estado:

$p_x(k)$: posição do jogador na abscissa;

$v_x(k)$: componente da velocidade do jogador na direção da abscissa;

$p_y(k)$: posição do jogador na ordenada;

$v_y(k)$: componente da velocidade do jogador na direção da ordenada;

Desta forma, o vetor de estados é definido por:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x(k) & v_x(k) & p_y(k) & v_y(k) \end{bmatrix}^\top. \quad (95)$$

A equação dinâmica para o vetor de estados $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^4$ é representada por:

$$\mathbf{x}(k+1) = F(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (96)$$

em que F é dado por:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (97)$$

sendo T o intervalo de tempo entre as medidas e $\mathbf{w}(k)$ o processo estocástico do ruído da equação dinâmica representado por uma $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(0, Q(k)) \in \mathbb{R}^4$ distribuição normal gaussiana de média nula e covariância $Q(k) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

A equação de medidas definida para o modelo que descreve a trajetória do jogador é dada por:

$$\mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (98)$$

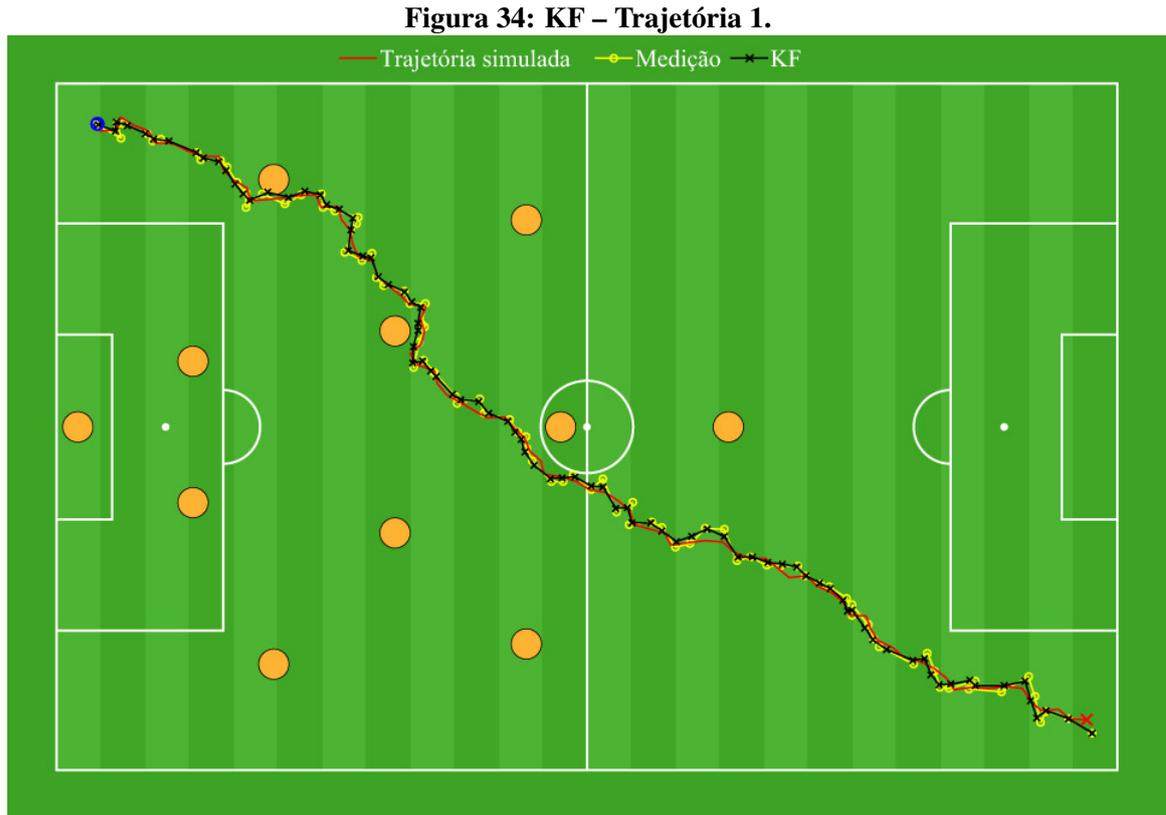
em que H é dado de maneira a considerar somente as componentes medidas, neste caso, a posição em cada coordenada. A matriz H é apresentada a seguir:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (99)$$

e $\mathbf{v}(k)$ representa o processo estocástico do ruído da medida. Este processo tem distribuição gaussiana de média nula e covariância $R(k) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, representado por $\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(0, R(k)) \in \mathbb{R}^2$. Para o KF, adotou-se um padrão em relação a covariância do erro de estimativa inicial, em que $P_0 = 1500I_5$.

5.1.1 Trajetória 1

Com o uso do simulador apresentado no Capítulo 4 é possível visualizar, na Figura 34, o funcionamento do filtro de Kalman. Esta imagem apresenta a aplicação do KF na Trajetória 1, conforme os parâmetros citados anteriormente, sendo que o valor da covariância foi definido como $Q(k) = 0,37I_4$.

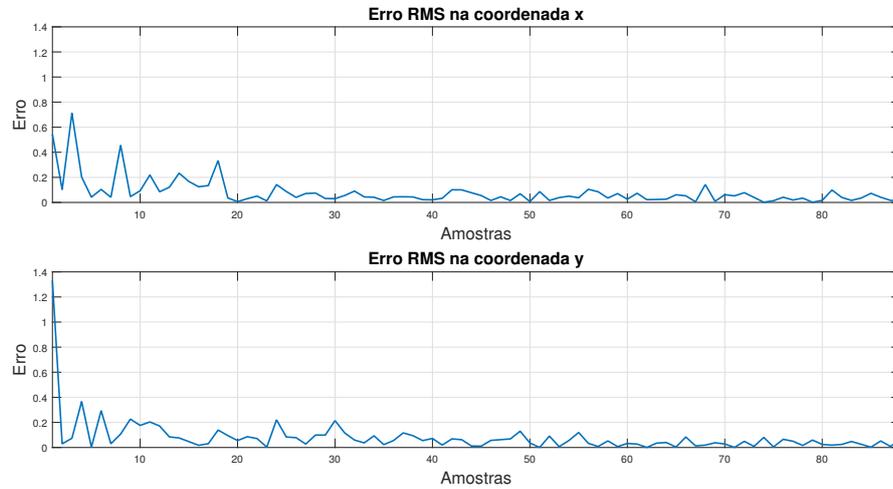


Fonte: Os autores.

Na Figura 34, com a aplicação do filtro, pode-se compreender que a trajetória realizada pelo filtro mantém-se próxima da trajetória real, exceto em algumas curvas, em que a medição é mais fiel do que o filtro. Essa situação ocorre devido ao modelo dinâmico utilizado no filtro ser o de velocidade constante. Ou seja, este não estima o movimento nas curvas com rapidez e adapta-se novamente quando o caminho se torna mais parecido com uma reta.

Os erros RMS são ilustrados na Figura 35.

Figura 35: Erro RMS para o KF – Trajetória 1.



Fonte: Os autores.

É possível observar que o filtro demora um certo tempo para se adaptar. A partir da 10^a amostra, se inicia um processo de estabilização em relação ao erro, ou seja, este é o tempo necessário para que o filtro comece a atuar com maior qualidade. Em y pode-se observar que, inicialmente, há uma grande variação do erro. Isso ocorre devido ao ponto de partida estar estimado em um ponto relativamente próximo a 0 e não ocorrer grandes variações no começo da trajetória. O MSE da aplicação do KF na Trajetória 1 pode ser observado na Tabela 6.

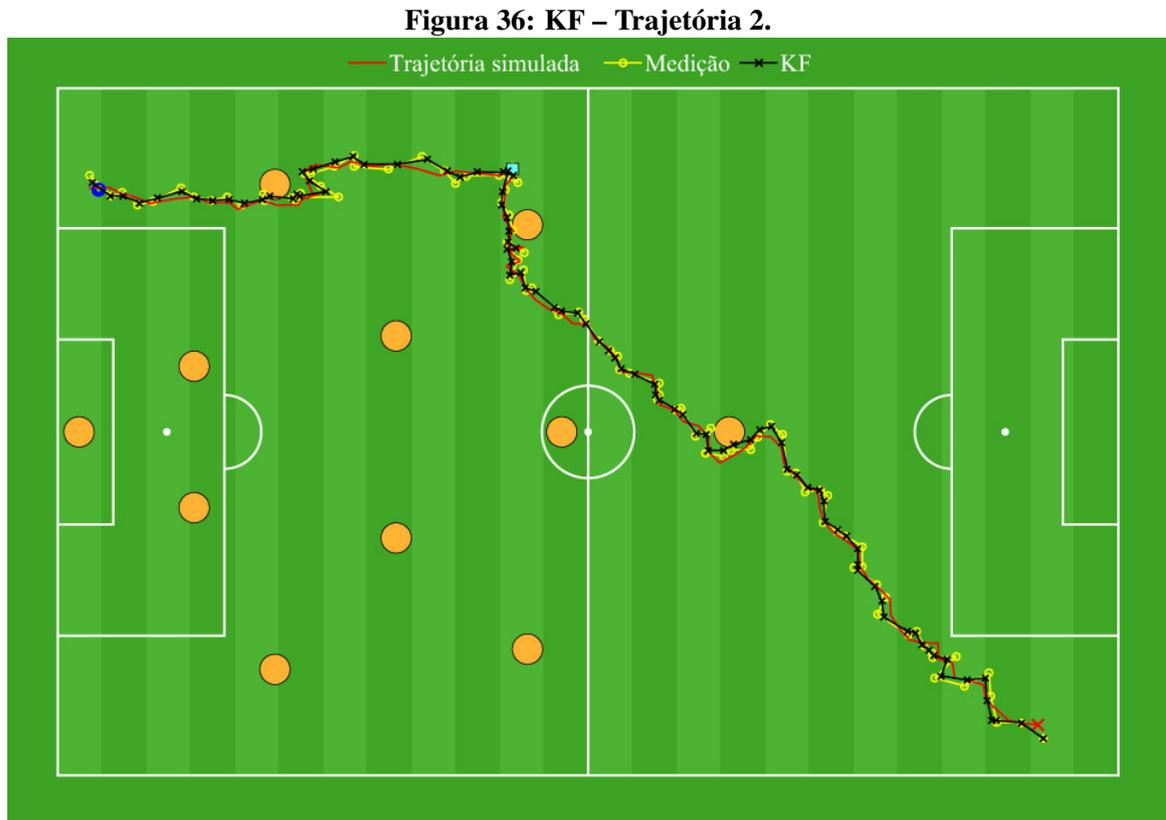
Tabela 6: MSE referente à aplicação do KF na Trajetória 1.

