UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNA DE LIMA SOARES FEROLDI

DETERMINANTES: O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E A DIDÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2018

BRUNA DE LIMA SOARES FEROLDI

DETERMINANTES: O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E A DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Adriano Verdério, Dr.

CURITIBA

2018

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Matemática
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

"DETERMINANTES: O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E A DIDÁTICA"

por

"Bruna de Lima Soares Feroldi"

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às **13h00** do dia **23** de **novembro** de 2018 na sala **A203** como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. A aluna foi arguida pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho **aprovado**.

Prof. Dr. Adriano Verdério **(Presidente - UTFPR/Curitiba)**	Prof.ª Dr.ª Diane Rizzotto Rossetto **(Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)**
Prof.ª Dr.ª Nara Bobko **(Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)**	
Profª Drª Priscila Savulski Ferreira de Miranda **(Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)**	Profª Drª Neusa Nogas Tocha **(Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)**

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso. "

RESUMO

FEROLDI, Bruna de Lima Soares. DETERMINANTES: O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E A DIDÁTICA. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

No presente trabalho é desenvolvido o estudo dos determinantes, destacando suas diferentes abordagens. Para subsidiar a produção bibliográfica, é realizada uma análise de caráter analítico e reflexivo de livros didáticos destinados aos níveis de ensino médio e superior, explorando também o desenvolvimento histórico dos determinantes e suas particularidades, tais como as diferentes definições, propriedades e aplicações. Por fim, considerando todos os aspectos levantados, é desenvolvido um recurso didático com o intuito de otimizar o processo de ensino e aprendizagem, intencionando tornar o conteúdo em questão mais significativo e interessante para os estudantes envolvidos.

Palavras-chave: determinante, matriz, álgebra linear

ABSTRACT

FEROLDI, Bruna de Lima Soares. . 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

The study of the determinants is developed in this paper, highlighting its different approaches. To support bibliographical production, an analytical and reflexive analysis of textbooks for secondary and higher education levels is carried out, also investigating the historical development of the determinants and their particularities, such as the different definitions, properties, and applications. Finally, considering all the aspects established, an educational resource is developed with the purpose of optimizing the teaching and learning process, aiming to make the content in question more meaningful and engaging for the students involved.

Keywords: determinant, matrix, linear algebra

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Conselho Nacional de Educação (CNE) procura garantir a participação cidadã no progresso e na construção de uma educação nacional de qualidade. Dotado de uma natureza normativa, o CNE é deliberativo e presta assessoria ao Ministério de Estado da Educação no desempenho das suas funções, avaliando a política nacional de educação, zelando pela sua qualidade e assegurando o cumprimento da legislação. Com o intuito de orientar o planejamento curricular do sistema regular de ensino, o CNE define e fixa normas para proporcionar equidade de aprendizagem entre a grande diversidade de estudantes regularmente matriculados no sistema de ensino básico. Essas normas, são chamadas de Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), que, por sua vez, foram pautadas a partir do Art. 9º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) de 1996 que indica a incumbência da União em "estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum"(BRASIL, 1996). Assim, os diferentes níveis e modalidades de educação e ensino possuem diretrizes particulares. Apesar de propor uma base de conteúdos programáticos mínimos obrigatórios, as diretrizes ainda conservam a autonomia das instituições e dos profissionais da educação, possibilitando que os temas indicados sejam trabalhados de acordo com a realidade e as necessidades do público em questão.

Paralelamente as DCNs, surgem as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCEs) trazendo uma concepção de currículo para a Educação Básica nas diferentes áreas do conhecimento.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica da Secretaria de Educação do Estado do Paraná de matemática indicam que os conteúdos de matrizes e determinantes devem ser estudados e discutidos ao decorrer do Ensino Médio, de modo a auxiliar os estudantes no aprofundamento do estudo dos números. A linguagem algébrica deve ser explorada e compreendida como uma forma de expressão, de maneira que o conhecimento torne-se significativo para os estudantes. É importante que, ao decorrer do processo de construção do conhecimento matemático, os alunos sejam capazes de conceituar e interpretar matrizes e suas operações, conhecendo e dominando o conceito e as soluções de problemas que se realizem por meio de determinantes, de forma a priorizar a compreensão e apreensão de seu significado.

Através da realização do Estágio Supervisionado, componente curricular obrigatório do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Curitiba, os universitários têm a oportunidade de acompanhar a dinâmica escolar de instituições de ensino da rede pública. Foram observadas aulas regulares de matemática em turmas distintas do 2º ano do Ensino Médio e, considerando a falta de envolvimento dos estudantes, houve a constatação de que o ensino de matrizes, sistemas lineares e determinantes possuía pouco significado para aqueles grupos de adolescentes. Em momentos subsequentes, acompanhando turmas de graduandos em uma instituição de ensino superior da rede privada da cidade de Curitiba, foi possível observar novamente que a compreensão dos estudantes quanto aos conteúdos supracitados muitas vezes se resumia a aplicação de regras práticas impostas e tomadas como verdadeiras.

À partir das experiências observadas e vivenciadas têm-se que os conteúdos indicados muitas vezes não possuem a abordagem adequada, o que limita a compreensão. O desenvolvimento histórico da matemática é negligenciado, as aplicabilidades são desconhecidas e os conceitos são propositalmente simplificados, o que gera baixo rendimento, entrando em conflito com a proposta de construção do conhecimento matemático e ocasionando um processo de ensino pouco eficaz.

Assim, os acontecimentos aqui relatados corroboram a importância de um estudo bibliográfico a respeito do tema em questão, a fim de evidenciar aspectos essenciais para sua compreensão.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos distintos, explorando os determinantes sob o viés histórico, acadêmico e pedagógico.

O desenvolvimento histórico é discutido ao decorrer do capítulo 2, evidenciando a lenta construção do conhecimento acerca dos determinantes. A abordagem histórica auxilia o espectador a compreender a matemática como um produto surgido a partir de necessidades reais. O texto procura organizar de forma cronológica a sucessão de fatos que originaram os determinantes como são hodiernamente conhecidos, situando no tempo e espaço cada um dos estudiosos envolvidos na produção desse conhecimento.

O capítulo 3 é inteiramente destinado ao estudo dos determinantes no que concerne a suas características particulares. É um espaço reservado para indicar os conhecimentos necessários para compreender definições, propriedades, aplicações e demonstrações que envolvem os determinantes, estabelecer comparações entre as diferentes definições encontradas nas bibliografias indicadas, envolvendo um estudo aprofundado das demonstrações de suas propriedades.

As questões pedagógicas que envolvem o estudo dos determinantes nos níveis de ensino básico e superior estão presentes no capítulo 4. Os livros didáticos destinados ao 2º ano do Ensino Médio são analisados pautando-se em documentos oficiais disponibilizados pelo estado para amparar e orientar o trabalho dos discentes, enquanto a análise dos livros de Ensino Superior tem um caráter descritivo, objetivando estabelecer comparações entre os diferentes níveis de ensino.

Identificados os aspectos deficitários dos livros didáticos da Educação Básica surge um material didático para o estudante exercitar e trabalhar a compreensão dos conceitos envolvidos no estudo dos determinantes. Desta forma, o capítulo 5 traz o referencial teórico que justifica a escolha das particularidades do material didático proposto.

2 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO

Para subsidiar o estudo acerca do desenvolvimento histórico dos determinantes são utilizados os livros "A History of Abstract Algebra", de Israel Kleiner, "Introdução à história da matemática", da autoria de Howard Eves, "História da matemática" de Carl B. Boyer e a "Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences" organizada por Grattan Ivor Guinness.

Por questões didáticas, o estudo dos determinantes é comumentemente associado ao estudo das matrizes. Essa relação surge ao representar sistemas lineares na forma matricial, onde os determinantes podem ser utilizados como ferramenta para sua resolução. Apesar da conexão estabelecida com as matrizes, a produção de conteúdo matemático envolvendo os determinantes se deu de forma independente. As vicissitudes nos estudos e utilidades dos determinantes podem ser constatadas nas obras de Grattan e Kleiner, onde é afirmado que os dois conceitos possuem diferentes origens. "Embora se fale hoje do determinante de uma matriz, os dois conceitos tiveram origens diferentes. Em particular, os determinantes apareceram antes das matrizes e os estágios iniciais de sua história estavam intimamente ligados às equações lineares" (KLEINER, 2007). Assim sendo, historicamente, o estudo dos determinantes surge antes das matrizes, estando inicialmente ligado ao processo de resolução de sistemas de equações lineares e posteriormente a resolução de equações diferenciais, demonstrações de resultados importantes da álgebra linear, teoria da eliminação e outras aplicabilidades.

Manuscritos, datados entre 1678 e 1713, indicam que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) esteve entre os primeiros matemáticos a elaborar uma teoria envolvendo determinantes, o que o coloca como o criador dos determinantes em muitas literaturas. Cerca de 100 AC matemáticos chineses já desenvolviam tratados para resolução de sistemas de equações lineares mas, apesar de seus métodos assemelharem-se ao uso atual dos determinantes, essa noção não existia na China Antiga, passando a existir apenas após o surgimento de Seki Kowa (1642-1708), matemático japonês do século XVII que, em 1683, publicou sua obra "Method of solving the dissimulated problems", onde associava o determinante à matrizes quadradas, também apresentando um método geral para o seu cálculo. Para os chineses, a representação dos sistemas lineares limitava-se ao uso dos seus coeficientes, organizados em forma de tabela, enquanto suas soluções eram dadas a partir da manipulação das equações, objetivando anular os coeficientes. A partir dessa forma de representação, é possível identificar a ideia intuitiva de matriz, relacionando-a com os sistemas lineares.

Leibniz, também conhecido como um grande gênio, aos 12 anos já era um assíduo estudante da matemática e filosofia, destacando-se posteriormente como o inventor do cálculo. Uma de suas preocupações incluíam as notações utilizadas no seu processo de criação matemática, acreditando que o uso de uma notação adequada poderia auxiliar no desenvolvimento de novos resultados. Atualmente, as contribuições de Leibniz à história da matemática ainda são visíveis. Atencioso com as nomenclaturas, ele ainda se destacou por ser o primeiro a intitular como "resultante" as somas de termos no cálculo de um determinante, formulando teoremas e resultados que influem diretamente nas teorias do sistema linear de equações e eliminação.

Apesar de Leibniz ser um nome de destaque quando falamos sobre a história dos determinantes, ainda podemos mencionar outros matemáticos que tiveram participação ativa no seu desenvolvimento matemático, como é o caso de Colin Maclaurin (1698-1746), Gabriel Cramer (1704-1752), Alexandre Vandermonde (1735-1796), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Augustin Louise Cauchy (1789-1857), Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861), Carl Gustav Jacobi (1804-1851), Arthur Cayley (1821-1895), Karl Weierstrass (1815-1897) e Leopold Kronecker (1823-1891).

Colin Maclaurin foi um matemático escocês conhecido por ser um dos estudiosos com maior capacidade do século XVIII. Durante sua vida, se ocupou cedo com atividades universitárias, discentes e docentes, publicando trabalhos importantes, como é o caso do "Treatise of Algebra", publicado em 1748, onde houve a primeira aparição oficial dos determinantes, aplicando-os a um método para resolução de sistemas lineares semelhante ao que hoje conhecemos como a "regra de Cramer". Houveram outros matemáticos que se aproximaram da regra de Cramer, como é o caso de Girolamo Cardano (1501-1576), médico italiano que se ocupava com a matemática nas horas vagas, e que, em 1545, resolveu em um de seus trabalhos um sistema 2×2 utilizando a ideia intuitiva dos determinantes.

Para evitar anacronismo, é importante salientar que os conceitos trabalhados pelos matemáticos mencionados não eram utilizados com os sentidos modernos, de forma que a noção exata, os nomes e métodos estavam todos camuflados nos mecanismos de cálculo.

Apesar de já haverem estudiosos que usufruíram das ideias trazidas pela regra de Cramer, foi Gabriel Cramer quem ficou conhecido por consolidá-la. Cramer foi um matemático suíço que teve grande destaque na álgebra linear. Sua principal contribuição foi formalizar um método para resolução de sistemas lineares que, posteriormente, recebeu o seu nome. Em seu livro, “Introduction à l’analyse des lignes courbes algebriques” (com a tradução livre de “Introdução à análise de linhas curvas algébricas”), publicado em 1750, Cramer indicava como resolver sistemas de equações por meio dos determinantes, utilizando uma notação considerada superior a notação utilizada pelos demais matemáticos da época. Muitos autores sugerem que a regra de Cramer recebe esse nome justamente por ter sido Gabriel Cramer a utilizar a notação mais adequada para sua compreensão, reforçando a sugestão de Leibniz sobre a importância das notações.

Até o século XVIII, todos os matemáticos envolvidos no desenvolvimento histórico dos determinantes trabalharam relacionando determinantes e equações lineares. Alexandre Vandermonde, aproximadamente em 1772, foi o primeiro estudioso a desassociar os dois tópicos. Vandermonde, diferente dos estudiosos mais conhecidos, dedicou-se tarde à matemática, iniciando suas pesquisas apenas aos 35 anos. Os determinantes e as equações foram seus objetos de estudo e seu trabalho serviu de suporte para Pierre Simon Laplace, que prosseguiu desenvolvendo métodos sobre como calcular o determinante de um sistema quadrado qualquer.

Pierre Laplace era um homem de origem humilde, com grande afeição aos números. Seu bom desempenho na área oportunizou grandes experiências como docente e prestígio entre os matemáticos da época. No desenvolvimento histórico dos determinantes, ficou conhecido pelo Teorema de Laplace, método utilizado justamente para efetuar o cálculo do determinante de qualquer matriz quadrada. Nos seus estudos envolvendo equações diferenciais, encaminhou-se para alguns sistemas de equações lineares, onde pôde usar os determinantes para discutir suas respectivas soluções.