MSE	
x	0,2201
y	0,2049

Fonte: Os autores.

5.1.2 Trajetória 2 – Ponto Intermediário

A Figura 36 apresenta a aplicação do KF na Trajetória 2, segundo valores definidos anteriormente, sendo que o valor da covariância foi definido como $Q(k) = 0,4I_4$.

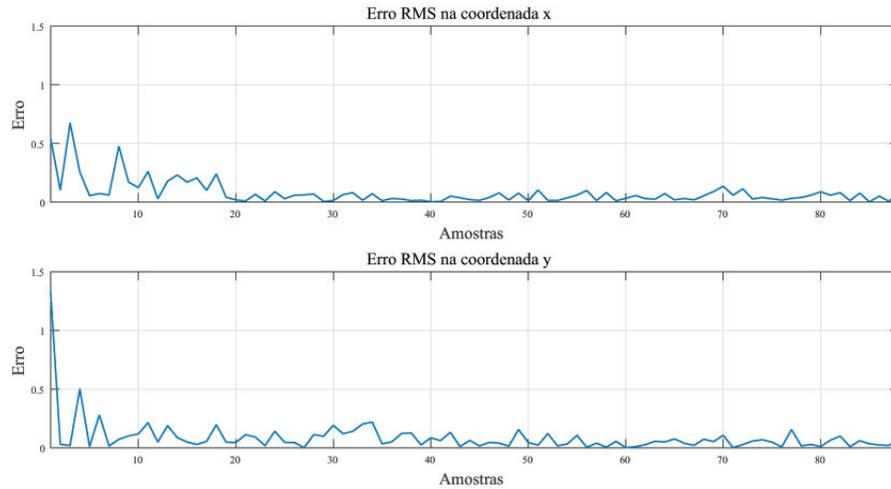


Fonte: Os autores.

A Figura 36 demonstra como o ponto intermediário no trajeto altera, de certo modo, a eficácia do KF. Com a adição de um ponto intermediário, o trajeto sofre uma pequena variação e tende a existir mais curvas no percurso, momento no qual o filtro apresenta maior dificuldade em acompanhar a trajetória real. Já nas retas, o filtro tende a acompanhar bem a trajetória.

Os erros RMS nas coordenada x e y estão ilustrados na Figura 37.

Figura 37: Erro RMS para o KF – Trajetória 2.



Fonte: Os autores.

Pode-se observar que o filtro demora um certo tempo para se adaptar. Após se adaptar o erro mantém-se baixo em toda a amostra, tanto em x , quanto em y . Esse acontecimento está relacionado com o fato de existir poucas curvas acentuadas durante o trajeto. Além disso, a existência de um ponto intermediário tem a função de demonstrar que independente do número de pontos no percurso, o filtro, após sua estabilização, continua mantendo um baixo erro em relação as duas coordenadas. Para o erro em y , nota-se que, inicialmente, há uma grande variação do erro. Isso ocorre devido ao ponto de partida estar estimado em um ponto y relativamente próximo a 0 e não ocorrer grandes variações no começo da trajetória. A Tabela 7 mostra o MSE para a aplicação do KF na Trajetória 2.

Tabela 7: MSE referente à aplicação do KF na Trajetória 2.

MSE	
x	0,2412
y	0,3167

Fonte: Os autores.

5.1.3 Trajetória 3

A Figura 38 apresenta a aplicação do KF na Trajetória 3, com os parâmetros estabelecidos anteriormente, sendo que o valor da covariância foi definido como $Q(k) = 0,3I_4$.

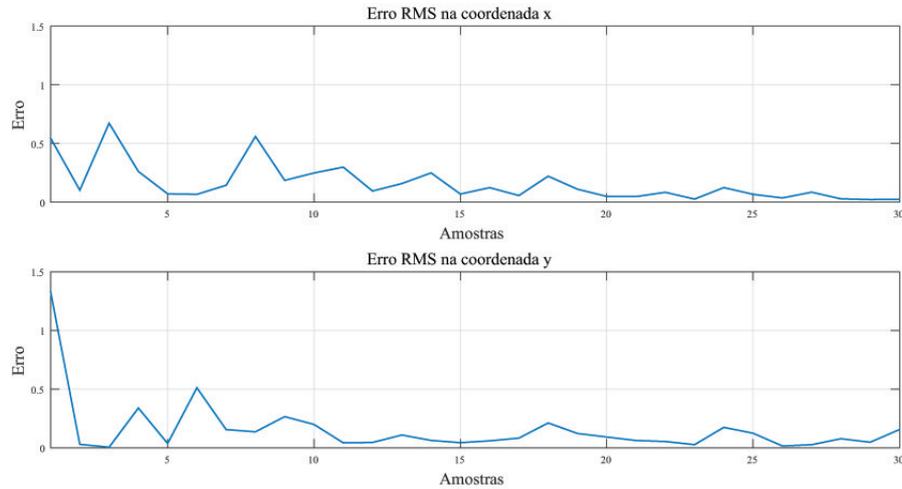


Fonte: Os autores.

Essa nova trajetória foi gerada com o intuito de demonstrar o funcionamento do filtro de Kalman em uma visualização ampliada. Novamente, é possível constatar que, inicialmente, o filtro está mais próximo da curva de medição, mas após um certo tempo, ele tende a se aproximar da trajetória real. Esse tempo para adaptar foi destacado em todas as imagens, demonstrando que leva um tempo para o filtro se adaptar ao trajeto e possui dificuldade de acompanhar as curvas, neste caso, como dito anteriormente, ocorre pelo fato do único modelo utilizado ser o de velocidade constante, sendo que a trajetória mostra alguns aspectos diferentes de um comportamento de velocidade constante (por exemplo, curvatura constante).

Os erros RMS estão ilustrados na Figura 39.

Figura 39: Erro RMS para o KF – Trajetória 3.



Fonte: Os autores.

Pode-se observar que, neste caso, o filtro demora mais tempo para se adaptar, além disso, o início da trajetória, nesse caso, oscila um pouco mais quando comparado aos outros casos destacados anteriormente. Como a trajetória gerada nesse caso é muito menor em relação aos outros, o filtro não possui tantas amostras para se adaptar e, por isso, proporcionalmente leva mais tempo para se estabilizar. Como a posição da trajetória varia menos na componente x do que em y , o filtro consegue estimar a posição nessa coordenada mais precisamente, resultando em um erro RMS próximo de 0 ao final das amostras. Por outro lado, a posição em y para esta trajetória foi mais variável. Dessa forma, o filtro obteve um desempenho levemente menor do que em x na metade final das amostras. A Tabela 8 mostra o MSE calculado para aplicação do KF na Trajetória 3.

Tabela 8: MSE referente à aplicação do KF na Trajetória 3.

MSE	
x	0,3377
y	0,2947

Fonte: Os autores.

A movimentação das trajetórias simuladas pode ser aproximada por sistema linear. Por causa disso, o KF apresenta bom desempenho. Porém, alguns trechos das trajetórias

simuladas possuem um comportamento que pode ser mais aproximado por um sistema não linear. Nas próximas seções, são feitas abordagens de modelagens não lineares para que se possa avaliar o desempenho destes modelos durante toda a trajetória, para que ao fim, um algoritmo IMM combine os diferentes filtros, obtendo o melhor resultado possível dentre as modelagens abordadas neste trabalho.

5.2 FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

O EKF, que utiliza um modelo matemático não linear, apresenta uma abordagem diferente em relação ao filtro de Kalman linear, conforme apresentado no Capítulo 3. O modelo utilizado para esse filtro foi o de curvatura constante (CT, *Constant Turn*), descrito em (LI; JILKOV, 2003a). Esse modelo apresenta grande diferença em relação ao modelo de velocidade constante. Primeiramente, o CT é não-linear, já o CV é linear. Outro fator diferencial de um caso para o outro está relacionado a existência do ω no modelo utilizado no EKF, em que esta variável se refere a velocidade angular. O modelo CT apresenta duas possibilidades para esta nova variável. A velocidade angular ω poderia ser um valor fixo, tornando o sistema linear. Nesse trabalho, o ω será um estado estimado, fazendo com que o sistema seja classificado não linear. Como existe um estado a mais, identificam-se então as seguintes variáveis de estado:

$p_x(k)$: posição do jogador na abscissa;

$v_x(k)$: componente da velocidade do jogador na direção da abscissa;

$p_y(k)$: posição do jogador na ordenada;

$v_y(k)$: componente da velocidade do jogador na direção da ordenada;

$\omega(k)$: velocidade angular do jogador;

Dessa forma, o vetor de estados é definido por:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x(k) & v_x(k) & p_y(k) & v_y(k) & \omega(k) \end{bmatrix}^T. \quad (100)$$

e o sistema dinâmico é dado pelas equações (101) e (102):

$$\mathbf{x}(k+1) = f[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k), \quad \mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}(k)), \quad (101)$$

$$\mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad \mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}(k)), \quad (102)$$

com

$$f[\mathbf{x}(k)] = \begin{bmatrix} p_x + \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_x - \frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_y \\ \cos[\omega(k)T]v_x - \text{sen}[\omega(k)T]v_y \\ \frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_x + p_y + \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_y \\ \text{sen}[\omega(k)T]v_x + \cos[\omega(k)T]v_y \\ \omega(k) \end{bmatrix}, \quad (103)$$

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} p_x(k) \\ p_y(k) \end{bmatrix}, \quad H(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad R(k)I_2 = 0,6. \quad (104)$$

A matriz $F_{CT}(k)$, é a versão linearizada da função f através do cálculo da jacobiana

$$F_{CT}(k) = \frac{\partial f[\mathbf{x}(k)]}{\partial \mathbf{x}(k)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)} & 0 & -\frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)} & d1 \\ 0 & \cos[\omega(k)T] & 0 & -\text{sen}[\omega(k)T] & d2 \\ 0 & \frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)} & 1 & \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)} & d3 \\ 0 & \text{sen}[\omega(k)T] & 0 & \cos[\omega(k)T] & d4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega(k) \end{bmatrix}, \quad (105)$$

em que

$$d1 = \frac{\cos[\omega(k)T]T}{\omega(k)}v_x - \frac{\text{sen}[(\omega(k)T)]}{\omega^2(k)}v_x - \frac{\text{sen}[\omega(k)T]T}{\omega(k)}v_y - \frac{1 + \cos[(\omega(k)T)]}{\omega^2(k)}v_y, \quad (106a)$$

$$d2 = -\text{sen}[\omega(k)T]T v_x - \cos[\omega(k)T]T v_y, \quad (106b)$$

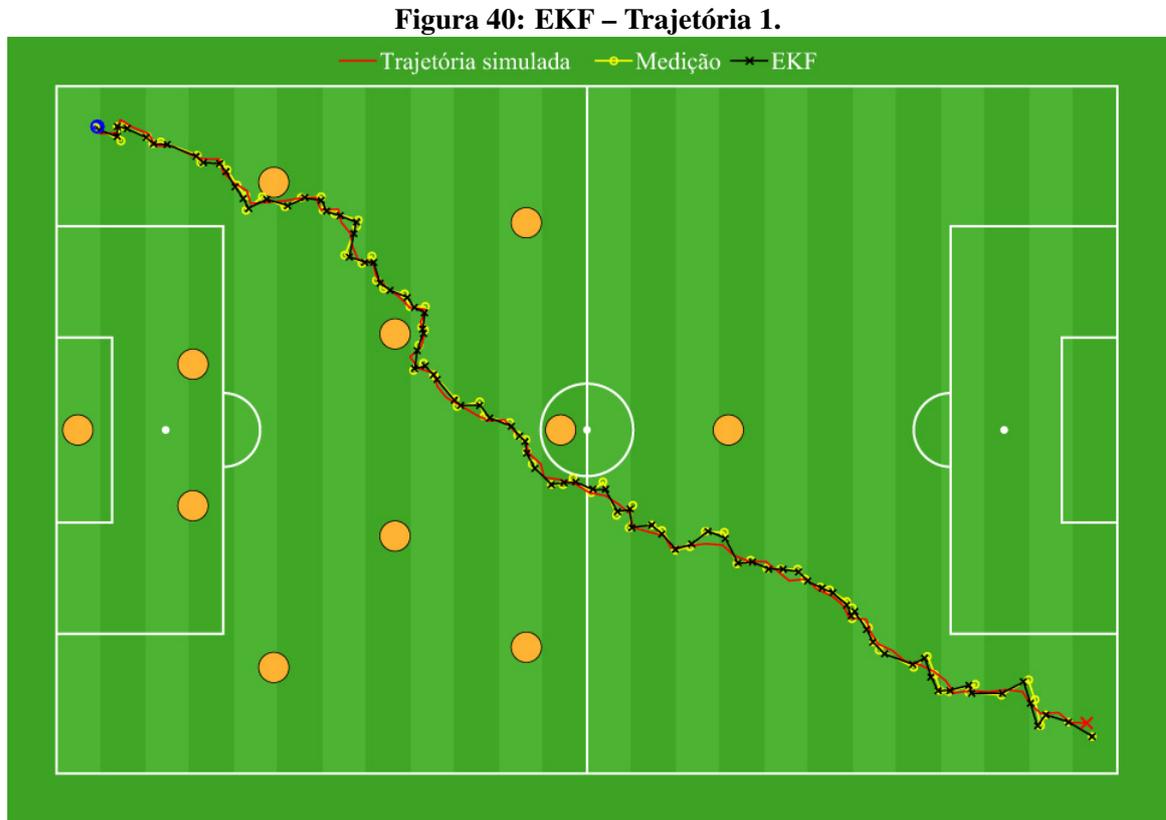
$$d3 = \frac{\text{sen}[\omega(k)T]T}{\omega(k)}v_x - \frac{1 - \cos[(\omega(k)T)]}{\omega^2(k)}v_x + \frac{\cos[(\omega(k)T)]T}{\omega(k)}v_y - \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega^2(k)}v_y \quad (106c)$$

$$d4 = \cos[\omega(k)T]T v_x - \text{sen}[\omega(k)T]T v_y. \quad (106d)$$

Para as trajetórias 1, 2 e 3 desta seção, P_0 foi definido como $P_0 = \text{diag} [1500^2 \ 1500^2 \ 1500^2 \ 1500^2 \ 0.1]$, pois com valores altos de covariância do erro de estimativa inicial, a primeira estimativa será sempre baseada na primeira medição.

5.2.1 Trajetória 1

A Figura 40 apresenta a aplicação do EKF na Trajetória 1, com $Q(k) = 0,6I_5$.

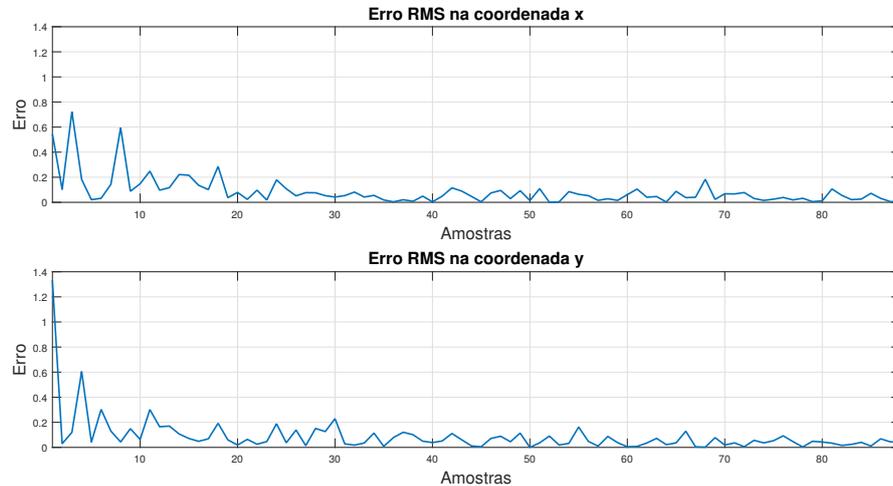


Fonte: Os autores.

Pode-se observar que a trajetória realizada pelo EKF acompanhou, majoritariamente, as medidas. Ao aproximar um sistema não linear de um modelo linear, não há certeza de que o EKF terá um bom desempenho. A diferença significativa está relacionada à parte das curvas, devido ao KF não utilizar a velocidade angular ω , como estado a estimar.

Os erros RMS relacionado à estimativa da Trajetória 1 pelo EKF podem ser vistos na Figura 41.

Figura 41: Erro RMS para o EKF – Trajetória 1.



Fonte: Os autores.

Em comparação com o filtro de Kalman linear, o processo de estabilização do EKF ocorre de modo parecido, sendo que o filtro apresenta uma baixa variação do erro a partir do seu ponto de estabilização. Isso ocorre pelo fato do EKF utilizar uma linearização de primeira ordem sobre uma estimativa da média e da covariância atuais. Na coordenada y , pode se constatar que o valor inicial estabelecido para este filtro não obteve um grande resultado, por isso, apenas a partir da amostra 30, o erro passa a se estabilizar e manter-se próximo de 0,1. A Tabela 9 apresenta os valores do MSE para a aplicação referente ao EKF na Trajetória 1.

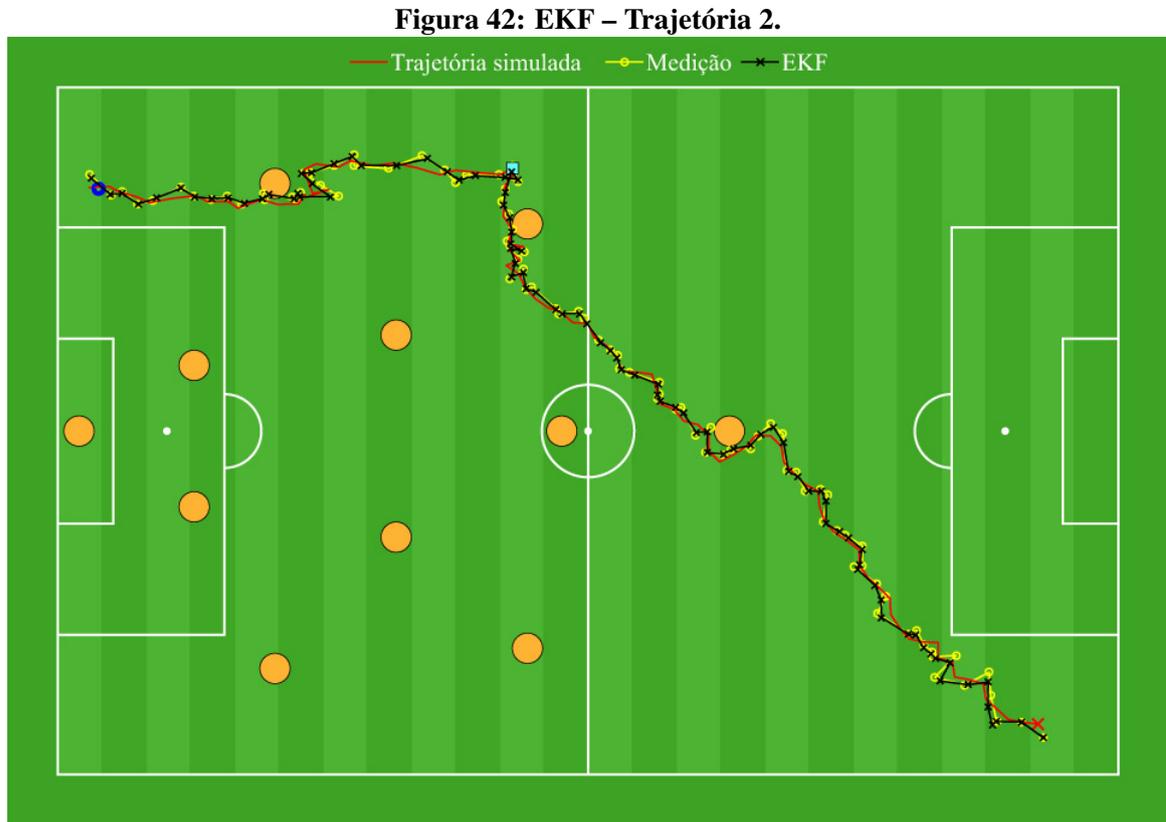
Tabela 9: MSE referente à aplicação do EKF na Trajetória 1.