Um corolário muito conhecido do Teorema de Laplace é a Regra de Sarrus. Pierre Frédéric Sarrus, matemático francês, foi o responsável por desenvolver uma técnica mnemônica para o cálculo do determinante de matrizes 3×3 que atualmente ainda é ensinada nas escolas.

A história dos determinantes também contou com a participação do maior matemático alemão do século XIX. Carl Friedrich Gauss foi responsável por grandes descobertas e redescobertas, fazendo contribuições à teoria dos números e astronomia, além de servir de grande influência para os estudiosos da época. No que diz respeito aos determinantes, é possível dizer que Gauss foi o primeiro a utilizar o termo “determinante”, em uma publicação datada por 1801. Quinze anos depois, Augustin Louise Cauchy e Carl Gustav Jacobi responsabilizaram-se por dar um tratamento sistemático aos determinantes, fundando o que atualmente é conhecido sobre a temática.

Cauchy teve uma educação privilegiada, dedicando boa parte de sua vida a engenharia e ao estudo da matemática. Usufruindo dos estudos desenvolvidos por Laplace e Vandermonde, interessou-se pelos determinantes, publicando longos trabalhos sobre o tópico, como é o caso do seu primeiro artigo, que possuía um total de 85 páginas, oficialmente publicado em 1812. A partir de então, Cauchy utilizou os determinantes como ferramenta em publicações posteriores.

Jacobi se destacou como um pesquisador promissor em várias áreas distintas da matemática, recebendo o título de maior professor da sua geração. No que concerne os determinantes, é conhecido pelo teorema que recebeu o seu nome, garantindo que somar o múltiplo de uma linha a outra, para qualquer matriz quadrada, não altera o valor do seu determinante.

Uma vez nomeado e compreendido como conhecemos atualmente, os determinantes também serviram como ferramenta para Arthur Cayley, no desenvolvimento da geometria analítica em n dimensões, em 1843, além de exerceram grande papel nas demonstrações de resultados obtidos por Richard Dedekind (1831-1916), em 1870.

Arthur Cayley foi um brilhante matemático inglês, além de suas contribuições à geometria analítica, se destacou por sistematizar a álgebra das matrizes, enriquecendo também a teoria dos determinantes.

Ainda é possível mencionar os nomes de Karl Weierstrass e Leopold Kronecker que, por volta de 1860, foram os primeiros a definir os determinantes de forma postulacional.

De modo geral, os determinantes representaram um grande objeto de estudo até o final do século XIX, o que chegou ao fim no início do século seguinte, quando, com o advento dos computadores, os determinantes tornaram-se desnecessários nas demonstrações de resultados da Álgebra Linear. Por conta disso, estudiosos como Sheldon Axler, advogam o seu fim, afirmando que sua única funcionalidade está no cálculo de autovalores. Embora substituíveis em alguns contextos, o conteúdo em questão ainda representa um papel importante na Álgebra Linear, destacando-se como objeto de estudo em diferentes níveis de ensino.

3 DETERMINANTES

Toda matriz quadrada pode ser associada a um número usualmente chamado de "determinante". Denotado por $\det(A)$ ou $|A|$, os determinantes podem ser definidos de diferentes maneiras, demandando conhecimentos prévios ou não, além de possuir particularidades, propriedades e aplicações próprias. Para subsidiar o estudo da função determinante é utilizada a obra "Linear Algebra and Matrix Theory", da autoria de Robert Stoll.

3.1 MATRIZES E SUAS DEFINIÇÕES

No presente trabalho, o conceito de determinante estará diretamente associado à ideia de matriz, de forma que torna-se importante compreender as definições dos diferentes tipos de matrizes existentes.

Matriz

Considere $m,n \in \mathbb{N}$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$, com $1 \leq i,j \leq n$.

Uma matriz real de ordem $m \times n$ é uma sequência de números reais dispostos em m linhas e n colunas, formando uma tabela denotada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

O índice i representa o número da linha onde o elemento a_{ij} se encontra, enquanto o índice j denota sua coluna.

Matriz quadrada

Considerando $m,n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma matriz $m \times n$ é quadrada se $m = n$, isto é, se a matriz possui a mesma quantidade de linhas e colunas.

Matriz identidade

Representa uma matriz quadrada cujos elementos a_{ij} são iguais a 1 se $i = j$. Se $i \neq j$ então $a_{ij} = 0$.

Matriz transposta

A transposta de uma matriz $A_{m\times n}$ é denotada pela matriz $A^T_{n\times m}$, onde as linhas de A representam as colunas de A^T, isto é, os elementos a_{ij} da matriz A estarão na linha j e coluna i na matriz A^T.

3.2 DEFINIÇÃO DO DETERMINANTE

No presente trabalho os determinantes serão definidos de forma axiomática. Nos tópicos subsequentes suas propriedades serão demonstradas, o que nos direcionará para as diferentes formas possíveis de definir um determinante.

Considere A uma matriz quadrada de ordem n onde a_j representa as linhas de A, com $j = 1,\ldots,n$. Usaremos a notação $A = (a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n)$ para se referir a matriz A e

$$\det(A) = \det(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n)$$

para se referir ao seu determinante.

O determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada A um escalar, satisfazendo as seguintes propriedades:

(P1) Se uma linha da matriz A pode ser escrita como a soma de duas parcelas, então seu determinante pode ser escrito como a soma de dois determinantes, isto é, se $a_j = b_j + c_j$, então $\det(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = \det(a_1,\ldots,b_j,\ldots,a_n) + \det(a_1,\ldots,c_j,\ldots,a_n)$.

(P2) Se multiplicar uma linha da matriz A por um escalar, então o determinante da matriz resultante corresponde ao determinante da matriz original multiplicada por esse escalar, isto é, se $a_j = \alpha \cdot b_j$, onde α representa um escalar fixado, então

$$\det(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = \alpha \cdot \det(a_1,\ldots,b_j,\ldots,a_n).$$

(P3) Ao permutar duas linhas de uma matriz inverte-se o sinal do seu determinante, isto é, $\det(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_k,\ldots,a_n) = -\det(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_j,\ldots,a_n)$.

(P4) O determinante da matriz identidade de ordem n é igual a 1, isto é, $\det(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 1$ onde e_i representa a i-ésima linha da matriz identidade, com $i = 1,\ldots,n$.

A seguir apresentaremos um exemplo para cada um dos postulados da definição de determinante.

Exemplo 1.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0+1 & 1+1 & 2+1 \\ -7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.

$$\det\begin{bmatrix} 15 & 7 & 3 \\ 3 & 12 & 6 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 15 & 7 & 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 3\cdot\det\begin{bmatrix} 15 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Uma função que satisfaz as propriedades P1 e P2 é chamada de função multilinear, por ser linear[1] em cada uma de suas variáveis. Uma função que satisfaz as propriedades P1, P2 e P3 é chamada de função multilinear e antissimétrica.

3.3 PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

A função determinante possui propriedades particulares que podem auxiliar no cálculo do determinante de uma matriz quadrada qualquer.

Teorema 3.1. *Se a matriz A possui uma linha de zeros então* $\det(A) = 0$.

Demonstração. Pela definição de determinante, ao multiplicar uma linha da matriz A por um escalar α, o determinante da matriz resultante corresponde ao determinante da matriz original

[1] Uma função f é linear quando satisfaz a seguinte propriedade: $f(x+\alpha\cdot y) = f(x)+\alpha\cdot f(y)$.

multiplicado por esse escalar. Assumindo que $\alpha = 0$, então

$$\det(a_1, \dots, 0 \cdot a_j, \dots, a_n) = 0 \cdot \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) = 0.$$

□

Exemplo 5. *Perceba que a segunda linha da matriz denotada abaixo representa uma linha nula, portanto, o determinante da matriz em questão também será nulo.*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Teorema 3.2. *Se a matriz A possui linhas iguais então $det(A) = 0$.*

Demonstração. Pela definição de determinante, ao permutar duas linhas de uma matriz inverte-se o sinal do seu determinante. Supondo que A possua duas linhas iguais, ao permutá-las entre si a matriz não se altera, consequentemente não alterando seu determinante. Portanto, se $a_j = a_k$, ao permutá-las, temos que

$$\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

então $\det(A) = -\det(A) = 0$. □

Exemplo 6. *Perceba que as primeira e segunda linhas da matriz denotada abaixo são iguais, portanto, o determinante da matriz em questão será nulo.*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Teorema 3.3. *Se a matriz A possui linhas múltiplas então* $\det(A) = 0$.

Demonstração. Pela definição de determinante, ao multiplicar uma linha da matriz A por um escalar α, o determinante da matriz resultante corresponde ao determinante da matriz original multiplicado por esse escalar. Supondo que A possua linhas múltiplas entre si

$$\det(a_1, \dots, \alpha \cdot a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \alpha \cdot \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n).$$

Mas, pelo Teorema 3.2, matrizes com linhas iguais possuem determinante igual a zero, portanto

$$\alpha \cdot \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

$\square$

Exemplo 7. *Perceba que a segunda linha da matriz denotada abaixo representa o dobro da primeira linha, portanto, o determinante da matriz em questão será nulo.*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Teorema 3.4. *(Teorema de Jacobi) Adicionar à linha de uma matriz o múltiplo de outra linha não altera o valor de um determinante, ou seja,*

$$\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_j + \alpha \cdot a_k, \ldots, a_k, \ldots, a_n),$$

onde α representa uma constante diferente de zero.

Demonstração. Pelo postulado P1 da definição de determinante,

$$\det(a_1, \ldots, a_j + \alpha \cdot a_k, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$$

pode ser escrito como a soma

$$\det(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_k, \cdots, a_n) + \det(a_1, \cdots, \alpha \cdot a_k, \cdots, a_k, \cdots, a_n).$$

Mas a segunda parcela é igual a 0 pelo Teorema 3.3, ou seja,

$$\det(a_1, \ldots, a_j + \alpha \cdot a_k, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n).$$

$\square$

Exemplo 8. *Somar o dobro da segunda linha à primeira linha na matriz denotada abaixo não altera o valor do seu determinante.*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1+2\cdot(-1) & 4+2\cdot(3) & 6+2\cdot(1) \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O Corolário 3.7 apresentado subsequentemente representa uma generalização do Teorema 3.4. Para compreendê-lo em sua totalidade é essencial conhecer os conceitos de combinação linear, dependência e independência linear.

Definição 3.5. *Combinação linear*

A combinação linear de elementos corresponde a soma de seus múltiplos escalares, isto é, a combinação linear dos elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *é dada pela expressão* $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot a_k$*, com* $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Definição 3.6. *Dependência e independência linear*

Dizemos que as linhas $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *de uma matriz são um conjunto linearmente independente se, e somente se, a combinação linear nula* $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n = 0$ *admite apenas a solução trivial, isto é,* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$*. Do contrário, dizemos que esse conjunto é linearmente dependente, ou seja, existe algum* $\alpha_i \neq 0$*, com i variando de 1 até n, tal que* $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n = 0$.

Quando há dependência linear entre o conjunto das linhas de uma matriz é correto afirmar que pelo menos alguma linha é uma combinação linear das demais.

Corolário 3.7. *Se as linhas* $\{a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n\}$ *de uma matriz formam um conjunto linearmente dependente então* $\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = 0$.

Demonstração. Suponha que a linha a_j, com $1 \leq j \leq n$ é uma combinação linear das linhas restantes, isto é, $a_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k \cdot a_k$, com $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que adicionar à linha de uma matriz o múltiplo de outra linha não altera o valor de um determinante, portanto $\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, \sum_{k \neq j} \alpha_k \cdot a_k, \ldots, a_n) =$

$$\det(a_1, \ldots, \sum_{k \neq j} \alpha_k \cdot a_k - \sum_{k \neq j} \alpha_k \cdot a_k, \ldots, a_n) =$$

$$\det(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) = 0$$

$\square$

Exemplo 9. *Perceba que a segunda linha representada na matriz abaixo corresponde a uma combinação linear das demais linhas, portanto seu determinante será nulo.*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 \cdot (1) + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot (4) + (-1) \cdot (2) & 2 \cdot (6) + (-1) \cdot (1) \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Dada uma matriz quadrada qualquer, ao inverter as posições de suas linhas é possível determinar o valor de seu determinante a partir da matriz original, conforme pode ser observado no Teorema a seguir.

Teorema 3.8. *Seja* $\det(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$ *e* $i_1,i_2,\cdots,i_n$ *uma permutação dos índices* $1,2,\ldots,n$. *O* $\det(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}) = \pm\det(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *onde o sinal algébrico pré-fixado é determinado unicamente pela quantidade de permutações dos índices dados.*

Demonstração. Boldrini et al. (1980) indica que, "dados n objetos distintos $a_1,a_2,\ldots,a_n$ uma permutação destes objetos consiste em dispô-los em uma determinada ordem".

Qualquer permutação $i_1,i_2,\ldots,i_n$ dos índices pode ser reorganizado como os índices $1,2,\ldots,n$ a partir de um número finito de trocas 2 a 2. Essa reorganização pode ser feita de ilimitadas maneiras.

Caso sejam feitas r trocas entre os elementos $i_1,i_2,\ldots,i_n$ para organizá-los na ordem $1,2,\ldots,n$ será possível afirmar, pela antissimetria da função determinante, que

$$\det(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}) = (-1)^r \cdot \det(a_1,a_2\ldots,a_n),$$

pois a cada troca efetuada, o sinal da função muda.

Caso sejam feitas s trocas entre os elementos $i_1,i_2,\ldots,i_n$ para organizá-los na ordem $1,2,\ldots,n$ então $\det(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}) = (-1)^s \cdot \det(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Por transitividade $(-1)^r \cdot \det(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (-1)^s \cdot \det(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, de forma que $(-1)^r = (-1)^s$.