MSE	
x	0,2612
y	0,2608

Fonte: Os autores.

5.2.2 Trajetória 2 – Ponto Intermediário.

A Figura 42 apresenta a aplicação do EKF na Trajetória 2, com $Q(k) = 0,6I_5$.

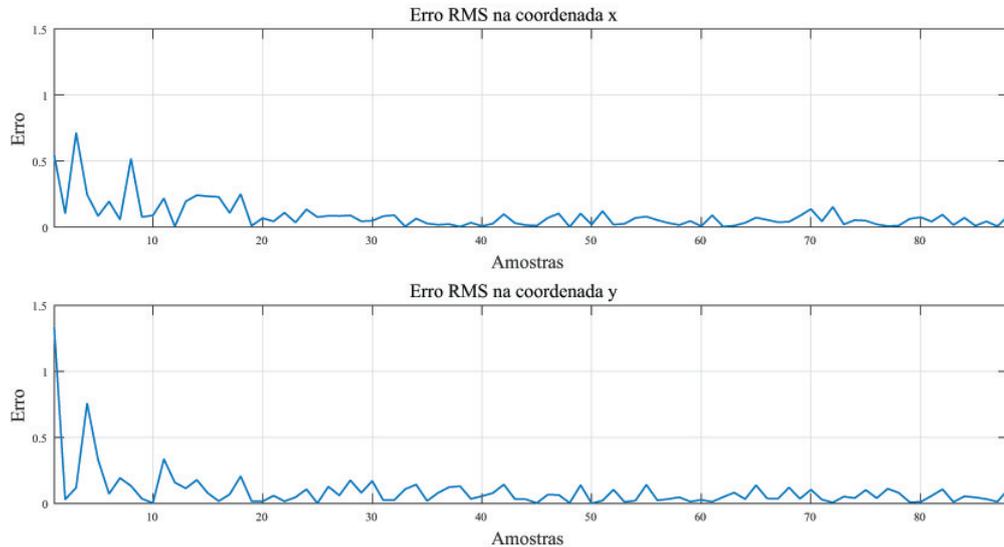


Fonte: Os autores.

A simulação com um ponto intermediário foi feita com o intuito de comparação com o KF para observar qual filtro obtém melhor resultado. O EKF obteve melhor resultado em partes do trajeto onde haviam curvas, mas, no geral, a trajetória não demonstrou grande diferença em relação ao KF.

Os erros RMS relacionado à estimativa da Trajetória 2 pelo EKF podem ser vistos na Figura 41.

Figura 43: Erro RMS para o EKF – Trajetória 2.



Fonte: Os autores.

No trajeto com o ponto intermediário, foi possível observar que o erro RMS relacionado à coordenada x apresentou maior variação do que na Figura 44. Isso demonstra que a inclusão de um ponto pode alterar a trajetória, de modo a ocasionar maior variação do movimento, e, por conseguinte, gerando maior erro RMS. Em relação a coordenada y , é possível destacar que o grande pico da imagem está relacionado ao valor inicial estabelecido. A partir das simulações seguintes, o erro RMS diminui demonstrando um bom rendimento. Os valores dos MSE correspondentes à aplicação do EKF na Trajetória 2 podem ser observados na Tabela 10.

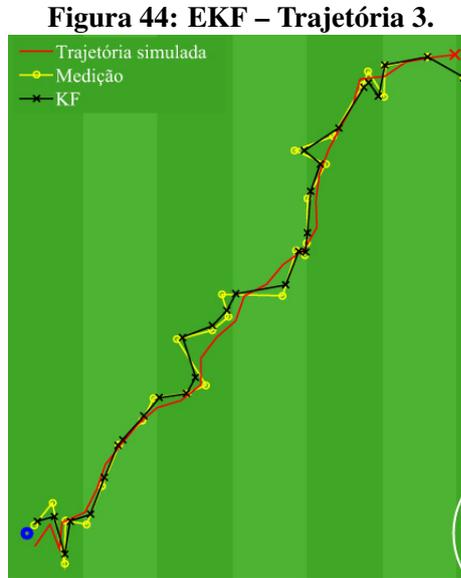
Tabela 10: MSE referente à aplicação do EKF na Trajetória 2.

MSE	
x	0,2412
y	0,3167

Fonte: Os autores.

5.2.3 Trajetória 3

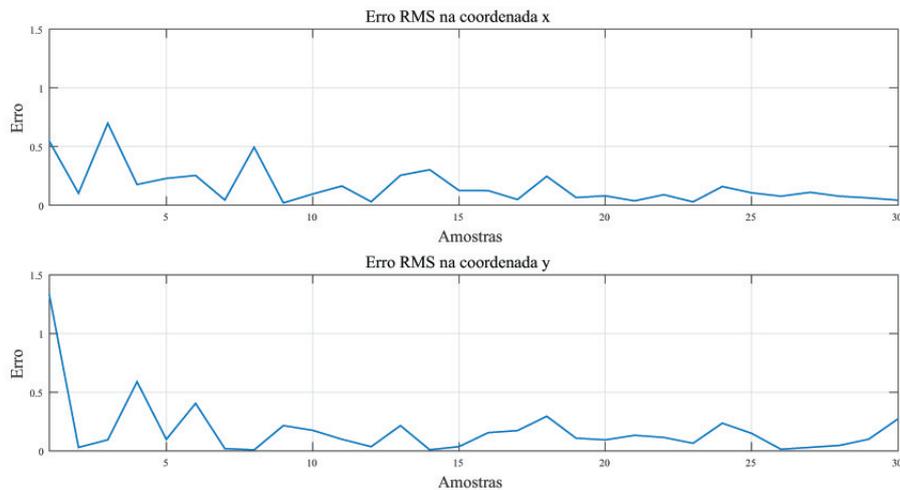
A Figura 44 apresenta a aplicação do EKF na Trajetória 3, com $Q(k) = 0,9I_5$.



Fonte: Os autores.

Na Figura 44, pode-se constatar uma instabilidade do EKF. Como o percurso realizado pelo jogador é muito menor em comparação com as outras simulações, percebe-se uma dificuldade maior para que seja estimado o trajeto correto acompanhando o real. Os erros RMS relacionados à estimativa da Trajetória 3 pelo EKF podem ser vistos na Figura 45.

Figura 45: Erro RMS para o EKF – Trajetória 3.



Fonte: Os autores.

O MSE de x leva um grande tempo para se estabilizar. Diferentes dos outros casos, por possuir uma trajetória menor, o erro RMS mantém se em um valor relativamente alto, e se estabiliza apenas no período final da amostra. Já o MSE de y não é possível concluir que houve uma estabilização. Parecido com o que ocorre na Figura 45, o erro oscila permanentemente e se mantém relativamente elevado. A menor trajetória faz com que seja mais difícil a adaptação do filtro e, por conseguinte, a diminuição do erro. É possível observar os valor dos MSE da aplicação do EKF na Trajetória 3, na Tabela 11.

Tabela 11: MSE referente à aplicação do EKF na Trajetória 3.

MSE	
x	0,3417
y	0,4377

Fonte: Os autores.

5.3 FILTRO DE KALMAN *UNSCENTED*

O sistema dinâmico foi o mesmo utilizado na aplicação do EKF, descrito na Seção 5.2, com a alteração da covariância do processo $Q(k)$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= f[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k), & \mathbf{w}(k) &\sim \mathcal{N}(0, Q(k)), \\ \mathbf{z}(k) &= H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), & \mathbf{v}(k) &\sim \mathcal{N}(0, R(k)),\end{aligned}$$

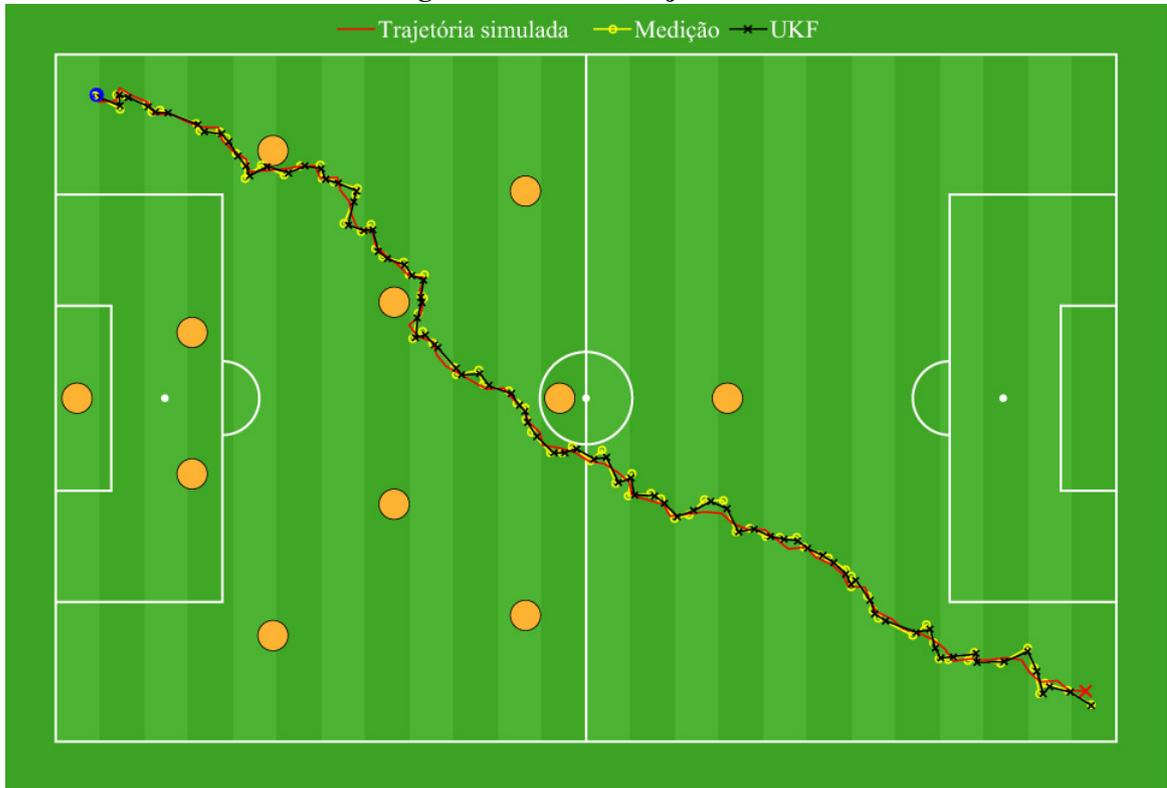
com

$$f[\mathbf{x}(k+1)] = \begin{bmatrix} p_x + \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_x - \frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_y \\ \cos(\omega(k)T)v_x - \text{sen}[\omega(k)T]v_y \\ \frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_x + p_y + \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)}v_y \\ \text{sen}[\omega(k)T]v_x + \cos[\omega(k)T]v_y \\ \omega(k) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), \quad Q(k) = 2,7I_4,$$

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} p_x(k) \\ p_y(k) \end{bmatrix}, \quad H(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad R = 0,6.$$

O UKF foi aplicado somente à Trajetória 1 por não apresentar grandes diferenças com relação à implementação do EKF.

Figura 46: UKF – Trajetória 1.

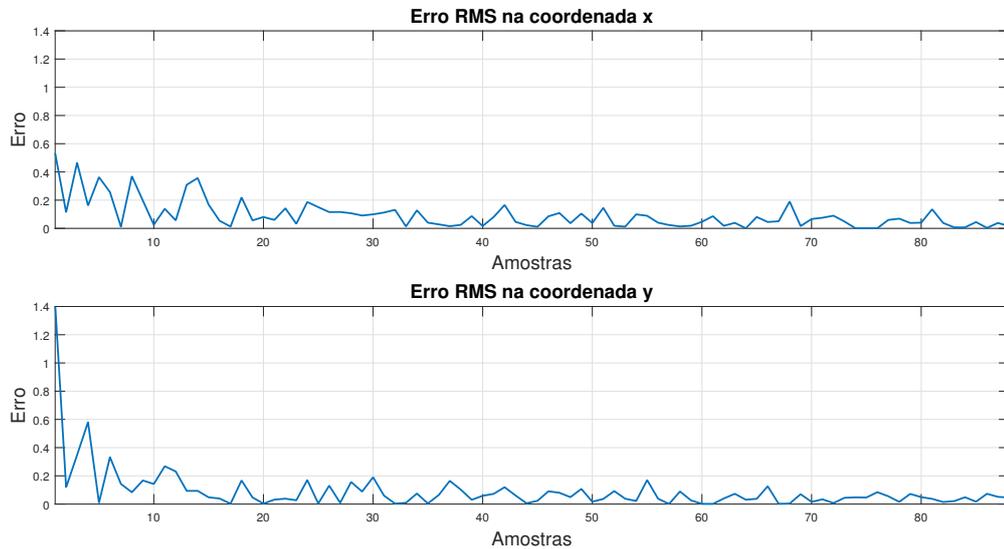


Fonte: Os autores.

Percebe-se, na Figura 46, uma variação inicial bem grande das medidas em relação à trajetória simulada. Como o UKF se manteve mais próximo às medidas no começo, há uma certa discrepância e um erro maior. No entanto, percebe-se rápida estabilização e, mesmo em momentos em que o valor medido mostrou-se longe do valor real, o UKF conseguiu manter-se bem próximo à trajetória real.

O erro RMS pode ser visto na Figura 47.

Figura 47: Erro RMS para o UKF Trajetória 1.



Fonte: Os autores.

Em relação à coordenada x , nas primeiras amostras o UKF teve certa dificuldade em estabilizar o erro RMS. Uma possível causa seria a variação entre o valor medido e o valor real, logo nas primeiras iterações. Entretanto, nas amostras finais, percebe-se uma grande tendência à estabilização. No eixo das ordenadas, há um grande erro inicial, maior que em x , porém a estabilização ocorre ainda mais rapidamente, sendo que o erro RMS quase não passa acima 0,2 após o passo 15, enquanto isso só ocorreu no eixo das abscissas perto do amostra 50. O MSE do UKF para a Trajetória 1 pode ser visto na Tabela 12

Tabela 12: MSE referente à aplicação do UKF na Trajetória 1.

MSE	
x	0,3114
y	0,2605

Fonte: Os autores.

5.4 FILTRO IMM

Para o filtro IMM, foram feitas três combinações com diferentes conjuntos de filtros. Inicialmente, os filtros utilizados foram o KF com o modelo CV e o EKF com o modelo CT. A segunda combinação foi feita com os mesmos dois modelos dinâmicos anteriores, mas com o UKF no lugar do EKF para o modelo CT. Por fim, foi feita a interação entre os filtros EKF e UKF, ambos com o modelo dinâmico CT. Nas ilustrações desta seção, a trajetória sem ruído gerada pelo simulador não é mostrada para possibilitar a visualização das trajetórias estimadas com mais clareza.

5.4.1 Filtro de Kalman CV – Filtro de Kalman estendido CT

Para a primeira implementação do filtro IMM, o modelo $M^{(1)}$ utilizado foi o filtro de Kalman linear com os mesmos parâmetros apresentados na Seção 5.1.1:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= F^{(1)}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), & \mathbf{w}(k) &\sim \mathcal{N}(0, Q^{(1)}(k)), \\ \mathbf{z}(k) &= H^{(1)}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), & \mathbf{v}(k) &\sim \mathcal{N}(0, R^{(1)}(k)),\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} p_x(k) \\ v_x(k) \\ p_y(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix}, & F^{(1)}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & Q^{(1)}(k) &= 0,37I_4, \\ \mathbf{z}(k) &= \begin{bmatrix} p_x(k) \\ p_y(k) \end{bmatrix}, & H^{(1)}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & e & R^{(1)}(k) = 0,6I_2.\end{aligned}$$

O modelo $M^{(2)}$ utilizado foi o filtro de Kalman estendido com os parâmetros já apresentados na Seção 5.2.1:

$$\mathbf{x}(k+1) = F^{(2)}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \quad \mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(0, Q^{(2)}(k)), \quad (107)$$

$$\mathbf{z}(k) = H^{(2)}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad \mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(0, R^{(2)}(k)), \quad (108)$$

com

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x(k) & v_x(k) & p_y(k) & v_y(k) \end{bmatrix}, \quad (109)$$

$$F^{(2)}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)} & 0 & -\frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)} & 0 \\ 0 & \cos[\omega(k)T] & 0 & -\text{sen}[\omega(k)T] & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos[\omega(k)T]}{\omega(k)} & 1 & \frac{\text{sen}[\omega(k)T]}{\omega(k)} & 0 \\ 0 & \text{sen}[\omega(k)T] & 0 & \cos[\omega(k)T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega(k) \end{bmatrix}, \quad (110)$$

$$Q^{(2)}(k) = 0,6I_5, \quad R^{(2)}(k) = 0,6I_2. \quad (111)$$

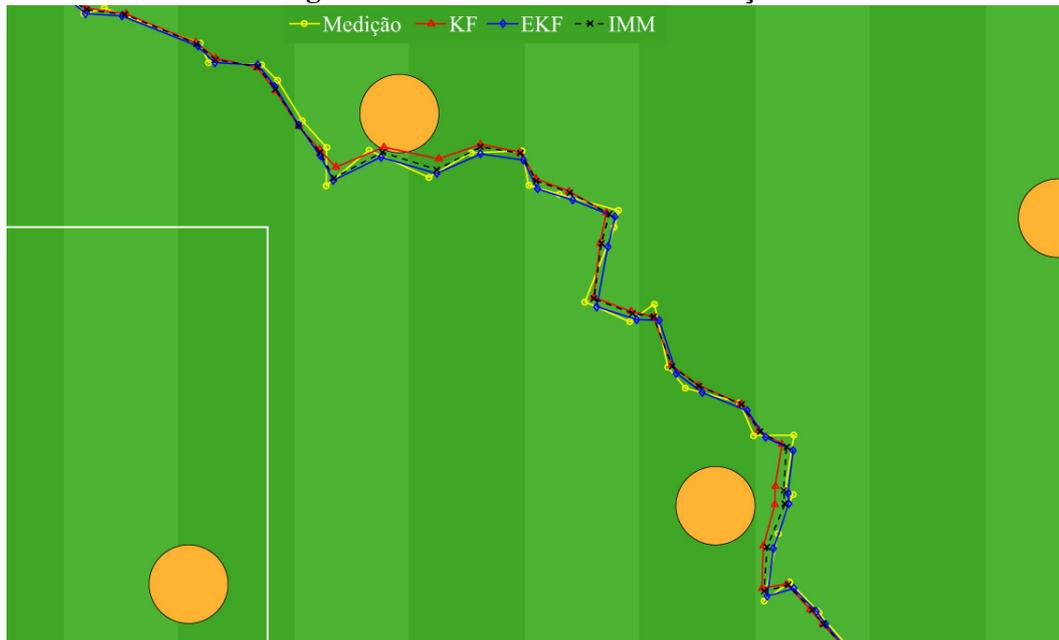
$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} p_x(k) \\ p_y(k) \end{bmatrix}, \quad H^{(2)}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (112)$$

A matriz de probabilidade de transição Π e as probabilidades dos modelos μ foram inicializadas com os seguintes valores:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mu = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}. \quad (113)$$

A Figura 48 exibe a aplicação do filtro IMM para a Trajetória 1. Como há pouca diferença visual entre as estimativas, somente uma versão ampliada das trajetórias é mostrada. Dessa forma, é possível observar os comportamentos do modelo dinâmico de velocidade constante, empregado no KF, e do modelo de curvatura constante, utilizado no EKF e a interação entre eles, que resulta na estimativa do IMM.