Assim, o sinal algébrico de $\det(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$ será definido a partir da quantidade (par ou ímpar) de trocas entre as linhas da matriz $(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$ para obter a matriz $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. □

Exemplo 10. *O determinante da matriz representada abaixo muda de sinal de acordo com a quantidade de permutações realizadas entre suas linhas. Quando há um número par de permutações, o determinante não se altera. Quando há um número ímpar de permutações, inverte-se o sinal do determinante.*

$$\det\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ 2 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 6\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 4 & 4\end{bmatrix}.$$

Com o Teorema a seguir é possível determinar uma expressão equivalente ao determinante de um produto, trazendo novas informações acerca dos determinantes.

Teorema 3.9. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, então*

$$\det(A\cdot B)=\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(-1)^s a_{1k_1}\cdot a_{2k_2}\cdot\ldots\cdot a_{nk_n}\cdot\det(B),$$

com k_i (i variando de 1 até n) representando as n colunas da matriz A.

As parcelas $a_{1k_1}\cdot a_{2k_2}\cdot\ldots\cdot a_{nk_n}$ receberão o seu sinal de acordo com a quantidade s (par ou ímpar) de permutações realizadas entre os índices k_i. Essas parcelas não poderão ser concomitantemente positivas e negativas.

Demonstração. Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_n$ as linhas da matriz A e $b_1,b_2,\ldots,b_n$ as linhas da matriz B, é possível escrever na forma somatorial uma linha qualquer da matriz $C=A\cdot B$:

$$c_1=a_{11}\cdot b_1+a_{12}\cdot b_2+\ldots+a_{1n}\cdot b_n=\sum_{k_1=1}^{n}a_{1k_1}\cdot b_{k_1}$$

$$c_2=a_{21}\cdot b_1+a_{22}\cdot b_2+\ldots+a_{2n}\cdot b_n=\sum_{k_2=1}^{n}a_{2k_2}\cdot b_{k_2}$$

$$\vdots$$

$$c_n=a_{n1}\cdot b_1+a_{n2}\cdot b_2+\ldots+a_{nn}\cdot b_n=\sum_{k_n=1}^{n}a_{nk_n}\cdot b_{k_n}.$$

Portanto, substituindo a linha c_1 no determinante do produto e explorando sua linearidade temos que $\det(A\cdot B)=\det(C)=\det(c_1,c_2,\ldots,c_n)=$

$$\det(a_{11}\cdot b_1+a_{12}\cdot b_2+\ldots+a_{1n}\cdot b_n,c_2,\ldots,c_n)=$$

$$\det(a_{11}\cdot b_1,c_2,\ldots,c_n)+\det(a_{12}\cdot b_2,c_2,\ldots,c_n)+\ldots+\det(a_{1n}\cdot b_n,c_2,\ldots,c_n)=$$

$$\sum_{k_1=1}^{n}\det(a_{1k_1}\cdot b_{k_1},c_2,\ldots,c_n)=$$

$$\sum_{k_1=1}^{n}a_{1k_1}\cdot\det(b_{k_1},c_2,\ldots,c_n).$$

Analogamente, ao substituir a linha c_2 no determinante do produto, obtêm-se

$$\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}a_{1k_1}\cdot a_{2k_2}\cdot\det(b_{k_1},b_{k_2},\ldots,c_n).$$

Repetindo o processo para as n linhas da matriz C temos que $\det(A\cdot B)=\det(C)=$

$$\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}a_{1k_1}\cdot a_{2k_2}\cdot\ldots\cdot a_{nk_n}\cdot\det(b_{k_1},b_{k_2},\ldots,b_{k_n})=$$

$$\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \det(b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_n}).$$

Mas os índices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ representam uma permutação dos índices $1, 2, \ldots, n$ e, conforme provado pelo Teorema 3.8, o determinante de uma matriz cujas linhas foram permutadas é equivalente a $\pm$ o determinante da matriz original, onde o sinal algébrico pré-fixado depende da quantidade par ou ímpar de permutações feitas. Desta forma, é correto afirmar que $\det(b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_n}) = (-1)^s \det(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (-1)^s \det(B)$, com s representando o número de permutações realizadas.

Portanto, é possível concluir que

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} (-1)^s a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \det(B).$$

□

Corolário 3.10. *(Existência e unicidade) A função determinante é única e pode ser associada a toda matriz A quadrada, sendo dada pela expressão*

$$\det(A) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} (-1)^s a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \cdots \cdot a_{nk_n}.$$

Demonstração. Sabe-se pelo Teorema 3.9 que

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} (-1)^s a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \det(B),$$

onde $k_1, k_2, \cdots, k_n$ representam uma permutação dos índices $1, 2, \cdots, n$, enquanto

$$\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$$

representa o somatório de todas as permutações possíveis entre os elementos da matriz A.

Considere $B = I$, com I representando a matriz identidade, é correto afirmar que

$$\det(A \cdot I) = \det(A) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} (-1)^s a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \det(I).$$

Mas, pelo postulado P4 da definição de determinante, o determinante da função identidade é igual a 1, portanto $\det(A) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} (-1)^s a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$. □

Para exemplificar o Teorema demonstrado trazemos as técnicas mnemônicas para calcular determinantes de ordens 2 e 3 que atualmente são estudadas no nível de ensino básico.

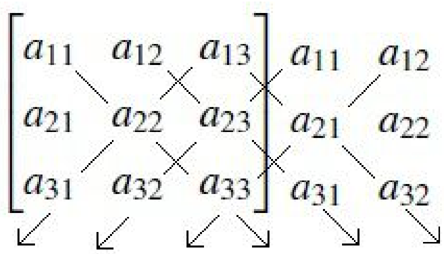
Exemplo 11. *Seja* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *então as permutações de índices* $(1,2)$ *possíveis são* $(1,2)$ *e* $(2,1)$*. Perceba que é feito um número ímpar de permutações para obter o par* $(2,1)$*, portanto, o produto* $a_{12} \cdot a_{21}$ *será negativo. Assim,* $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Neste caso, se chamarmos a diagonal que contêm os elementos a_{ii} *de "diagonal principal" e a diagonal que contêm os elementos* a_{ij} *de "diagonal secundária" é possível dizer que o determinante de uma matriz* 2×2 *é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal menos o produto dos elementos da sua diagonal secundária.*

Seja $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *então as permutações de índices* $(1,2,3)$ *possíveis são* $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ *e* $(2,3,1)$*. Perceba que é feito um número ímpar de permutações nos casos* $(1,3,2)$, $(3,2,1)$ *e* $(2,1,3)$ *e um número par nos casos* $(1,2,3)$, $(3,1,2)$ *e* $(2,3,1)$*. Portanto, os produtos* $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$, $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ *e* $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ *serão negativos, enquanto os demais serão positivos. Dessa forma,*

$$\det(B) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Pierre Frédéric Sarrus desenvolveu uma técnica mnemônica para auxiliar no cálculo do determinante de matrizes 3×3*. Conhecida como a "regra de Sarrus", o método consiste em copiar (ao lado direito da matriz) as duas primeiras colunas da matriz dada, somando os produtos dos elementos das seis diagonais obtidas. As flechas que apontam para a direita representam as parcelas positivas enquanto as que apontam para esquerda representam as parcelas negativas.*



A partir do Teorema 3.9 é possível determinar a expressão que equivale ao determinante de um produto de matrizes, conforme pode ser observado no Corolário abaixo.

Corolário 3.11. *(Teorema de Binet) O determinante do produto é o produto dos determinantes, isto é,* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Demonstração. Sabe-se pelo Teorema 3.9 que

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_n} \pm a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \det(B).$$

Mas, pelo Corolário 3.10, $\det(A) = \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_n} \pm a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$.

Portanto, realizando as substituições possíveis, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. □

Exemplo 12. *Perceba que* $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = 10 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = 5 \cdot 2 - 9 \cdot 0 = 10$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = (1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) \cdot (-1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) = 10$$

Teorema 3.12. *O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta, isto é,* $det(A^T) = det(A)$.

Demonstração. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Considere a^T_{ij} o elemento da linha i e coluna j da matriz A^T, então, é correto afirmar que $a^T_{ij} = a_{ji}$. Sabe-se pelo Corolário 3.10 que $\det(A^T) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n}^{n} \pm a^T_{1k_1} \cdot a^T_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a^T_{nk_n}$. Portanto, $\det(A^T) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n}^{n} \pm a_{k_1 1} \cdot a_{k_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{k_n n}$.

Se para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ escrevemos $k_i = j$ e $i = k'_j$ então $a_{k_i i} = a_{jk'_j}$.

Assim, ao efetuar as mudanças de índices em $a_{k_1 1} \cdot a_{k_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{k_n n}$, obtêm-se, após a ordenação crescente dos primeiros índices, $a_{1k'_1} \cdot a_{2k'_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk'_n}$. Para obter melhor compreensão do procedimento realizado, segue uma exemplificação pertinente ao contexto em questão:

Exemplo 13. *Considere os índices* $k_i = j$ *e* $i = k'_j$, *com* $i, j = \{1, 2, 3, 4\}$.

Se $k_1 = 3, k_2 = 4, k_3 = 2$ *e* $k_4 = 1$ *então* $1 = k'_3, 2 = k'_4, 3 = k'_2$ *e* $4 = k'_1$.

Desta forma, é correto afirmar que

$$a_{k_1 1} \cdot a_{k_2 2} \cdot a_{k_3 3} \cdot a_{k_4 4} = a_{3k'_3} \cdot a_{4k'_4} \cdot a_{2k'_2} \cdot a_{1k'1} = a_{1k'1} \cdot a_{2k'_2} \cdot a_{3k'_3} \cdot a_{4k'_4}.$$

Cada elemento k_i do somatório $\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n}^{n} \pm a_{k_1 1} \cdot a_{k_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{k_n n}$ percorre os valores de 1 até n, assim como cada k'_j também percorre os elementos de 1 até n. Portanto,

$$\det(A^T) = a_{1k'_1} \cdot a_{2k'_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk'_n} = \det(A).$$

$\square$

Exemplo 14. *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *então* $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. *Perceba que as diagonais principais e secundárias das duas matrizes possuem exatamente os mesmos elementos, portanto os produtos permanecem iguais, de forma que* $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = \det(A^T)$.

Perceba que o Teorema 3.12 nos permite "estender as propriedades das linhas de A às colunas de A. Por exemplo, se duas colunas de A são iguais então $\det(A) = 0$"(CALLIOLI et al., 1990).

A seguir, discorreremos sobre um método de calcular determinantes conhecido como o Teorema de Laplace. Para mostrar a validade do Teorema de Laplace é necessário que a expressão matemática obtida ao aplicá-lo satisfaça os quatro postulados dos determinantes. O postulado P3 garante que a função determinante é antissimétrica. Para demonstrar que a expressão obtida por Laplace também será antissimétrica, utilizaremos o conceito de função alternada.

Definição 3.13. *Dizemos que uma função multilinear d é alternada se*

$$d(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = 0,$$

com $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Lema 3.14. *Uma função multilinear é alternada se, e somente se, é antissimétrica, isto é,* $d(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = -d(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$.

Demonstração. $(\Longrightarrow)$

Seja d uma função multilinear alternada então $d(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) =$

$$d(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_i, \ldots, a_n) =$$

$$d(a_1, \ldots, a_i + a_j, \ldots, a_i + a_j, \ldots, a_n) = 0$$

.

Mas, graças a linearidade em cada variável, $d(a_1,\dots,a_i+a_j,\dots,a_i+a_j,\dots,a_n) =$

$$d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i+a_j,\dots,a_n)+d(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i+a_j,\dots,a_n).$$

A primeira parcela $d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i+a_j,\dots,a_n) =$

$$d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i,\dots,a_n)+d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) =$$

$$0+d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n).$$

Analogamente, $d(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i+a_j,\dots,a_n) = d(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n)$.

Por transitividade $d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i+a_j,\dots,a_n)+d(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i+a_j,\dots,a_n) =$

$$d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n)+d(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n) = 0.$$

Portanto, $d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) = -d(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n)$, isto é, d é anti-simétrica.

$(\Longleftarrow)$

Seja d anti-simétrica, então $d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) = -d(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n)$. Considere $a_i = a_j$ então $d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i,\dots,a_n) = -d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i,\dots,a_n) = 0$.

Portanto $d(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i,\dots,a_n) = 0$. Logo d é alternada. □

Lema 3.15. *Seja d uma função multilinear. As afirmações abaixo são equivalentes:*

i. A função d é alternada.

ii. Se $c_i = c_{i+1}$, para algum i, então $d(c_1,\dots,c_n) = 0$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Se d é uma função alternada então $d(c_1,\dots,c_j,\dots,c_k,\dots,c_n) = 0$ se $c_j = c_k$ para $j \neq k$, com $j,k = 1,\dots,n$.

Considere $j = i$ e $k = i+1$, temos que $d(c_1,\dots,c_i,c_{i+1},\dots,a_n) = 0$, satisfazendo (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que se $c_i = c_{i+1}$, para algum i, então $d(c_1,\dots,c_n) = 0$. Deve-se provar que $A = (c_1,\dots,c_i,\dots,c_n)$ é alternada. Por indução, supõe-se que esteja provado que sempre que $c_i = c_{i+j}$ temos $d(c_1,\dots,c_k) = 0$, $\forall j = 1,\dots,k$. Para $j = 1$ é válido, pela hipótese (ii). Deve-se provar para $j = k+1$, isto é, se $c_i = c_{i+(k+1)}$ então $d(c_1,\dots,c_n) = 0$.

Pela hipótese (ii), $d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k},\dots,c_n)=0$, portanto, pela linearidade de d

$$d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k}+c_{i+k+1},c_{i+k+1},\dots,c_n)=$$

$$d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k},c_{i+k+1},\dots,c_n)+d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k+1},c_{i+k+1},\dots,c_n)\Rightarrow$$

$$d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k}+c_{i+k+1},c_{i+k+1},\dots,c_n)=d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k+1},\dots,c_n).$$

Assim, fica provado que somar uma variável a outra não altera o valor da função d. Então

$$d(c_1,\dots,c_{i+k}+c_{i+k+1},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)=$$

$$d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)+d(c_1,\dots,c_{i+k+1},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n).$$

Porém, como somar uma variável a outra não altera o valor de d

$$d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)=d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k+1},\dots,c_n)$$

$$d(c_1,\dots,c_{i+k+1},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)=d(c_1,\dots,c_{i+k+1},c_{i+k},\dots,c_n).$$

Por hipótese,

$$d(c_1,\dots,c_{i+k}+c_{i+k+1},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)=0$$

$$d(c_1,\dots,c_{i+k}+c_{i+k+1},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)=$$

$$d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)+d(c_1,\dots,c_{i+k+1},c_{i+k}+c_{i+k+1},\dots,c_n)=$$

$$d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k+1},\dots,c_n)+d(c_1,\dots,c_{i+k+1},c_{i+k},\dots,c_n).$$

Por transitividade $d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k+1},\dots,c_n)+d(c_1,\dots,c_{i+k+1},c_{i+k},\dots,c_n)=0$.

Portanto, $d(c_1,\dots,c_{i+k},c_{i+k+1},\dots,c_n)=-d(c_1,\dots,c_{i+k+1},c_{i+k},\dots,c_n)$. Logo, d é antissimétrica e, consequentemente, alternada. $\square$

O Teorema de Laplace ainda usufrui de um conceito conhecido como "cofator".

Definição 3.16. *O produto $C_{jk}=(-1)^{j+k}\cdot|M_{jk}|$ é chamado de "cofator do elemento a_{jk}", onde $|M_{jk}|$ representa o determinante da submatriz obtida ao se excluir a linha e coluna j e k, respectivamente.*

Para calcular o determinante de matrizes de ordem $n>1$ é possível utilizar o Teorema de Laplace, também conhecido como o Desenvolvimento de Laplace. "O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n-1$." (BOLDRINI et al., 1980)

Teorema 3.17. *(Desenvolvimento de Laplace) O determinante de uma matriz quadrada A pode ser dado pela expressão* $\det(A) = a_{j1} \cdot C_{j1} + a_{j2} \cdot C_{j2} + \ldots + a_{jn} \cdot C_{jn}$*, onde* C_{jn} *representa o cofator do elemento* a_{jn}*.*

Demonstração. Em particular, para uma matriz 1×1 com um único elemento a_{11} dizemos que a_{11} é seu determinante.

Associando toda matriz quadrada à uma função obtida a partir do Desenvolvimento de Laplace, basta provar que essa função satisfaz as propriedades dos determinantes, provando que os determinantes podem ser dados pela expressão indicada.

A manipulação realizada para aplicar o desenvolvimento de Laplace consiste em tomar um elemento fixo a_{jk} de uma matriz quadrada A e multiplicá-lo por $(-1)^{j+k} \cdot |M_{jk}|$. Repetindo esse processo de forma sucessiva com todos os elementos da linha j e somando essa sucessão de produtos obtêm-se a função

$$d(a) = a_{j1} \cdot C_{j1} + a_{j2} \cdot C_{j2} + \cdots + a_{jn} \cdot C_{jn}.$$

Se $A = (a_1, \cdots, b_j + c_j, \cdots, a_n)$ então, utilizando os elementos da j-ésima linha:

$$\begin{gathered}
d(A) = (b_{j1} + c_{j1}) \cdot C_{j1} + (b_{j2} + c_{j2}) \cdot C_{j2} + \ldots + (b_{jn} + c_{jn}) \cdot C_{jn} = \\
\sum_{l=1}^{n} (b_{jl} + c_{jl}) \cdot C_{jl} = \\
\sum_{l=1}^{n} b_{jl} \cdot C_{jl} + c_{jl} \cdot C_{jl} = \\
\sum_{l=1}^{n} b_{jl} \cdot C_{jl} + \sum_{l=1}^{n} c_{jl} \cdot C_{jl} = \\
(b_{j1} \cdot C_{j1} + b_{j2} \cdot C_{j2} + \ldots + b_{jn} \cdot C_{jn}) + (c_{j1} \cdot C_{j1} + c_{j2} \cdot C_{j2} + \ldots + c_{jn} \cdot C_{jn}) = \\
d(a_1, \ldots, b_j, \ldots, a_n) + d(a_1, \ldots, c_j, \ldots, a_n).
\end{gathered}$$

Portanto, $d(a_1, \ldots, b_j + c_j, \ldots, a_n) = d(a_1, \ldots, b_j, \ldots, a_n) + d(a_1, \ldots, c_j, \ldots, a_n)$, satisfazendo o primeiro postulado dos determinantes.

Considere $A = (a_1, \ldots, \alpha \cdot b_j, \ldots, a_n)$, onde α representa um escalar fixado. Utilizando os elementos da j-ésima linha,

$$d(A) = (\alpha \cdot b_{j1}) \cdot C_{j1} + (\alpha \cdot b_{j2}) \cdot C_{j2} + \ldots + (\alpha \cdot b_{jn}) \cdot C_{jn} =$$

$$\alpha \cdot (b_{j1} \cdot C_{j1} + b_{j2} \cdot C_{j2} + \ldots + b_{jn} \cdot C_{jn}) =$$

$$\alpha \cdot (\sum_{l=1}^{n} b_{jl} \cdot C_{jl}) =$$

$$\alpha d(a_1, \ldots, b_j, \ldots, a_n).$$

Portanto, $d(a_1, \ldots, \alpha \cdot b_j, \ldots, a_n) = \alpha \cdot d(a_1, \ldots, b_j, \ldots, a_n)$, satisfazendo o segundo postulado dos determinantes.

Se a função multilinear d é alternada então se $c_i = c_{i+1}$, para algum i, $d(c_1, \ldots, c_n) = 0$, ou seja, se as linhas adjacentes de uma matriz forem iguais, $d(c_1, \ldots, c_n) = 0$. Portanto, para provar a alternância da função $d(A) = a_{j1} \cdot C_{j1} + a_{j2} \cdot C_{j2} + \ldots + a_{jn} \cdot C_{jn}$, quando $A = (a_1, \ldots, a_n)$, basta provar que se A possui linhas adjacentes iguais então $d(A) = 0$.

Seja $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Suponha que $a_k = a_{k+1}$, para $1 \leq k \leq n$.

Aplicando a expansão de Laplace para a j-ésima linha, com $j \neq k$ e $j \neq k+1$, então

$$d(A) = a_{j1} \cdot C_{j1} + a_{j2} \cdot C_{j2} + \ldots + a_{jn} \cdot C_{jn} =$$

$$a_{j1} \cdot (-1)^{j+1} \cdot |M_{j1}| + a_{j2} \cdot (-1)^{j+2} \cdot |M_{j2}| + \ldots + a_{jn} \cdot (-1)^{j+n} \cdot |M_{jn}|.$$

Mas $|M_{ij}|$ terá duas linhas iguais, portanto $|M_{ij}| = 0$, $\forall i \in 1, 2, \ldots, n$, então $d(A) = 0$.

Assim, se $a_i = a_{i+1}$ para algum i, então $d(a_1, \ldots, a_n) = 0$, portanto d é alternada, satisfazendo o terceiro postulado da definição dos determinantes.

Seja I uma matriz identidade de ordem n. Os elementos a_{ij} dessa matriz equivalem a 1 quando $i = j$, do contrário, $a_{ij} = 0$, com $1 \leq i, j \leq n$. Assim,

$$d(I) = 1 \cdot C_{ii} + \sum_{i \neq j} 0 \cdot C_{ij} =$$

$$1 \cdot (-1)^{i+i} \cdot |M_{ii}|.$$

Mas $|M_{ii}|$ representa o determinante de uma matriz identidade de ordem $n-1$. Ao aplicar a expansão de cofatores de forma recursiva para obter $|M_{ii}|$ chega-se a matriz cujo único elemento é 1, de forma que $|M_{ii}| = 1$. Logo $d(I) = 1$, satisfazendo o quarto postulado da definição do determinante.

Assim, fica demonstrado que a função $d(A) = a_{j1} \cdot C_{j1} + a_{j2} \cdot C_{j2} + \ldots + a_{jn} \cdot C_{jn}$ representa o determinante de A.

Conforme provado pelo Teorema 3.12, $det(A) = det(A^T)$, portanto as propriedades aplicadas às linhas de uma matriz também são válidas para suas colunas. Assim, o Teorema de Laplace pode ser aplicado a partir de qualquer linha ou coluna escolhida de uma matriz qualquer. □

Conforme mencionado anteriormente os determinantes podem ser definidos de formas diferentes, embora equivalentes entre si. A função determinante definida no tópico anterior, com os postulados listados, é a definição que motiva Lima (2006) a apontar os determinantes como uma função multilinear alternada. A associação entre a função multilinear e os determinantes acontece imediatamente ao evidenciar como a função determinante é linear em cada uma das suas variáveis, considerando que as linhas de uma matriz sejam essas variáveis. Deste modo, as linearidades dão ao determinante a característica de ser multilinear, enquanto a antissimetria indica que ele também é uma função alternada. Assim, graças aos postulados supracitados, é possível dizer que o determinante de fato é uma função multilinear alternada. Compreendendo-o desta forma é possível demonstrar todas as propriedades dos determinantes sem que sejam necessário conceitos extraordinários.

Em outras literaturas, no entanto, outras duas definições se destacam. Poole (2016), por exemplo, define os determinantes motivado pela sua aplicação no cálculo de autovalores, definindo-os a partir do Teorema de Laplace. Enquanto Callioli et al (1990) o define a partir dos conceitos de permutação, o que demanda conhecimentos prévios acerca da permutação e suas particularidades.

3.4 APLICAÇÕES DO DETERMINANTE

Ao decorrer do segundo ano do Ensino Médio os alunos realizam um estudo superficial acerca dos sistemas lineares, matrizes e determinantes, neglicenciando muitas vezes a forma como esses conhecimentos podem ser aplicados, tornando o processo de ensino e aprendizado pouco significativo para o seu público. Essa realidade salienta a importância de evidenciar suas aplicações.

3.4.1 MATRIZ INVERSA

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Dizemos que B é inversa de A se $A \cdot B = B \cdot A = I$, onde I representa a matriz identidade de ordem n. Quando a matriz B existe então A recebe o título de invertível e B passa a ser denotada como A^{-1}.

Para avaliar se uma matriz A possui inversa é possível utilizar o conhecimento sobre determinantes. Confirmada a existência de uma matriz inversa, os determinantes ainda podem auxiliar a determiná-la. Para isso é preciso conhecer e compreender a definição de matriz adjunta.

Todos os elementos de uma matriz dada possuem um cofator, conhecendo-os é possível formar a chamada "matriz dos cofatores de A". Assim, "dada uma matriz quadrada A, chamaremos de matriz adjunta de A a transposta da matriz dos cofatores de A". (BOLDRINI et al., 1980)

Teorema 3.18. *A é uma matriz invertível se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que B seja a matriz inversa de A, isto é, $B = A^{-1}$.

Sabe-se pelas propriedades dos determinantes que $\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$. Mas, pela definição de matriz inversa, $A \cdot B = I$, portanto $\det(A \cdot B) = \det(I) = 1$.

Por transitividade $\det(A) \cdot \det(B) = 1$, portanto $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$ e $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, de forma que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det(A) \neq 0$.

Sabe-se que $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n$ ***(pag 73 Boldrini)***. Como $\det(A) \neq 0$, então

$$A \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = I_n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = A^{-1}.$$

Portanto a inversa existe, além de ser dada por $\frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$. □

3.4.2 SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

O estudo dos determinantes surgiu motivado pela necessidade de solucionar sistemas lineares de n equações e incógnitas. Matemáticos conhecidos se destacaram por aplicar métodos de resolução de sistemas com particularidades semelhantes ao que hoje conhecemos como a

"Regra de Cramer", um método de resolução, oficializado em 1750 pelo suiço Gabriel Cramer.

Cramer utilizou os determinantes como ferramental suficiente para calcular o valor de incógnitas em sistemas específicos, mas ainda é possível utilizá-los apenas para discutir e analisar esses sistemas.

Considere $AX = B$ um produto de matrizes, onde A representa uma matriz $n \times n$ que contém os coeficientes de um sistema de equações lineares, X corresponde a matriz coluna de ordem $n \times 1$ contendo as incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ do sistema mencionado e B equivale a matriz de ordem $n \times 1$ que contém seus termos independentes.

Se $\det(A) \neq 0$ dizemos que o sistema é possível e determinado, possuindo solução única.

Se $\det(A) = 0$ o sistema correspondente é chamado de impossível, em caso de não haver solução, ou possível e indeterminado, em caso de haverem infinitas soluções, de forma que, quando o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, nada podemos concluir sobre a sua solução.

Isso ocorrer graças a existência ou não da matriz inversa de A.

Se $\det(A) \neq 0$ então A possui inversa, de forma que se torna possível determinar uma solução única para o sistema, conforme pode ser visto pela Regra de Cramer.

Segundo Cramer, as incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são dadas por

$$x_j = \frac{\det(A^j)}{\det(A)},$$

com $j = 1, 2, \cdots, n$; onde A^j representa a matriz A após substituir sua j-ésima coluna pela matriz coluna B.

Considerando que $det(A) \neq 0$, isto é, que A possua inversa.