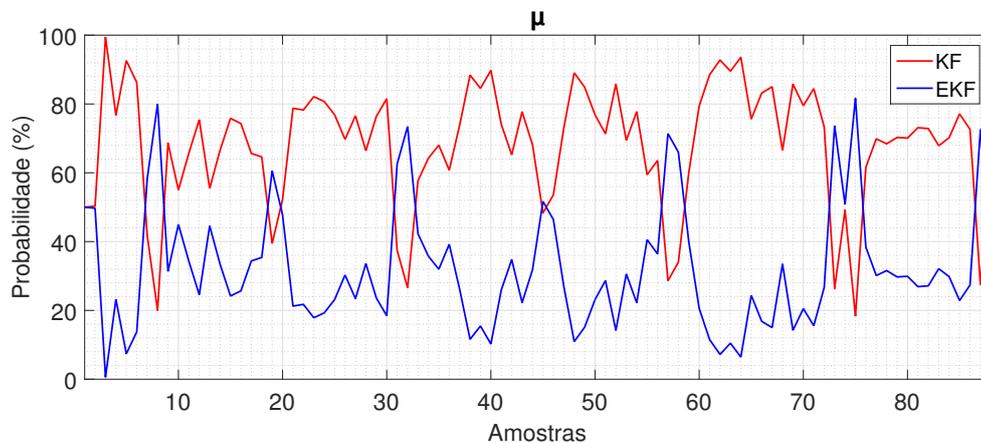
Figura 48: IMM – Primeira combinação.



Fonte: Os autores.

Pode-se notar que em instantes em que a trajetória apresenta um comportamento próximo ao de uma trajetória linear, ou seja, com velocidade constante, a trajetória estimada pelo filtro IMM é mais influenciada pela estimativa do KF. Quando a trajetória realiza curvas bruscas, a estimativa do filtro IMM se aproxima pronunciadamente da trajetória estimada pelo EKF. Este comportamento fica mais evidente analisando a curva de probabilidade dos modelos, mostrada na Figura 49.

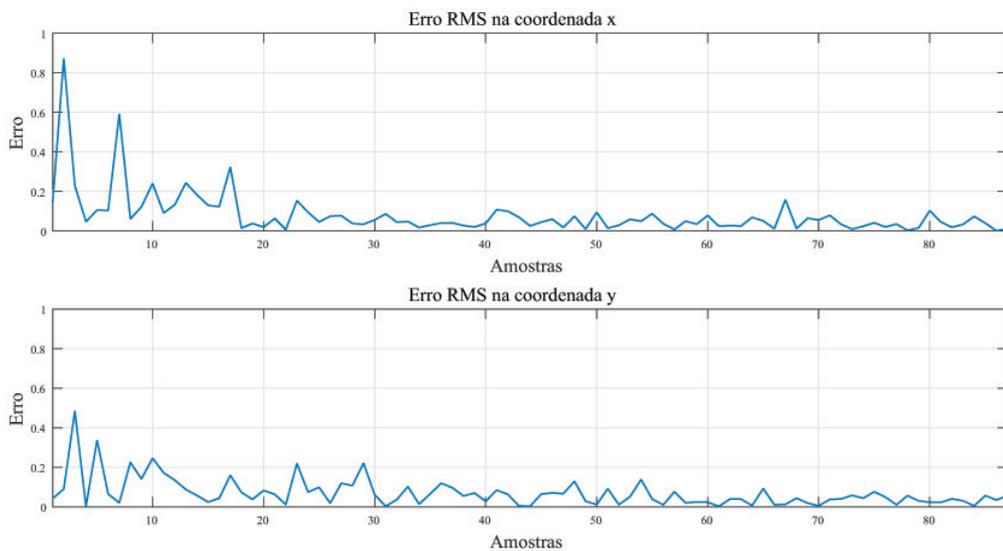
Figura 49: Probabilidade dos modelos para primeira combinação do filtro IMM.



Fonte: Os autores.

Por volta da amostra 57 da trajetória e próximo da amostra 73, há o desvio de obstáculos. Isso é evidente na curva de probabilidades com o modelo de curvatura constante aumentando sua probabilidade de estar correto nestes instantes. A análise da curva de probabilidades indica que mesmo com os valores iniciais determinando que o modelo linear de movimentação fosse o mais provável, o filtro IMM é capaz de se adaptar às mudanças da dinâmica do sistema a ser estimado, através do chaveamento probabilístico. Os erros RMS relacionados à primeira combinação do filtro IMM podem ser observado nas Figuras 50.

Figura 50: Erro RMS – IMM – Primeira combinação



Fonte: Os autores.

A Tabela 13 mostra o MSE calculado para primeira combinação do IMM.

Tabela 13: MSE referente à primeira combinação do IMM.

MSE	
x	0,2248
y	0,1938

Fonte: Os autores.

O resultado obtido com a combinação do KF com o EKF apresentou menor MSE que a aplicação dos filtros isoladamente, como era o esperado.

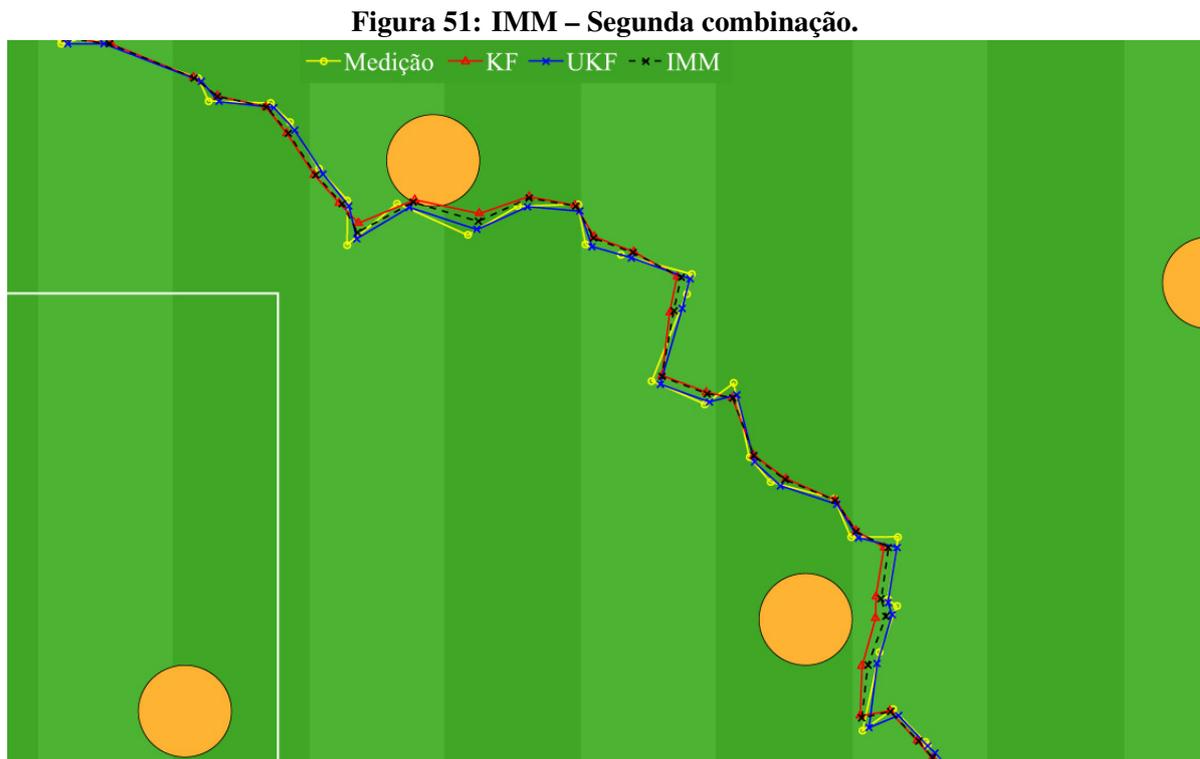
5.4.2 Filtro de Kalman CV – Filtro de Kalman *unscented* CT

Para a segunda combinação do filtro IMM, o modelo $M^{(1)}$ foi o mesmo modelo utilizado na primeira combinação, com a matriz dinâmica de velocidade constante e $Q^{(1)}(k) = 0,37I_4$. O modelo $M^{(2)}$ foi o UKF com os mesmos parâmetros da Seção 5.3, com a função não linear CT e $Q^{(2)}(k) = 2,7I_5$.

Como o UKF apresenta comportamento similar e utiliza a mesma função não linear que o EKF, a inicialização do filtro IMM foi feita com valores iguais aos da primeira combinação de modo a possibilitar a comparação das duas combinações. A matriz de probabilidade de transição Π e as probabilidades dos modelos μ foram inicializadas com os seguintes valores:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mu = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

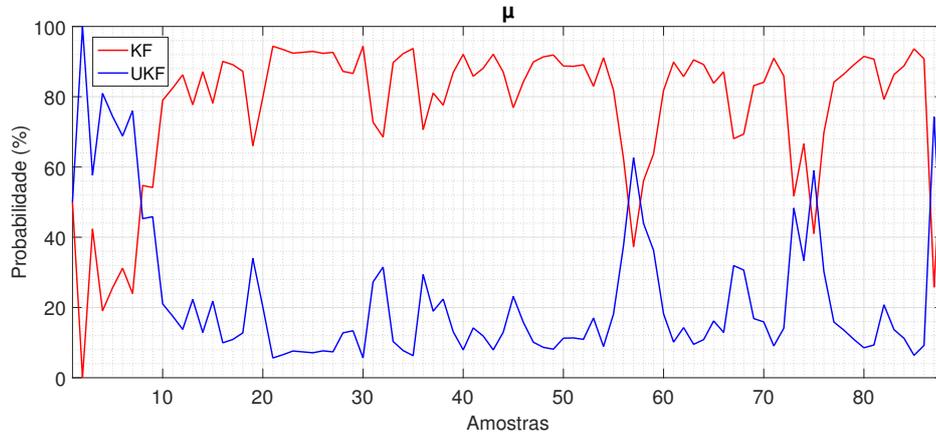
A Figura 51 mostra a trajetória estimada na segunda combinação do filtro IMM.



É notável que a trajetória estimada pelo filtro IMM na segunda combinação possui pouca diferença com relação à trajetória estimada na primeira combinação, o que também é verificável na curva de probabilidade dos modelos.

A probabilidade dos modelos utilizados na segunda combinação do filtro IMM pode ser vista na Figura 52.

Figura 52: Probabilidade dos modelos para a segunda combinação do filtro IMM.