Se $AX = B$ então $X = A^{-1}B$. Como $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$ então $X = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) \cdot B$. Escrevendo na forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \cdot C_{11} + b_2 \cdot C_{21} + \ldots + b_n \cdot C_{n1} \\ b_1 \cdot C_{12} + b_2 \cdot C_{22} + \ldots + b_n \cdot C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 \cdot C_{1n} + b_2 \cdot C_{2n} + \ldots + b_n \cdot C_{nn} \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 \cdot C_{11} + b_2 \cdot C_{21} + ... + b_n \cdot C_{n1}}{det(A)} \\ \frac{b_1 \cdot C_{12} + b_2 \cdot C_{22} + ... + b_n \cdot C_{n2}}{det(A)} \\ \vdots \\ \frac{b_1 \cdot C_{1n} + b_2 \cdot C_{2n} + ... + b_n \cdot C_{nn}}{det(A)} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o elemento da j-ésima linha da matriz X será $x_j = \frac{b_1 \cdot C_{1j} + b_2 \cdot C_{2j} + ... + b_n \cdot C_{nj}}{\det(A)}$.

De acordo com a definição de A^j temos que

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de A^j a partir da expansão de cofatores pela j-ésima coluna temos

$$d(A^j) = b_1 \cdot C_{1j} + b_2 \cdot C_{2j} + \ldots + b_n \cdot C_{nj}.$$

Portanto $x_j = \frac{b_1 \cdot C_{1j} + b_2 \cdot C_{2j} + ... + b_n \cdot C_{nj}}{\det(A)} = \frac{\det(A^j)}{\det(A)}$.

É importante salientar que a Regra de Cramer só funciona quando o determinante da matriz dos coeficientes em questão é diferente de 0! Anteriormente, estudiosos tentaram provar erroneamente que, caso os determinantes de A e A^J sejam iguais a 0, o sistema em questões obrigatoriamente possui infinitas soluções. Atualmente, conhecendo contra-exemplos, sabe-se que essa afirmação não e válida. Essa realidade evidencia como o professor deve estar atento aos materiais de pesquisa utilizados por seus alunos.

3.4.3 PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial corresponde a uma operação binária entre vetores pertencentes a $\mathbb{R}^3$, denotada por $u \times v$ e resultante de um vetor ortogonal aos vetores u e v. Seu conceito é comumentemente usado na física, surgindo no estudo de torque e momento angular, por exemplo.

Nesse contexto, os determinantes representam uma técnica mnemônica para memorizar o cálculo de um produto vetorial.

Seja $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. O produto vetorial $u \times v$ pode ser indicado como $u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

É importante salientar que a notação utilizada para descrever w possui apenas cunho formal, não estando intimamente ligada a definição de determinante uma vez que "não faz sentido considerar o determinante de uma matriz onde os elementos da primeira linha são vetores e os demais elementos das demais linhas são números reais" (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012).

Considere $w = (x, y, z)$. Deve ser possível provar que

$$w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot e_1 - \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot e_2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot e_3.$$

Por definição $||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot sen\sigma$, com σ representando a medida do ângulo entre u e v. Portanto, deve-se provar que $||w|| = ||u \times v||$.

Sabe-se que $||w||^2 = \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}^2 - \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}^2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^2 =$

$$(b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1)^2 - (a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2.$$

Enquanto, pelas propriedades da potenciação, $||u \times v||^2 = ||u||^2 \cdot ||v||^2 \cdot (sen\sigma)^2 =$

$$||u||^2 \cdot ||v||^2 \cdot (1 - cos^2\sigma) =$$

$$||u||^2 \cdot ||v||^2 - ||u||^2 \cdot ||v||^2 \cdot cos^2\sigma =$$

$$||u||^2 \cdot ||v||^2 - ||u||^2 \cdot ||v||^2 \cdot cos^2\sigma =$$

$$||u||^2 \cdot ||v||^2 - \langle u, v \rangle^2$$

Calculando as normas e o produto interno

$$||u \times v||^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2)^2.$$

Seja $A = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$ e $B = -(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2)^2$, desenvolvendo os produtos temos

$$A = (a_1 \cdot a_2)^2 + a_1^2 \cdot b_2^2 + a_1^2 \cdot c_2^2 + b_1^2 \cdot a_2^2 + (b_1 \cdot b_2)^2 + b_1^2 \cdot c_2^2 + c_1^2 \cdot a_2^2 + c_1^2 \cdot b_2^2 + (c_1 \cdot c_2)^2$$

$$B = -(a_1 \cdot a_2)^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_2 \cdot a_2 \cdot b_1 - 2 \cdot a_1 \cdot c_2 \cdot a_2 \cdot c_1 - (b_1 \cdot b_2)^2 - 2 \cdot b_1 \cdot c_2 \cdot b_2 \cdot c_1 - (c_1 \cdot c_2)^2$$

Somando A e B e agrupando convenientemente os termos restantes,

$$||u \times v||^2 = (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1)^2 + (a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2 = ||w||^2,$$

de forma que

$$||u \times v|| = ||w||.$$

Portanto, $w = (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1, a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$.

Falta provar que w é ortogonal aos vetores u e v, isto é, $u \cdot w = 0$ e $v \cdot w = 0$.

$$u \cdot w = (a_1, b_1, c_1) \cdot (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1, a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) =$$

$$a_1 \cdot (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1) + b_1 \cdot (a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2) + c_1 \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) =$$

$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_1 \cdot b_2 \cdot c_1 + b_1 \cdot a_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot a_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot a_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot a_2 \cdot b_1) = 0$$

Analogamente, $v \cdot w = 0$.

Portanto, $u \perp w$ e $v \perp w$, onde $u \times v = w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$.

3.4.4 COLINEARIDADE

Os determinantes podem auxiliar na identificação de pontos colineares.

Dizemos que os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$ estão alinhados se o determinante da matriz $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$ é nulo.

Se os três pontos estão alinhados horizontalmente fica claro que $y_1 = y_2 = y_3$ de forma que $\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = 0$ pelas propriedades dos determinantes.

De forma análoga, se os três pontos estão alinhados verticalmente, fica claro que $x_1 = x_2 = x_3$, assim $\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$.

Se os três pontos pertencem a uma reta não paralela aos eixos das abscissas e ordenadas então a relação de proporção $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ existe. Portanto,

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) = (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1).$$

Desenvolvendo os produtos

$$x_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_1 = x_3 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 \Leftrightarrow$$

$$x_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \Leftrightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Como as implicações lógicas são bivalentes a recíproca é verdadeira.

3.4.5 EQUAÇÃO DA RETA

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, os determinantes podem auxiliar a determinar a equação da reta que passa por A e B. Essa equação é dada pelo determinante nulo da matriz

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que a equação geral de uma reta é dada por $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. Se os pontos A e B pertencem a essa reta então

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \\ a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c = 0 \\ a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c = 0 \end{cases}.$$

Subtraindo as segunda e terceira equações da primeira temos

$$a \cdot (x_1 - x) + b \cdot (y_1 - y) = 0$$

$$a \cdot (x_2 - x) + b \cdot (y_2 - y) = 0.$$

Isolando a na segunda equação obtida e substituindo na terceira

$$a = -b \cdot \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \Rightarrow$$

$$-b \cdot \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot (x_2 - x) + b \cdot (y_2 - y) = 0 \Rightarrow$$

$$-b \cdot (y_1 - y) \cdot (x_2 - x) + b \cdot (y_2 - y) \cdot (x_1 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$b\,[(y_2 - y) \cdot (x_1 - x) - (y_1 - y) \cdot (x_2 - x)] = 0.$$

Se $b = 0$, então $a = \frac{-0 \cdot (y_1 - y)}{x_1 - x} = 0$, mas a e b não podem ser simultaneamente nulos, ou não haveria equação da reta passando por A e B. Portanto, $b \neq 0$, de forma que

$$(y_2 - y) \cdot (x_1 - x) - (y_1 - y) \cdot (x_2 - x) = 0.$$

Desenvolvendo os produtos

$$1 \cdot y_2 \cdot x_1 - 1 \cdot y_2 \cdot x - 1 \cdot y \cdot x_1 + x \cdot y - 1 \cdot y_1 \cdot x_2 + 1 \cdot y_1 \cdot x + 1 \cdot y \cdot x_2 - x \cdot y = 0 \Rightarrow$$

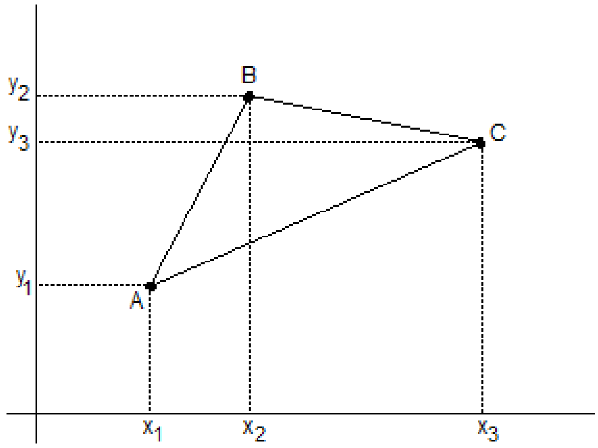
$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

3.4.6 ÁREA DO TRIÂNGULO

É possível determinar com o auxílio dos determinantes se três pontos estão alinhados ou não. Caso não estejam, cada ponto pode representar um vértice de um triângulo cuja área pode ser expressada como o determinante de uma matriz de ordem 3 dividida ao meio, de forma que a área correspondente seja equivalente a

$$\frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix},$$

considerando os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$.



A partir do Teorema de Pitágoras sabe-se que o segmento AC representa hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem $(x_3 - x_1)$ e $(y_3 - y_1)$. Assim, AC mede

$$b = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2},$$

podendo representar a base do triângulo ABC.

Por sua vez, a altura h do triângulo corresponde a distância do vértice B a base AC. Sabe-se que a distância entre ponto e reta é dada pela expressão $\frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, onde x_0 e y_0 representam as coordenadas do ponto dado e $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c$ representa a equação da reta no ponto dado.

Dessa forma, para calcular h, será necessário determinar a equação da reta AC. Conforme visto no tópico anterior, a equação será dada por $\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} =$

$$x \cdot y_1 + y \cdot x_3 + x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1 - x \cdot y_3 - y \cdot x_1 =$$

$$x \cdot (y_1 - y_3) + y \cdot (x_3 - x_1) + (x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1) = 0.$$

Portanto $h = \frac{|(y_1 - y_3) \cdot x_2 + (x_3 - x_1) \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1)|}{\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2}} =$

$$\frac{x_2 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_3 + y_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1}{\sqrt{(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2}} = \frac{1}{b} \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que a área do triângulo é dada pela função $\frac{b \cdot h}{2}$. Como $h = \frac{1}{b} \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$, então a área do triângulo pode ser dada por $\frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$.

3.4.7 WROSKIANO

De modo geral, as equações diferenciais estão definidas como equações cujas incógnitas equivalem à funções, suas variáveis dependentes e suas derivadas.

Partindo do pressuposto de que é possível calcular a solução de uma equação diferencial dada, temos que é possível determinar infinitas soluções que satisfaçam essa equação. Se duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ (deriváveis em um intervalo I) formam um conjunto linearmente independente então sua solução geral é dada pela combinação linear de ambas.

Para determinar se um conjunto de soluções é linearmente independente utilizamos o Wroskiano.

Por definição, o Wroskiano de $\{y_1(x), y_2(x)\}$ é dado por $W(y_1(x), y_2(x)) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$.

Se $\{y_1(x), y_2(x)\}$ corresponder a um conjunto linearmente dependente então

$$W(y_1(x), y_2(x)) = 0 \forall x \in I,$$

do contrário, $\{y_1(x), y_2(x)\}$ é um conjunto linearmente independente, isto é, existe

$$x_0 \in I / W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0.$$

3.4.8 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um escalar, o problema de autovalor corresponde a investigar a existência de vetores x não nulos tais que $A \cdot x = \lambda \cdot x$, isto é, determinar vetores x de forma que o produto $A \cdot x$ seja um múltiplo escalar de x. Nesse contexto, o escalar λ é chamado de autovalor e o vetor x é chamado de autovetor associado a λ.

Seja I a matriz identididade, resolver o sistema $A \cdot x = \lambda \cdot x$ é equivalente a resolver o sistema $(A-\lambda \cdot I)(x)=0$, pois

$$A \cdot x=\lambda \cdot x \Rightarrow A(x)=\lambda \cdot I(x) \Rightarrow A(x)-\lambda \cdot I(x)=0 \Rightarrow (A-\lambda \cdot I)(x)=0.$$

Se $\det(A-\lambda \cdot I) \neq 0$ então o sistema $(A-\lambda \cdot I)(x)=0$ possui solução única, de forma que o vetor x será nulo. Mas, por definição, x representa um vetor não nulo, portanto

$$\det(A-\lambda \cdot I)=0.$$

A expressão $\det(A-\lambda \cdot I)$ é chamada de "polinômio característico". Assim, para obter os autovalores basta encontrar as raízes do polinômio característico. Conhecidos os autovalores e substituindo-os, um a um, no sistema inicial dado é possível determinar os autovetores correspondentes.

3.4.9 DETERMINANTE JACOBIANO

A matriz Jacobiana representa a matriz cujos elementos correspondem às derivadas parciais de uma função vetorial. O Jacobiano está definido como o determinante da matriz Jacobiana, representando um importante papel nas mudanças de variáveis para resolução de integrais múltiplas.

Seja $x=f(u,v)$ e $y=g(u,v)$ então o Jacobiano de x e y em relação a u e v será denotado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}.$$

Considerando que x e y sejam uma transformação de coordenadas então o determinante mencionado pode auxiliar no cálculo de integrais duplas, pois a igualdade abaixo é válida:

$$\iint\limits_R F(x,y)dxdy=\pm\iint\limits_S F(f(u,v),g(u,v))\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$$

Exemplo 15. *As coordenadas polares estão definidas como*

$$x=r\cdot cos\theta$$

$$y=r\cdot sen\theta$$

Portanto, a Jacobiana das variáveis cartesianas para as coordenadas polares será definida por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} cos\theta & -r\cdot sen\theta \\ sen\theta & r\cdot cos\theta \end{bmatrix} = r.$$

Assim, em uma integral dupla é possível realizar uma mudança de variáveis obtendo uma integral mais simples de ser resolvida, por exemplo, para calcular a integral

$$\iint\limits_B sen(x^2+y^2)dx\,dy$$

onde B é o semicírculo $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. *Ao fazer a mudança de variáveis para coordenadas polares obtemos*

$$\iint\limits_B sen(x^2+y^2)dx\,dy = \iint\limits_{B_{r\theta}} r\cdot sen(r^2)dr\,d\theta,$$

onde $B_{r\theta} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. *Ou seja, obtemos a integral dupla*

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 r\cdot sen(r^2)dr\,d\theta$$

que é mais simples de ser resolvida.