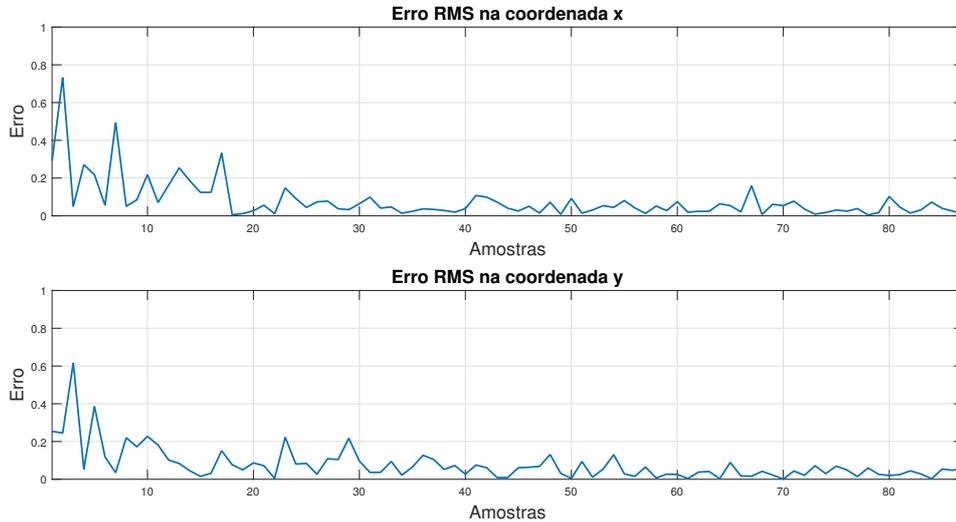


Fonte: Os autores.

É importante ressaltar que mesmo com os valores de probabilidade iniciais terem sido determinados como 50% para os dois modelos e com a mesma matriz Π que na primeira combinação, o filtro IMM se adequa ao desempenho mais baixo do UKF –comparado ao EKF– e prioriza a estimativa do KF ao longo da maior parte das amostras. Novamente, no entanto, nos pontos da trajetória em que há desvio de obstáculos, o filtro que utiliza o modelo não linear é priorizado.

Os erros RMS relacionados à segunda combinação do filtro IMM pode ser observado na Figura 53 .

Figura 53: Erro RMS – IMM – Segunda combinação



Fonte: Os autores.

A Tabela 13 mostra o MSE calculado para segunda combinação do IMM.

Tabela 14: MSE referente à segunda combinação do IMM.

MSE	
x	0,2148
y	0,2028

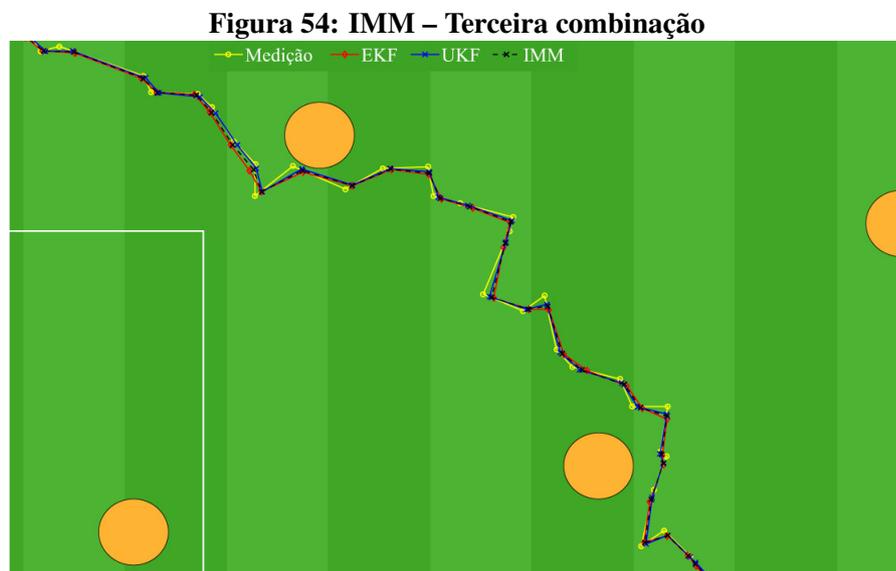
Fonte: Os autores.

É interessante ressaltar que, embora a aplicação do UKF isolado tenha obtido desempenho inferior à aplicação do EKF isolado, a segunda combinação do filtro IMM, KF e UKF, obteve valores de MSE menores que a primeira combinação, KF e EKF. Isso se deve ao fato de que o IMM se adequou à precisão levemente inferior do UKF, priorizando a estimativa do KF, resultando em uma estimativa final mais precisa.

5.4.3 Filtro de Kalman estendido CT – Filtro de Kalman *unscented* CT

Para a terceira combinação do filtro IMM, o modelo $M^{(1)}$ foi o mesmo modelo utilizado na primeira combinação, EKF com matriz dinâmica CT e $Q^{(1)}(k) = 0,6I_5$. O modelo $M^{(2)}$ foi o mesmo modelo $M^{(2)}$ utilizado na segunda combinação, UKF com a função não linear CT e $Q^{(2)}(k) = 2,7I_5$.

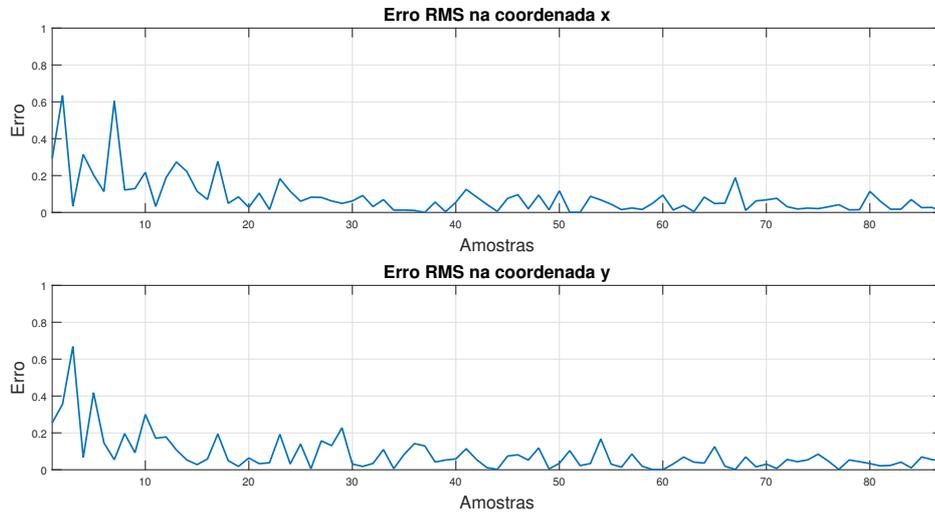
Como os dois modelos possuem funcionamento similar e a não linearidade do sistema é pequena, as trajetórias estimadas pelos dois modelos são muito semelhantes. Assim sendo, somente a versão ampliada é mostrada. A Figura 54 exibe as trajetórias estimadas na terceira combinação do filtro IMM.



Fonte: Os autores.

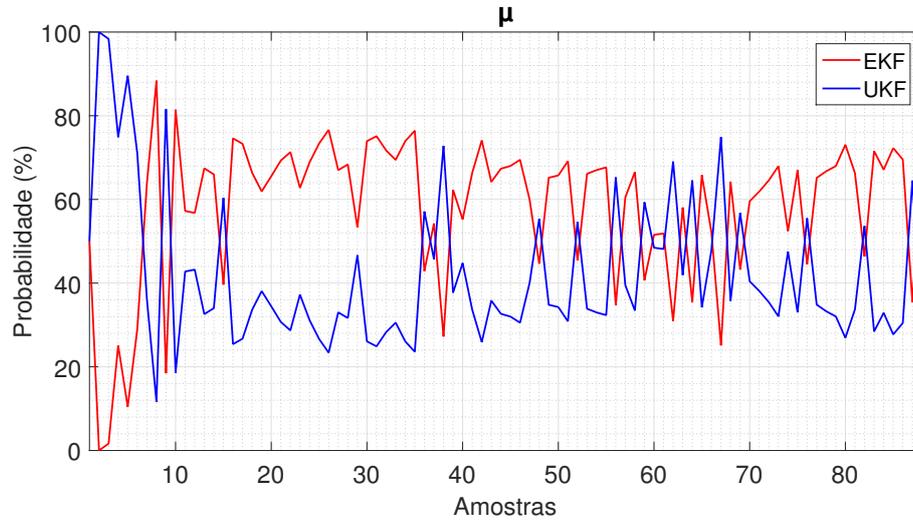
Os erros RMS relacionados à terceira combinação do filtro IMM pode ser observado na Figura 55.

Figura 55: Erro RMS – IMM – Terceira combinação



Fonte: Os autores.

No cálculo da estimativa inicial, o UKF seleciona pontos sigma e os propaga através da função não linear, enquanto no EKF a primeira estimativa se baseia totalmente nas medições. Dessa forma, o UKF se mostra mais confiável inicialmente. Entretanto, como o EKF também apresenta desempenho satisfatório e como os dois filtros utilizam o mesmo modelo, não há uma diferença visualmente explícita. Isso é evidenciado nas curvas de probabilidade dos modelos, na Figura 56, em que é possível notar que as probabilidades se alternam, mantendo-se próximas de 50%.

Figura 56: Probabilidade dos modelos para a terceira combinação do filtro IMM

Fonte: Os autores.

A Tabela 15 mostra o MSE calculado para terceira combinação do IMM.

Tabela 15: MSE referente à terceira combinação do IMM.

MSE	
x	0,2589
y	0,2492

Fonte: Os autores.

A análise do MSE mostra que, mesmo para dois filtros com modelagens imprecisas, a combinação entre eles através do filtro IMM, resulta em estimativas melhores do que aplicá-los isoladamente. A Tabela 16 mostra os valores de MSE para as todas os filtros aplicados neste trabalho.

Tabela 16: Comparação dos valores de MSE para todos os filtros.

	Medidas	KF	EKF	UKF	IMM KF-EKF	IMM KF-UKF	IMM EKF-UKF
x	0,3136	0,2201	0,2612	0,3114	0,2248	0,2148	0,2589
y	0,3737	0,2049	0,2608	0,2605	0,1938	0,2028	0,2492
Módulo	0,4878	0,3007	0,3691	0,4060	0,2968	0,2954	0,3593

Fonte: Os autores.