4 LIVROS DIDÁTICOS

O papel do livro didático no processo de ensino e aprendizado se destaca quando o reconhecemos como uma fonte de informação acessível aos estudantes e um material de apoio para o professor exercer a sua função. Apesar de sua grande influência positiva sob discentes e docentes, “é preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos”(BRASIL, 1997), o que evidencia a importância de realizar uma análise de caráter crítico e reflexivo a cerca das abordagens e metodologias trazidas pelos materiais indicados, sempre levando em consideração o público com o qual se deseja trabalhar.

Ao decorrer do processo de maturação do estudo da matemática, é possível elencar três aspectos que devem ser enfatizados para propiciar um ambiente produtivo de aprendizado, são eles: a conceituação, manipulação e aplicação. Solidificando os três aspectos mencionados, é possível favorecer o ensino da matemática, promovendo a chamada “aprendizagem profunda”. “A aprendizagem profunda acontece quando os educandos buscam entender o significado do que estudam fazendo relação com os conhecimentos adquiridos anteriormente, buscando compreender e interagir com os mesmos”(BRITO, 2012), o que faz com que os conteúdos sejam mais significativos para os indivíduos envolvidos.

A conceituação consiste na apropriação de definições, proposições e conceitos, permitindo interpretar e estabelecer conexões coerentes entre elas, enquanto a manipulação possui um caráter mais “mecânico”, concentrando-se no “desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados”(LIMA, 2014), possibilitando que o estudante limite sua atenção aos aspectos mais cruciais de um conteúdo, tais como os procedimentos realizados para a resolução de um exercício. A aplicação representa a união entre a conceituação e manipulação, oportunizando empregar os conceitos estudados e manipulados em alguma finalidade.

Com os conceitos compreendidos, as formas de manipulação dominadas e as aplicações reconhecidas é possível garantir um bom desempenho matemático. Lima (2014) afirma que um professor dedicado deve organizar suas aulas procurando equilibrar os três aspectos indicados, de forma que se torna coerente analisar a conceituação, manipulação e as aplicações trazidas nos livros didáticos selecionados.

É importante salientar que as análises dos livros didáticos não possuem caráter vexatório. As observações realizadas objetivam estabelecer uma comparação entre os diferentes níveis de ensino e a elaboração de uma sequência didática capaz de complementar o estudo dos determinantes, explorando o uso das metodologias de ensino.

4.1 LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO MÉDIO

Conforme indicado pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica da Secretaria de Educação do Estado do Paraná de matemática o conteúdo de matrizes e determinantes deve ser discutido ao decorrer do Ensino Médio, normalmente pertencente ao conteúdo programático do 2º ano, de forma que, ao término do período escolar, esse aluno seja capaz de conceituar e interpretar matrizes e suas operações, além de conhecer e dominar o conceito e as soluções de problemas que se realizam por meio dos determinantes.

Além das indicações referentes ao currículo da educação básica, as DCEs indicam as abordagens pedagógicas adequadas para discorrer sobre cada um dos tópicos, evidenciando que "o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente"(PARANÁ, 2008), o que indica a necessidade de articulá-los entre si, se atentando também a conceituação e aplicação. É importante garantir que a matemática não seja encarada "como uma justaposição de campos (ou ramos) estanques, mas como um conjunto de conhecimentos com muitas conexões entre si".

Para auxiliar o trabalho dos professores temos os livros didáticos. Os livros "Matemática. Ciência, Linguagem e Tecnologia", de Jackson Ribeiro, "Novo Olhar: Matemática", de Joamir Souza, "Matemática Paiva", do Manuel Paiva e "Matemática Completa" de Giovanni e Bonjorno, correspondem aos exemplares selecionados para realizar uma análise reflexiva das abordagens referentes aos determinantes, evidenciando o apelo de cada livro às metodologias de ensino, história da matemática, linguagem e aspectos gráfico-editoriais, conceituação, manipulação e aplicação dos conceitos. Os quatro livros selecionados destinam-se ao 2º ano do Ensino Médio, tendo sido aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Todos os livros didáticos mencionados trazem algum viés histórico sobre o desenvolvimento das matrizes e determinantes, apontando os principais nomes envolvidos nesse processo de construção do conhecimento. De modo geral, os textos referentes a esse assunto não são longos ou enriquecidos com muitos detalhes, mas podem ser o suficiente para despertar curiosidade e desconstruir a ideia de que a matemática e seu desenvolvimento se deram de forma linear e sequencial, além de oferecer uma oportunidade para se trabalhar com a interpretação de texto, de forma interdisciplinar, estimulando atividades de pesquisa, leitura e escrita que dificilmente são associadas às aulas escolares de matemática. Explorando a história da matemática ainda é possível atrair os estudantes que têm pouca afeição aos números, valorizando as diferentes potencialidades de cada indivíduo.

O determinante é diretamente associado às matrizes em todas as literaturas listadas, à exceção de Paiva, que discorre sobre os determinantes pautado apenas sobre os sistemas de equações lineares. De forma muito contextualizada, os autores definem matriz relacionando-a a levantamento de dados, planilhas eletrônicas e a tabela periódica, trazendo informações significativas para os estudantes e propiciando, novamente, um estudo interdisciplinar. Ribeiro e Souza se destacam por trazerem textos ilustrativos que relacionam *pixels*, qualidade de imagem e matrizes, tópico muito pertinente levando em consideração o público muito ligado a questões tecnológicas. Souza ainda opta por investir em mais assuntos da atualidade, trabalhando com digitalização de imagem, criptografia, circuitos elétricos entre outros.

De modo geral, as estruturas dos livros coincidem. Após as contextualizações, os conteúdos tendem a ser contemplados de forma teórica, contendo exemplos, problemas resolvidos e propostas de exercícios de fixação, possuindo um caráter muito tradicional. Esse estilo tradicional, conforme é apontado pelo PNLD de 2015, "limita a participação do aluno no processo de sua aprendizagem". Em contrapartida, é possível identificar iniciativas significativas que amenizam essa limitação, como é o caso das atividades a serem feitas em grupo e textos reflexivos para leitura individual.

Outro aspecto dado como negativo pelo PNLD 2015 são as sistematizações pautadas com base em exemplos e procedimentos. Na obra de Souza, esse hábito é frequente, o que evidencia maior ênfase na manipulação dos conceitos do que na sua apropriação, atrapalhando os estudantes no desenvolvimento da sua abstração. Apesar dessa notoriedade, em seus exercícios, Souza convida constantemente o seu leitor a formular problemas em questões desafiadoras. Em suas atividades resolvidas há pequenas demonstrações de propriedades dos determinantes, aspecto esse que não foi identificado em nenhum outro livro selecionado, à exceção de Ribeiro, que contempla uma única e pequena demonstração provando que se uma matriz A é invertível, seu determinante é diferente de 0. Habitualmente, os autores optam por exemplificar em detrimento à demonstração, reforçando a manipulação dos conceitos de forma deliberada e investindo muitas páginas na repetição de técnicas mnemônicas para calcular determinantes.

Os quatro exemplares trazem uma miscelânea de linguagens, mesclando quadros, desenhos, tabelas, língua portuguesa e símbolos matemáticos, o que pode auxiliar os estudantes a desenvolver capacidade de se expressar matematicamente, auxiliando-os na capacidade de argumentação.

4.2 LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO SUPERIOR

A Álgebra Linear está inclusa nos currículos das graduações de áreas técnicas, como é o caso das Engenharias, Física, Matemática, Estatística e Computação. Seu conteúdo tende a ser contemplado após o estudo da Geometria Analítica, quando os estudantes já exercitaram sua familiaridade com a representação algébrica de noções geométricas. Dentre os componentes estudados pelos alunos universitários em questão, no curso de Álgebra Linear, temos os determinantes.

Para auxiliar o processo de aprendizagem da Álgebra Linear, contamos com os livros didáticos. Os livros "Álgebra Linear e Aplicações", dos autores Carlos Callioli, Hygino Domingues e Roberto Costa; "Álgebra Linear", de José Boldrini, Sueli Costa, Vera Figueiredo e Henry Wetzler; "Álgebra Linear", do Elon Lages Lima e "Teoria e problemas de álgebra linear", de Seymour Lipschutz e Marc Lipson, correspondem aos exemplares selecionados para realizar uma análise descritiva das abordagens referentes aos determinantes, evidenciando as diferenças entre os níveis de ensino básico e superior.

Os quatro livros selecionados possuem em comum um capítulo inteiramente destinado ao estudo dos determinantes. Em sua maioria, os livros possuem a mesma abordagem, dedicando seus primeiros capítulos aos sistemas lineares, matrizes e sua álgebra. Essa dinâmica sofre alterações quando analisamos o exemplar da autoria de Lima, que possui uma estrutura muito particular.

Assumindo a Álgebra Linear como o estudo de espaços vetoriais e suas transformações lineares, Elon Lima optou por iniciar o seu livro definindo espaço vetorial. A estrutura convencional, que inclui inicialmente uma discussão sobre sistemas lineares, representa uma motivação para a introdução das matrizes e determinantes, mas a filosofia de Lima não inclui muitas motivações, o que justifica a estrutura diferenciada de seu livro. Coerente à sua linha de raciocínio, Lima procura definir os determinantes de um operador sem fazer apelo ao conceito de matriz, definindo-o como uma função com características particulares. Os demais livros, definem o determinante utilizando artifícios semelhantes entre si, mas diferentes da abordagem trazida por Lima.

Em consonância, os autores restantes iniciam seus livros com uma longa discussão sobre os sistemas lineares, relacinando-os ao conceito de matriz. As definições de matriz apresentadas possuem um caráter abstrato, com notações e uma simbologia matematicamente carregada, havendo pouquíssimas exemplificações. O único livro que apresenta uma exemplificação contextualizada sobre do que se trata uma matriz é o da autoria de Boldrini et al, onde evidenciam a matriz como uma possível tabela de dados numéricos (altura, peso e idade de um grupo de pessoas, por exemplo).

Para alunos despreparados, o excesso de símbolos pode dificultar a compreensão de uma definição simples, pois “sem o desenvolvimento do domínio da linguagem necessária à apreensão de conceitos abstratos [...] não pode haver o desenvolvimento do pensamento matemático”(CURY, 2004). Pequenas dificuldades, quando somadas, corroboram os altos índices de evasão nos cursos da área de exatas. Cunha (2006) indica que a prioridade no nível de ensino superior gira em torno do domínio do conhecimento científico, enquanto o ensino básico tenta capacitar os alunos para o ingresso nas universidades e no mercado de trabalho. Os problemas surgem quando, na busca pelo domínio do conhecimento científico, “há pouca preocupação com os sujeitos da aprendizagem, sendo a lógica organizacional do conteúdo fator de maior importância no ensino”(OLIVEIRA, 2003), quando na verdade o aluno e sua compreensão são os agentes principais do processo de aprendizagem. É possível atribuir a ausência de exemplos contextualizados ao fato de se tratar de um conteúdo comumentemente estudado no Ensino Médio, de forma que espera-se que os estudantes já tenham um conhecimento prévio sobre o assunto e uma maior capacidade de abstração.

A simbologia em excesso não deve ser recriminada. Devido as falhas no processo de ensino básico, muitos estudantes chegam ao ensino superior sem um bom desenvolvimento da sua capacidade de abstração, dificultando a aprendizagem. Para auxiliá-los com suas defasagens, o professor pode optar por uma transição para o campo da abstração, explicando não só os conteúdos pertinentes como também a linguagem e notações utilizadas.

A motivação de Boldrini et al. para introduzir o conceito dos determinantes é a resolução de sistemas lineares. O capítulo destinado ao tópico inicia-se com um breve preâmbulo sobre o seu desenvolvimento histórico. As definições de permutação e inversão antecedem a definição de determinante, começando pelo caso 3×3 e terminando com a generalização para qualquer matriz quadrada. Definido o determinante para qualquer matriz de ordem n, o livro segue uma explanação sobre o desenvolvimento de Laplace, instrumentando os estudantes para calcular os determinantes desejados. Proficientes no cálculo, os determinantes ainda são utilizados para chegar a matriz dos cofatores e adjunta, dando informações sobre a possibilidade de existência de matrizes inversas e representando o principal ferramental necessário para utilizar a regra de Cramer e encontrar o posto de uma matriz. No exemplar em particular, as aplicabilidades do tópico limitam-se ao âmbito da matemática, evidenciando utilizações para os determinantes.

É possível perceber que os capítulos destinados ao estudo dos determinantes tendem a estar alocados no início dos livros didáticos, sendo discutidos tão logo após a definição de matriz, o que estabelece uma conexão entre os dois tópicos. Essa estrutura padrão não se repete no exemplar escrito por Lima. Enquanto Boldrini et al. introduzem os determinantes e o utilizam como ferramenta para resolver sistemas lineares e inverter matrizes, Lima só menciona esse conceito após discutir as melhores formas de se resolver um sistema linear e inverter matrizes, tornando os determinantes dispensáveis nesse contexto. Para Lima (2006), a principal utilidade dos determinantes na Álgebra Linear inclui o cálculo do polinômio característico de um operador, tópico matemático que está incluso apenas no currículo de cursos de nível superior, não constando, consequentemente, nos livros da educação básica aprovados pelo PNLD.

Apesar dos diferentes tipos de notações utilizados, em essência, os livros “Álgebra Linear e Aplicações” e “Teoria e problemas de álgebra linear” definem o determinante usufruindo dos mesmos artifícios utilizados por Boldrini et al.. Ambos definem permutação, auxiliando o estudante na identificação de uma permutação par ou ímpar, para posteriormente, com o ferramental dado, definir determinante.

A dinâmica de escrita utilizada por Seymour Lipschutz e Marc Lipson se destaca por ser a que mais se aproxima dos livros do Ensino Médio. Lipschutz e Lipson investem muitas páginas em observações e métodos mnemônicos para auxiliar no cálculo de um determinante, além de trazer aplicações um pouco mais contextualizadas (relacionando determinante e o volume de um sólido, por exemplo).

Além da discrepância na linguagem dos livros referentes aos diferentes níveis de ensino, é necessário salientar que os exemplares destinados ao ensino médio dão maior ênfase a manipulação dos conceitos, reforçando uma forma de raciocínio mecânica. O estímulo excessivo à manipulação durante a educação básica, gera problemas de transição ao estudante ao ingressar no curso de graduação, pois o desenvolvimento da capacidade de compreensão não foi adequadamente estimulado no início do processo de aprendizado matemático. Assim, as falhas do processo de ensino na educação básica influem diretamente na leitura que os estudantes universitários farão dos livros didáticos destinados ao ensino superior.

5 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

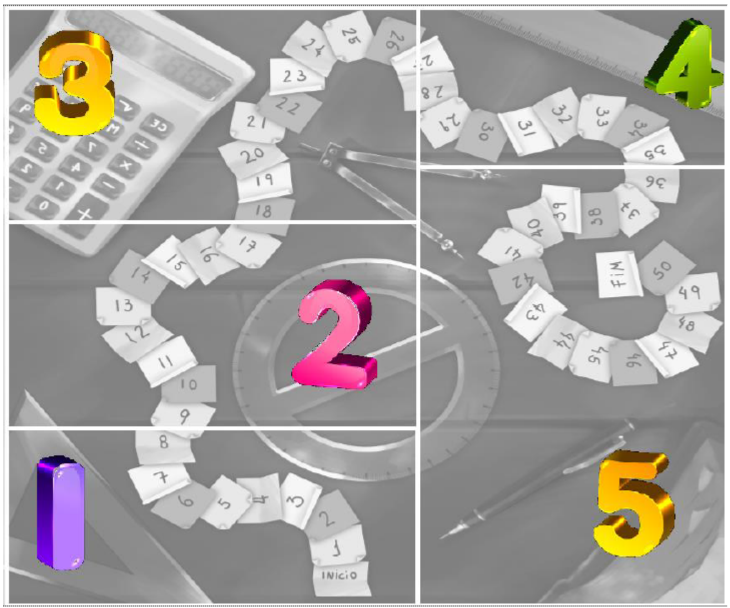
As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do estado do Paraná indicam que "a escola deve incentivar a prática pedagógica fundamentada em diferentes metodologias"(PARANÁ, 2008), evitando privilegiar uma única forma de aprender, ensinar e avaliar. Pensando na possível pluralidade existente em turmas de Ensino Médio e considerando a grande influência que a tecnologia exerce sob a geração em questão, foi elaborado um *quiz* interativo para reforçar a conceituação que alicerça o estudo e a compreensão dos determinantes.

Com um design colorido, optou-se pela criação de um Objeto Virtual de Aprendizado (OVA), explorando os recursos tecnológicos disponíveis e visando atrair a atenção dos estudantes para o tópico em questão. Definido como um artifício digital com fins pedagógicos, os OVAs oferecem aos docentes e discentes a oportunidade de explorar caminhos distintos, "acompanhar a evolução temporal das relações, verificar causa e efeito, criar e comprovar hipóteses, relacionar conceitos, despertar a curiosidade e resolver problemas, de forma atrativa e divertida, como uma brincadeira ou jogo"(GALLO; PINTO, 2010).

O uso de jogos e tecnologia como metodologia de ensino propiciam aos estudantes um ambiente de aprendizado diferenciando, estimulando-os de forma positiva. Entendendo a tecnologia como parte frequente do cotidiano de um indivíduo torna-se incoerente tentar privá-lo de seu uso ao decorrer dos momentos de aprendizado. "Já não é mais possível evitar que a evolução tecnológica chegue à sala de aula, o único caminho é descobrir como lidar com ela"(JULIANI, 2016). A utilização dos jogos como estratégia de ensino permitem a aplicação dos conceitos estudados pelo discente, "estimulando a sua criatividade num ambiente desafiador e ao mesmo tempo gerador de motivação"(BARBOSA; CARVALHO, 2009).

A partir da análise dos livros didáticos selecionados foram observados dois aspectos pouco enfatizados nos capítulos destinados ao estudo dos determinantes: sua história e a conceituação. É comum que a manipulação dos conceitos seja repetidamente reforçada e estimulada ao decorrer dos exercícios de fixação contidos em cada unidade dos livros didáticos, o que coloca em segundo plano a importância de compreender as definições e propriedades

Figura 5.1: A representação das 5 fases do jogo.



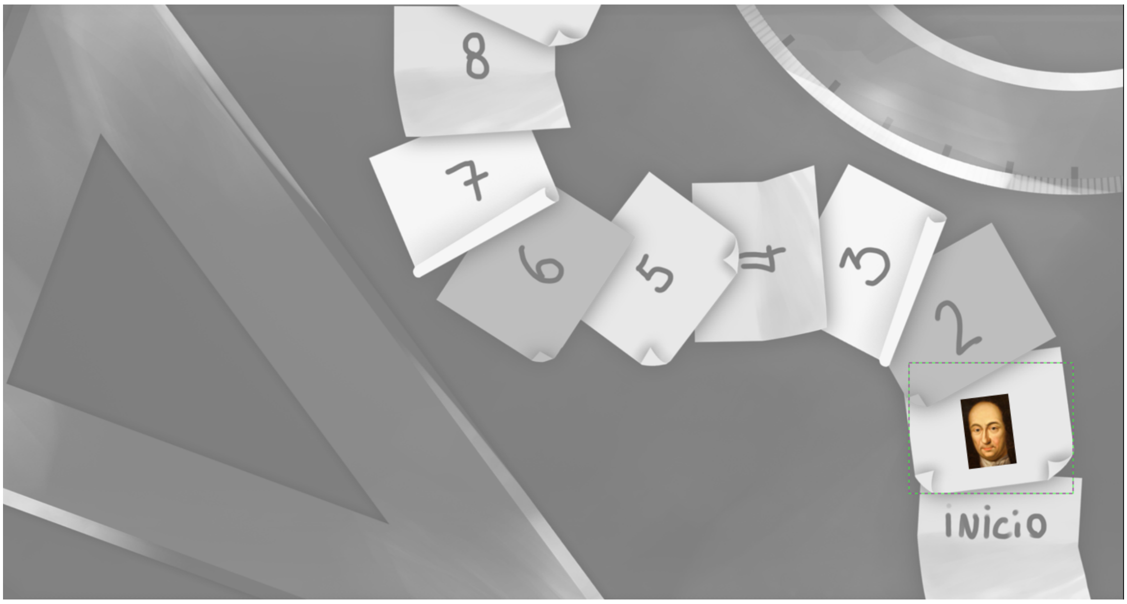
Fonte: elaborado pela autora

de cada conteúdo. Com base nessas observações, foi desenvolvido um jogo de perguntas e respostas, onde o teor das questões contidas no *quiz* virtual possuem maior ênfase na compreensão dos conceitos do que na manipulação, dando mais detalhes sobre o desevolvimento histórico dos determinantes. O uso da História da Matemática presente na construção do jogo auxilia os estudantes “na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos”(PARANÁ, 2008). Além de possibilitar “ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos”(PARANÁ, 2008).

As perguntas do *quiz* dividem-se em questões de verdadeiro ou falso e múltipla escolha, havendo questões extras com curiosidades sobre o desenvolvimento histórico dos determinantes. O jogo está dividido em 5 fases distintas e cada uma delas contêm em torno de 7 e 10 perguntas. Quando o estudante erra uma questão, ele é direcionado a uma mensagem de erro que indica a resposta correta e o conteúdo que deve ser revisado para que a apropriação do conceito seja concretizada. O objetivo não é quantificar erros e acertos ou reforçar os métodos para o cálculo de um determinante, mas sim atrair a atenção do público para os aspectos que estimulem a apropriação de conceitos. Conforme os discentes avançam no questionário virtual, o fundo temático torna-se colorido. Ao término de todas as fases o estudante pode contemplar a ilustração em sua totalidade de cores.

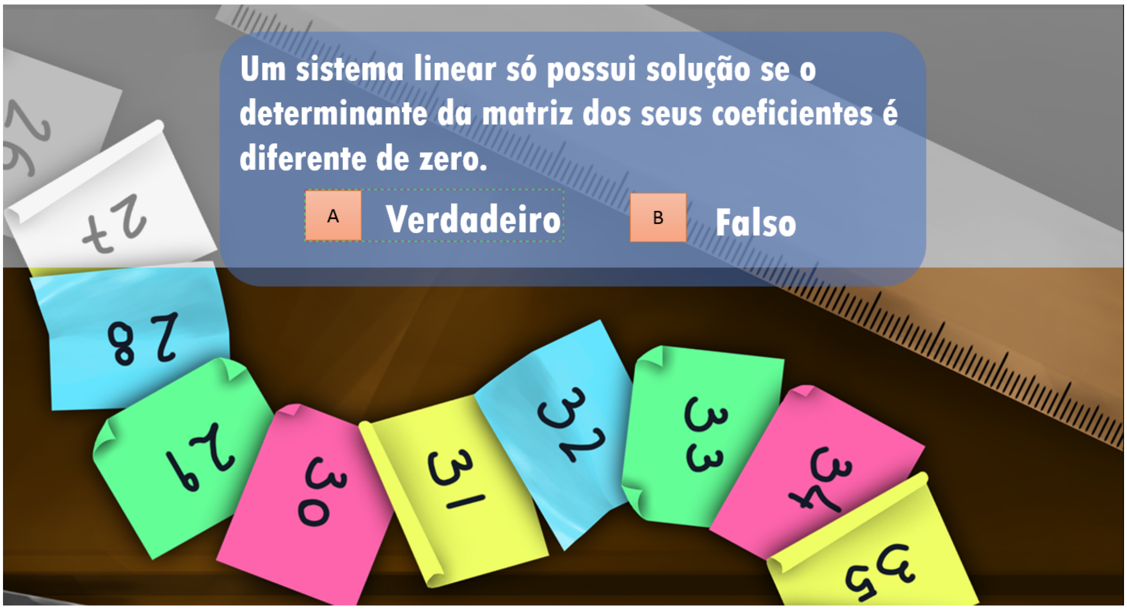
Recomenda-se que a aplicação do jogo aconteça após o estudo completo dos determinantes e suas propriedades, podendo anteceder uma avaliação cujas questões contempladas no

Figura 5.2: Cada numeração direciona o estudante para uma pergunta diferente.



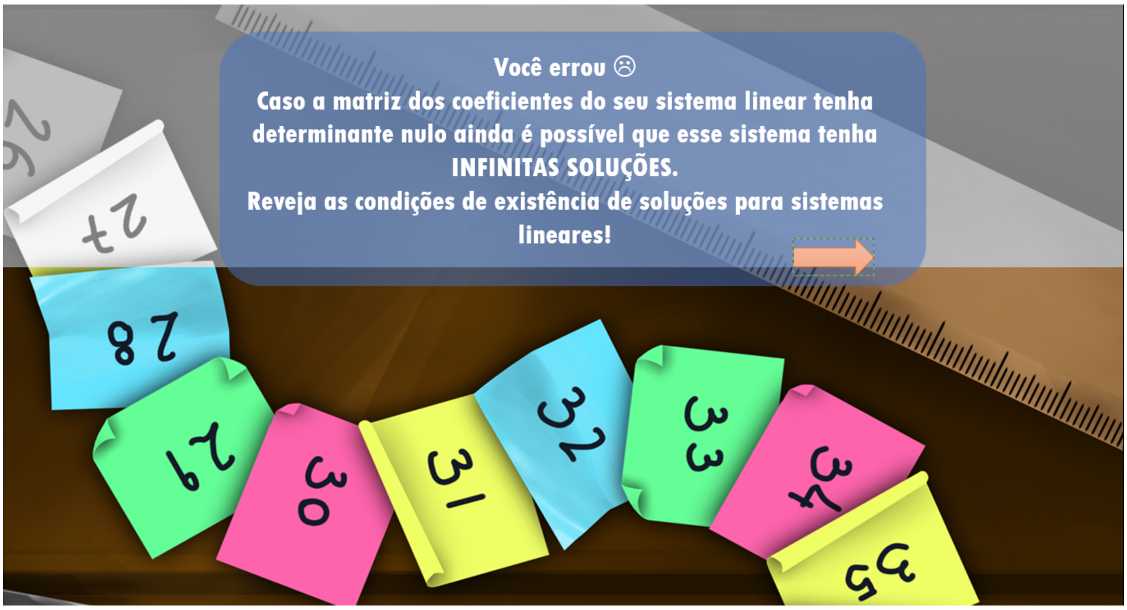
Fonte: elaborado pela autora

Figura 5.3: Exemplo de pergunta contida no jogo.