Na tabela 16, pode-se observar o desempenho de cada filtro, verificando o MSE. O filtro que apresentou menor valor de erro foi o IMM KF–UKF, cujo valor de módulo foi 0,2954. Este número demonstra que o filtro IMM apresentou melhor performance em relação as estimativas do trajeto. Em contra partida, a pior performance apresentada foi no UKF, em que obteve-se o valor de 0,4060. Esses valores de erro estão dentro do esperado, pois as trajetórias geradas possuem mais trechos cujo comportamento é próximo do retilíneo, com velocidade constante. Há também trechos em que os filtros não lineares, EKF e UKF, apresentam estimativa melhor do que KF. Dessa forma, as aplicações do IMM unindo um filtro linear com um não linear obtiveram os melhores resultados.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste TCC foi possível mesclar um tema esportivo, de grande relevância nacional, com filtragem estocástica. Para tal, foi desenvolvido um simulador de trajetórias de jogadores de futebol a fim de implementar e analisar vários filtros diferentes, com modelos e características distintas, para realizar as comparações necessárias e identificar as diferenças entre os filtros estudados, assim como comparar os resultados obtidos, analisando-se o erro RMS.

O gerador de trajetórias desenvolvido possui diversas funcionalidades. Pode-se gerar uma trajetória retilínea ou com variação angular, com adição de um ruído gaussiano branco às trajetórias, para, posteriormente, ser aplicada a filtragem sobre estes dados ruidosos. Além disso, foi implementada a possibilidade de acrescentar pontos intermediários às trajetórias. O desvio de adversários foi outro grande aspecto do simulador, sendo posteriormente adicionado a possibilidade de haver adversários móveis.

Foi possível realizar um estudo em diversos filtros, utilizando modelos dinâmicos CV e CT, além da implementação dos filtros e integração com o simulador de trajetórias, tudo feito via *software* MATLAB. Uma análise dos resultados obtidos foi feita baseada no critério de erro RMS, a fim de comparar os diversos filtros testados. Pode-se verificar que o filtro IMM apresenta excelentes resultados quando a dinâmica do sistema a ser filtrado é variável, conseguindo adaptar a estimativa conforme a dinâmica muda, não tendo que se prender à somente uma modelagem matemática do sistema.

Para trabalhos futuros, sugere-se melhorias no simulador de trajetórias, como a implementação de movimentação de vários jogadores ao mesmo tempo, trajetórias mais longas, etc. a fim de aumentar a complexidade e realismo dos dados gerados. Também é sugerido a implementação de mais filtros, bem como modelos diferentes, a fim de se fazer um estudo mais completo sobre filtragem estocástica e haver um portfólio maior de comparações entre diversos filtros.

REFERÊNCIAS

Acessoria CBF. *Projeto Gramados: CBF padroniza campos em 105 x 68*. 2016. Disponível em: <<http://www.cbf.com.br/noticias/campeonato-brasileiro/projeto-gramados-cbf-padroniza-campos-em-105-x-68>>.

AKSELROD, S.; GORDON, D.; UBEL, F. A.; SHANNON, D. C.; BERGER, A.; COHEN, R. J. Power spectrum analysis of heart rate fluctuation: a quantitative probe of beat-to-beat cardiovascular control. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 213, n. 4504, p. 220–222, 1981.

ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F. X. Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility. *The review of economics and statistics*, MIT Press, v. 89, n. 4, p. 701–720, 2007.

BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R.; KIRUBARAJAN, T. **Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software**. John Wiley & Sons, 2004.

BARANY, I.; VU, V. Central limit theorems for gaussian polytopes. *The Annals of Probability*, JSTOR, p. 1593–1621, 2007.

BATES, D. S. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 9, n. 1, 1996.

BEETZ, M.; GEDIKLI, S.; BANDOUCHE, J.; KIRCHLECHNER, B.; HOYNINGEN-HUENE, N. von; PERZYLO, A. C. Visually tracking football games based on tv broadcasts. In: *IJCAI*. 2007. p. 2066–2071.

BERENDSEN, H. J.; POSTMA, J. v.; GUNSTEREN, W. F. van; DINOLA, A.; HAAK, J. Molecular dynamics with coupling to an external bath. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 81, n. 8, p. 3684–3690, 1984.

BISHOP, G.; WELCH, G. An introduction to the kalman filter. *Proc of SIGGRAPH, Course*, v. 8, n. 27599-23175, p. 41, 2001.

BROWN, P. Y. C. H. R. G. **Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises**. 4. ed. Wiley, 2012. ISBN 0470609699,9780470609699.

CHALLA, S.; MORELANDE, M. R.; MUŠICKI, D.; EVANS, R. J. **Fundamentals of object tracking**. Cambridge University Press, 2011.

CUI, N.; HONG, L.; LAYNE, J. R. A comparison of nonlinear filtering approaches with an application to ground target tracking. *Signal Processing*, Elsevier, v. 85, n. 8, p. 1469–1492, 2005.

EPHRAIM, Y.; MALAH, D. Speech enhancement using a minimum-mean square error short-time spectral amplitude estimator. *IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing*, IEEE, v. 32, n. 6, p. 1109–1121, 1984.

- ETTEN, W. van. **Introduction to noise and random processes**. John Wiley & Sons, 2005.
- FIGUEROA, P. J.; LEITE, N. J.; BARROS, R. M. Tracking soccer players aiming their kinematical motion analysis. **Computer Vision and Image Understanding**, Elsevier, v. 101, n. 2, p. 122–135, 2006.
- FOSSEN, T. I.; PEREZ, T. Kalman filtering for positioning and heading control of ships and offshore rigs. **IEEE Control Systems**, IEEE, v. 29, n. 6, 2009.
- FRENCL, V. B.; VAL, J. B. do. A trajectory simulator for individual movements using probabilistic distribution profiles. In: IEEE. **Radar Conference (RadarConf), 2016 IEEE**. 2016. p. 1–6.
- GARCIA, A. L. **Probability, Statistics and Random Process for Electrical Engineering**. Pearson, 2008.
- GENOVESE, A. F. The interacting multiple model algorithm for accurate state estimation of maneuvering targets. **Johns Hopkins APL technical digest**, v. 22, n. 4, p. 614–623, 2001.
- GOLDENSTEIN, S. K. A gentle introduction to predictive filters. **Revista de Informatica Teórica e Aplicada**, v. 11, n. 1, p. 63–92, 2004.
- GREWAL, M.; ANDREWS, A. **Kalman filtering: theory and practice using MATLAB**. John Wiley & Sons, 2001.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. **Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI**. 1997. v. 3068, p. 182–194.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 92, n. 3, p. 401–422, 2004.
- KALMAN, R. E. *et al.* A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- KARATZAS, I.; SHREVE, S. **Brownian motion and stochastic calculus**. Springer Science & Business Media, 2012.
- KIM, J.-Y.; KIM, T.-Y. Soccer ball tracking using dynamic kalman filter with velocity control. In: IEEE. **Computer Graphics, Imaging and Visualization, 2009. CGIV'09. Sixth International Conference on**. 2009. p. 367–374.
- KOBAYASHI, T.; SIMON, D. L. Application of a bank of kalman filters for aircraft engine fault diagnostics. **ASME Paper No. GT2003-38550**, 2003.
- LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 5, n. 5, p. 417–429, 1982.
- LI, J.; STOICA, P. **MIMO radar signal processing**. John Wiley & Sons, 2008.
- LI, X. R.; JILKOV, V. P. Survey of maneuvering target tracking. part i. dynamic models. **IEEE Transactions on aerospace and electronic systems**, IEEE, v. 39, n. 4, p. 1333–1364, 2003.

- LI, X. R.; JILKOV, V. P. A survey of maneuvering target tracking—part iii: Measurement models. **IEEE Transactions on aerospace and electronic systems**, IEEE, v. 39, n. 4, p. 1333–1364, 2003.
- MAYBECK, P. S. **Stochastic Models, Estimation and Control Volume 1**. Academic Press, 1979. (Mathematics in Science and Engineering 141a, v. 1). ISBN 9780124807013,0124807011.
- MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation, and control**. Academic press, 1982.
- MELLIT, A.; BENGHANEM, M.; KALOGIROU, S. A. Modeling and simulation of a stand-alone photovoltaic system using an adaptive artificial neural network: Proposition for a new sizing procedure. **Renewable energy**, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 285–313, 2007.
- ONAR, O.; UZUNOGLU, M.; ALAM, M. Modeling, control and simulation of an autonomous wind turbine/photovoltaic/fuel cell/ultra-capacitor hybrid power system. **Journal of Power Sources**, Elsevier, v. 185, n. 2, p. 1273–1283, 2008.
- PUNZO, V.; BORZACCHIELLO, M. T.; CIUFFO, B. On the assessment of vehicle trajectory data accuracy and application to the next generation simulation (ngsim) program data. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, Elsevier, v. 19, n. 6, p. 1243–1262, 2011.
- SIDENBLADH, H.; BLACK, M. J.; FLEET, D. J. Stochastic tracking of 3d human figures using 2d image motion. In: SPRINGER. **European conference on computer vision**. 2000. p. 702–718.
- SIMON, D. **Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches**. John Wiley & Sons, 2006.
- SORENSEN, H. W. **Kalman filtering: theory and application**. IEEE, 1985.
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. **Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems**. John Wiley & Sons, 2015.
- WAN, E.; MERWE, R. V. D. Chapter 7 the unscented kalman filter. In: **Kalman Filtering and Neural Networks**. Wiley, 2001. p. 221–280.
- XU, M.; ORWELL, J.; JONES, G. Tracking football players with multiple cameras. In: IEEE. **Image Processing, 2004. ICIP'04. 2004 International Conference on**. 2004. v. 5, p. 2909–2912.
- YIN, S.; DING, S. X.; XIE, X.; LUO, H. A review on basic data-driven approaches for industrial process monitoring. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 61, n. 11, p. 6418–6428, 2014.
- ZHANG, F.; LIU, Y. Study on quality control method of using the kalman filtering. In: IEEE. **E-Business and Information System Security, 2009. EBISS'09. International Conference on**. 2009. p. 1–5.