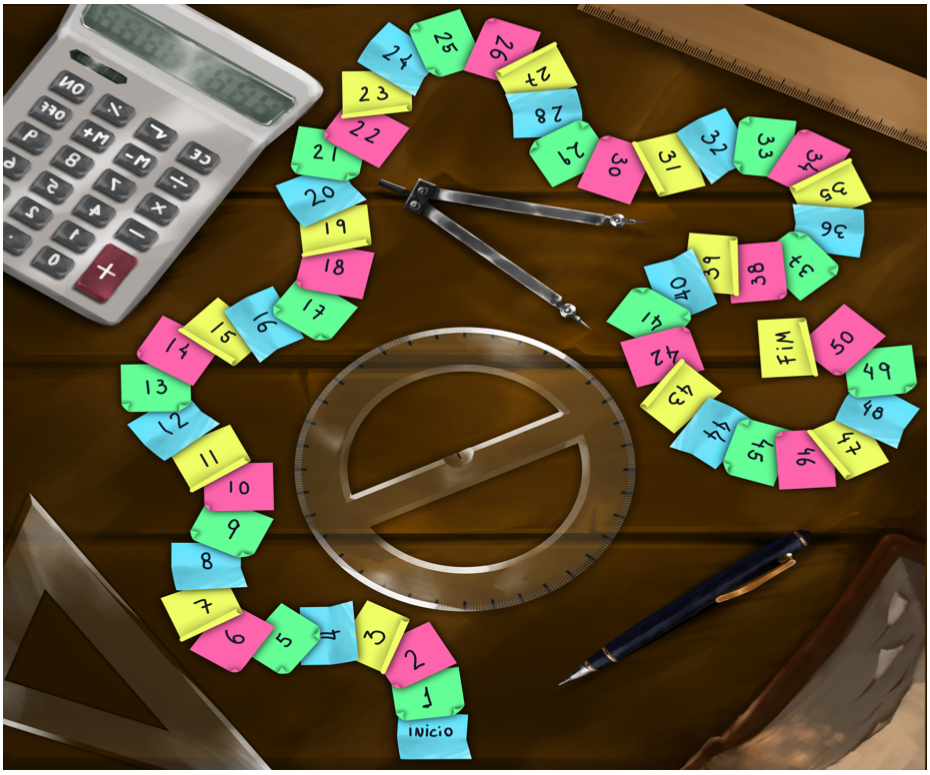
Fonte: elaborado pela autora

Figura 5.4: O aluno será redirecionado para uma página de erro caso erre a resposta.



Fonte: elaborado pela autora

Figura 5.5: Ao término das 5 fases o aluno pode visualizar todos os detalhes da imagem.



Fonte: elaborado pela autora

jogo podem pertencer ao rol de questões da avaliação.

O estudo dos determinantes pode ser iniciado solicitando um trabalho de pesquisa acerca dos matemáticos envolvidos no seu desenvolvimento histórico. O professor pode indicar os nomes que mais se destacam no campo dos determinantes, como é o caso de Leibniz, Laplace, Cramer, Sarrus e Binet. Peça que os estudantes pesquisem e escrevam sobre as contribuições de cada um dos nomes indicados, induzindo-os a perceber o processo gradual e conjunto de criação do conhecimento matemático. Solicite que as pesquisas sejam feitas em livros, indicando exemplares e locais onde é possível encontrá-los. O estímulo à leitura e produção de texto vão auxiliar os estudantes na interpretação futura de textos matemáticos e no aprimoramento da sua capacidade de argumentação.

Uma boa iniciativa para evitar que a matemática seja vista como uma união de tópicos isolados é estimular a percepção dos estudantes quanto às inumeras conexões que existem entre os conteúdos estudados ao decorrer de todos os anos escolares. Essa iniciativa pode ser feita quando entendemos o determinante como uma função, conteúdo contemplado ao longo do 1º ano do Ensino Médio. Ainda ao decorrer do 2º ano, os estudantes dedicam-se ao estudo da Análise Combinatória, abordando tópicos que envolvem diferentes tipos de permutação. Trabalhando com a permutação de índices é possível associar análise combinatória com o cálculo do determinante de matrizes de pequena ordem, como é o caso da 2×2 e 3×3, ampliando a visão dos discentes acerca dos conteúdos. No 3º ano do Ensino Médio, quando os alunos dedicam-se ao estudo da Geometria Analítica, o estudo dos determinantes pode ser retomado, evidenciando e possivelmente demonstrando suas aplicações ao determinar a equação geral e reduzida de uma reta, por exemplo.

É importante dedicar tempo do planejamento para o estudo de cada propriedade envolvendo os determinantes e aplicá-los em exercícios, fugindo da repetição das questões de fixação que contemplem apenas as mesmas aplicações. Estimule a percepção e a análise da matriz a qual deseja-se calcular o determinante, evitando que os estudantes entrem em modo automático, limitando o cálculo de um determinante apenas a regra de Sarrus e o desenvolvimento de Laplace. Auxilie-os a compreender as conexões entre os exercícios e as propriedades, estimulando a compreensão real dos conceitos. Como são poucas as propriedades estudadas no Ensino Médio, espera-se que em quatro aulas de 50 minutos os alunos já tenham contemplado todo o conteúdo envolvendo o tópico em questão.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os determinantes são estudados ao decorrer do 2º ano do Ensino Médio, possuindo aplicações em conteúdos da Geometria Analítica que fazem parte do currículo do 3º ano do Ensino Médio e de muitos cursos de nível superior. Seu estudo não exige grandes pré-requisitos e, de modo geral, as demonstrações de suas propriedades e aplicações não possuem um grau elevado de complexidade, podendo auxiliar os estudantes no desenvolvimento de seu raciocínio lógico, criticidade e capacidade de abstração. Omitir aplicações, assumir suas propriedades como verdadeiras e limitar o estudo dos determinantes à aplicação do Teorema de Laplace, das regras de Cramer e Sarrus em exercícios repetitivos de fixação corrobora em um processo de aprendizado pouco significativo, reforçando a ideia de que a matemática é uma ciência pronta, hermética e inútil. Essa prática, quando repetida a longo prazo, faz com que o estudante não desenvolva a capacidade de se questionar sobre a veracidade de fatos dados, além de tornar o ensino desgastante, ocasionando no desinteresse.

Para evitar as consequências negativas listadas, é necessário investir em uma prática educativa de qualidade, trabalhando no planejamento de aulas convidativas e coerente para o público em questão. O professor deve saber realizar a transposição didática de forma adequada, adaptando o conhecimento científico, evidenciando sua relevância e ajustando cada tópico às capacidades cognitivas do público, sem omitir informações que prejudiquem a compreensão dos conceitos. É importante explorar novas abordagens, materiais e interfaces para intermediar o conhecimento, portando-se como professor mediador.

REFERÊNCIAS

AXLER, S. Down with determinants! **American Mathematical Monthly**, 1994.

BARBOSA, S. L.; CARVALHO, T. O. de. **Jogos Matemáticos como Metodologia de Ensino Aprendizagem das Operações com Números Inteiros**. 2009. http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1948-8.pdf. Último acesso em 11/10/2018.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3ª. ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1980.

BOYER, C. B. **História da matemática, tradução Helena Castro**. São Paulo, SP: Bluncher, 2012.

BRASIL. **LDB - Lei de Diretrizes e Bases.** Brasília, DF: Lei 9394/96, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução.** Brasília: MEC/SEF: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, DF: Ministério da Educação. CNE/CEB, 1999.

BRASIL. **PNLD - Programa Nacional do Livro Didático**. Brasília, DF: Ministério da Educação. CNE/CEB, 2015.

BRITO, R. M. C. **O professor, a aprendizagem significativa e a avaliação: base para o sucesso escolar do aluno**. 2012. http://www.anpae.org.br/seminario/ANPAE2012/1comunicacao/Eixo03_38/Rosa20Maria20Cavalcanti20Brito_int_GT3.pdf. Último acesso em 27/08/2018.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6ª. ed. São Paulo: Atual Editora, 1990.

CUNHA, M. I. da. Diferentes olhares sobre as práticas pedagógicas no ensino superior: a docência e sua formação. **Educação**, v. 27, n. 3, 2006.

CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. 1. ed. Port Alegre: EDIPUCRS, 2004. 44–45 p.

EVES, H. **Introdução à história da matemática, tradução Hygino H. Domingues**. Campinas, SP: Edusp, 2011.

GALLO, P.; PINTO, M. das G. Professor, esse É o objeto virtual de aprendizagem. **Tecnologias na Educação**, v. 2, n. 1, 2010.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa 2º série**. São Paulo: Editora FTD, 2005.

GUINNESS, G. I. **Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences**. 1ª. ed. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University Press, 2003.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. de S. **Introdução à álgebra linear.** 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

JULIANI, T. A geraÇÃo z e a tecnologia na aprendizagem. **Revista CPB Educacional**, 2016.

KLEINER, I. **A History of Abstract Algebra**. Basel, Suiça: Birkhäuser, 2007.

LIMA, E. L. **Fundamentos para a análise dos livros texto de matemática para o Ensino Médio**. 2014. `http://www.ime.unicamp.br/~hqsaearp/Disciplinas/AnaliseLivros/Elon/`. Último acesso em 09/08/2018.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear: Teoria e Problemas**. 3ª. ed. São Paulo: Makron Books, 2004.

MARQUES, D. R. **Cálculo e aplicação de determinantes**. Fortaleza: [s.n.], 2014.

MONSORES, H. G. **Reconstruindo os determinantes**. Brasília: [s.n.], 2015.

OLIVEIRA, A. J. de. Aprender matemática no ensino superior: Desafios e superação. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, v. 3, n. 5, p. 94–103, 2003.

PAIVA, M. **Matemática Paiva. Volume 2.** 1ª. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares Estaduais para a Educação Básica: Matemática.** Paraná: Secretária de Educação do Estado do Paraná, 2008.

POOLE, D. **Álgebra Linear: uma introdução moderna**. 4ª. ed. São Paulo: Cengage, 2016.

RIBEIRO, J. **Matemática 2**. 1ª. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2012.

SOUZA, J. R. de. **Novo Olhar Matemática 2**. 2ª. ed. São Paulo: Editora FTD, 2013.

STOLL, R. R. **Linear Algebra and Matrix Theory**. New York: Dover Publications, 1952.

7 ANEXOS

O jogo desenvolvido para reforçar a conceituação dos aspectos envolvendo os determinantes possui em torno de 34 questões. São elas:

1.Somar duas linhas de uma matriz .... o seu determinante.

a) multiplica por -1

b) anula

c) não altera

d) dobra

2.É possível calcular o determinante de toda matrizes de ordem m x n?

3.As matrizes e os determinantes surgiram concomitantemente?

4.Os determinantes estão associados a todas as

a) matrizes quadradas

b) matrizes transpostas

c) matrizes inversíveis

d) matrizes colunas

5.A Regra de Cramer pode ser utilizada para resolver

a) qualquer sistema linear

b) sistemas lineares $m \times n$

c) sistemas não lineares

d) sistemas lineares $n \times n$

6.O determinante da matriz identidade é 1?

7.É impossível estudar determinantes de forma independente ao estudo de sistemas lineares?

8. O determinante de uma matriz nula é nulo?

9. Se as linhas de uma matriz são proporcionais, seu determinante é negativo?

10. A Regra de Cramer nos auxilia a

a) resolver sistemas lineares

b) calcular cofatores

c) calcular determinantes

d) calcular inversas

11. A Regra de Sarrus pode ser aplicada diretamente em matrizes de ordem

a) 3×3

b) $m \times n$

c) $n \times n$

d) 5×5

12. Quem foi o criador dos determinantes?

a) Leibniz

b) Gauss

c) Cramer

d) Laplace

13. O determinante da matriz $A = (a_{11})$ é igual a

a) 1

b) a_{11}

c) 0

d) $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

14. O cofator de um número é sempre positivo?

15. Os cofatores são fundamentais para aplicar

a) Teorema de Laplace

b) Regra de Sarrus

c) Regra de Cramer

d) Nenhuma das opções

16. Para calcular o determinante de uma matriz de ordem $n > 3$ é necessário saber calcular o determinante de uma matriz de ordem $n1$?

17. O Teorema de Laplace pode ser aplicado a partir de qualquer linha ou coluna de uma matriz?

18. O determinante de uma matriz é o dobro do determinante da sua transposta?

19. Não existem determinantes negativos?

20. Se as linhas de uma matriz são iguais então seu determinante é nulo?

21. Para calcular o determinante da matriz $?A^{?1}$ é necessário conhecê-la?

22. O determinante da matriz identidade é igual independente da sua ordem?

23. O determinante do produto é o produto dos determinantes.

24. O determinante de uma matriz triangular é nulo?

25. O determinante de uma matriz quadrada qualquer é o produto dos elementos da sua diagonal principal?

26. Um sistema linear só possui solução se o determinante da matriz dos seus coeficientes é diferente de zero?

27. Se o determinante de uma matriz de coeficientes é nulo então o sistema linear associado não tem solução?

28. Sistemas lineares homogêneos possuem solução independente do determinante associado a matriz de seus coeficientes?

29. O sinal do cofator de um elemento é determinado pela posição desse elemento na matriz?

30. Ao multiplicar a coluna de uma matriz por um número k, seu determinante torna-se um múltiplo de k?

31. O determinante de uma matriz é dado pela diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária?

32. Se a matriz C foi obtida ao permutar duas colunas da matriz B é correto afirmar que o determinante de B e C são iguais?

33. A função determinante é injetiva?

34. Se o determinante de uma matriz de coeficientes é nulo então o sistema linear associado possui solução indeterminada?

Para conduzir adequadamente a experiência oferecida pelo OVA produzido foi desenvolvido um pequeno manual orientador para os estudantes que possivelmente se utilizarão desse recurso:

“Seja bem vindo! Você está prestes a testar os seus conhecimentos acerca dos determinantes! Revise as particularidades da função determinante e todas as propriedades estudadas. Leia as perguntas com atenção e responda-as corretamente. Caso você responda erroneamente uma questão dada, não se preocupe! Estude o conteúdo indicado e recupere o tempo perdido!”